

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

GPS



Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Pavla Kouřilová, Ph.D.**

Vypracoval(a): **Jitka Světlíková**

Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika

Studijní obor Matematika–ekonomie se zaměřením na bankovníctví

Forma studia: prezenční

Rok odevzdání: 2016

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Jitka Světlíková

Název práce: GPS

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: Mgr. Pavla Kouřilová, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2016

Abstrakt: GPS je navigační polohový systém využíván v mnoha oblastech lidské činnosti. Skládá se z družic obíhajících Zemi, které vysílají signály. Pomocí těchto signálů lze určit polohu uživatele kdekoli na povrchu Země, na moři, ve vzduchu i blízkém kosmickém prostoru. Cílem mé práce je nastínit princip navigace pomocí GPS. Na konci práce se zabývám novým evropským systémem Galileo.

Klíčová slova: GPS, Globální polohový systém, výpočet souřadnic, Galileo

Počet stran: 40

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Jitka Světlíková

Title: GPS

Type of thesis: Bachelor's

Department:

Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: Mgr. Pavla Kouřilová, Ph.D.

The year of presentation: 2016

Abstract: GPS is a navigation position system, which is used in many fields of human activity. GPS consists of satellites which orbit the Earth and transmit signals. By using these signals can be identified the user's location anywhere on the Earth's surface, on the sea, in the air, in the Outer Space. The aim of my bachelor thesis is describe the principle of navigation by GPS. At the end of my thesis I'm writing about a new european Galileo system.

Key words: GPS, Global position system, calculate the coordinates, Galileo

Number of pages: 40

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením paní Mgr. Pavle Kouřilové, Ph.D. a že jsem v literatuře uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne

.....

podpis

Obsah

1	Co to je GPS?	8
2	Historie GPS	11
3	Struktura GPS	14
3.1	Kosmický segment	14
3.2	Řídící segment	16
3.3	Uživatelský segment	18
4	Výpočet polohy	20
4.1	Modelový příklad 2D trilaterace	21
4.2	Matematické vyjádření 2D trilaterace	22
4.3	3D trilaterace	24
4.4	Převodní vztah z kartézských souřadnic na geografické souřadnice	29
5	Galileo	34
5.1	Struktura systému Galileo	34
5.2	Služby	36
	Literatura	39

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1: Dostupnost GPS signálu	7
Obrázek 2: Rozmístění družic na orbitalech	11
Obrázek 3: Rozmístění stanic řídicího segmentu po Zemi	13
Obrázek 4: Komunikace mezi jednotlivými segmenty	14
Obrázek 5: Kružnice se středem v Brně a poloměrem 62 km	17
Obrázek 6: Protnutí dvou kružnic se středy v Brně a Zlíně	17
Obrázek 7: Protnutí tří kružnic se středy v jednotlivých městech	17
Obrázek 8: Grafické znázornění trilaterace	18
Obrázek 9: Sféry sestrojené kolem družic	20
Obrázek 10: Protnutí tří sfér sestrojených kolem družic	20
Obrázek 11: Určení polohy	21
Obrázek 12: Kartézské a geodetické souřadnice	25
Obrázek 13: Zobrazení bodu P a jeho průmět do geodetického rovníku	26
Obrázek 14: Orbitaly systému Galileo	29

Úvod

System GPS je zatím nejmodernější metodou pro určení polohy a rychlosti pohybu uživatele kdekoliv na Zemi. Primárně byl vytvořen americkým vojenským sektorem. Po zpřístupnění systému GPS pro civilní sektor došlo k rozsáhlému komerčnímu využití této technologie. Rozšiřuje se jeho využitelnost do mnoha oborů lidské činnosti, to je dáno postojem k bezplatnému využití navigace.

Principem práce je seznámit se se základními principy, které se používají při navigaci pomocí GPS a nastínit systém Galileo. Téma této práce mne zaujalo z důvodu bližšího seznámení s principem zjištění polohy pomocí navigačních systémů, protože asi každý využívá možnost navigace v dopravě.

V prvních kapitolách mé práce se věnuji základním principům GPS, jeho postupnou historií a strukturou. Kapitola 4 VÝPOČET POLOHY patří mezi nejdůležitější z celé práce, kde se zabývám modelovými příklady, principem výpočtu polohy uživatele a převodu souřadnic z kartézské soustavy do geodetické soustavy. Poslední kapitola je věnována nově vznikajícímu systému Galileo a jeho srovnáním se systémem GPS. Přečtení této práce by mělo čtenáři přiblížit princip určování polohy uživatele z dat, které vysílají družice systému GPS.

1 Co to je GPS?

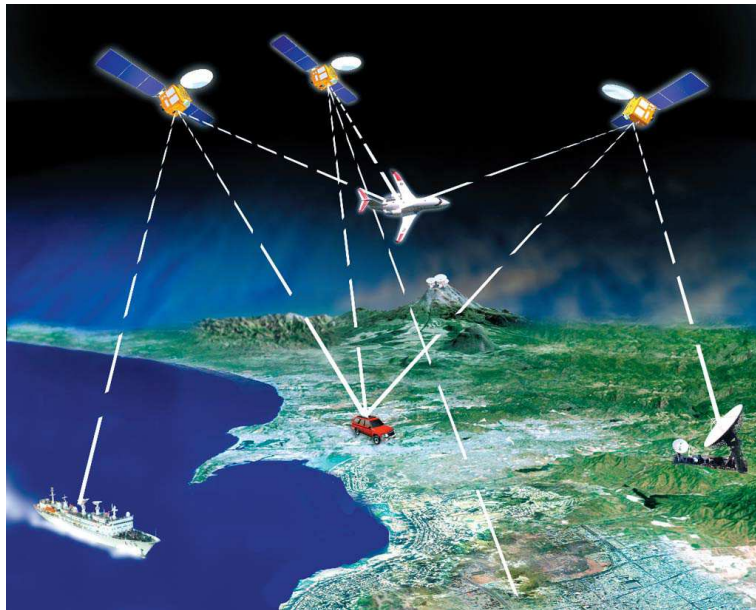
V první kapitole mé práce vysvětluji co si pod pojmem GPS představit, za jakým účelem vznikla, pro koho byla a je určena. Zmiňuji se zde i o jiných navigačních systémech. Pro tuto kapitolu jsem pracovala s literaturou [2], [4], [5], [9] a [11].

System GPS (Global Positioning System), neboli Globální polohový systém je vojenský navigační družicový systém. GPS provozuje ministerstvo obrany Spojených Států Amerických. Můžeme se setkat i s názvem NAVSTAR (NAVigation System with Time And Ranging), který byl formální název při schvalování celého projektu.

System GPS byl původně vyvíjen pro navigaci rychle se pohybujících objektů jako jsou letadla, řízené střely, kosmické objekty, atd. V současné době se využívá v mnoha oblastech lidské činnosti. Ročně je na jeho provoz vynaloženo přibližně 600–900 miliónů amerických dolarů z rozpočtu USA.

GPS je vlastně systém družic obíhajících Zemi, které vysílají signály. Družice zajišťují celosvětové pokrytí signálem, který je dostupný kdekoli na povrchu Země, na moři, ve vzduchu i v blízkém kosmickém prostoru.

Při výpočtu souřadnic se používá geocentrický souřadný systém WGS-84 (World Geodetic System), tj. světový geodetický systém z roku 1984. Poskytuje údaje o poloze uživatele ve tvaru zeměpisné délky a šířky a je jednotný pro celou Zemi.



Obr. 1: Dostupnost GPS signálu

Zdroj: <http://www.solarracing.org/2013/10/05/solar-car-live-gps-trackers/>

Výhodou systému GPS je, že uživatelé této služby používají malé elektronické rádiové přijímače, které umí ze signálu družic vypočítat polohu, rychlost a čas uživatele s přesností na desítky až jednotky metrů. Přesnost určení polohy se může zvýšit na jednotky centimetrů, ale tato služba je zpřístupněna pouze pro uživatele s licenci, jako jsou armáda USA a armády NATO.

Nevýhodou, které tento systém obnáší je, že nelze určit polohu v podzemí a v budovách. Signál se zhorší v husté zástavbě nebo porostu, protože mezi GPS přijímačem a družicemi je nutná přímá viditelnost.

Americký systém GPS není jediný navigační systém, mezi jeho největší „konkurenty“ se řadí ruský GLONASS a evropský Galileo. Navigačním systémem Galileo se budu zabývat v kapitole 5.

Sovětský svaz začal v 80. letech 20. století budovat navigační systém nesoucí název GLONASS (GLObalnaja NAVigacionnaja Sputnikova Sistema). Princip systému GLONASS je velmi podobný systému GPS. Největším rozdílem je, že družice systému GLONASS vysílají stejné pseudokódy na odlišných frekvencích, zatímco družice GPS vysílají odlišné pseudokódy na stejné frekvenci. Rozpad So-

větského svazu v roce 1991 se promítl i do technických oblastí a kvalita systému GLONASS začala upadat. V roce 2002 bylo v provozu jen 8 družic z operačního počtu 24 družic. V roce 2003 se Rusko rozhodlo opět zprovoznit systém GLONASS, plného operačního stavu dosáhl v roce 2010.

2 Historie GPS

Druhá kapitola popisuje historii vzniku systému GPS. Co předcházelo vzniku GPS a její postupný rozvoj až do současnosti. Informace k této kapitole jsem čerpala z literatury [1], [4], [6], [8], [15] a [16].

Na počátku rádiové navigace se pro určování polohy využívalo rádiových majáků umístěných na zemském povrchu. Tento rádiový systém, zvaný LORAN, byl vyvinut počátkem čtyřicátých let 20. století a byl využíván již během 2. světové války, a to především letectvem a námořnictvem.

První družicový navigační systém se nazýval TRANSIT. V roce 1960 začalo umísťovat družice do vesmíru vojenské námořnictvo Spojených států. Hlavním úkolem bylo určování polohy plavidel. TRANSIT tvořilo 6 družic, které se pohybovaly na oběžných drahách ve výšce 1 100 km s oběžnou dobou 106 minut. Největší slabinou tohoto systému bylo, že signál nebyl dostupný nepřetržitě. Družici bylo možno zachytit nad obzorem maximálně 18 minut a další prolétla nad daným místem za 2 hodiny. Získané souřadnice byly pouze dvourozměrné, a proto se nemohla navigace využívat v letectví.

Hlavním důvodem vzniku GPS byla v 60. letech snaha USA o přesné zaměření polohy jaderných ponorek. Vznik satelitního navigačního systému se datuje do druhé poloviny 20. století. Dne 17. 12. 1973 obdržela JPO (Joint Program Office) souhlas se zahájením projektu s oficiálním názvem NAVSTAR - GPS. Práce na tomto projektu byla rozdělena do tří fází.

První fáze (1973–1979)

Tato fáze, která probíhala v letech 1973–1979, byla zaměřena na ověření funkčnosti systému. Prováděly se testy na pozemních stanicích a byl zkonstruován první GPS přijímač. Pozemní stanice byly rozmístěny v testovacím armádním polygonu v Arizoně.

První družice, kterou vyrobila firma Rockwell, byla vypuštěna na oběžnou dráhu 22. 2. 1978. V prosinci stejného roku byly vypuštěny další 4 družice, které

již umožňovaly třírozměrnou navigaci, ale pouze po omezenou dobu a pouze nad polygonem v Arizoně. Družicím, které byly vypuštěny v této fázi se říká družice bloku I, celkem jich v této fázi bylo vypuštěno 11 s plánovanou životností 3 roky, ale některé z družic sloužily i 10 let.

Druhá fáze (1979–1985)

Řídící segment se nejvíce rozvíjel mezi lety 1979–1985, byla vybudována hlavní řídicí střediska. Firma Rockwell byla vybrána na vývoj dalších 28 družic bloku II. Testování celého systému GPS probíhalo na polygonu v Arizoně a rozšířilo se i na námořní operace.

Dne 26. 4. 1980 byla vypuštěna první družice, která obsahovala senzory pro odhalení jaderných výbuchů, protože USA a SSSR uzavřeli dohodu o zákazu jaderných testů. V roce 1983 americký prezident Ronald Regan oznámil, že po dokončení celého systému GPS bude signál přístupný i pro civilní navigační účely. Toto rozhodnutí učinil na základě nehody, kdy sovětský stíhač sestřelil civilní dopravní letadlo a zahynulo všech 269 lidí.

Třetí fáze (1985–1994)

Firma Trimble představila v roce 1985 první GPS přijímač pro námořní dopravu. V této fázi družice bloku II začaly doplňovat a později nahrazovat družice bloku I. V únoru roku 1989 byla vypuštěna první družice bloku II. V roce 1990 se začaly vypouštět družice bloku IIA s lepší pamětí a mohly přejít do tzv. autonomního navigačního módu (tj. dokáží pracovat 108 dní bez komunikace s řídicím segmentem). Životnost družic bloku II a bloku IIA byla plánovaná na 7,5 roku. V červnu 1989 byl uzavřen s firmou General Electrics kontrakt na výrobu družic bloku IIR, které dokáží pracovat až 180 dní v autonomním navigačním módu, jsou schopny mezi sebou komunikovat a měly plánovanou životnost až 10 let.

Zlepšování systému vedlo k tomu, že počátkem roku 1993 bylo možné třírozměrné určení polohy v libovolném bodě na Zemi po dobu 24 hodin. Dne 8. 12. 1993, bylo vypuštěno 30 družic a dosáhlo se počátečního operačního stavu celého systému GPS. 3. 3. 1994 bylo dosaženo plného operačního stavu, kdy v provozu

bylo 24 družic bloku II a systém byl po dokončení zkoušek uveden do činnosti.

Systém GPS nabízí dvě služby: standardní službu navigace SPS (Standard Positioning Service) a přesnou službu navigace PPS (Precision Positioning Service). Služba SPS je tzv. civilní služba, která je přístupná všem uživatelům. Služba PPS je vojenská služba, určena pouze uživatelům s licenci.

Od doby uvedení do plného operačního stavu je systém GPS neustále v provozu. Přitom jsou budovány další doplňkové služby systému GPS a zdokonalují se technické i provozní služby. V letech 1997–2009 byly vypouštěny na oběžnou dráhu družice bloku IIR, které mají zvýšenou protiradiační ochranu a zdokonalenou autonomii. Od roku 2010 existují družice bloku IIF, které mají tvar kvádrů a obsahují solární panely jako zdroj energie. Do budoucna se diskutuje o družicích bloku III.

3 Struktura GPS

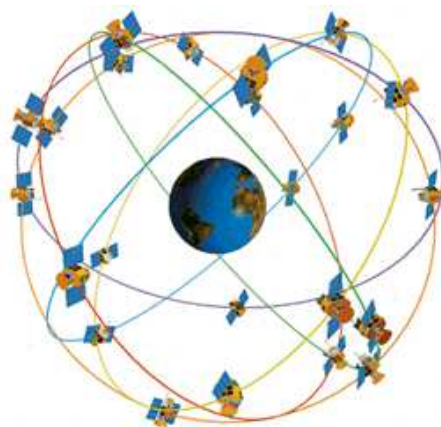
V této kapitole vysvětluji strukturu celého systému GPS. Nejprve systém rozdělují na jednotlivé segmenty a ty následně blíže popisují. Pro vypracování této kapitoly jsem použila literaturu [1], [3], [4], [5] a [15].

Systém GPS lze rozdělit do 3 segmentů:

- kosmický segment
- řídicí segment
- uživatelský segment

3.1 Kosmický segment

Kosmický segment tvoří družice, které jsou ve výšce 20 200 km od Zemského povrchu a pohybují se rychlostí 11 300 km/h. Okolo Země obíhá 24 aktivních družic a 3 záložní družice. Jsou umístěné na šesti oběžných drahách okolo Země, zvané orbitaly, které jsou kruhového tvaru a s rovníkem svírají 55° . Doba, za kterou družice oběhne Zemi, je asi 11 hodin a 58 minut. Družice jsou rozmístěny na orbitalech, tak abychom mohli vidět minimálně 4 družice z jakéhokoliv místa na Zemi.



Obr. 2: Rozmístění družic na orbitalech

Zdroj: <http://hp.ujf.cas.cz/wagner/popclan/gps/gps.html>

Družice

Každá družice obsahuje přijímač, vysílač, velmi přesné atomové hodiny, procesory a řadu přístrojů, které slouží nejen k navigaci, ale také k detekci balistických raket a jaderných výbuchů. Přijímají, zpracovávají a uchovávají informace z pozemních stanic. Tzv. srdcem družice jsou 3–4 atomové hodiny, které jsou velmi přesné a velmi nákladné. Jedny váží víc jak 20 kg, stojí okolo 50 000 USD a jejich přesnost je velmi důležitá. Jedna biliontina sekundy nepřesnosti satelitních hodin způsobí v měřené délce od přijímače k satelitu chybu 30 cm. Z tohoto důvodu jsou satelity vybaveny velmi přesnými atomovými hodinami. Přesto tyto hodiny jsou proto monitorovány pozemními stanicemi a srovnávány s hlavním řídicím hodinovým systémem, který je tvořen více jak deseti velmi přesnými atomovými hodinami.

Signál družic

Družice vysílají k Zemi signály 24 h denně. Signál je elektromagnetické vlnění, které se šíří rychlostí světla, je přenášen na pěti frekvencích, nezávislých na denní i roční době a na počasí.

- L1 — tato frekvence je s kmitočtem 1 575,42 MHz a moduluje C/A-kód, který je vyhrazen neautorizovaným uživatelům a P-kód, který je zašifrován a zpřístupněn pouze autorizovaným uživatelům (vojenské armády NATO). Družice vypuštěné v letech 2005–2009 jsou připraveny vysílat vojenský M-kód.
- L2 — frekvence s kmitočtem 1 227,60 MHz a moduluje P-kód. Družice vypuštěné v letech 2005–2009 jsou připraveny vysílat i vojenský M-kód a civilní C-kód.
- L3 — frekvence s kmitočtem 1 381,05 MHz, kterou vysílají družice vypuštěné v letech 1997–2004, slouží k monitorování startů balistických raket, detekci jaderných výbuchů a dalších vysokoenergetických zdrojů.
- L4 — frekvence s kmitočtem 1 841,40 MHz měřící zpoždění signálu při průchodu ionosférou.

- L5 — frekvence s kmitočtem 1 176,45 MHz, přenáší družice vypuštěné v letech 2010–2012 a slouží pro bezpečnost letecké dopravy. Umožňují určování polohy s vysokou přesností i v oblastech s omezeným anebo slabým příjmem signálu.

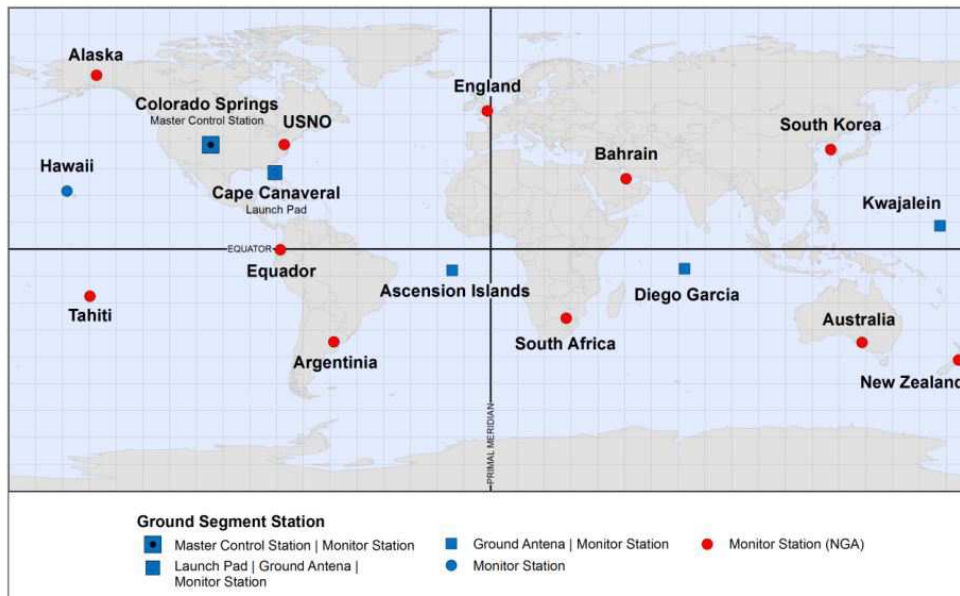
Kódy, které modulují jednotlivé frekvence se nazývají pseudonáhodné kódy a jsou pro každou družici unikátní.

Družicové signály obsahují i tzv. navigační zprávu, která obsahuje data o dané družici jako je časové odvysílání zprávy, stav družice, dráha družice a i data o ostatních družicích, např. polohy družic na jednotlivých orbitalech a informace o kódech ostatních družic. Z této navigační zprávy je GPS přijímač schopen určit svoji polohu.

3.2 Řídící segment

Řídící segment se skládá z pozemních stanic, které jsou rozmístěny podél rovníku. Tyto pozemní stanice lze rozdělit na 3 typy:

- hlavní řídicí stanice MCS (Master Control Station) v Coloradu a záložní hlavní řídicí stanice BMCS (Backup Master Control Station)
- 4 pozemní vysílače GA (Ground Antennas)
- síť globálně rozmístěných monitorovacích stanic MS (Monitor Stations)

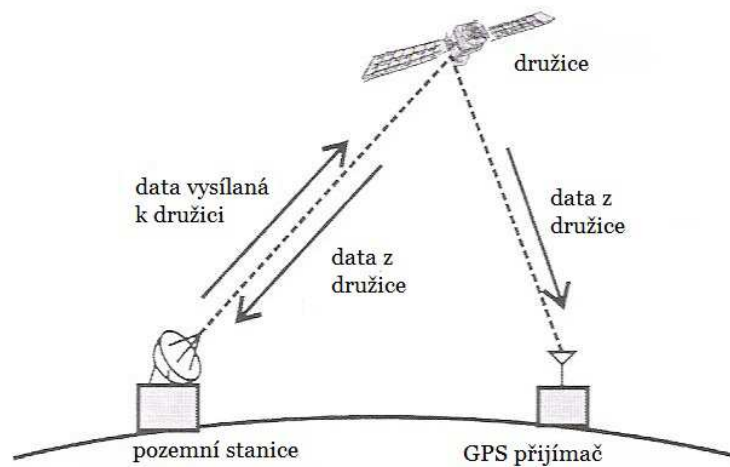


Obr. 3: Rozmístění stanic řídicího segmentu po Zemi

Zdroj: [10]

Úkolem řídicího segmentu je monitorování každé družice, jejich poloha, technický stav, výpočet dráhy a zajištění přesného času atomových hodin. Tento segment se stará i o provozní stránku celého projektu, udržuje stávající družice a podílí se i na vypouštění nových družic do vesmíru.

Řídící stanice vyhodnocuje chování družic na oběžných drahách a vypočítává korekci. Při průletu družice nad řídicí stanicí vysílá družice svá data řídicí stanici. Stanice zkontroluje a opraví data a vysílá je zpět do dané družice a odtud jsou vysílány data do přijímače. Tuto komunikaci mezi jednotlivými segmenty znázorňuje obrázek 4.



Obr. 4: Komunikace mezi jednotlivými segmenty

Zdroj: [4]

3.3 Uživatelský segment

Skládá se z GPS přijímačů jednotlivých uživatelů. Přijímač GPS je tvořen anténou, radiofrekvenční jednotkou, mikroprocesorem, komunikační jednotkou, pamětí a zdrojem napětí.

GPS přijímač je zařízení pro příjem a zpracování signálu z družic, z kterých získávají informace o poloze přijímače, čase a rychlosti pohybu GPS přijímače. Přijímače nejsou vybaveny atomovými hodinami jako družice, a to může vést, také k chybě při určování polohy na Zemi. Chyba „levných“ hodin v GPS přijímači se odstraňuje početně. Ve výpočtu hledané polohy budou 4 neznámé, tři pro polohu (x, y, z) a čtvrtá neznámá bude chyba hodin GPS přijímače.

GPS přijímače lze rozdělit podle několika kritérií:

- podle počtu přijímaných kanálů:
 - jednokanálový přijímač — dokáže zachytit a zpracovat signál pouze z jedné družice, po získání informace z jedné družice se přijímač přepne na druhou družici
 - vícekanálový přijímač — každá družice má svůj kanál, a proto tento přijímač může přijmout a zpracovat signál z více družic najednou

- hybridní přijímač — je vybaven více kanály, ale ne v takovém množství jako u vícekanálových přijímačů a proto je nucen přepínat mezi jednotlivými signály z družic
- podle počtu přijímaných frekvencí:
 - jednofrekvenční — přijímají signál pouze z jedné frekvence
 - dvoufrekvenční — mohou přijímat signál z obou frekvencí L1 a L2
- podle použití:
 - vojenský sektor:
 - * podpora a velení vojska
 - * doprava
 - * navádění zbraní
 - * vojenská geodézie a mapování
 - * přesný čas
 - civilní sektor:
 - * doprava (pozemní, letecká, námořní)
 - * geologie a geofyzika
 - * geodézie a geografické systémy
 - * archeologie
 - * lesnictví a zemědělství
 - * turistika a zábava
 - * přesný čas

4 Výpočet polohy

V rámci následující kapitoly se zabývám kódovým měřením a výpočtem polohy GPS přijímače. Pro názornost zmiňuji modelový příklad 2D trilaterace, která je základem pro 3D trilateraci. Na konci kapitoly uvádím rovnice pro přepočtení kartézských souřadnic na geodetické souřadnice. K vypracování této kapitoly jsem čerpala z literatury [2], [4], [5], [7], [8], [10], [15], [18] a [19].

Polohu lze měřit dvěma způsoby. Kódové měření, které se využívá převážně v turistické navigaci, navigaci aut a navigaci v mobilních telefonech. Tímto způsobem měření je poloha vypočtena s přesností na metry. Fázové měření, které se využívá především v geodézii, vypočítá polohu s přesností na centimetry. Dále se budu zabývat kódovým měřením, protože toto měření se využívá u většiny dostupnějších přístrojů.

Výpočet polohy GPS přijímače je založen na naměřených vzdálenostech družic od GPS přijímače. Pseudonáhodné kódy umožňují měřit čas vysláním signálu z družice a přijetí signálu GPS přijímačem. Označme si t_i čas, kdy byl signál vyslán i -tou družicí a t čas, ve kterém byl signál přijat GPS přijímačem. Potom pro časové zpoždění signálu z i -té družice platí vztah:

$$\tau_i = t - t_i \quad (4.1)$$

Pro výpočet vzdálenosti mezi družicí a GPS přijímačem vynásobíme časové zpoždění signálu rychlostí šíření elektromagnetické vlny, která je stejná jako rychlost světla (asi 300 000 m/s):

$$d_i = c \cdot \tau_i \quad (4.2)$$

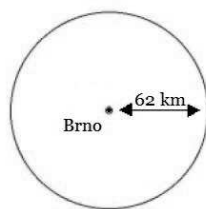
kde c je rychlost šíření signálu,

τ_i je časové zpoždění signálu i -té družice,

d_i je vzdálenost mezi i -tou družicí a uživatelem.

4.1 Modelový příklad 2D trilaterace

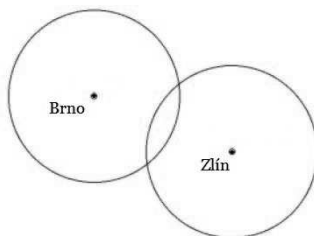
Nacházíme se někde na Zemi, jsme ztraceni a chceme zjistit svoji polohu. Ptáme se kolemjdoucích kde se nacházíme. První kolemjdoucí nám řekne, že jsme 62 km od Brna. Tato informace nám moc o naší poloze neřekne, ale napomůže nám k výpočtu. Protože se nacházíme na pomyslné kružnici, jejíž střed je v Brně, od kterého jsem vzdáleni 62 km.



Obr. 5: Kružnice se středem v Brně a poloměrem 62 km

Zdroj: [7]

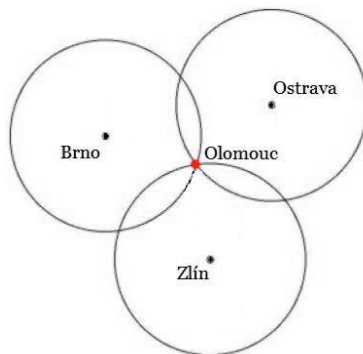
Jdeme dál a ptáme se druhého kolemjdoucího. Ten nám řekne, že jsme 50 km od Zlína. S touto informací nám vznikne druhá kružnice, která protne první kružnici ve dvou bodech a v jednom z těchto bodů se nacházíme.



Obr. 6: Protnutí dvou kružnic se středy v Brně a Zlíně

Zdroj: [7]

Zeptáme se třetího kolemjdoucího a ten nám sdělí, že se nacházíme 77 km od Ostravy. Třetí sestavená kružnice nám protne jeden ze dvou průsečíků a zjistíme, že se nacházíme v Olomouci.



Obr. 7: Protnutí tří kružnic se středy v jednotlivých městech

Zdroj: [7]

4.2 Matematické vyjádření 2D trilaterace

Na výpočet průsečíků tří kružnic řešíme 3 rovnice o 3 neznámých x, y, z . Soustavu tří rovnic budeme brát v rovině a tedy $z = 0$. Předpokládáme, že střed jedné kružnice je v počátku kartézské soustavy souřadnic a druhá kružnice má střed na ose x . Po nalezení řešení lze transformovat úlohu do trojrozměrné kartézské soustavy souřadnic.

Vyjádříme si soustavu tří rovnic o třech neznámých x, y, z :

$$r_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (4.3)$$

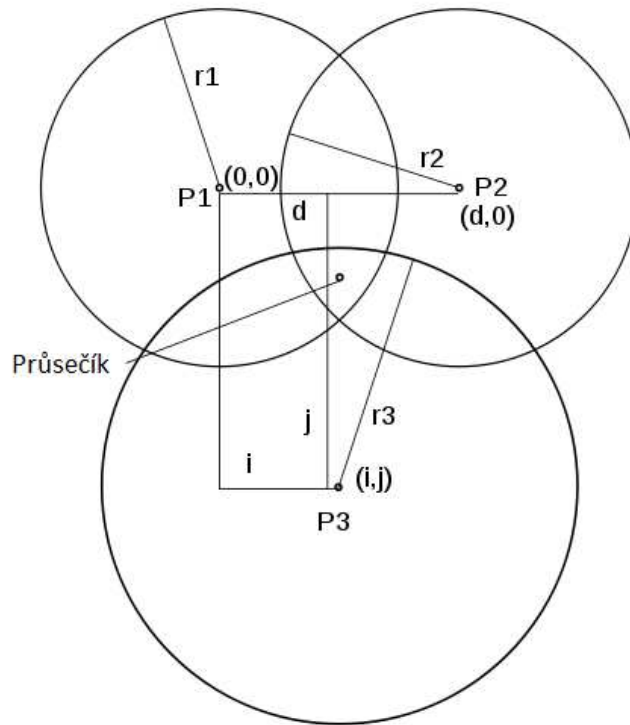
$$r_2^2 = (x - d)^2 + y^2 + z^2 \quad (4.4)$$

$$r_3^2 = (x - i)^2 + (y - j)^2 + z^2, \quad (4.5)$$

kde x, y, z jsou hledané souřadnice,

d, i, j jsou posuny středů kružnic od počátku soustavy souřadnic,

r_1, r_2, r_3 jsou poloměry kružnic.



Obr. 8: Grafické znázornění trilaterace

Zdroj: [19]

Úkolem je najít bod (x, y, z) , který splňuje všechny 3 rovnice. Odečtením rovnice (4.4) od rovnice (4.3) získáme x :

$$r_1^2 - r_2^2 = x^2 - (x - d)^2$$

$$x = \frac{r_1^2 - r_2^2 - d^2}{2d}. \quad (4.6)$$

Předpokládáme, že první dvě kružnice se protnou ve více než jednom bodě a platí:

$$d - r_1 < r_2 < d + r_1$$

Dosadíme vyjádřené x z (4.6) do rovnice (4.3) a vyjádříme rovnici pro $y^2 + z^2$:

$$r_1^2 = \frac{r_1^2 - r_2^2 - d^2}{2d} + y^2 + z^2$$

$$y^2 + z^2 = r_1^2 - \frac{(r_1^2 - r_2^2 - d^2)^2}{4d^2}. \quad (4.7)$$

Zvolíme substituci $z^2 = r_1 - x^2 - y^2$ z rovnice (4.3) a dosadíme do rovnice (4.5):

$$r_3^2 = (x - i)^2 + (y - j)^2 + r_1 - x^2 - y^2$$

$$r_3^2 = (x - i)^2 + y^2 - 2yj + j^2 + r_1 - x^2 - y^2$$

$$y = \frac{r_1^2 - r_3^2 - x^2 + (x - i)^2 + j^2}{2j} = \frac{r_1^2 - r_3^2 + i^2 + j^2}{2j} - \frac{i}{j}x. \quad (4.8)$$

Při výpočtu trojrozměrných souřadnic bodu (x, y, z) si vyjádříme proměnnou z úpravou rovnice (4.3):

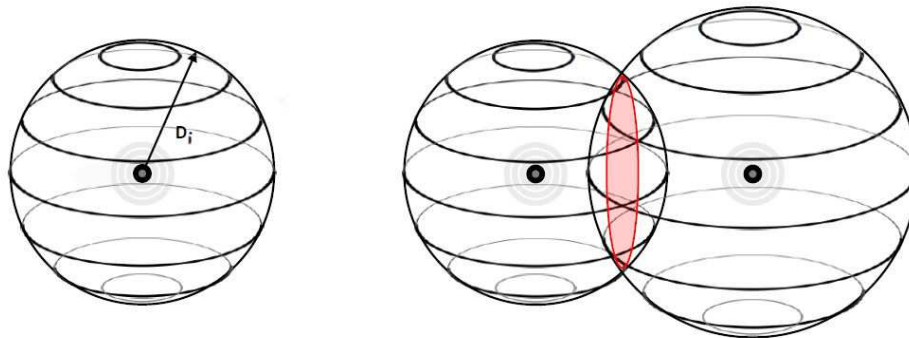
$$z = \pm \sqrt{r_1^2 - x^2 - y^2}. \quad (4.9)$$

Nyní máme řešení pro všechny 3 proměnné souřadnice bodu (x, y, z) . Proměnná z je vyjádřena jako pozitivní i negativní je možné, že při výpočtu nebude žádné řešení, jedno řešení nebo dvě řešení. V případě, že třetí kružnice se neprotne s první ani druhou kružnicí, tak žádné řešení neexistuje. Jestliže se třetí kružnice dotkne právě v jednom bodě $z = 0$. Protne-li se ve dvou bodech pak z je rovna plus nebo minus odmocnina z kladného čísla.

4.3 3D trilaterace

3D trilaterace funguje podobně jako 2D trilaterace, akorát nepracujeme s kružnicemi okolních měst, ale se sférami družic.

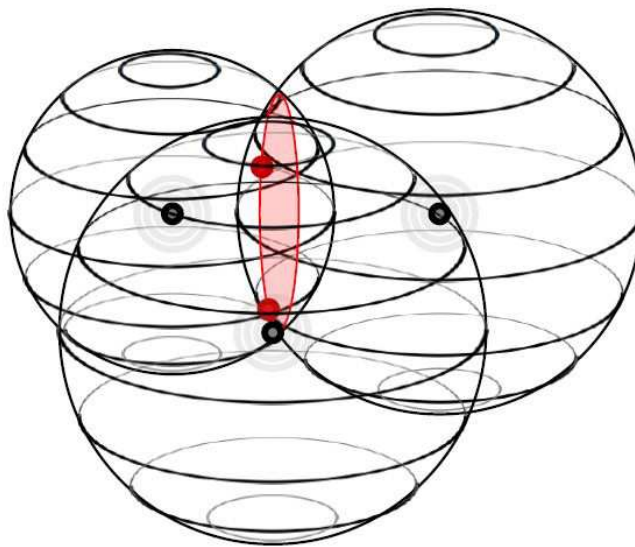
Měření v prostoru je založeno na protnutí sfér, jejichž středem je družice. Výsledkem protnutí takto definovaných dvou sfér je průsečík ve tvaru kružnice. Poloměr sfér jsou vypočtené pseudovzdálenosti mezi družicí a GPS přijímačem. Na kružnici průsečíku sfér se nachází hledaná poloha.



Obr. 9: Sféry sestrojené kolem družic

Zdroj: [10]

Třetí naměřená pseudovzdálenost mezi družicí a GPS přijímačem, nám určuje třetí sféru. Tato sféra protne kružnici průsečíků prvních dvou sfér ve dvou bodech, jak ukazuje obrázek 10. Jeden z bodů průsečíku sfér se nachází pod rovinou definovanou třemi družicemi a druhý bod průsečíku se nachází nad touto rovinou. Jeden z těchto průsečíků může být ihned zanedbán, protože leží daleko ve vesmíru.



Obr. 10: Protnutí tří sfér sestrojěných kolem družic

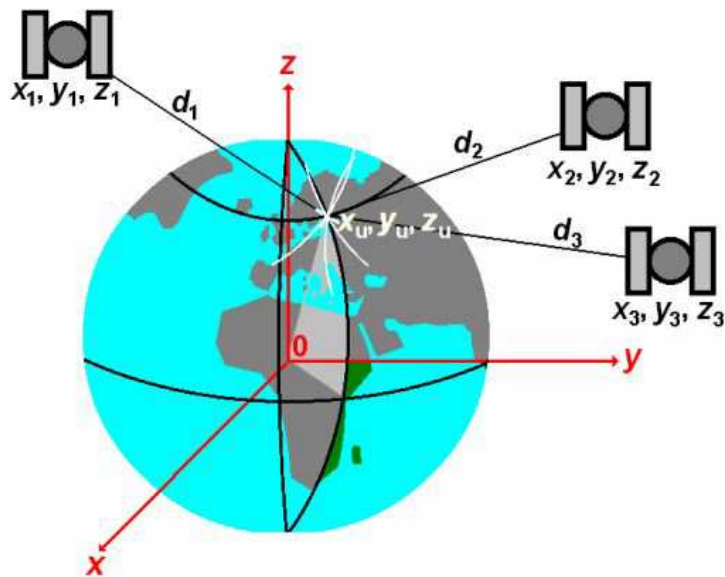
Zdroj: [10]

Jestliže známe souřadnice družic (x_i, y_i, z_i) zachycené přijímačem a jsme-li schopni vypočítat vzdálenost uživatele od jednotlivých družic d_i , lze vypočítat polohu uživatele (x_u, y_u, z_u) v kartézském souřadném systému. Budeme

řešit soustavu tří rovnic pro 3 neznámé:

$$d_i = \sqrt{(x_i - x_u)^2 + (y_i - y_u)^2 + (z_i - z_u)^2} \quad (4.10)$$

kde vektory (x_i, y_i, z_i) představují souřadnice jednotlivých družic a $i = 1, 2, 3$,
 x_u, y_u, z_u jsou hledané kartézské souřadnice uživatele.



Obr. 11: Určení polohy

Zdroj: [8]

Vzdálenost ze vztahu (4.2) je nezatížena chybami, které při výpočtu polohy uživatele snižují přesnost, např. brždění a ohýbání signálu při průchodu atmosférou, nedokonalá synchronizace časové základny družice a navigačního přijímače. Nejvýznamnější chybou je chyba hodin GPS přijímače, protože čas hodin přijímače je posunut o neznámý časový interval Δt . Tento časový interval můžeme přepočítat na vzdálenost $b = c\Delta t$ a přibývá nám další neznámá b . Pro výpočet ve třírozměrném prostoru musíme mít signál alespoň ze čtyř družic:

$$d_i = (\tau_i - \Delta t) \cdot c = D_i - b = \sqrt{(x_i - x_u)^2 + (y_i - y_u)^2 + (z_i - z_u)^2}, \quad (4.11)$$

kde D_i je tzv. pseudovzdálenost.

Určení polohy uživatele (x_u, y_u, z_u) z naměřených pseudovzdáleností je řešeno pomocí nelineární soustavy čtyř rovnic o čtyřech neznámých x_u, y_u, z_u a t_u :

$$\begin{aligned}
D_1 &= \sqrt{(x_1 - x_u)^2 + (y_1 - y_u)^2 + (z_1 - z_u)^2} + c \cdot t_u \\
D_2 &= \sqrt{(x_2 - x_u)^2 + (y_2 - y_u)^2 + (z_2 - z_u)^2} + c \cdot t_u \\
D_3 &= \sqrt{(x_3 - x_u)^2 + (y_3 - y_u)^2 + (z_3 - z_u)^2} + c \cdot t_u \\
D_4 &= \sqrt{(x_4 - x_u)^2 + (y_4 - y_u)^2 + (z_4 - z_u)^2} + c \cdot t_u
\end{aligned} \tag{4.12}$$

kde vektory (x_i, y_i, z_i) představuje souřadnice jednotlivých družic a platí $i = 1, 2, 3, 4$,

vektor (x_u, y_u, z_u) je hledaná poloha uživatele,

t_u je časová diference mezi časovou základnou přijímače a synchronní základnou družic.

Pro řešení této nelineární soustavy je zvolena přímá metoda výpočtu polohy pro aproximaci s rozvojem Taylorovy řady pro vhodně zvolený odhad řešení.

$$\hat{D}_i = f(x_i, y_i, z_i, \hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u) = \sqrt{(x_i - \hat{x}_u)^2 + (y_i - \hat{y}_u)^2 + (z_i - \hat{z}_u)^2} + c \cdot \hat{t}_u \tag{4.13}$$

kde $(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u)$ je zvolená přibližná poloha,

\hat{t}_u je odhad časové diference mezi časovou základnou přijímače a základnou družic,

\hat{D}_i jsou pseudovzdálenosti, které lze pro dané polohy družic dopočítat.

Řešení pro neznámé parametry polohy (x_u, y_u, z_u) a časové diference základny t_u , bude vzhledem k zvoleným odhadům vykazovat jistou odchylku:

$$\begin{aligned}
x_u &= \hat{x}_u + \Delta x_u \\
y_u &= \hat{y}_u + \Delta y_u \\
z_u &= \hat{z}_u + \Delta z_u \\
t_u &= \hat{t}_u + \Delta t_u
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Funkci pro naměřené pseudovzdálenosti D_i lze uvažovat jako:

$$\begin{aligned} D_i &= f(x_i, y_i, z_i, x_u, y_u, z_u, t_u) = \\ &= f(x_i, y_i, z_i, \hat{x}_u + \Delta x_u, \hat{y}_u + \Delta y_u, \hat{z}_u + \Delta z_u, \hat{t}_u + \Delta t_u) \end{aligned} \quad (4.15)$$

a tuto funkci dále řešit pomocí Taylorova rozvoje:

$$\begin{aligned} D_i &= f(x_i, y_i, z_i, \hat{x}_u + \Delta x_u, \hat{y}_u + \Delta y_u, \hat{z}_u + \Delta z_u, \hat{t}_u + \Delta t_u) = \\ &= f(\circ) + \frac{\partial f(\circ)}{\partial \hat{x}_u} \Delta x_u + \frac{\partial f(\circ)}{\partial \hat{y}_u} \Delta y_u + \frac{\partial f(\circ)}{\partial \hat{z}_u} \Delta z_u + \frac{\partial f(\circ)}{\partial \hat{t}_u} \Delta t_u, \end{aligned} \quad (4.16)$$

kde $f(\circ) = f(x_i, y_i, z_i, \hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_u)$.

Parciální derivace v soustavě (4.12) jsou poměrně komplikované, pro dobře konvergující řešení nám postačují první řády derivací:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\circ)}{\partial \hat{x}_u} &= -\frac{x_i - \hat{x}_u}{\hat{r}_i} = -A_{xi} \\ \frac{\partial f(\circ)}{\partial \hat{y}_u} &= -\frac{y_i - \hat{y}_u}{\hat{r}_i} = -A_{yi} \\ \frac{\partial f(\circ)}{\partial \hat{z}_u} &= -\frac{z_i - \hat{z}_u}{\hat{r}_i} = -A_{zi} \\ \frac{\partial f(\circ)}{\partial \hat{t}_u} &= c \end{aligned} \quad (4.17)$$

kde \hat{r}_i představuje vztah:

$$\hat{r}_i = \sqrt{(x_i - \hat{x}_u)^2 + (y_i - \hat{y}_u)^2 + (z_i - \hat{z}_u)^2}. \quad (4.18)$$

Řešení soustavy lze zapsat do maticového tvaru:

$$\mathbf{\Delta D} = \mathbf{H} \mathbf{\Delta V}, \quad (4.19)$$

$\mathbf{\Delta D}$ je vektor odchylek pseudovzdáleností pro vybrané čtyři družice:

$$\mathbf{\Delta D} = \begin{bmatrix} \Delta D_1 \\ \Delta D_2 \\ \Delta D_3 \\ \Delta D_4 \end{bmatrix}.$$

Tento vektor dostaneme jako rozdíl pseudovzdáleností odhadnuté polohy a skutečné naměřené pseudovzdálenosti:

$$\Delta D_i = \hat{D}_i - D_i. \quad (4.20)$$

Matice \mathbf{H} ze vztahu (4.19) obsahuje příslušné parciální derivace prvního řádu vyjádřené ve vztahu (4.17):

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} A_{x1} & A_{y1} & A_{z1} & -1 \\ A_{x2} & A_{y2} & A_{z2} & -1 \\ A_{x3} & A_{y3} & A_{z3} & -1 \\ A_{x4} & A_{y4} & A_{z4} & -1 \end{bmatrix}.$$

Vektor $\Delta \mathbf{V}$ z (4.19) je hledaný vektor neznámých odchylek, ve tvaru:

$$\Delta \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \\ c \cdot \Delta t_u \end{bmatrix}.$$

Úpravou vztahu (19) osamostatníme vektor neznámých odchylek na levou stranu:

$$\Delta \mathbf{V} = \mathbf{H}^{-1} \Delta \mathbf{D}. \quad (4.21)$$

Celý tento postup lze řešit také, že vypočtené odchylky $\Delta \mathbf{V}$ přičteme k odhadu řešení a vytvoříme nový odhad řešení. Takto celý proces opakujeme, dokud nebudou odchylky dostatečně malé.

4.4 Převodní vztah z kartézských souřadnic na geografické souřadnice

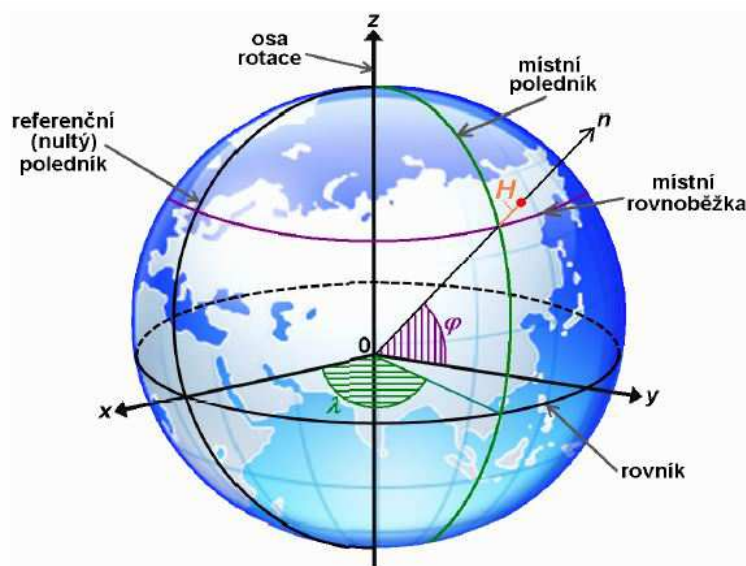
Při výpočtu souřadnic uživatele (x_u, y_u, z_u) se používá výpočet průsečíků kulových ploch a tím se určí zeměpisné kartézské souřadnice. Tyto souřadnice v kartézské soustavě souřadnic se následně přepočítávají na souřadnice geodetické.

Při popisu tvaru Země se v navigačních systémech užívá geoid. Je to matematický model zemského tělesa, který vychází z rotačního elipsoidu. Užití elipsoidu je univerzální kdekoliv na Zemi, používá se světový geodetický systém WGS-84.

Střed elipsoidu se nachází v těžišti Země (s přesností asi 2 m), osa x je polopřímka vedená ze středu Země k průsečíku nultého poledníku a rovníku na povrch Země. Vedlejší osa z spojuje severní a jižní pól a osa y je polopřímka od středu Země k průsečíku rovníku a devadesátého poledníku na východní polokouli na povrchu Země. Osa y je kolmá na osy x a z .

Geodetická šířka φ je úhel, který svírá rovina rovníku s normálou n k ploše elipsoidu s vrcholem ve středu Země. Geodetická délka λ je úhel mezi rovinou místního poledníku s rovinou nultého poledníku s vrcholem ve středu Země. Elipsoidická výška H je vzdálenost od referenčního elipsoidu. Pro dané úhly φ a λ platí:

$$\varphi \in \langle -90^\circ, 90^\circ \rangle \quad a \quad \lambda \in \langle -180^\circ, 180^\circ \rangle. \quad (4.22)$$



Obr. 12: Kartézské a geodetické souřadnice

Zdroj: [8]

Parametry definující elipsoid:

- délka hlavní poloosy: $a = 6\,378\,137$ m
- délka vedlejší poloosy: $b = 6\,356\,752,3142$ m

Elipsoid je zploštělý na pólech a v pravouhlé soustavě x, y, z platí vztah:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (4.23)$$

Mezi kartézskými a geodetickými souřadnicemi platí následující vztahy, pro bod \mathbf{P} s výškou H nad zemským povrchem:

$$\begin{aligned}x &= (\rho + H) \cos(\varphi) \cos(\lambda) \\y &= (\rho + H) \cos(\varphi) \sin(\lambda) \\z &= ((1 - e^2)\rho + H) \sin(\varphi)\end{aligned}\tag{4.24}$$

kde e je excentricita elipsoidu

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\tag{4.25}$$

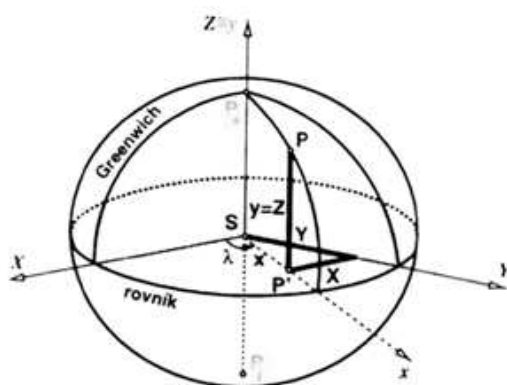
a ρ je poloměr křivosti elipsoidu, který závisí na zeměpisné šířce daného bodu

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}\tag{4.26}$$

Označme si získanou polohu uživatele v kartézských souřadnicích bodem \mathbf{P} . Kolmým průmětem do geodetického rovníku získáme bod \mathbf{P}' . Vzdálenost mezi bodem \mathbf{P}' a počátkem souřadnicového systému vypočítáme vztahem:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2},\tag{4.27}$$

kde d je vzdálenost bodu \mathbf{P}' od počátku souřadnicového systému, x, y jsou kartézské souřadnice bodu \mathbf{P} .



Obr. 13: Zobrazení bodu \mathbf{P} a jeho průmět do geodetického rovníku

Zdroj: [18]

Pro geodetickou délku platí následující vztahy:

$$\begin{aligned}\sin \lambda &= \frac{y}{d} \\ \cos \lambda &= \frac{x}{d}.\end{aligned}\tag{4.28}$$

Následně z rovnic (4.28) lze určit vztah pro výpočet geodetické délky λ :

$$\lambda = 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x + d}\tag{4.29}$$

Dosažením ρ do rovnic (4.24), dostaneme soustavu rovnic s elipsoidickou výškou H a geodetickou šířkou φ :

$$\begin{aligned}x &= \left(\frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} + H \right) \cos \varphi \cdot \frac{x}{d} \\ d &= \left(\frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} + H \right) \cos \varphi \\ z &= \left((1 - e^2) \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} + H \right) \sin \varphi.\end{aligned}\tag{4.30}$$

Zavedeme substituci

$$t = \tan \varphi,\tag{4.31}$$

eliminací elipsoidické výšky a zavedení dané substituce získáme rovnici šířky:

$$t = \frac{z}{d - \frac{ae^2}{\sqrt{1+(1-e^2) \cdot t^2}}}.\tag{4.32}$$

Tuto rovnici lze řešit iteračním výpočtem pomocí prosté iterace:

$$t_i = \frac{z}{d - \frac{ae^2}{\sqrt{1+(1-e^2) \cdot t_{i-1}^2}}}, \quad i = 1, 2, \dots, n\tag{4.33}$$

s počáteční hodnotou, která představuje nulovou elipsoidickou výškou:

$$t_0 = \frac{z}{(1 - e^2)d}.\tag{4.34}$$

Po n krocích lze získat ze vztahu (4.31) geodetickou šířku φ :

$$\varphi = \arctan(t) \quad (4.35)$$

a elipsoidickou výšku H :

$$H = \sqrt{1+t^2} \left(p - \frac{a}{\sqrt{1+(1-e^2)t^2}} \right). \quad (4.36)$$

5 Galileo

Tato kapitola je zaměřená na systém Galileo. Zmiňuji se zde o evropském navigačním systému, jeho historii a srovnáním se systémem GPS. Galileo je v současné době stále ve vývoji. Pro vytvoření této kapitoly bylo čerpáno z literatury [5], [11], [13], [12] a [17].

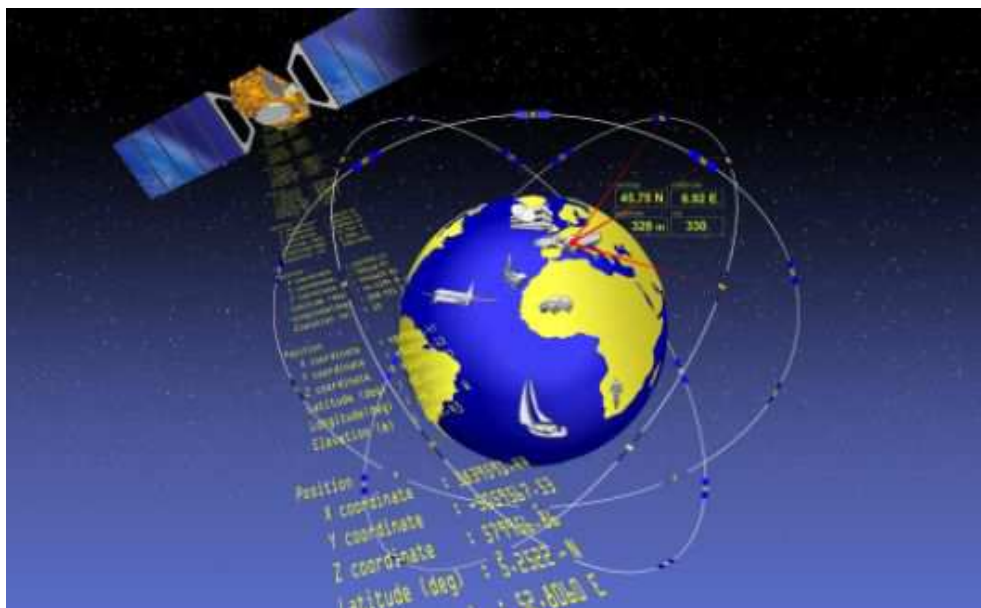
Systém Galileo je evropský globální navigační systém. Galileo má být srovnatelný s americkým systémem GPS a ruským systémem GLONASS. Na rozdíl od těchto dvou systémů, je Galileo řízen a spravován civilním sektorem, kdežto GPS a GLONASS je systém primárně vojenský. Tato skutečnost byla hlavním podmětem pro vytvoření nového systému primárně pro Evropu, protože v případě krizových situací nemá Evropa nad GPS ani GLONASS žádnou kontrolu. Tento systém je financován státy Evropské unie. Řídícím sídlem Galilea byl do roku 2012 Brusel, kdy se 6. září 2012 přemístilo do Prahy. Technologické centrum sídlí v Německu u města Mnichov. Galileo je kompatibilní se systémy GPS a GLONASS, cílem spolupráce je umožnit přesnější a spolehlivější navigaci. V kombinaci s GPS se zvýší počet dostupných satelitů a to bude mít za následek vyšší přesnost. Vysoký počet dostupných satelitů zlepší dostupnost ve městech, kde mohou výškové budovy bránit signálu ze satelitů, které jsou nízko nad obzorem.

Systém je pojmenovaný podle italského vědce Galilea Galileiho, který se během svého života zabýval otázkou navigace, konkrétně námořní navigace.

5.1 Struktura systému Galileo

Družice

Plně funkční systém se bude skládat z 30 družic, kde 3 z nich jsou záložní. Velký počet družic by měl zajistit spolehlivou funkčnost systému. Tyto družice obíhají Zemi po třech kulových drahách v nadmořské výšce 23 222 Km. Oběžná dráha družice okolo Země je 14 hodin. Životnost družice se orientačně udává na délku 12 let. Aby mohl být projekt spuštěn musí být v provozu alespoň 18 družic.



Obr. 14: Orbitaly systému Galileo

Zdroj: [11]

Jedny z prvních testovacích družic systému Galileo jsou označovány GIOVE. První družice GIOVE-A byla vypuštěna do vesmíru 28. prosince 2005. Tato družice měla za úkol testovat komponenty systému Galileo. Nejdůležitější úlohou této družice bylo otestovat anténu, která vyzařuje navigační signál pokrývající celý viditelný povrch Země pod satelitem. Dne 27. dubna 2008 byla na oběžnou dráhu vypuštěna další družice GIOVE-B. Družice tohoto typu nesla vodíkové hodiny, které byly doposud nejpřesnější hodiny vyslané do vesmíru. Zpoždění těchto hodin je uváděno 1 nanosekunda za den. Poslední testovací družice GIOVE-A2 byla vypuštěna na oběžnou dráhu 21. října 2011. Je v podstatě nástupcem družice GIOVE-A a zajišťuje sběr dat komponent systému.

Významnou událostí bylo první zaměření polohy na zemské povrchu dne 12. března 2013. V průběhu let jsou do vesmíru postupně umisťovány další družice. Poslední dvě družice byly vyslány 17. prosince 2015 ruskou raketou Sojuz z kosmodromu ve Francouzské Guyaně. Celkový počet družic na oběžné dráze ke konci roku 2015 je 12. Předpokládané dokončení systému se odhaduje na rok 2020.

Pozemní stanice

Pozemní segment se bude skládat ze dvou kontrolních center, orientačně dvacetí měřících a kontrolních stanovišť. Kontrolní centra mají za úkol kontrolu družic, udržují komunikaci s družicemi a zpracovávají získané informace vysílané z družic např. varování v případě poruchy některé z družic.

5.2 Služby

Každá družice systému Galileo bude vysílat 10 různých navigačních signálů, díky tomuhle bude Galileo poskytovat celkem 5 druhů služeb.

Otevřená služba - Open Service (OS)

Otevřená služba bude zdarma dostupná pro každého. Přesnost určení polohy uživatele bude záviset na schopnosti přijímače kolik bude schopný přijmout frekvencí vysílaných z družic. Družice budou vysílat signály ve třech frekvencích. Přijímač, který bude schopen přijmout všechny tři frekvence může dosáhnout přesnosti polohy až v desítkách centimetrů.

Komerční služba - Commercial Service (CS)

Tato služba bude poskytovat navíc kódovaný signál, který bude zpoplatněn. Signál této služby bude vysílán v další frekvenci a tím zvýší přesnost určení polohy.

Veřejná regulovaná služba - Public Regulated Service (PRS)

Služba, která bude výhradně určena pro složky státu (policie, armáda, tajné služby). Tato služba bude pro civilní sektor kódována.

Bezpečnost životně důležitých služeb - Safety of Life Service (SoL)

Pro využití této služby bude potřeba certifikovaný dvoufrekvenční přijímač. Služba bude využívána především složkami záchranných služeb, ozbrojenými složkami nebo v letecké dopravě.

Vyhledávací a záchranná služba - Search and Rescue (SAR)

Úkolem této služby bude poskytnout nouzovou lokalizaci s možností oboustranné komunikace. Přijímač signálu oznámí trosečníkovi, že jeho signál byl lokalizován.

Závěr

V mé práci jsem se snažila seznámit s navigačním systémem GPS, ať už jeho postupným vývojem nebo popisem technických záležitostí GPS. Hlavní úlohou mé práce bylo přiblížení principu a matematického výpočtu polohy uživatele.

Pro výpočet polohy jsem vycházela z pseudovzdáleností mezi přijímačem uživatele a družicí. Pomocí naměřených pseudovzdáleností je hledán průsečík sfér, jejichž středem je daná družice. Z průsečíku sfér nám vychází souřadnice uživatele v kartézském souřadném systému. Tyto kartézské souřadnice je nutno dále přepočítat na geodetické souřadnice.

Na konci mé práce se zabývám evropským systémem Galileo, který je v současné době ještě ve vývoji. Galileo je primárně budován pro civilní účely, nikoliv pro vojenský účel jako je tomu u systémů GPS a GLONASS. Toto bylo hlavním podnětem pro vybudování evropského navigačního systému, aby Evropa nebyla závislá na americkém systému GPS v kritických situacích. Galileo má poskytovat vyšší přesnost určení polohy a větší pokrytí signálem.

Literatura

- [1] Hofmann-Wellenhof B., Lichtenegger H., Wasle E.: GNSS — Global Navigation Satellite Systems: GPS, GLONASS, Galileo & more. Strauss GmbH, Mörlenbach, Germany, 2008.
- [2] Steiner I., Černý J.: GPS od A do Z. Vydavatelství eNav, s.r.o., Praha, 2006.
- [3] Švábenský O., Fixel J., Weigel J.: Základy GPS a jeho praktické aplikace. Vydavatelství: Fakulta stavební VUT v Brně, 1995.
- [4] Voženílek V. a kolektiv: Integrace GPS/GIS v geomorfologickém výzkumu. Vydavatelství: UP, Olomouc, 2001.
- [5] Čábelka M.: Úvod do GPS. Vydavatelství UK, Praha, 2008. [online], dostupné z: <https://www.natur.cuni.cz/geografie/geoinformatika-kartografie/ke-stazeni/vyuka/gps/skriptum-uvod-do-gps/> [citováno: 12. 4. 2014]
- [6] Rapant P.: Družicové polohové systémy. Vydavatelství VŠB - TU Ostrava, 2002. [online], dostupné z: <http://gis.vsb.cz/dokumenty/dns-gps> [citováno: 4. 9. 2014]
- [7] Royster D.: GPS and Mathematics NCTM 2003, Center for Mathematics, Science, and Technology Education. UNC Charlotte. [online], dostupné z: http://www.ms.uky.edu/~droyster/talks/nctm_2003/nctm_handout.pdf [citováno: 10. 5. 2014]
- [8] Šebesta J.: Globální navigační systémy. [online], dostupné z: http://www.urel.feec.vutbr.cz/~sebestaj/RAR/literatura/Globalni_navigacni_systemy.pdf [citováno: 29. 10. 2014]
- [9] Tichý T.: Zpracování kódových měření globálních navigačních systémů. [online], dostupné z: <https://mat.fsv.cvut.cz/komisevstev/18sk/files/tichy.pdf> [citováno: 19. 9. 2014]
- [10] Vojtek D.: Globální navigační a polohové systémy. Vydavatelství: VŠB-TU Ostrava, 2014. [online], dostupné z: http://gis.vsb.cz/vojtek/content/gnps/files/_source/Ucebni-texty-GNPS-distancni.pdf [citováno: 28. 9. 2014]
- [11] Český kosmický portál [online], dostupné z: <http://www.czechspaceportal.cz/> [citováno: 20. 11. 2014]
- [12] Esa - Space for Europe [online], dostupné z: http://www.esa.int/Our_Activities/Navigation/The_future_-_Galileo [citováno 20. 4. 2016]

- [13] European Commission [online], dostupné z: ec.europa.eu/growth/sectors/space/galileo/launches/index_en.htm [citováno: 18. 4. 2016]
- [14] European Global Navigation Satellite Systems Agency [online], dostupné z: <http://www.gsa.europa.eu/galileo/> [citováno: 18. 4. 2016]
- [15] GPS [online], dostupné z: <http://gps.tym.cz> [citováno: 30. 10. 2014]
- [16] Kosmonautix.cz [online], dostupné z: <http://www.kosmonautix.cz/2014/05/dalsi-posileni-systemu-gps/> [citováno 22. 11. 2014]
- [17] Bezpalec P.: Lokalizace a navigace [online], dostupné z: <https://publi.cz/books/231/05.html> [citováno 19. 4. 2016]
- [18] Geodetické a kartografické základy [online], dostupné z: http://transformace.webst.fd.cvut.cz/Iframe/Basics_orto.jpg [citováno 16. 4. 2016]
- [19] Wikipedia.org [online], dostupné z: <http://en.wikipedia.org/wiki/Trilateration> [citováno 5. 12. 2014]