UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Metody vícekriteriálního rozhodování založené na minimalizaci vzdálenosti od ideální varianty

Vedoucí bakalářské práce:
RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.
Rok odevzdání: 2011

Vypracovala:
Kristina Žáková
ME, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením pana RNDr. Ondřeje Pavlačky, Ph.D. s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne 19. dubna 2011

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat především vedoucímu práce, panu RNDr. Ondřeji Pavlačkovi, Ph.D., za odborné vedení a poskytnutí cenných rad a informací při tvorbě mé bakalářské práce. Také bych chtěla poděkovat své rodině a přátelům, kteří mě po celou dobu studia podporovali a motivovali.

Obsah

Úvod

Má bakalářská práce se, jak napovídá její název, zabývá metodami vícekriteriálního rozhodování založenými na minimalizaci vzdálenosti od ideální varianty. My jsme však obsah bakalářské práce rozšířili rovněž o metody vícekriteriálního rozhodování založené na maximalizaci vzdálenosti od bazální varianty a metodu TOPSIS. Pro toto téma jsem se rozhodla, jelikož mě na první pohled zaujalo a chtěla jsem prohloubit své znalosti týkající se jeho problematiky.

Rozhodování je běžnou a nutnou součástí každodenního života nás všech. Ramík v knize [2] píše: "Být člověkem znamená činit rozhodnutí." Činit rozhodnutí však můžeme pouze za předpokladu, že vybíráme z většího množství možností (variant). To je logické, protože pokud máme pouze jednu možnost, nemůžeme mluvit o rozhodování. Pokud řešíme složitější rozhodovací problémy, např. výběr nového automobilu nebo strojního zařízení, je vhodné při rozhodování použít matematické metody, které jsou k tomu určeny. Klasické rozhodovací metody pracují pouze s jedním kritériem (hlediskem), podle kterého hodnotí jednotlivé varianty. My však budeme používat vícekriteriální rozhodování, ve kterém uvažujeme více kritérií hodnocení variant. Podle mého názoru je vícekriteriální rozhodování též lépe využitelné v praxi, poněvadž se obecně rozhodujeme na základě více hledisek. Existuje více metod (přístupů) pro řešení vícekriteriálního rozhodování. Obecně se rozdělují podle toho, zda jsou stanoveny váhy kritérií. Pokud nejsou stanoveny, jedná se např. o metodu aspirační úrovně, lexikografická metoda atp. Jestliže váhy kritérií stanoveny jsou, můžeme použít např. metodu AHP, metodu vážených průměrů stupňů naplnění dílčích cílů, funkci utility a jiné.

My se však, jak již bylo řečeno výše, zaměříme na metody založené na měření vzdálenosti - minimalizaci vzdálenosti od ideální varianty a maximalizaci vzdálenosti od bazální varianty. Variantu si představíme jako vektor reálných čísel, která představují hodnocení podle jednotlivých kritérií, a využijeme faktu, že můžeme měřit vzdálenost dvou vektorů od sebe. Intuitivně je zřejmé, že nejlepší varianta by měla mít minimální vzdálenost od "ideální" varianty, respektive největší vzdálenost od "bazální" varianty. Ne vždy však platí, že varianta, která má nejmenší vzdálenost od ideální varianty, má největší vzdálenost od bazální varianty. V práci se rovněž zaměříme na metodu TOPSIS, která kombinuje minimalizaci a maximalizaci vzdálenosti.

Cílem této práce je seznámit čtenáře s tímto přístupem k řešení úloh vícekriteriálního rozhodování. Zaměříme se na porovnávání výsledků na základě různých metrik, jak dané výsledky ovlivní volba ideální a bazální varianty.

Celá práce je rozdělena do 3 tří kapitol. V první kapitole se čtenář seznámí s teorií rozhodování - jsou zde shrnuty základní pojmy teorie rozhodování, které čtenáři pomohou lépe pochopit celý rozhodovací proces, dále klasifikace rozhodovacích procesů, kritéria a stanovení jejich vah, kde jsou zpracovány tři nejpoužívanější metody stanovení vah, které budeme využívat v praktické části práce. Druhá kapitola pojednává o metodách založených na měření vzdálenosti. Dozvíme se zde podrobnější informace o třech metodách založených na měření vzdálenosti - metodě minimalizace vzdálenosti od ideální varianty, metodě maximalizace vzdálenosti od bazální varianty a metodě TOPSIS. Vlastnosti jednotlivých metod ukážeme na názorných příkladech. V poslední, tedy třetí kapitole, uvedeme rozhodovací problém, na kterém si ukážeme výpočet tří výše zmíněných metod založených na měření vzdálenosti podle tří různých metrik, a to lineární, Euklidovské a Čebyševovy metriky. Rozhodovací problém, ve kterém vybíráme optimální studentský účet poskytovaný bankami v ČR, je rozdělen na dvě části podle toho, zda ohodnocení variant provádíme standardizací nebo stupni naplnění dílčích cílů.

1. Teorie rozhodování

V této úvodní kapitole se seznámíme se základními pojmy teorie rozhodování z matematického hlediska, popíšeme si jednotlivé složky a prvky rozhodování a budeme se zabývat také klasifikací rozhodovacích procesů, díky níž porozumíme jednotlivým druhům rozhodovacích procesů. V této kapitole budu čerpat z knih [1] - [4].

1.1. Základní pojmy teorie rozhodování

Rozhodování je proces výběru varianty z množiny variant podle stanoveného kritéria za účelem dosažení stanovených cílů. Tento proces je však možné uskutečnit jen za podmínky, že existuje víceprvková množina variant.

Rozhodovací procesy lze rozlišit podle toho, v jakém slova smyslu o nich uvažujeme, na rozhodovací procesy v širším a užším slova smyslu. Mezi jednotlivé složky (prvky, fáze, etapy, apod.) tvořící náplň *rozhodovacích procesů v širším slova smyslu* patří:

- formulace a stanovení cílů rozhodovacího problému,
- volba kritérií pro rozhodování,
- tvorba souboru variant řešících daný problém,
- zhodnocení důsledků variant vzhledem k rozhodovacím kritériím,
- stanovení důsledků variant při změnách vnějších podmínek,
- konečné rozhodnutí, tj. výběr varianty (variant) řešení problému.

U *rozhodovacích procesů v užším slova smyslu* jsou již zadány cíle, kritéria i rozhodovací varianty.

Rozhodovací proces tedy obsahuje tyto prvky:

- cíl rozhodování,
- subjekt a objekt rozhodování,

- kritéria (vlastnosti, atributy, charakteristiky, hlediska),
- varianty (také možnosti, prvky, alternativy) a jejich důsledky,
- stavy světa (scénáře rozhodování).

Cílem rozhodování rozumíme určitý budoucí stav systému (okolí rozhodovatele), který plyne z nutnosti uspokojit určité potřeby nebo plnit jisté funkce. Cíle se má dosáhnout realizací některé z variant rozhodování. Cíl rozhodování se obvykle hierarchicky rozkládá do dílčích cílů, které se transformují do podoby rozhodovacích kritérií. Mezi dílčími cíli existují mnohdy určité vazby. Na jejich základě můžeme rozlišovat *dílčí cíle komplementární*, které se vzájemně doplňují a podporují, a *dílčí cíle konfliktní*, kdy dosažení vysokých hodnot určitého cíle je obvykle spojeno s nízkými hodnotami jiných cílů. Velmi důležitá je také forma vyjádření cílů, které mohou být vyjádřeny buď číselně (*kvantitativní cíle* jako např. cena), nebo pomocí slovních popisů (*kvalitativní cíle* jako např. barva). Hodnoty cílů, kterých se má minimálně dosáhnout řešením rozhodovacího problému, se označují jako *aspirační úrovně cílů*.

Rozhodovatel neboli subjekt rozhodování je jednotlivec nebo skupina lidí, která vybírá z možných variant rozhodnutí. Pokud je rozhodovatelem jednotlivec, mluvíme o *individuálním subjektu rozhodování*, a pokud je rozhodovatelem skupina osob, jedná se o *kolektivní subjekt rozhodování*. V praxi rozhodování je však třeba též rozlišovat mezi *statutárním rozhodovatelem*, tj. subjektem, který je vybaven pravomocemi k volbě varianty určené k realizaci a nese zároveň odpovědnost za dopady a účinky této varianty, a *skutečným rozhodovatelem*, tj. subjektem, který skutečně rozhoduje (skutečný výběr varianty, např. varianty nového technologického procesu, proběhne na štábní úrovni, přičemž ředitel jednotky jako statutární rozhodovatel rozhodne pouze o tom, zda tuto variantu realizovat či zda ji zamítnout).

Objekt rozhodování představuje systém, v němž je formulován rozhodovací problém, cíl, kritéria a varianty rozhodování.

Kritérium je určité hodnotící hledisko, podle kterého jsou porovnávány jednotlivé varianty. Kritéria dělíme podle jejich charakteru na *kvantitativní*, která vyjadřují kvantitu určité vlastnosti a jejichž hodnoty jsou tudíž zadány číselně, a *kvalitativní*, která odrážejí rozdílnou kvalitu určité vlastnosti u jednotlivých variant a jejichž hodnoty jsou primárně zadány slovně. Kvantitativní kritéria můžeme dále rozlišit na *kritéria maximalizační*, kdy je žádoucí co největší hodnota daného kritéria, a *kritéria minimalizační*, kdy je tomu naopak. Převod z minimalizačního na maximalizační kritérium je následující:

1. pro dané minimalizační kritérium určíme nejhorší, tj.nejvyšší hodnotu,

2. od této nejhorší hodnoty odečteme kriteriální hodnoty dané varianty; tím převádíme ohodnocení variant podle minimalizačního kritéria na ohodnocení variant podle maximalizačního kritéria.

V dalším textu můžeme tedy uvažovat pouze maximalizační kritéria. Pokud uvažujeme klasické modely rozhodování, hodnotíme množinu všech variant podle jednoho daného kritéria. V reálném životě však při rozhodování bereme v úvahu více kritérií. Na základě této skutečnosti vznikla teorie vícekriteriálního rozhodování.

Variantami rozumíme prvky, které má smysl porovnávat a jejichž realizací dosáhneme cíle rozhodování. Například při výběru automobilu se zákazník rozhoduje mezi jednotlivými typy automobilů, což jsou pro něj varianty, mezi kterými vybírá. Množina všech variant řešení daného rozhodovacího problému bývá nazývána *rozhodovací pole*. Důsledky variant vyjádřené jako hodnoty kritérií jsou buď jednoznačné, nebo závisejí na stavech světa.

Stavy světa (scénáře, rizikové situace) chápeme jako budoucí vzájemně se vylučující situace, které mohou po realizaci varianty rozhodování nastat a které jsou mimo kontrolu rozhodovatele. Náhodné faktory se obvykle považují za náhodné veličiny určující stavy světa. Důležitou roli z hlediska dalšího postupu hraje fakt, zda známe pravděpodobnostní rozdělení stavů světa či nikoli.

1.2. Klasifikace rozhodovacích procesů (rozhodovacích problémů)

Rozhodovací procesy lze třídit podle celé řady hledisek. Podle složitosti a algoritmizace členíme rozhodovací problémy na *dobře strukturované rozhodovací problémy* (též *jednoduché, programované či algoritmizované*), které se zpravidla opakovaně řeší na operativní úrovni a existují pro ně rutinní postupy řešení, a *špatně strukturované rozhodovací problémy*, které jsou řešené zpravidla na vyšších úrovních řízení a jsou svým charakterem do určité míry nové a neopakovatelné.

Dalším neméně důležitým klasifikačním hlediskem je informace o stavech světa a důsledcích variant vzhledem k jednotlivým kritériím hodnocení. V případě úplné informace, tzn. že rozhodovatel ví s jistotou, který stav světa nastane a jaké budou důsledky variant, mluvíme o *rozhodování za jistoty*. Pokud rozhodovatel zná možné budoucí situace (stavy světa), které mohou nastat, a tím i důsledky variant při těchto stavech světa, a současně zná i pravděpodobnosti těchto stavů světa, pak se jedná o *rozhodování za rizika*. Pokud nejsou rozhodovateli známy pravděpodobnosti jednotlivých stavů světa, jde o *rozhodování za nejistoty*.

Z hlediska faktoru času lze rozhodovací procesy třídit na *procesy statické* a *procesy dynamické* podle toho, zda se v čase nemění či mění množina variant rozhodování, popř. jejich důsledky a hodnocení těchto důsledků v závislosti na preferenčním systému rozhodovatele.

Podle počtu kritérií hodnocení se rozhodovací procesy třídí na *jednokriteriální rozhodování* (procesy s jediným kritériem hodnocení) a *vícekriteriální rozhodování* (procesy s větším počtem kritérií).

Podle toho, zda důsledky variant nezávisí či závisí na strategii, kterou vědomě volí přemýšlející protivník, rozlišujeme *rozhodovací procesy nekonfliktní* a *konfliktní* (studiem konfliktních rozhodovacích procesů se zabývá matematická teorie her).

My se budeme zabývat problémem *vícekriteriálního rozhodování (za jistoty)*, kterým rozumíme rozumíme úlohu nalezení "optimální"varianty, která by "v co největší míře"zohledňovala uvažovaná kritéria (dílčí cíle). Obecný postup při øešení problému vícekriteriálního rozhodování vypadá následovně:

Krok 1. Stanovení cíle rozhodování.

Krok 2. Vyčlenění množiny variant $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ a množiny kritérií $C = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$.

Krok 3. Dílčí vyhodnocení (uspořádání, změření) všech variant podle jednotlivých kritérií.

Krok 4. Agregace dílčích hodnocení do výsledného celkového hodnocení a výběr "optimální"varianty.

1.3. Kritéria

Každé kritérium slouží v rozhodovací úloze k tomu, abychom podle něj dané varianty vyhodnocovali, eventuálně porovnávali či uspořádali. Abychom mohli pracovat s metodou minimalizace a maximalizace vzdálenosti, potřebujeme podle každého kritéria varianty ohodnotit číselně, přičemž hodnocení podle jednotlivých kritérií by měla být ze stejné škály (stupnice). Chceme tudíž zkonstruovat funkce $f_j, j = 1, 2, \ldots, n$, zobrazující

$$f_j : A \to \langle 0, 1 \rangle.$$

Nyní si ukážeme konstrukci, která povede k vytvoření výše zmíněného ohodnocení. Budeme uvažovat situaci, kdy v souboru kritérií máme kritéria jak kvalitativní, tak kritéria kvantitativní. V tomto případě musíme napřed námi zvolenou množinu variant ohodnotit podle kvalitativních kritérií, abychom je tak transformovali na číselné vyjádření, které pak dále můžeme použít pro výpočty. Pro dílčí ohodnocení variant podle kvalitativních kritérií budeme používat *bodovací metodu*. Při použití této metody rozhodovatel provádí dílčí ohodnocení varianty vzhledem k danému kritériu podle obvykle slovně vyjádřené hodnoty kvalitativní charakteristiky přiřazením bodů z bodové škály, která je jednotně stanovena pro všechna uvažovaná kvalitativní kritéria. Pokud například uvažujeme bodovací škálu 1-10, znamená 1 nejhůře ohodnocenou variantu a 10 nejlépe ohodnocenou variantu. Dalo by se říci, že takto transformujeme kritéria kvalitativní na kritéria "kvantitativní".

Nyní máme všechny varianty ohodnocené číselně. Abychom mohli vstupní informace o ohodnocení variant porovnávat mezi sebou, je nutné tyto informace transformovat tak, aby měly stejnou vypovídací schopnost, tj. aby byly ze stejné škály $S = \langle 0, 1 \rangle$. Takovou transformaci lze provést více způsoby. My si zde uvedeme 2 způsoby transformace, které využijeme v praktické části - standardizaci a stupně naplnění dílčích cílů. *Standardizace* transformuje informace podle následujícího vztahu

$$\varphi_j(x) = (x - D_j)/(H_j - D_j),$$

kde standardizované hodnoty $\varphi_j(x) \in \langle 0, 1 \rangle$, přičemž $x = f_j(a), a \in A$, H_j vyjadřuje hodnotu nejlepší varianty ze souboru variant hodnocenou dle j-tého kritéria a D_j vyjadřuje hodnotu nejhorší varianty ze souboru variant hodnocenou dle j-tého kritéria. Z toho plyne, že pro standardizované bazální hodnoty dostáváme hodnotu 0 a pro standardizované ideální hodnoty dostáváme hodnotu 1. Jak již bylo řečeno výše, uvažujeme pouze maximalizační kritéria, takže pokud máme v souboru kritérií i kritéria minimalizační, nejprve je převedeme na maximalizační a teprve pak je standardizujeme. Definujeme tedy nyní namísto kritéria f_j nové kritérium

$$F_j(a) = \varphi_j(f_j(a)),\ a \in A.$$

U *stupňů naplnění dílčích cílů* si rozhodovatel stanoví nezávisle na souboru variant hodnotící škálu dle každého kritéria (dílčího cíle), přičemž jeden krajní bod značí naprosté nenaplnění dílčího cíle a druhý naopak jeho úplné naplnění. Stupeň naplnění j-tého dílčího cíle variantou a je stanoven dle vzorce

$$u_j(a) = \frac{h_j(a) - h_j^0}{h_j^1 - h_j^0},$$

kde $h_j(a)$ vyjadřuje ohodnocení varianty a podle j-tého dílčího cíle, h_j^0 je krajní bod hodnotící škály reprezentující totální nenaplnění j-tého dílčího cíle a h_j^1 naopak krajní bod této škály odpovídající totálnímu naplnění uvažovaného dílčího cíle. Uvedený vzorec transformuje škály s rostoucí i klesající preferencí na interval $\langle 0, 1 \rangle$ chápaný jako škála s rostoucí preferencí.

Optimální neboli ideální varianta je varianta, která ze všech variant nabývá nejlepší ohodnocení zároveň podle všech kritérií. Označme ideální variantu a její hodnoty jako $H = (H_1, H_2, \ldots, H_m)$. Pokud transformujeme ohodnocení variant standardizací, jsou hodnoty ideální varianty $H = (1, 1, \ldots, 1)$, jinak řečeno ideální variantu tvoří varianty a_i, které jsou nejlépe ohodnocené podle j-tého kritéria. Na druhou stranu jestliže transformuje ohodnocení variant stupni naplnění dílčích cílů, pak hodnoty ideální varianty mnohdy nedosahují samých 1, jelikož hodnoty h_j^1 volíme nezávisle na souboru variant. Hodnoty ideální varianty v tomto případě jsou $H = (H_1, H_2, \ldots, H_m)$, kde hodnoty $H_1, H_2, \ldots, H_m$ představují nejlepší hodnoty jednotlivých kritérií na daném souboru variant. *Bazální varianta* je naopak varianta, která podle všech kritérií dosahuje nejhoršího ohodnocení. Takovou variantu označíme $D = (D_1, D_2, \ldots, D_m)$. V případě transformace ohodnocení variant standardizací jsou hodnoty bazální varianty $D = (0, 0, \ldots, 0)$. Transformujeme-li ohodnocení variant stupni naplnění dílčích cílů, mají hodnoty bazální varianty tvar $D = (D_1, D_2, \ldots, D_m)$, kde hodnoty $D_1, D_2, \ldots, D_m$ představují nejhorší hodnoty jednotlivých kritérií na daném souboru variant.

Nedominovaná varianta je taková, ke které neexistuje v množině variant jiná varianta, lépe ohodnocená alespoň podle jednoho kritéria a ne hůře podle ostatních kritérií. Úplným řešením úlohy vícekriteriálního hodnocení variant je množina nedominovaných variant A_N, která ale může být rozsáhlá a dokonce může být stejná jako původní množina všech rozhodovacích variant A.

Nechť $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ je množina variant a $C = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ je množina kritérií. Hodnocení variant podle jednotlivých kritérií bývá zadáno ve tvaru tzv. *kriteriální matice*:

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nm} \end{pmatrix},$$

kde $y_{ij} = f_j(a_i),\ i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m$ představuje ohodnocení i-té varianty podle j-tého kritéria.

1.3.1. Váhy kritérií

Většina metod vícekriteriálního rozhodování vyžaduje informaci o relativní důležitosti jednotlivých kritérií, kterou můžeme vyjádřit pomocí vah kritérií. Obecně platí, že váha je tím větší, čím větší je důležitost kritéria, ke kterému se váha vztahuje. Váhy dělíme na normované a nenormované. *Normované váhy*, se kterými pracuje většina metod, jsou definovány následujícím způsobem:

$$\sum_{j=1}^{m} v_j = 1, \quad v_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Pokud jsou stanoveny *nenormované váhy* $w_1, \ldots, w_m$ splňující pouze podmínku $w_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, m$, pak normované váhy z nich vypočteme dle vzorce

$$v_j = \frac{w_j}{\sum_{k=1}^{m} w_k}.$$

Existuje mnoho metod, jak můžeme zkonstruovat odhady vah, my si uvedeme ty nejpoužívanější:

Metfesselova alokace

Při použití *metody Metfesselovy alokace* rozhodovatel přímo zadáním normovaných vah

$$v_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \quad \sum_{j=1}^{m} v_j = 1,$$

určuje podíly dílčích cílů hodnocení na cíli celkovém. Jestliže je např. váha v_3 třetího dílčího cíle stanovena číslem 0,2, pak to při použití této metody znamená, že úplné dosažení tohoto dílčího cíle zaručuje aspoň 20% splnění cíle celkového a naopak, nebude-li tento dílčí cíl vůbec naplněn, pak určitě nebude minimálně ze 20% splněn celkový cíl.

Bodovací metoda

Bodovací metoda je založená na předpokladu, že rozhodovatel je schopen kvantitativně ohodnotit důležitost kritérií. Rozhodovatel nejprve zvolí bodovací stupnici a poté musí ohodnotit j-té kritérium hodnotou b_j ležící v dané stupnici. Bodové ohodnocení je tím vyšší, čím je kritérium důležitější. Bodové ohodnocení nemusí být vyjádřeno pouze celými čísly a může být stejné i pro několik kritérií. Váha j-tého kritéria se vypočte podle vzorce

$$v_j = \frac{b_j}{\sum_{j=1}^{m} b_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Saatyho metoda párových srovnání

U *Saatyho metody párových srovnání* je základním východiskem pro konstrukci vah uvažovaných kritérií matice párových srovnání S, které se říká Saatyho matice. Při vytváření párových srovnání $S = (s_{ij}),\ i, j = 1, 2, \ldots, m$, se často používá stupnice $1, 2, \ldots, 9$ a reciproké hodnoty. Prvky matice S se vypočtou jako odhady podílu vah i-tého a j-tého kritéria

$$s_{ij} \cong \frac{v_i}{v_j}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m.$$

Pro prvky matice S platí

$$\begin{aligned} s_{ii} &= 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ s_{ji} &= 1/s_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}$$

Zvolenému rozsahu stupnice $1, 2, \ldots, 9$ odpovídá vhodná verbální stupnice:

1 - rovnocenná kritéria i a j,

3 - slabě preferované kritérium i před j,

5 - silně preferované kritérium i před j,

7 - velmi silně preferované kritérium i před j,

9 - absolutně preferované kritérium i před j.

Hodnoty $2, 4, 6, 8$ vyjadřují mezistupně. Saatyho metoda konstrukce vah uvažovaných kritérií spočívá ve výpočtu vlastního vektoru odpovídajícího maximálnímu vlastnímu číslu matice párových srovnání S. Řešení soustavy m rovnic o m neznámých $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ vyjádřené ve vektorovém tvaru:

$$(S - \lambda_{max} I)x^T = 0,$$

nebo jinak vyjádřeno:

$$Sx^T = \lambda_{max} x^T,$$

kde λ_{max} je maximální vlastní číslo matice S a I je jednotková matice, dává vlastní vektor, z něhož pak stanovíme váhy následujícím způsobem:

$$v_j = \frac{x_j}{\sum_{j=1}^{m} x_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

2. Metody založené na měření vzdálenosti

Metody založené na měření vzdálenosti jsou jedny z mnoha druhů metod vedoucích k nalezení optimální varianty. V této kapitole si popíšeme tři tyto metody: minimalizaci vzdálenosti od ideální varianty, maximalizaci vzdálenosti od bazální varianty a metodu TOPSIS. Při psaní této kapitoly jsem vycházela z literatury [1] a [2].

U metod založených na měření vzdálenosti předpokládáme, že všechna kritéria jsou kardinální, buď všechna standardizovaná nebo všechna normalizovaná. Případná kvalitativní kritéria můžeme též uvažovat, ale musí být bodově ohodnocena. My budeme uvažovat všechna kritéria standardizovaná. Pro výsledné ohodnocení variant existují dvě základní metody založené na vzdálenosti:

- metoda minimalizace vzdálenosti od ideální varianty,
- metoda maximalizace vzdálenosti od bazální varianty.

Často do těchto metod bývá řazena také metoda TOPSIS, která je dalo by se říci určitou kombinací obou výše zmíněných základních metod založených na vzdálenosti. U této metody přichází v úvahu i kvalitativní kritéria.

Pro úplnost samozřejmě musíme uvést definici funkce vzdálenosti:

Definice 1. *Funkci* $d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *nazýváme* funkcí vzdálenosti v $\mathbb{R}^m$ *(*metrikou v $\mathbb{R}^m$*), splňuje-li následující 3 podmínky:*

$$d(x,y) \geq 0 \ \forall x,y \in \mathbb{R}^m, \text{("nezápornost")}, \tag{1}$$

$$d(x,x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^m, \text{("jednoznačnost")}, \tag{2}$$

$$d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \ \forall x,y,z \in \mathbb{R}^m, \text{("trojúhelníková nerovnost")}. \tag{3}$$

Speciálně nás bude zajímat funkce vzdálenosti, která má tvar:

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{m} |x_j - y_j|^n \right)^{1/n},$$

kde vektory jsou ve tvaru $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ a $n > 0$, respektive její modifikovaná podoba s normovanými váhami

$$d_v(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{m} v_j |x_j - y_j|^n \right)^{1/n},$$

kde váhy $v_j,\ j = 1, 2, \ldots, m$ vyjadřují důležitost vzdáleností jednotlivých složek vektoru.

2.1. Minimalizace vzdálenosti od ideální varianty

Minimalizace vzdálenosti od ideální varianty je jedním z výpočetních principů pro nalezení kompromisní varianty. Tento princip spočívá v řešení úlohy

$$d_v(H, a) = \left(\sum_{j=1}^{m} v_j (H_j - F_j(a_i))^n \right)^{1/n} \rightarrow min$$

při omezení

$$a_i \in A,$$

kde $v_j,\ j = 1, 2, \ldots, m$, je normovaná váha odchylky j-tého kritéria od ideální hodnoty H_j.

Vzdálenost může být měřena pomocí různých metrik, podle hodnot dosazených za exponent n. Nejčastěji jsou používány metriky -

- pro $n = 1$, dostáváme lineární metriku

$$d_{v_l}(H, a) = \sum_{j=1}^{m} v_j \mid H_j - F_j(a_i) \mid$$

- pro $n = 2$, dostáváme Euklidovskou metriku

$$d_{v_e}(H, a) = \left(\sum_{j=1}^{m} v_j (H_j - F_j(a_i))^2 \right)^{1/2}$$

- limitním přechodem pro $n \to \infty$, dostáváme Čebyševovu (též maximovou) metriku

$$d_{v_m}(H, a) = \max_j v_j(H_j - F_j(a_i)).$$

Pro názornost si uvedeme jednoduchý příklad, na němž si ukážeme, jak volba různých metrik může způsobit rozdíly ve výsledcích. Metodou stupňů naplnění dílčích cílů si stanovíme kriteriální matici Y, která má tvar

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0,6 & 0,2 \\ 0,6 & 0,8 & 0,65 \\ 0,7 & 0,8 & 1 \\ 0 & 0,8 & 0,7 \\ 0,5 & 0,8 & 0 \\ 0,55 & 0,8 & 0,43 \end{pmatrix}$$

Pro jednoduchost budeme uvažovat, že všechna kritéria jsou stejně významná, tj. pro normované váhy platí $v_j = 1/3,\ j = 1, 2, 3$.

V tomto okamžiku již můžeme metodou minimalizace vzdálenosti od ideální varianty uspořádat varianty od nejhorší po nejlepší. Pro porovnání si tuto metodu propočítáme pro každou z výše uvedených metrik. Výsledky shrneme v Tab. 1.

Tabulka 1: Minimalizace vzdálenosti od ideální varianty

	$d_{v_l}(H, a)$	$d_{v_e}(H, a)$	$d_{v_m}(H, a)$
a_1	0,33	0,48	0,27
a_2	0,25	0,31	0,13
a_3	0,1	0,17	0,1
a_4	0,43	0,6	0,33
a_5	0,5	0,65	0,33
a_6	0,34	0,42	0,19

V Tab. 2 jsou zformulovány výsledky jako pořadí variant podle jednotlivých metrik, tzn. varianta, která je první, je nejlepší a naopak varianta, která je poslední (resp. šestá), je nejhorší.

Jak můžeme vidět na výsledcích v Tab. 2, nemají jednotlivé metriky vliv na v pořadí první a druhou variantu. Jestliže porovnáváme výsledky vypočtené

Tabulka 2: Minimalizace vzdálenosti od ideální varianty - uspořádání variant

	$d_{v_l}(H,a)$	$d_{v_e}(H,a)$	$d_{v_m}(H,a)$
a_1	3.	4.	4.
a_2	2.	2.	2.
a_3	1.	1.	1.
a_4	5.	5.	5.-6.
a_5	6.	6.	5.-6.
a_6	4.	3.	3.

podle lineární a Euklidovské metriky, všimneme si, že se prohodilo pořadí variant a_1 a a_6. To je způsobeno tím, že Euklidovská metrika, narozdíl od metriky lineární, upřednostňuje varianty, jejichž vzdálenost od ideální varianty nevykazuje vyšší odchylky, tedy konkrétně pro varianty a_1 a a_6 platí, že a_6 je hodnocena lépe, protože odchylky od ideální varianty jsou 0,45; 0; 0,57, kdežto odchylky od ideální varianty v případě varianty a_1 jsou 0; 0,2; 0,8 a právě poslední hodnota představuje výraznou odchylku, kvůli které je tato varianta hodnocena hůře. Ve srovnání s lineární metrikou je to paradoxní, protože součet odchylek u a_6 je 1,02 a u a_1 je 1. Při zkoumání výsledků vypočtených Čebyševovou metrikou můžeme pozorovat vlastnost zmíněné metriky, kdy na první pohled lepší varianta a_4 vyjde stejně jako a_5. K této vlastnosti Čebyševovy metriky se vrátíme později.

2.2. Maximalizace vzdálenosti od bazální varianty

Dalším výpočetním principem pro nalezení kompromisní varianty je maximalizace vzdálenosti od bazální varianty, která spočívá v řešení úlohy

$$d_v(D,a) = \left(\sum_{j=1}^{m} v_j (D_j - F_j(a_i))^n \right)^{1/n} \to max$$

při omezení

$$a_i \in A,$$

kde $v_j,\ j = 1, 2, \ldots, m$, je normovaná váha odchylky j-tého kritéria od bazální hodnoty D_j.

Na základě hodnot dosazených za exponent n můžeme vzdálenost měřit pomocí různých metrik. Mezi nejpoužívanější metriky patří -

- pro $n = 1$, dostáváme lineární metriku

$$d_{v_l}(D, a) = \sum_{j=1}^{m} v_j \mid D_j - F_j(a_i) \mid$$

- pro $n = 2$, dostáváme Euklidovskou metriku

$$d_{v_e}(D, a) = \left(\sum_{j=1}^{m} v_j (D_j - F_j(a_i))^2 \right)^{1/2}$$

- limitním přechodem pro $n \to \infty$, dostáváme Čebyševovu (maximovou) metriku

$$d_{v_m}(D, a) = \max_j v_j \mid D_j - F_j(a_i) \mid .$$

Stejně jako u předchozí metody si ukážeme výpočty s jednotlivými metrikami na příkladu. Budeme uvažovat stejnou kriteriální matici Y i stejné váhy jako v předchozí kapitole. Výpočty metodou maximalizace vzdálenosti od bazální varianty jsou shrnuty v Tab. 3.

Tabulka 3: Maximalizace vzdálenosti od ideální varianty

	$d_{v_l}(D, a)$	$d_{v_e}(D, a)$	$d_{v_m}(D, a)$
a_1	0,4	0,59	0,33
a_2	0,48	0,52	0,22
a_3	0,63	0,71	0,33
a_4	0,3	0,42	0,23
a_5	0,23	0,31	0,17
a_6	0,39	0,42	0,18

V Tab. 4 jsou uvedeny výsledky z hlediska pořadí variant. Jak můžeme z výsledků pozorovat, v případě maximalizace vzdálenosti od bazální varianty jsou

Tabulka 4: Maximalizace vzdálenosti od ideální varianty - uspořádání variant

	$d_{v_l}(D,a)$	$d_{v_e}(D,a)$	$d_{v_m}(D,a)$
a_1	3.	2.	1.-2.
a_2	2.	3.	4.
a_3	1.	1.	1.-2.
a_4	5.	4.	3.
a_5	6.	6.	6.
a_6	4.	5.	5.

velké rozdíly ve výsledcích při použití různých metrik. Jediná varianta, která dosáhla stejného pořadí podle všech tří použitých metrik, je v pořadí 6. nejlepší varianta. Pokud porovnáme výsledky vypočítané dle lineární a Euklidovské metriky, zjistíme, že Euklidovská metrika upřednostňuje varianty, jejichž vzdálenosti od bazální varianty vykazují vyšší odchylku. V případě variant a_1 a a_2 je varianta a_1 hodnocena lépe, jelikož jedna z jejích vzdáleností od bazální varianty vykazuje vysokou odchylku, narozdíl od varianty a_2, jejíž vzdálenosti od bazální varianty jsou všechny sice poměrně vysoké, ale nevykazují tak výraznou odchylku jako u a_1. Pokud porovnáme chování Euklidovské metriky u minimalizace a maximalizace vzdálenosti, zjistíme, že je protichůdné. Taktéž jsou jiné výsledky vypočtené dle těchto metod. Navzdory tomu u lineární metriky nezávisí na volbě minimalizace či maximalizace vzdálenosti, protože výsledky jsou z hlediska pořadí variant stejné.

Na speciálním příkladu budeme demonstrovat nevýhody Čebyševovy metriky, které mohou výrazně zkreslit vypovídací schopnost výsledků. Stanovíme si kriteriální matici Y, která má tvar

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

Provedeme výpočet minimalizace vzdálenosti od ideální varianty a maximalizace vzdálenosti od bazální varianty při použití Čebyševovy metriky. Výsledky jsou uvedeny v Tab. 5.

Tabulka 5: Minimalizace a maximalizace vzdálenosti dle Čebyševovy metriky

	$d_{v_m}(H,a)$	$d_{v_m}(D,a)$
a_1	0,33	0,33
a_2	0,33	0,33
a_3	0,33	0,33

Na výsledcích pozorujeme, že všechny varianty jsou ohodnoceny stejně, tedy všechny jsou nejlepšími variantami. Z ohodnocení variant dle jednotlivých kritérií v matici Y však pozorujeme, že logicky by nejlepší variantou měla být varianta a_2. Názorně jsme si ukázali, že použití Čebyševovy metriky při výpočtu minimalizace a maximalizace vzdálenosti může podstatně zkreslit reálné výsledky. Je to způsobeno tím, že tato metrika bere v úvahu pouze kritéria, u nichž je vzdálenost hodnoty dané varianty od hodnoty u ideální, resp. bazální varianty maximální.

2.3. Metoda TOPSIS

Metoda TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution), která byla poprvé popsána v knize [5], je výpočetní princip, který je kombinací dvou předchozích metod, tj. minimalizace vzdálenosti od ideální varianty a maximalizace vzdálenosti od bazální varianty. Vstupními údaji, které požadujeme, jsou kriteriální hodnoty pro jednotlivé varianty a váhy jednotlivých kritérií.

Kriteriální hodnoty pro jednotlivé varianty jsou uspořádány v kriteriální matici $Y = (y_{ij})$, kde y_{ij} je hodnota i-té varianty podle j-tého kritéria. Kriteriální hodnoty pro jednotlivé varianty však lze zapsat do kriteriální matice pouze v případě, že všechna kritéria jsou kvantitativní. Pokud máme kritéria kvalitativní, je nutno je před zápisem do kriteriální matice transformovat na kritéria kvantitativní. Tuto transformaci lze provést pomocí bodovací metody, kterou jsme již zmiňovali výše a pomocí níž převedeme ohodnocení slovní na ohodnocení číselné. Bodovací metoda bere v úvahu jak kritéria maximalizační, tak i minimalizační.

Tato metoda spočívá ve výběru varianty, která je nejblíže k ideální variantě reprezentované vektorem $(H_1, H_2, \ldots, H_m)$ a nejdále od bazální varianty reprezentované vektorem $(D_1, D_2, \ldots, D_m)$.

Krok 1: Zkonstruujeme normalizovanou kriteriální matici $R = (r_{ij})$, kde pro výpočet normalizovaných hodnot je navržen vzorec

$$r_{ij} = \frac{y_{ij}}{\left(\sum_{i=1}^{n}(y_{ij})^p\right)^{1/p}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Krok 2: Vypočteme váženou kriteriální matici W tak, že j-tý sloupec normalizované kriteriální matice R násobíme odpovídající váhou v_j:

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \ldots & w_{1m} \\ w_{21} & w_{22} & \ldots & w_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{n1} & w_{n2} & \ldots & w_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 r_{11} & v_2 r_{12} & \ldots & v_m r_{1m} \\ v_1 r_{21} & v_2 r_{22} & \ldots & v_m r_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_1 r_{n1} & v_2 r_{n2} & \ldots & v_m r_{nm} \end{pmatrix}$$

Krok 3: Určíme ideální variantu $H = (H_1, H_2, \ldots, H_m)$ a bazální variantu $D = (D_1, D_2, \ldots, D_m)$ vzhledem k hodnotám ve vážené kriteriální matici, kde

$$H_j = \max_i w_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$
$$D_j = \min_i w_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Krok 4: Vypočteme vzdálenosti variant od ideální varianty

$$d_i^+ = \left(\sum_{j=1}^{m}(w_{ij} - H_j)^p\right)^{1/p}, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

a vzdálenosti variant od bazální varianty

$$d_i^- = \left(\sum_{j=1}^{m}(w_{ij} - D_j)^p\right)^{1/p}, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

Krok 5: Vypočteme relativní ukazatel vzdáleností variant od bazální varianty

$$c_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-}, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Pro hodnoty c_i platí:

$$0 \leq c_i \leq 1,$$
$$\text{přičemž } c_i = 0 \Leftrightarrow a_i = (D_1, D_2, \ldots, D_m)$$
$$\text{a } c_i = 1 \Leftrightarrow a_i = (H_1, H_2, \ldots, H_m).$$

Následně varianty uspořádáme podle klesajících hodnot ukazatele c_i, tj. nejvyšší hodnota je nejlepší a nejnižší hodnota je nejhorší. Díky tomu dostaneme úplné uspořádání všech variant.

Metoda TOPSIS používá pro výpočet Euklidovskou metriku, tím pádem dosadíme do vzorce v 1. a 4. kroku výpočtu $p = 2$. My si metodu TOPSIS modifikujeme tak, že v ní použijeme kromě Euklidovské metriky i metriky jiné. Při použití lineární metriky dosadíme ve vzorcích $p = 1$. Pro získání Čebyševovy metriky musíme použít limitní přechod pro $p \to \infty$.

Rozdíly ve výsledcích při použití jednotlivých metrik si znovu ukážeme na příkladu, kde kriteriální matice Y a váhy kritérií jsou stejné jako v kapitole 2.1. Metodu TOPSIS lze spočítat s použitím 3 různých metrik, my začneme výpočtem s použitím lineární metriky. Kriteriální matice R má tvar:

$$R = \begin{pmatrix} 0,30 & 0,13 & 0,07 \\ 0,18 & 0,17 & 0,22 \\ 0,21 & 0,17 & 0,34 \\ 0 & 0,17 & 0,23 \\ 0,15 & 0,17 & 0 \\ 0,16 & 0,17 & 0,14 \end{pmatrix}$$

Matici R pronásobíme s váhami kritérií a vznikne matice W:

$$W = \begin{pmatrix} 0,10 & 0,04 & 0,02 \\ 0,06 & 0,06 & 0,07 \\ 0,07 & 0,06 & 0,11 \\ 0 & 0,06 & 0,08 \\ 0,05 & 0,06 & 0 \\ 0,05 & 0,06 & 0,05 \end{pmatrix}$$

V posledním kroku vypočteme vzdálenosti variant od ideální varianty, vzdálenosti od bazální varianty a z těchto vzdáleností pak vypočteme relativní ukazatel vzdáleností variant od bazální varianty. Všechny výsledky těchto výpočtů jsou shrnuty v Tab. 6.

Tabulka 6: TOPSIS - lineární metrika

	$d_{i_l}^+$	$d_{i_l}^-$	c_{i_l}
a_1	0,10	0,12	0,54
a_2	0,08	0,15	0,65
a_3	0,03	0,20	0,87
a_4	0,13	0,09	0,41
a_5	0,16	0,06	0,28
a_6	0,11	0,11	0,52

V případě použití Euklidovské metriky mají matice R a W tvar

$$R = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,32 & 0,14 \\ 0,39 & 0,42 & 0,44 \\ 0,45 & 0,42 & 0,68 \\ 0 & 0,42 & 0,48 \\ 0,32 & 0,42 & 0 \\ 0,35 & 0,42 & 0,29 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 0,22 & 0,11 & 0,05 \\ 0,13 & 0,14 & 0,15 \\ 0,15 & 0,14 & 0,23 \\ 0 & 0,14 & 0,16 \\ 0,11 & 0,14 & 0 \\ 0,12 & 0,14 & 0,10 \end{pmatrix}$$

Vzdálenosti variant od ideální a bazální varianty a relativní ukazatel vzdáleností jsou uvedeny v Tab. 7.

Tabulka 7: TOPSIS - Euklidovská metrika

	$d_{i_e}^+$	$d_{i_e}^-$	c_{i_e}
a_1	0,22	0,26	0,54
a_2	0,17	0,31	0,65
a_3	0,06	0,41	0,87
a_4	0,28	0,19	0,41
a_5	0,34	0,14	0,30
a_6	0,23	0,25	0,53

Poslední metrikou, kterou při výpočtu metody TOPSIS využijeme, je Čebyševova metrika. Matice R a W jsou tvaru

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0,75 & 0,2 \\ 0,6 & 1 & 0,65 \\ 0,7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0,7 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ 0,55 & 1 & 0,43 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 0,33 & 0,25 & 0,07 \\ 0,2 & 0,33 & 0,22 \\ 0,23 & 0,33 & 0,33 \\ 0 & 0,33 & 0,23 \\ 0,17 & 0,33 & 0 \\ 0,18 & 0,33 & 0,14 \end{pmatrix}$$

Vypočteme vzdálenosti variant od ideální a bazální varianty a relativní ukazatel vzdáleností. Výsledky výpočtů jsou uvedeny v Tab. 8.

Tabulka 8: TOPSIS - Čebyševova metrika

	$d_{i_m}^+$	$d_{i_m}^-$	c_{i_m}
a_1	0,35	0,4	0,53
a_2	0,25	0,5	0,67
a_3	0,1	0,65	0,87
a_4	0,43	0,32	0,42
a_5	0,5	0,25	0,33
a_6	0,34	0,41	0,55

V Tab. 9 jsou shrnuty výsledky ve výpočtech dle jednotlivých metrik.

Tabulka 9: TOPSIS dle jednotlivých metrik

	c_{i_l}	c_{i_e}	c_{i_m}
a_1	0,54	0,54	0,53
a_2	0,65	0,65	0,67
a_3	0,87	0,87	0,87
a_4	0,41	0,41	0,42
a_5	0,28	0,30	0,33
a_6	0,52	0,53	0,55

V Tab. 10 jsou znázorněny výsledky dle jednotlivých metrik z hlediska pořadí variant od nejlepší (1.) po nejhorší (6.).

Z Tab. 10 můžeme vyčíst, že při použití různých metrik při výpočtu metody TOPSIS jsou výsledky velmi podobné, dokonce bychom mohli říci, že se téměř shodují. Jediný rozdíl můžeme vidět ve změně pořadí 3. a 4. nejlepší varianty (variant a_1 a a_6) při použití Čebyševovy metriky. To je pravděpodobně způsobeno jak blízkostí výsledného ohodnocení obou variant, tak vlastní koncepcí Čebyševovy metriky, která při výpočtu bere v úvahu pouze maximální hodnotu v rámci variant ohodnocených dle jednotlivých kritérií, narozdíl od metriky lineární a Euklidovské, v nichž se tyto hodnoty sčítají. Obecně metoda TOPSIS odstraňuje

Tabulka 10: TOPSIS dle jednotlivých metrik - uspořádání variant

	c_{i_l}	c_{i_e}	c_{i_m}
a_1	3.	3.	4.
a_2	2.	2.	2.
a_3	1.	1.	1.
a_4	5.	5.	5.
a_5	6.	6.	6.
a_6	4.	4.	3.

rozdíl mezi minimalizací vzdálenosti od ideální varianty a maximalizací vzdálenosti od bazální varianty. To je pochopitelné, jelikož metoda TOPSIS je kombinací obou metod založených na měření vzdálenosti.

3. Aplikace metod na praktickém rozhodovacím problému

Nyní si předchozí teorii aplikujeme na praktickém rozhodovacím problému. Rozhodovacím problémem je výběr účtu pro studenty poskytovaného bankami působícími v ČR. Cílem je vybrat optimální studentský účet, který bude co možná nejvíce splňovat námi zvolená kritéria. Při vytváření tohoto rozhodovacího problému a při stanovování ohodnocení variant podle jednotlivých kritérií jsem vycházela z internetových zdrojů [6] - [21].

Nejprve popíšu svou životní situaci, jelikož se od ní odvíjí zvolená kritéria a taktéž váhy těchto kritérií. Jsem studentka UP v Olomouci, kde mám pronajatý byt, ve kterém bydlím v období pracovního týdne. O víkendech jezdím domů do Horního Města, malé obce v okresu Bruntál. Pokud bych si chtěla založit studentský účet, vybrala bych si banku, která má pobočku v blízkosti mého trvalého bydliště. Na druhou stranu bankomat pro výběr hotovosti bych preferovala v Olomouci, protože je tam rozsáhlejší síť bankomatů.

Kritéria hodnocení variant jsou:

- f_1 - dostupnost banky (kritérium kvantitativní, minimalizační),
- f_2 - měsíční cena účtu (kritérium kvantitativní, minimalizační),
- f_3 - dostupnost bankomatu z domova (kritérium kvantitativní, minimalizační),
- f_4 - průměrná doba výběru z bankomatu (kritérium kvantitativní, minimalizační),
- f_5 - služby, které jsou k účtu nabízeny zdarma (kritérium kvalitativní, maximalizační),
- f_6 - reputace banky (kritérium kvalitativní, maximalizační).

Jelikož zde hodnotíme varianty podle více kritérií, jedná se o vícekriteriální rozhodování. Rozhodovatelem je zde jedna osoba, konkrétně autorka této bakalářské práce. Dvě poslední jmenované banky sice neposkytují přímo studentské účty, ale my jsme je zahrnuli do souboru variant pro porovnání výhodnosti jejich účtů vzhledem ke studentským účtům ostatních bank, jelikož tyto dvě banky standardně nabízí účty bez poplatků. Variantami jsou, jak již bylo řečeno, produkty jednotlivých bank, konkrétně

- a_1 - Studentský účet Raiffeisen Bank
- a_2 - Osobní účet České Spořitelny Student
- a_3 - ČSOB Studentské konto Plus
- a_4 - Gaudeamus 2 nadstandard - Komerční banka
- a_5 - Genius Student - GE Money Bank
- a_6 - Studentské Konto UniCredit Bank
- a_7 - mKONTO - mBank
- a_8 - Běžný účet - Fio banka.

Nejprve si blíže popíšeme jednotlivá kritéria. Kritérium dostupnost banky chápeme jako vzdálenost banky v kilometrech od trvalého bydliště rozhodovatele. Kritérium měsíční cena účtu zahrnuje cenu různých bankovních transakcí, které námi zvolený rozhodovatel uskutečňuje v průběhu jednoho měsíce, a také měsíční úrok, který od této souhrnné ceny odečítáme (úrok je vypočten z průměrného zůstatku na účtu, který jsme si stanovili na 3000 Kč). Toto kritérium je podrobněji rozpracováno v Tab. 11.

Kritérium dostupnost bankomatu z domova je vyjádřením vzdálenosti bankomatu od bydliště rozhodovatele, toto kritérium je opět vyjádřeno v kilometrech. Kritérium průměrná doba výběru z bankomatu vyjadřuje vzdálenost bankomatu od pronajmutého bytu rozhodovatele v Olomouci a průměrnou dobu, kterou čekáme na výběr z bankomatu v případě fronty, v minutách. Další kritérium

Tabulka 11: Měsíční cena účtu

Položka, Banka	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
správa (vedení) účtu	30	0	0	20	0	19	0	0
správa karty	25	0	45	0	0	0	0	0
výpis z účtu el.	0	0	0	0	0	0	0	0
přímé bankovnictví	0	0	0	0	0	0	0	0
3x výběr z vl. ATM	9,9	18	0	0	0	0	27	0
2x příchozí platba	0	14	0	0	0	0	0	0
2x příkaz k úhradě	12	4	0	4	8	12	0	0
trvalý příkaz k úhradě	6	5	0	6	3	6	0	0
3x platba kartou	0	0	0	0	0	0	0	0
úrok	0,03	0,03	0,03	0,5	0,03	1,25	0	0,25
cena celkem	82,87	40,97	44,97	29,5	10,97	35,75	27	-0,25

služby k účtu zdarma zohledňuje nejen počet služeb k účtu zdarma, ale také jejich významnost pro rozhodovatele. Posledním kritériem je reputace banky, která je vyjádřením preference rozhodovatele vůči jednotlivým bankám.

Nyní si stanovíme důležitost jednotlivých kritérií pomocí 3 různých metod stanovení vah - Metfesselovy alokace, bodovací metody a Saatyho metody párových srovnání. Ze všeho nejdříve stanovíme váhy metodou Metfesselovy alokace, viz. Tab. 12.

Tabulka 12: Stanovení vah metodou Metfesselovy alokace

Kritérium	Váha
f_1	0,13
f_2	0,32
f_3	0,17
f_4	0,24
f_5	0,09
f_6	0,05
	$\sum_{j=1}^{6} v_j = 1$

Nyní stanovíme váhy bodovací metodou, viz. Tab. 13.

Poslední metodou, kterou jsme si pro stanovení vah vybrali, je Saatyho metoda

Tabulka 13: Stanovení vah bodovací metodou

Kritérium	w_j	v_j
f_1	5	0,15
f_2	10	0,30
f_3	6	0,18
f_4	7	0,22
f_5	3	0,09
f_6	2	0,06
	$\sum_{j=1}^{6} w_j = 33$	$\sum_{j=1}^{6} v_j = 1$

párových srovnání, viz. Tab. 14.

Tabulka 14: Stanovení vah Saatyho metodou

S	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	w_j	v_j
f_1	1	1/6	1/3	1/6	3	5	0,67	0,08
f_2	6	1	5	3	7	9	3,94	0,44
f_3	3	1/5	1	1/3	5	7	1,18	0,14
f_4	6	1/3	3	1	7	9	2,29	0,26
f_5	1/3	1/7	1/5	1/7	1	3	0,41	0,05
f_6	1/5	1/9	1/7	1/9	1/3	1	0,23	0,03
							$\sum_{j=1}^{6} w_j = 8,72$	$\sum_{j=1}^{6} v_j = 1$

Z těchto 3 metod stanovení vah kritérií chceme vybrat tu metodu, která bude nejlépe odpovídat preferencím rozhodovatele z hlediska významnosti jednotlivých kritérií. Z tohoto důvodu budeme pro další výpočty používat váhy stanovené metodou Metfesselovy alokace, jelikož nejvíce odpovídají mému názoru na ohodnocení významnosti jednotlivých kritérií.

Jak je uvedeno výše, některá z kritérií, konkrétně služby, které jsou k účtu nabízeny zdarma, a reputace banky, jsou kritéria kvalitativní. Tato kritéria převedeme na kritéria kvantitativní prostřednictvím bodovací metody ohodnocení variant, přičemž jsme zvolili bodovací škálu 1-10, kde 1 znamená nejhůře ohodnocenou variantu a 10 nejlépe ohodnocenou variantu. V této fázi rozdělíme pokračování příkladu na 2 části, jelikož budeme používat 2 různé možnosti pro ohodnocení variant podle jednotlivých kritérií.

3.1. Ohodnocení variant standardizací

Ohodnocení všech variant podle jednotlivých kritérií můžeme zapsat do kriteriální matice Y:

$$Y = \begin{pmatrix} 31,2 & 82,88 & 31,2 & 3 & 3 & 9 \\ 5,3 & 40,98 & 5,3 & 5 & 2 & 1 \\ 24,1 & 44,98 & 5,9 & 3 & 1 & 7 \\ 5,1 & 29,5 & 5,1 & 6 & 5 & 10 \\ 21,6 & 10,98 & 5,2 & 4 & 5 & 8 \\ 34,7 & 35,75 & 37,4 & 1 & 8 & 4 \\ 44,5 & 27 & 5,1 & 1 & 6 & 6 \\ 31,6 & -0,25 & 36 & 44 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Jelikož máme v souboru kritérií i kritéria minimalizační, převedeme tato kritéria na maximalizační, abychom získali kriteriální matici, v níž jsou všechna kritéria maximalizační. Vznikne nám tedy matice, která má tvar:

$$\begin{pmatrix} 13,3 & 0 & 6,2 & 41 & 3 & 9 \\ 39,2 & 41,9 & 32,1 & 39 & 2 & 1 \\ 20,4 & 37,9 & 31,5 & 41 & 1 & 7 \\ 39,4 & 53,38 & 32,3 & 38 & 5 & 10 \\ 22,9 & 71,9 & 32,2 & 40 & 5 & 8 \\ 9,8 & 47,13 & 0 & 43 & 8 & 4 \\ 0 & 55,88 & 32,3 & 43 & 6 & 6 \\ 12,9 & 83,13 & 1,4 & 0 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

V dalším kroku tuto matici standardizujeme, abychom dostali lépe porovnatelné hodnoty:

$$\begin{pmatrix} 0,34 & 0 & 0,19 & 0,95 & 0,22 & 0,89 \\ 0,99 & 0,50 & 0,99 & 0,91 & 0,11 & 0 \\ 0,52 & 0,46 & 0,98 & 0,95 & 0 & 0,67 \\ 1 & 0,64 & 1 & 0,88 & 0,44 & 1 \\ 0,58 & 0,86 & 1 & 0,93 & 0,44 & 0,78 \\ 0,25 & 0,57 & 0 & 1 & 0,78 & 0,33 \\ 0 & 0,67 & 1 & 1 & 0,56 & 0,56 \\ 0,33 & 1 & 0,04 & 0 & 1 & 0,11 \end{pmatrix}$$

Po standardizaci hodnot již můžeme vypočítat ohodnocení variant metodou minimalizace vzdálenosti od ideální varianty a metodou maximalizace vzdálenosti od bazální varianty. Výsledky těchto metod jsou uvedeny v Tab. 15.

Tabulka 15: Minimalizace a maximalizace vzdálenosti

	$d_{v_l}(H,a)$	$d_{v_e}(H,a)$	$d_{v_m}(H,a)$	$d_{v_l}(D,a)$	$d_{v_e}(D,a)$	$d_{v_m}(D,a)$
a_1	0,63	0,74	0,32	0,37	0,53	0,23
a_2	0,31	0,45	0,16	0,69	0,76	0,22
a_3	0,36	0,47	0,17	0,64	0,71	0,23
a_4	0,19	0,27	0,11	0,81	0,83	0,21
a_5	0,18	0,25	0,05	0,82	0,84	0,28
a_6	0,46	0,57	0,17	0,54	0,64	0,24
a_7	0,30	0,44	0,13	0,70	0,77	0,24
a_8	0,53	0,70	0,24	0,47	0,65	0,32

V Tab. 16 jsou uvedeny výsledky z Tab. 15 z hlediska uspořádání variant.

Tabulka 16: Minimalizace a maximalizace vzdálenosti - uspořádání variant

	$d_{v_l}(H,a)$	$d_{v_e}(H,a)$	$d_{v_m}(H,a)$	$d_{v_l}(D,a)$	$d_{v_e}(D,a)$	$d_{v_m}(D,a)$
a_1	8.	8.	8.	8.	8.	5.-6.
a_2	4.	4.	4.	4.	4.	7.
a_3	5.	5.	6.	5.	5.	5.-6.
a_4	2.	2.	2.	2.	2.	8.
a_5	1.	1.	1.	1.	1.	2.
a_6	6.	6.	5.	6.	7.	3.-4.
a_7	3.	3.	3.	3.	3.	3.-4.
a_8	7.	7.	7.	7.	6.	1.

Dále provedeme výpočet metodou TOPSIS. Nejdříve provedeme výpočet metodou TOPSIS, ve které využijeme lineární metriku. Matice R a W jsou tvaru:

$$R = \begin{pmatrix} 0,08 & 0 & 0,04 & 0,14 & 0,06 & 0,21 \\ 0,25 & 0,11 & 0,19 & 0,14 & 0,03 & 0 \\ 0,13 & 0,1 & 0,19 & 0,14 & 0 & 0,15 \\ 0,25 & 0,14 & 0,19 & 0,13 & 0,13 & 0,23 \\ 0,15 & 0,18 & 0,21 & 0,14 & 0,13 & 0,18 \\ 0,06 & 0,12 & 0 & 0,15 & 0,22 & 0,08 \\ 0 & 0,14 & 0,19 & 0,15 & 0,16 & 0,13 \\ 0,08 & 0,21 & 0,01 & 0 & 0,28 & 0,03 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 0,01 & 0 & 0 & 0,03 & 0,01 & 0,01 \\ 0,03 & 0,03 & 0,03 & 0,03 & 0 & 0 \\ 0,02 & 0,03 & 0,03 & 0,03 & 0 & 0,01 \\ 0,03 & 0,04 & 0,03 & 0,03 & 0,01 & 0,01 \\ 0,02 & 0,06 & 0,03 & 0,03 & 0,01 & 0,01 \\ 0,01 & 0,04 & 0 & 0,04 & 0,02 & 0 \\ 0 & 0,05 & 0,03 & 0,04 & 0,01 & 0,01 \\ 0,01 & 0,07 & 0 & 0 & 0,03 & 0 \end{pmatrix}$$

Vypočteme vzdálenosti variant od ideální varianty, vzdálenosti od bazální varianty, z těchto vzdáleností následně vypočteme relativní ukazatel vzdáleností variant od bazální varianty. Výsledky výpočtů jsou uvedeny v Tab. 17.

Tabulka 17: TOPSIS - lineární metrika

	$d_{i_l}^+$	$d_{i_l}^-$	c_{i_l}
a_1	0,14	0,07	0,33
a_2	0,07	0,13	0,65
a_3	0,08	0,12	0,59
a_4	0,04	0,16	0,79
a_5	0,04	0,16	0,80
a_6	0,1	0,11	0,52
a_7	0,07	0,14	0,66
a_8	0,1	0,11	0,52

V případě použití Euklidovské metriky mají matice R a W tvar

$$R = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,09 & 0,38 & 0,14 & 0,49 \\ 0,59 & 0,27 & 0,45 & 0,36 & 0,07 & 0 \\ 0,31 & 0,25 & 0,44 & 0,38 & 0 & 0,37 \\ 0,59 & 0,35 & 0,45 & 0,35 & 0,29 & 0,55 \\ 0,34 & 0,47 & 0,45 & 0,37 & 0,29 & 0,43 \\ 0,15 & 0,31 & 0 & 0,4 & 0,51 & 0,18 \\ 0 & 0,36 & 0,45 & 0,4 & 0,36 & 0,31 \\ 0,19 & 0,54 & 0,02 & 0 & 0,65 & 0,06 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 0,03 & 0 & 0,01 & 0,09 & 0,01 & 0,02 \\ 0,08 & 0,09 & 0,08 & 0,09 & 0,01 & 0 \\ 0,04 & 0,08 & 0,07 & 0,09 & 0 & 0,02 \\ 0,08 & 0,11 & 0,08 & 0,08 & 0,03 & 0,03 \\ 0,04 & 0,15 & 0,08 & 0,09 & 0,03 & 0,02 \\ 0,02 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,05 & 0,01 \\ 0 & 0,12 & 0,08 & 0,1 & 0,03 & 0,02 \\ 0,03 & 0,17 & 0 & 0 & 0,06 & 0 \end{pmatrix}$$

Vypočteme vzdálenosti variant od ideální a bazální varianty a relativní ukazatel vzdáleností. Výsledky jsou uvedeny v Tab. 18.

Tabulka 18: TOPSIS - Euklidovská metrika

	$d_{i_e}^+$	$d_{i_e}^-$	c_{i_e}
a_1	0,2	0,1	0,34
a_2	0,1	0,16	0,61
a_3	0,12	0,15	0,56
a_4	0,07	0,18	0,72
a_5	0,05	0,2	0,79
a_6	0,12	0,15	0,54
a_7	0,1	0,17	0,63
a_8	0,13	0,18	0,58

Poslední metrikou, kterou při výpočtu metody TOPSIS využijeme, je Čebyševova metrika. Matice R a W jsou tvaru

$$R = \begin{pmatrix} 0,34 & 0 & 0,19 & 0,95 & 0,22 & 0,89 \\ 1 & 0,5 & 0,99 & 0,91 & 0,11 & 0 \\ 0,52 & 0,46 & 0,98 & 0,95 & 0 & 0,67 \\ 1 & 0,64 & 1 & 0,88 & 0,44 & 1 \\ 0,58 & 0,86 & 1 & 0,93 & 0,44 & 0,78 \\ 0,25 & 0,57 & 0 & 1 & 0,78 & 0,33 \\ 0 & 0,67 & 1 & 1 & 0,56 & 0,56 \\ 0,33 & 1 & 0,04 & 0 & 1 & 0,11 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 0,04 & 0 & 0,03 & 0,23 & 0,02 & 0,04 \\ 0,13 & 0,16 & 0,17 & 0,22 & 0,01 & 0 \\ 0,07 & 0,15 & 0,17 & 0,23 & 0 & 0,03 \\ 0,13 & 0,21 & 0,17 & 0,21 & 0,04 & 0,05 \\ 0,08 & 0,28 & 0,17 & 0,22 & 0,04 & 0,04 \\ 0,03 & 0,18 & 0 & 0,24 & 0,07 & 0,02 \\ 0 & 0,22 & 0,17 & 0,24 & 0,05 & 0,03 \\ 0,04 & 0,32 & 0,01 & 0 & 0,09 & 0,01 \end{pmatrix}$$

Opět vypočteme vzdálenosti variant od ideální a bazální varianty a relativní ukazatel vzdáleností. V Tab. 19 jsou uvedeny výsledky předchozích výpočtů.

Tabulka 19: TOPSIS - Čebyševova metrika

	$d^+_{i_m}$	$d^-_{i_m}$	c_{i_m}
a_1	0,32	0,23	0,42
a_2	0,16	0,22	0,58
a_3	0,17	0,23	0,57
a_4	0,11	0,21	0,65
a_5	0,05	0,28	0,84
a_6	0,17	0,24	0,59
a_7	0,13	0,24	0,65
a_8	0,24	0,32	0,57

Pro přehlednost si uvedeme výsledky ve výpočtech dle jednotlivých metrik. Ty jsou shrnuty v Tab. 20. V Tab. 21 jsou shrnuty výsledky jako pořadí jednotlivých variant.

Tabulka 20: TOPSIS dle jednotlivých metrik

	c_{i_l}	c_{i_e}	c_{i_m}
a_1	0,33	0,34	0,42
a_2	0,65	0,61	0,58
a_3	0,59	0,56	0,57
a_4	0,79	0,72	0,65
a_5	0,8	0,79	0,84
a_6	0,52	0,54	0,59
a_7	0,66	0,63	0,65
a_8	0,52	0,58	0,57

Tabulka 21: TOPSIS dle jednotlivých metrik - uspořádání variant

	c_{i_l}	c_{i_e}	c_{i_m}
a_1	8.	8.	8.
a_2	4.	4.	5.
a_3	5.	6.	7.
a_4	2.	2.	2.
a_5	1.	1.	1.
a_6	7.	7.	4.
a_7	3.	3.	3.
a_8	6.	5.	6.

3.2. Ohodnocení variant stupni naplnění dílčích cílů

Nejprve si opět zapíšeme ohodnocení variant dle jednotlivých kritérií do kriteriální matice Y:

$$Y = \begin{pmatrix} 31,2 & 82,88 & 31,2 & 3 & 3 & 9 \\ 5,3 & 40,98 & 5,3 & 5 & 2 & 1 \\ 24,1 & 44,98 & 5,9 & 3 & 1 & 7 \\ 5,1 & 29,5 & 5,1 & 6 & 5 & 10 \\ 21,6 & 10,98 & 5,2 & 4 & 5 & 8 \\ 34,7 & 35,75 & 37,4 & 1 & 8 & 4 \\ 44,5 & 27 & 5,1 & 1 & 6 & 6 \\ 31,6 & -0,25 & 36 & 44 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Stanovíme hodnotící škálu, kterou potřebujeme pro transformaci ohodnocení variant, viz. Tab. 22.

Tabulka 22: Hodnotící škála - ohodnocení variant stupni naplnění dílčích cílů

	f_1	f_2	f_3	f_4
h_j^1	0	-5	0	0
h_j^0	40	80	10	15

Ohodnocení variant podle kritérií transformujeme stupni naplnění dílčích cílů:

$$\begin{pmatrix} 0,22 & 0 & 0 & 0,8 & 0,22 & 0,89 \\ 0,87 & 0,46 & 0,47 & 0,67 & 0,11 & 0 \\ 0,40 & 0,41 & 0,41 & 0,8 & 0 & 0,67 \\ 0,87 & 0,59 & 0,49 & 0,6 & 0,44 & 1 \\ 0,46 & 0,81 & 0,48 & 0,73 & 0,44 & 0,78 \\ 0,13 & 0,52 & 0 & 0,93 & 1 & 0,33 \\ 0 & 0,62 & 0,49 & 0,93 & 0,56 & 0,56 \\ 0,21 & 0,94 & 0 & 0 & 1 & 0,11 \end{pmatrix}$$

Vypočteme ohodnocení variant metodou minimalizace a maximalizace vzdálenosti. Výsledky jsou uvedeny v Tab. 23. V Tab. 24 jsou uvedeny výsledky z Tab. 23 z hlediska uspořádání variant.

Tabulka 23: Minimalizace a maximalizace vzdálenosti

	$d_{v_l}(H,a)$	$d_{v_e}(H,a)$	$d_{v_m}(H,a)$	$d_{v_l}(D,a)$	$d_{v_e}(D,a)$	$d_{v_m}(D,a)$
a_1	0,58	0,66	0,30	0,29	0,45	0,19
a_2	0,35	0,46	0,16	0,51	0,56	0,16
a_3	0,38	0,47	0,17	0,48	0,53	0,19
a_4	0,24	0,31	0,11	0,62	0,64	0,19
a_5	0,21	0,26	0,05	0,66	0,67	0,26
a_6	0,35	0,44	0,14	0,51	0,63	0,22
a_7	0,28	0,4	0,11	0,58	0,65	0,22
a_8	0,44	0,59	0,22	0,42	0,62	0,30

Dále provedeme výpočet metodou TOPSIS. Nejdříve provedeme výpočet metodou TOPSIS, ve které využijeme lineární metriku. Matice R a W jsou tvaru:

Tabulka 24: Minimalizace a maximalizace vzdálenosti - uspořádání variant

	$d_{v_l}(H,a)$	$d_{v_e}(H,a)$	$d_{v_m}(H,a)$	$d_{v_l}(D,a)$	$d_{v_e}(D,a)$	$d_{v_m}(D,a)$
a_1	8.	8.	8.	8.	8.	5.-6.
a_2	5.	5.	5.	5.	6.	8.
a_3	6.	6.	6.	6.	7.	5.-6.
a_4	2.	2.	2.	2.	3.	7.
a_5	1.	1.	1.	1.	1.	2.
a_6	4.	4.	4.	4.	4.	3.-4.
a_7	3.	3.	3.	3.	2.	3.-4.
a_8	7.	7.	7.	7.	5.	1.

$$R = \begin{pmatrix} 0,07 & 0 & 0 & 0,15 & 0,06 & 0,21 \\ 0,27 & 0,11 & 0,2 & 0,12 & 0,03 & 0 \\ 0,13 & 0,09 & 0,18 & 0,15 & 0 & 0,15 \\ 0,28 & 0,14 & 0,21 & 0,11 & 0,12 & 0,23 \\ 0,15 & 0,19 & 0,21 & 0,13 & 0,12 & 0,18 \\ 0,04 & 0,12 & 0 & 0,17 & 0,26 & 0,08 \\ 0 & 0,14 & 0,21 & 0,17 & 0,15 & 0,13 \\ 0,07 & 0,22 & 0 & 0 & 0,26 & 0,03 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 0,01 & 0 & 0 & 0,04 & 0,01 & 0,01 \\ 0,04 & 0,03 & 0,03 & 0,03 & 0 & 0 \\ 0,02 & 0,03 & 0,03 & 0,04 & 0 & 0,01 \\ 0,04 & 0,04 & 0,04 & 0,03 & 0,01 & 0,01 \\ 0,02 & 0,06 & 0,03 & 0,03 & 0,01 & 0,01 \\ 0,01 & 0,04 & 0 & 0,04 & 0,02 & 0 \\ 0 & 0,05 & 0,04 & 0,04 & 0,01 & 0,01 \\ 0,01 & 0,07 & 0 & 0 & 0,02 & 0 \end{pmatrix}$$

Stejně jako v předchozí kapitole následně vypočteme vzdálenosti variant od ideální varianty, vzdálenosti od bazální varianty, z těchto vzdáleností následně vypočteme relativní ukazatel vzdáleností variant od bazální varianty. Výsledky těchto výpočtů jsou uvedeny v Tab. 25.

V případě použití Euklidovské metriky mají matice R a W tvar

Tabulka 25: TOPSIS - lineární metrika

	$d_{i_l}^+$	$d_{i_l}^-$	c_{i_l}
a_1	0,16	0,06	0,28
a_2	0,08	0,14	0,62
a_3	0,1	0,12	0,55
a_4	0,05	0,16	0,75
a_5	0,05	0,17	0,76
a_6	0,1	0,11	0,52
a_7	0,08	0,14	0,65
a_8	0,11	0,1	0,47

$$R = \begin{pmatrix} 0,16 & 0 & 0 & 0,38 & 0,13 & 0,49 \\ 0,61 & 0,27 & 0,45 & 0,32 & 0,07 & 0 \\ 0,28 & 0,24 & 0,39 & 0,38 & 0 & 0,37 \\ 0,62 & 0,35 & 0,47 & 0,29 & 0,27 & 0,55 \\ 0,33 & 0,47 & 0,46 & 0,35 & 0,27 & 0,43 \\ 0,09 & 0,3 & 0 & 0,45 & 0,6 & 0,18 \\ 0 & 0,36 & 0,47 & 0,45 & 0,33 & 0,31 \\ 0,15 & 0,55 & 0 & 0 & 0,6 & 0,06 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 0,02 & 0 & 0 & 0,09 & 0,01 & 0,02 \\ 0,08 & 0,09 & 0,08 & 0,08 & 0,01 & 0 \\ 0,04 & 0,08 & 0,07 & 0,09 & 0 & 0,02 \\ 0,08 & 0,11 & 0,08 & 0,07 & 0,02 & 0,03 \\ 0,04 & 0,15 & 0,08 & 0,08 & 0,02 & 0,02 \\ 0,01 & 0,1 & 0 & 0,11 & 0,05 & 0,01 \\ 0 & 0,12 & 0,08 & 0,11 & 0,03 & 0,02 \\ 0,02 & 0,18 & 0 & 0 & 0,05 & 0 \end{pmatrix}$$

Vzdálenosti variant od ideální a bazální varianty a relativní ukazatel vzdáleností jsou uvedeny v Tab. 26.

Poslední metrikou, kterou při výpočtu metody TOPSIS využijeme, je Čebyševova metrika. Matice R a W jsou tvaru

Tabulka 26: TOPSIS - Euklidovská metrika

	$d_{i_e}^+$	$d_{i_e}^-$	c_{i_e}
a_1	0,21	0,1	0,32
a_2	0,11	0,16	0,59
a_3	0,12	0,14	0,54
a_4	0,08	0,18	0,68
a_5	0,06	0,2	0,77
a_6	0,13	0,16	0,54
a_7	0,1	0,18	0,63
a_8	0,15	0,19	0,55

$$R = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 & 0,86 & 0,22 & 0,89 \\ 0,99 & 0,49 & 0,96 & 0,71 & 0,11 & 0 \\ 0,46 & 0,44 & 0,84 & 0,86 & 0 & 0,67 \\ 1 & 0,63 & 1 & 0,64 & 0,44 & 1 \\ 0,53 & 0,86 & 0,98 & 0,79 & 0,44 & 0,78 \\ 0,15 & 0,55 & 0 & 1 & 1 & 0,33 \\ 0 & 0,66 & 1 & 1 & 0,56 & 0,56 \\ 0,24 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0,11 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 0,03 & 0 & 0 & 0,21 & 0,02 & 0,04 \\ 0,13 & 0,16 & 0,16 & 0,17 & 0,01 & 0 \\ 0,06 & 0,14 & 0,14 & 0,21 & 0 & 0,03 \\ 0,13 & 0,2 & 0,17 & 0,15 & 0,04 & 0,05 \\ 0,07 & 0,28 & 0,17 & 0,19 & 0,04 & 0,04 \\ 0,02 & 0,18 & 0 & 0,24 & 0,09 & 0,02 \\ 0 & 0,21 & 0,17 & 0,24 & 0,05 & 0,03 \\ 0,03 & 0,32 & 0 & 0 & 0,09 & 0,01 \end{pmatrix}$$

Opět vypočteme vzdálenosti variant od ideální a bazální varianty a relativní ukazatel vzdáleností. Výsledky jsou zapsány v Tab. 27. Výsledky metody TOPSIS dle jednotlivých metrik jsou shrnuty v Tab. 28. V Tab. 29 jsou shrnuty výsledky jako pořadí jednotlivých variant.

Tabulka 27: TOPSIS - Čebyševova metrika

	$d_{i_m}^+$	$d_{i_m}^-$	c_{i_m}
a_1	0,32	0,21	0,39
a_2	0,16	0,17	0,51
a_3	0,18	0,21	0,53
a_4	0,12	0,2	0,63
a_5	0,06	0,28	0,82
a_6	0,17	0,24	0,59
a_7	0,13	0,24	0,65
a_8	0,24	0,32	0,57

Tabulka 28: TOPSIS dle jednotlivých metrik

	c_{i_l}	c_{i_e}	c_{i_m}
a_1	0,28	0,32	0,39
a_2	0,62	0,59	0,51
a_3	0,55	0,54	0,53
a_4	0,75	0,69	0,63
a_5	0,76	0,77	0,82
a_6	0,52	0,54	0,59
a_7	0,65	0,63	0,65
a_8	0,47	0,55	0,57

3.3. Porovnání jednotlivých přístupů

V této kapitole shrneme a porovnáme výsledky praktického rozhodovacího problému. Výpočet rozhodovacího problému jsme si v počátku rozdělili na dvě části podle toho, zda jsme ohodnocení variant dle jednotlivých kritérií transformovali standardizací nebo stupni naplnění dílčích cílů. Při porovnání výsledků vypočtených na základě těchto dvou rozdílných transformací ohodnocení variant vidíme, že výsledky z hlediska pořadí variant dle jednotlivých metrik i metod se liší. Přesněji řečeno když srovnáme výsledky při použití standardizace a výsledky při použití stupňů naplnění dílčích cílů, zjistíme, že výsledné uspořádání variant se ani v jednom případě stoprocentně neshoduje. Například varianta a_6 při použití metody minimalizace vzdálenosti od ideální varianty a lineární metriky je

Tabulka 29: TOPSIS dle jednotlivých metrik - uspořádání variant

	c_{i_l}	c_{i_e}	c_{i_m}
a_1	8.	8.	8.
a_2	4.	4.	7.
a_3	5.	7.	6.
a_4	2.	2.	3.
a_5	1.	1.	1.
a_6	6.	6.	4.
a_7	3.	3.	2.
a_8	7.	5.	5.

při ohodnocení variant standardizací hodnocena jako 6. nejlepší, zatímco u ohodnocení variant stupni naplnění dílčích cílů je hodnocena jako 4. nejlepší. To je způsobeno rozdílnými vlastnostmi ve výpočtu obou transformací ohodnocení variant. Standardizace totiž provádí ohodnocení variant na základě souboru variant, kdežto metoda stupňů naplnění dílčích cílů provádí toto ohodnocení nezávisle na souboru variant.

Nyní zhodnotíme jednotlivé metriky, které jsme v rozhodovacím problému použili. Pokud porovnáváme lineární a Euklidovskou metriku, můžeme pozorovat drobné odchylky ve výsledcích dle těchto metrik. Tyto odchylky jsou způsobeny tím, že Euklidovská metrika, narozdíl od metriky lineární, klade větší důraz na vyšší hodnoty odchylek hodnot jednotlivých kritérií od hodnot ideálních nebo bazálních, jak již bylo zjištěno v kapitole 2. Výše zmíněné odchylky můžeme pozorovat například při použití lineární a Euklidovské metriky u maximalizace vzdálenosti od bazální varianty a u TOPSIS a to jak při ohodnocení variant standaridizací, tak při ohodnocení variant stupni naplnění dílčích cílů. U Čebyševovy metriky mají na výsledky vliv pouze maximální odchylky. Tato vlastnost Čebyševovy metriky může způsobit zcela odlišné výsledky oproti předchozím metrikám, jak můžeme pozorovat u maximalizace vzdálenosti od bazální varianty při ohodnocení variant standardizací. Zde vidíme, že pořadí variant při výpočtu lineární a Euklidovskou metrikou je podobné, avšak výsledky vypočtené Čebyševovou metrikou se od předchozích dvou metrik výrazně liší.

Porovnáme-li metody založené na měření vzdálenosti, tedy minimalizaci a maximalizaci vzdálenosti, vidíme i zde drobné rozdíly ve výsledcích. Tyto rozdíly potvrzují, že varianta, které má minimální vzdálenost od ideální varianta, nemusí mít nutně vždy maximální vzdálenost od bazální varianty. Při použití lineární metriky u minimalizace a maximalizace vzdálenosti je však pořadí variant u obou metod totožné. Můžeme zkonstatovat, že čím vyšší je mocnina použitá ve vzorci pro výpočet metriky, tím více se liší výsledky vypočtené minimalizací vzdálenosti od ideální varianty a výsledky vypočtené maximalizací vzdáleností od bazální varianty.

Pokud porovnáme oba přístupy ohodnocení variant, je podle mého názoru lepší ohodnocení stupni naplnění dílčích cílů. U tohoto přístupu ohodnocení variant transformujeme na základě bodovací škály, kterou si rozhodovatel sám stanoví dle svých požadavků. Pro použití ve výpočtech bych si osobně vybrala lineární metriku, jelikož neklade důraz na vyšší hodnoty odchylek, narozdíl od Euklidovské nebo Čebyševovy metriky. Podle mého názoru je nejlepší metodou pro výpočet optimální varianty metoda TOPSIS, která je dalo by se říci kombinací minimalizace vzdálenosti od ideální varianty a maximalizace vzdálenosti od bazální varianty. Tudíž ruší rozdíly mezi těmito dvěma metodami založenými na měření vzdálenosti.

Závěr

V práci jsme si představili tři metody vícekriteriálního rozhodování založené na měření vzdálenosti, a to minimalizaci vzdálenosti od ideální varianty, maximalizaci vzdálenosti od bazální varianty a metodu TOPSIS. Na dvou příkladech, jednom jednoduchém a druhém složitějším, jsme aplikovali tyto metody a pozorovali změny ve výsledcích. Navíc jsme každou z metod propočítali pro tři různé metriky - lineární, Euklidovskou a Čebyševovu metriku. Z provedených výpočtů jsme zjistili, že výsledky závisí jak na zvolené metrice, tak na metodě, kterou pro výpočet použijeme.

Hlavním přínosem bakalářské práce je shrnutí metod založených na měření vzdálenosti a zároveň porovnání výsledků při výpočtech dle těchto metod, díky kterému jsme objevili závislost mezi výsledky, zvolenou metodou výpočtu a metrikou.

Literatura

[1] Fiala, P., *Modely a metody rozhodování*, 2. přepracované vydání, Vysoká škola ekonomická v Praze, Nakladatelství Oeconomica, 2008, ISBN 978-80-245-1345-4

[2] Ramík, J., *Analytický hierarchický proces (AHP) a jeho využití v malém a středním podnikání*, 1. vydání, Slezská univerzita, OPF Karviná, 2000, ISBN 80-7248-088-X

[3] Fotr, J., a Dědina, J., *Manažerské rozhodování*, 1. vydání, EKOPRESS s.r.o, Praha, 1997, ISBN 80-901991-7-8

[4] Talašová, J., *Fuzzy metody vícekriteriálního hodnocení a rozhodování*, 1. vydání, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2003, ISBN 80-244-0614-4

[5] Hwang, C.L., Yoon, K., *Multiple attribute decision making: methods and applications: a state-of-the-art survey*, 1. vydání, Springer-Verlag, Berlin, 1981

[6] Studentský účet Raiffeisen Bank [online], dostupné z: http://www.rb.cz/osobni-finance/bezne-ucty/ostatni-ucty, [citováno 13. 3. 2011]

[7] Raiffeisen Bank - Ceník produktů a služeb pro soukromé osoby [online], dostupné z: http://www.rb.cz/attachements/pdf/obecne-dokumenty/cenik-pi/cenik-produktu-sluzeb-soukrome-os_2010.pdf, [citováno 6. 11. 2010]

[8] Osobní účet České Spořitelny Student [online], dostupné z: http://www.csas.cz/banka/nav/osobni-finance/osobni-ucet-cs-student/o-produktu-d00013124, [citováno 13. 3. 2011]

[9] Produktový sazebník - Osobní účet ČS Student [online], dostupné z: http://www.csas.cz/banka/content/inet/internet/cs/product_loc_2980.xml?

navid=cs/lide/nav00001_osobni_finance_grp_10419_prod_2980_prchr, [citováno 6. 11. 2010]

[10] ČSOB Studentské konto Plus [online], dostupné z: http://www.csob.cz/cz/Lide/Ucty-a-platby/Stranky/CSOB-Studentske-konto-Plus.aspx, [citováno 13. 3. 2011]

[11] ČSOB Sazebník pro fyzické osoby – občany [online], dostupné z: http://www.csob.cz/cz/Csob/Sazebniky/Stranky/Sazebnik-pro-fyzicke-osoby-obcany.aspx, [citováno 6. 11. 2010]

[12] KB Studentské konto G2 [online], dostupné z: http://www.kb.cz/cs/lide/mladez-a-studenti/g2.shtml, [citováno 13. 3. 2011]

[13] Sazebník KB pro občany [online], dostupné z: http://www.sazebnik-kb.cz/file/cms/cs/sazebniky/kb-sazebnik-1.pdf?20110307, [citováno 6. 11. 2010]

[14] GE Money Bank Studentský účet Genius Student [online], dostupné z: http://www.gemoney.cz/ge/cz/1/ucty/genius-student, [citováno 13. 3. 2011]

[15] GE Money Bank Sazebník cen za peněžní a obchodní služby pro fyzické osoby – nepodnikatele [online], dostupné z: http://www.gemoney.cz/documents/cz/GEMB-sazebnik-fon.pdf, [citováno 6. 11. 2010]

[16] UniCredit Bank Studentské konto [online], dostupné z: http://www.unicreditbank.cz/cz/obcane/ucty/studentske-konto.html, [citováno 13. 3. 2011]

[17] UniCredit Bank Sazebník pro občany (fyzické osoby nepodnikající) [online], dostupné z: http://www.unicreditbank.cz/cz/sazebnik/obcane/osobni-konta.html, [citováno 6. 11. 2010]

[18] mBank mKonto [online], dostupné z: http://www.mbank.cz/osobni/mkonto/, [citováno 13. 3. 2011]

[19] mBank Sazebník bankovních poplatků [online], dostupné z: http://www.mbank.cz/pruvodce/sazebnik/, citováno [6. 11. 2010]

[20] Fio banka Běžný účet [online], dostupné z: http://www.fio.cz/bankovni-sluzby/bankovni-ucty/bezny-bankovni-ucet, [citováno 13. 3. 2011]

[21] Fio banka Nabídka účtů a sazebník poplatků pro fyzické osoby [online], dostupné z: http://www.fio.cz/docs/cz/urokove_sazby_FO.pdf, [citováno 13. 3. 2011]