



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV FYZIKÁLNÍHO INŽENÝRSTVÍ

INSTITUTE OF PHYSICAL ENGINEERING

KONCENTRACE MAGNETICKÉHO POLE V MIKROSKOPICKÉM MĚŘÍTKU

CONCENTRATION OF MAGNETIC FLUX AT MICROSCALE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Jan Střecha

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Dr. Ing. Michal Staňo

BRNO 2024

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav fyzikálního inženýrství
Student: **Jan Střecha**
Studijní program: Fyzikální inženýrství a nanotechnologie
Studijní obor: bez specializace
Vedoucí práce: **Dr. Ing. Michal Staňo**
Akademický rok: 2023/24

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Koncentrace magnetického pole v mikroskopickém měřítku

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Koncentrátory magnetického pole slouží ke soustředění a zesílení pole. Nacházejí uplatnění v různých oblastech, např. zvýšení citlivosti (magnetických) senzorů. V makroskopickém měřítku poskytují vysoké zesílení, avšak nedávná studie odhalila limity v případě miniaturizace běžně používané konstrukce a tedy i využití v integrovaných obvodech (mikročipech). V planární geometrii na mikroskopickém měřítku, zejména pod 100 μm , dosahují mnohem nižších zesílení (2 a méně). Cílem je prozkoumat alternativní geometrie s koncentrátory složenými z interagujících mikro a nanomagnetů namísto větších souvislých prvků.

Cíle bakalářské práce:

- 1) Rešerše na téma koncentrace a stínění magnetického pole, zejména na mikroskopické úrovni.
- 2) Mikromagnetické simulace planárních koncentrátorů magnetického pole vytvořených z interagujících mikro/nano objektů. Porovnání zesílení pole pro různé koncentrátory.

Seznam doporučené literatury:

FOURNEAU, Emile; ARREGI, Jon Ander; BARRERA, Aleix; NGUYEN, Ngoc Duy; BENDING, Simon et al. Microscale Metasurfaces for On-Chip Magnetic Flux Concentration. *Advanced Materials Technologies*. 2023, roč. 8, č. 16, 2300177. Dostupné z: <https://doi.org/10.1002/admt.202300177>.

BLUNDELL, Stephen. *Magnetism in condensed matter*. Oxford: Oxford University Press, 2001. ISBN 978-0-19-850591-4.

VANSTEENKISTE, Arne; LELIAERT, Jonathan; DVORNIK, Mykola; HELSEN, Mathias; GARCIA-SANCHEZ, Felipe et al. The design and verification of MuMax3. *AIP Advances*. 2014, roč. 4, č. 10, 107133. Dostupné z: <https://doi.org/10.1063/1.4899186>.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2023/24

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Tomáš Šíkola, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Magnetické koncentrátory se využívají pro zesílení detekovaného pole magnetickými senzory, nebo jako jádra v cívkách pro usměrnění magnetického pole. Práce se zabývá koncentrátory magnetického pole v mikroskopickém měřítku a snaží se navrhnout různé metamateriály a geometrie, které by se daly využít k zesílení magnetického pole. K simulacím se využívá program Mumax3, který pomocí metodou konečných diferencí a diskretizací prostoru na malé kvádry řeší časovou závislost magnetizace. Nejprve byla prozkoumána geometrie „petal“, neboli okvětní lístek, průměr koncentrátoru byl 5 μm a simulována hodnota zesílení, kterého nabývá, při aplikování externího pole. Následně byly vytvořeny metamateriály permalloye NiFe, z výchozí tvaru okvětního lístku, skládající se z malých rovnostranných trojúhelníků o velikosti $< 0,5 \mu\text{m}$ a měnila se vzdálenost mezi jednotlivými elementy a jejich tloušťka. Okvětní lístek tloušťky 15 nm dosahuje zesílení 2, zkoumané geometrie dosahovaly pro stejné tloušťky zesílení menšího jak 1,2. Výsledky, které dosahovaly nejvyšší hodnoty, která byla okolo 1,8, byly pro tloušťky 60 nm.

Abstract

Magnetic concentrators are used to amplify the detected field by magnetic sensors or as cores in coils to direct the magnetic field. This work focuses on magnetic field concentrators at the microscopic scale and aims to design various metamaterials and geometries that could be used to enhance the magnetic field. The simulations use the program Mumax3, which employs the finite difference method and discretizes space into small cuboids to solve the time dependence of magnetization. Initially, the "petal" geometry was investigated, with a concentrator diameter of 5 μm , and the simulated amplification value was determined upon applying an external field. Subsequently, metamaterials made of permalloy NiFe were created from the initial petal shape, consisting of small equilateral triangles with a size of less than 0.5 μm , varying the distance between individual elements and their thickness. A petal with a thickness of 15 nm achieves an amplification of 2, while the examined geometries achieved amplifications of less than 1.2 for the same thickness. The results that achieved the highest value, around 1.8, were for thicknesses of 60 nm.

Klíčová slova

Koncentrátory magnetického pole, mikromagnetismus, mikromagnetické simulace, Mumax3

Key words

Magnetic field concentrators, micromagnetism, simulations in micromagnetism, Mumax3

STŘECHA, J. *Koncentrace magnetického pole v mikroskopickém měřítku*. Brno; Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2024. 21 s. Bakalářská práce. Vedoucí bakalářské práce Dr. Ing. Michal Staňo.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Koncentrace magnetického pole v mikroskopickém měřítku* vypracoval samostatně pod vedením Dr. Ing. Michala Staňu, s použitím materiálu uvedených v seznamu literatury.

Jan Střecha

Poděkování

Moji vděčnost nelze popsat slovy. Nevím jestli bych byl schopen tuto práci vytvořit bez Dr. Ing. Michala Staňa. Děkuji moc za všechno.

Obsah

Úvod.....	1
1 Teoretická část	2
1.1 Mikromagnetismus	2
1.2 Feromagnetismus	2
1.2.1 Susceptibilita.....	3
1.3 Energetické příspěvky.....	3
1.3.1 Zeemanova energie	3
1.3.2 Magnetostatická energie	3
1.3.3 Výměnná energie	4
1.3.4 Anizotropní energie.....	4
1.4 Výměnné délky	5
1.4.1 Magnetostatická výměnná délka.....	5
1.4.2 Magnetokrystalická výměnná délka	5
1.5 Saturační magnetizace	5
1.6 LLG rovnice.....	6
1.7 Magnetické domény.....	7
1.8 Koncentrátory magnetického pole	7
1.8.1 Magnetický tok	7
1.8.2 Zesílení koncentrátoru	8
1.8.3 Vliv magnetických domén na koncentrátory	8
1.8.4 Geometrie.....	9
1.9 Mikromagnetické simulace	10
1.9.1 Mumax3	10
2 Praktická část	12
2.1 Geometrie.....	12
2.2 Simulace.....	12
2.2.1 Okvětní lístek.....	13
2.2.2 Trojúhelník 100 nm.....	14
2.2.3 Trojúhelník 150 nm.....	16
2.2.4 Trojúhelník 200 nm.....	18
2.3 Diskuse.....	20
2.4 Závěr	21

Seznam zdrojů.....	22
Seznam obrázků a tabulek	24

Úvod

Magnetické koncentrátory v dnešní době nachází nespočet využití např v cívice jsou běžně používány k indukčnímu zahřívání, v informačních a komunikačních technologiích [1,2]. Vývoj v technologiích ve velkém množství odvětví se uchyluje směrem zmenšování, u koncentrátorů tomu není jinak. Avšak existují hranice jak moc se dá něco zmenšit a stále si zachovalo svoji funkčnost. Při snižování rozměrů koncentrátoru klesá i zesílení, které ho lze dosáhnout. Při dosažení rozměrů v mikrometrech a použití tvaru okvětího lístku je zesílení pro $G \approx 2$ [1], tady si lze vybrat dva přístupy jak nízké zesílení vykompenzovat, lepšími senzory nebo lepšími koncentrátory. V této práci se zaměříme na druhou možnost a provedeme průzkum literaturou pro nalezení ideálních modelů a zkusíme vymyslet metamateriál, který by se dal využít na koncentrování magnetického pole. Kdybychom našli silný koncentrátor pro malé měřítko, brzy by se tento průlom objevil v praxi, poněvadž pokrok na sebe nenechá čekat.

Práce se dělí na 2 části, teoretickou a praktickou. Cílem první části je přiblížit teoretické podklady relevantní k práci. V druhé části se vybere vhodná geometrie koncentrátoru a v simulačním programu Mumax3 [3] se provedou mikromagnetické simulace vybraných metamateriálů.

V teoretické části první sekce uvede do numerického přístupu k mikromagnetismu, z kterého vycházejí již zmíněné simulace. Druhá sekce nám přiblíží feromagnetismus jelikož se koncentrátory vyrábějí převážně z feromagnetických látek s velkou permeabilitou. Třetí sekce pojednává o energetických příspěvcích, které jsou relevantní pro koncentrátory, Zeemanova, magnetostatická, výměnná a anizotropní energie. Čtvrtá sekce pojednává o výměnných délkách, které jsou důležité pro pochopení výběru velikosti diskretizace mřížky v simulacích. Pátá sekce uvede saturizační magnetizaci, která u koncentrátorů hraje zásadní roli. V šesté sekci se popíše LLG rovnici, která popisuje vývoj magnetizace v čase. Je alfou a omegou simulací. V sedmé sekci se popíšou magnetické domény, jelikož jejich tvorbou je ovlivněn koncentrátor. Osmé sekce se zaměří na magnetické koncentrátory, jejich základní princip a popis, a průzkum různých geometrií, které by se mohli vyzkoušet pro koncentrátory. Deváté sekce se zaměří na mikromagnetické simulace v programu Mumax3, který bude v práci využíván.

V praktické části v první sekci se vysvětlí proč a jakou geometrii koncentrátorů zvolíme. V druhé sekci se už řeší přímo simulaci vybraných geometrií, kde první pro kontrolu vyhovujícího nastavení, použijeme tvar okvětího lístku z jiné práce a zkontroluje se zda souhlasí s jejich výsledky. Potom už se simulují naše tvary pro různé hustoty tvarů a tloušťky, naměřené hodnoty se vykreslí do grafů a zhodnotí se výsledky.

1 Teoretická část

V teoretické části uvedeme základní poznatky pro uchopení zadaného problému a pro následné provedení, pochopení a správnou interpretaci výsledků ze simulací.

1.1 Mikromagnetismus

K popisu mikromagnetismu využijeme přístup z učebnice od Exla [4]. Charakteristická délka simulačních modelů je v rozmezí od nm po μm . Je to teorie kontinua, která popisuje magnetizaci na délce dostatečně dlouhé na to, aby vyměnila spiny jednotlivých elektronů za kontinuální funkci magnetizace a zároveň dost malá k vyřešení přechodu mezi magnetickými domény. Mikromagnetismus obsahuje několik předpokladů a aproximací.

1. Směr spinu elektronu se mění pouze a malý úhel z jednoho bodu k druhému.
2. Směry spinů je možno aproximovat kontinuální funkcí pozice, ty lze pak popsat vektorovým polem magnetizace $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ s jednotkou A/m
3. Délka vektoru magnetizace je konstanta, a závisí jen na teplotě.
4. Teplota je konstantní v čase a prostoru (V simulacích budeme teplotu zanedbávat, protože materiálové parametry se mezi teplotou $T = 0\text{ K}$ a $T = 300\text{ K}$ mění jen minimálně).

Lokální magnetický moment elektronu závisí na spinovém momentu hybnosti $\hbar\mathbf{S}$,

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}_i) = -g \frac{|e|\hbar}{2m} \mathbf{S}(\mathbf{r}_i) = -g\mu_B \mathbf{S}(\mathbf{r}_i) \quad (1.1.1)$$

e je náboj elektronu, m je hmotnost elektronu, g je Landého faktor, pro kovové systémy s tlumeným orbitálním momentem je přibližně 2 a $\mu_B = 9.274 \times 10^{-24} \text{Am}^2$ je Bohrov magneton. Magnetizace magnetického materiálu s N atomy v jednotkovém objemu má tedy tvar:

$$\mathbf{M} = N\boldsymbol{\mu} \quad (1.1.2)$$

$$|\mathbf{M}| = M_s = M_s(T) \quad (1.1.3)$$

V případě (numerických) výpočtů se běžně pro přehlednost pracuje s jednotkovým vektorem $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_s$ [4].

1.2 Feromagnetismus

Koncentrátory, které budou popsány v kap 1.8, se převážně vyrábějí z feromagnetických látek, v našem případě se zabýváme pouze těmito látkami. Spiny elektronů interagují každý s každým, snažící se zarovnat ostatní v jejich směru. Tato interakce se nazývá výměnná, kterou v kapitole 1.2 vyjádříme jako výměnnou energii. Mají pozitivní výměnnou interakci, vyhovující paralelnímu uspořádání magnetických momentů, z toho pak vychází spontánní magnetizace, která je řádu 10^6A/m . Materiály, které jsou při pokojové teplotě feromagnetické jsou kovy železo, nikl a kobalt [5,6,7].

1.2.1 Susceptibilita

Pro koncentrátoři chceme co největší zesílení vnějšího pole, proto chceme materiály s vysokou susceptibilitou, kterou budeme definovat jako: působením magnetického pole vznikne odezva na vnější magnetické pole.

$$\chi = \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\mu_0 M}{B} \quad (1.2.4)$$

Pro feromagnetny je $\chi \gg 1$, proto jsou z nich ideální koncentrátoři, v našem případě se využívá permalloy NiFe, který má susceptibilitu $\chi \approx 10^4$ [6].

1.3 Energetické příspěvky

V této kapitole popíšeme energetické příspěvky ve feromagnetických materiálech. Zavedeme je v energii na objem. Řešíme Zeemanovu, magnetostatickou, výměnnou a anizotropní energii.

1.3.1 Zeemanova energie

Je to energie, která náleží energiím magnetických momentů v externím magnetickém poli. Tato energie je definována:

$$E_z = -\mu_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} \quad (1.3.5)$$

Kde μ_0 je permeabilita vakua. Pro Zeemanovu energii je energeticky výhodnější, když je magnetizace ve stejném směru jako externí magnetické pole [4,7].

1.3.2 Magnetostatická energie

Těž dipolární energie, vzniká za podobných podmínek jako Zeemanova energie. V krystalu každý moment vytvoří dipólové pole a každý moment je vystaven všem dipólovým polím vytvořeným všemi ostatními dipóly; interakce je dalekodosahová. Z toho vyplývá, že jakákoliv prostorová magnetizace vytvoří demagnetizační magnetické pole, které se odvodí z Maxwellových rovnic

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_d = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (1.3.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_d = 0 \quad (1.3.7)$$

Dipolární energii tedy zapíšeme jako:

$$E_d = -\frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_d \quad (1.3.8)$$

Faktor $\frac{1}{2}$ vychází z toho, že Zeemanova interakce mezi dvěma momenty je vzájemná energie, která se nepočítá dvakrát po započítání celého systému [4,7,8].

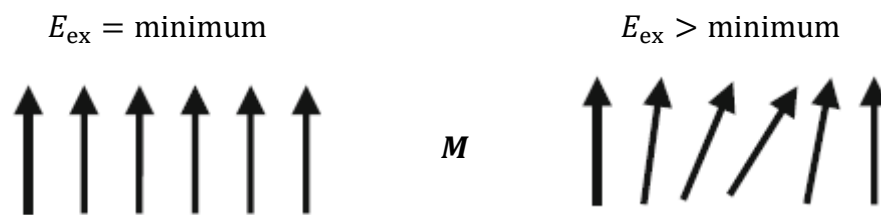
1.3.3 Výměnná energie

Je to závislost mezi sousedními elektrony a orientaci jejich spinů. Této energii vyhovují v případě feromagnetů paralelní uspořádání spinů, tudíž když mají sousední spiny stejný směr tak je tato energie nejmenší. Na druhou stranu, čím větší mají tyto spiny mezi sebou úhel tím větší je jeho energie, takže při antiparalelní orientaci je energie maximální. To je zapříčiněno Pauliho vylučovacím principem a elektrostatickou Coulombovskou interakcí. Kvůli Pauliho vylučovacímu principu nemohou být 2 elektrony se stejným kvantovým stavem v blízkosti, díky tomu vzniká interakce, která snižuje elektrostatickou energii. Tuto energii mezi 2 spiny zavedeme jako:

$$E_{ij} = -2J_{ij}\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \quad (1.3.9)$$

Kde J_{ij} je výměnný integrál mezi 2 atomy a \mathbf{S} jsou operátory spinů atomů. Pro formulaci v mikromagnetismu použijeme druhou mocninu gradientu magnetizace a výměnou tuhost A [4,7].

$$E_{\text{ex}} = A(\nabla m)^2 \quad (1.3.10)$$



Obrázek 1: Směr magnetizace a její náležící výměnné energie. Převzato a upraveno z [9]

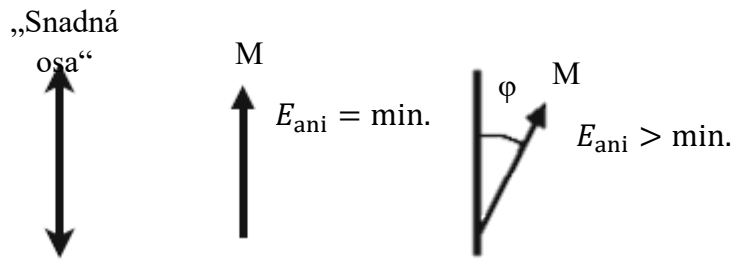
1.3.4 Anizotropní energie

Magnetické vlastnosti feromagnetických materiálů jsou anizotropní. V závislosti na orientaci magnetického pole k osám krystalu dosáhneme saturace při nízkých hodnotách pole pro snadný směr nebo vysokých hodnotách pole pro těžký směr. Anizotropní energie preferuje snadné směry, a naopak se zvyšuje v těžkých směrech.

Uniaxiální anizotropie je ve tvaru, který preferuje jednu osu v krystalu.

$$E_{\text{ani}} = K - K(\mathbf{m} \cdot \mathbf{u})^2 \quad (1.3.11)$$

\mathbf{u} je jednotkový vektor směru lehké osy, K je anizotropní konstanta. Pro triaxiální anizotropii nám přibývá těžká a střední osa. Kubická anizotropie má 3 nebo 4 lehké osy podle parametrů [4,9].



Obrázek 2: Závislost uniaxiální anizotropní energie na úhlu mezi magnetickým momentem a snadnou osou
Převzato a upraveno z [9]

1.4 Výměnné délky

Vyplyvají z materiálových konstant a při práci v mikromagnetických simulacích, podle menší z nich určíme velikost buňky v simulacích.

1.4.1 Magnetostatická výměnná délka

Je délka, pod kterou má výměnná energie největší dopad, má tvar:

$$l_1 = \sqrt{\frac{2A}{\mu_0 M_s^2}} \quad (1.4.12)$$

Kde A je výměnná tuhost, M_s saturační magnetizace. Je to délka, pro kterou můžeme předpokládat, že buňka o této nebo menší velikosti bude mít homogení magnetizaci. Nejčastěji má hodnotu několik nm pro běžnější magnetické materiály (Fe, Co) [6,7].

1.4.2 Magnetokrystalická výměnná délka

Jinak nazývána Blochův parametr

$$l_{\text{ex,K}} = \sqrt{\frac{A}{K}} \quad (1.4.13)$$

Kde A je výměnná tuhost a K je anizotropní konstanta, tato délka dává do poměru výměnnou interakci a krystalovou anizotropii. Tato hodnota je nízká pro silné permanentní magnety s vysokou anizotropií a vypovídá o šířce doménové stěny [6,7].

1.5 Saturační magnetizace

Jakmile v materiálu dosáhneme této hodnoty, snižuje se jeho schopnost koncentrovat magnetické pole. Proto je důležitou materiálovou konstantou, pro popis koncentrátorů. Za vlivu Zeemanovy energie se magnetizace materiálu snaží nastavit se směrem vnějšího magnetického pole. Dosažení úplného zarovnání magnetizace a vnějšího magnetického pole dochází při saturační magnetizaci označované M_s [7].

1.6 LLG rovnice

Po zavedení vnitřních energií v systému nás zajímá, jak se bude chovat materiál při změně okolních magnetických vlivů v čase, a to nám popisuje Landauova Lifshitzova a Gilbertova (LLG) rovnice, což je diferenciální rovnice závislosti magnetizace na čase a prostoru, která spojuje měnící se směr magnetizace \mathbf{m} v každém bodě s efektivním magnetickým polem \mathbf{H} v daném bodě a materiálové parametry popisující vzorek v každém bodě.

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = -|\gamma|\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{\text{ef}} + \alpha \left(\mathbf{m} \times \frac{d\mathbf{m}}{dt} \right) \quad (1.6.14)$$

První člen na pravé straně popisuje precesi \mathbf{m} kolem \mathbf{H}_{ef} , gyromagnetický poměr γ má v tomto případě hodnotu: $|\gamma| = 2.21 \times 10^5 \frac{\text{m}}{\text{As}}$, v jiných případech však může být vyjádřen gyromagnetickým poměrem elektronu:

$$|\gamma| = \frac{e}{2m} \quad (1.6.15)$$

Druhý člen popisuje ztrátu energie v systému, tlumením proti rotaci magnetizace, zapsána pomocí bezrozměrného kladného členu α .

Celková energie systému je popsána pomocí:

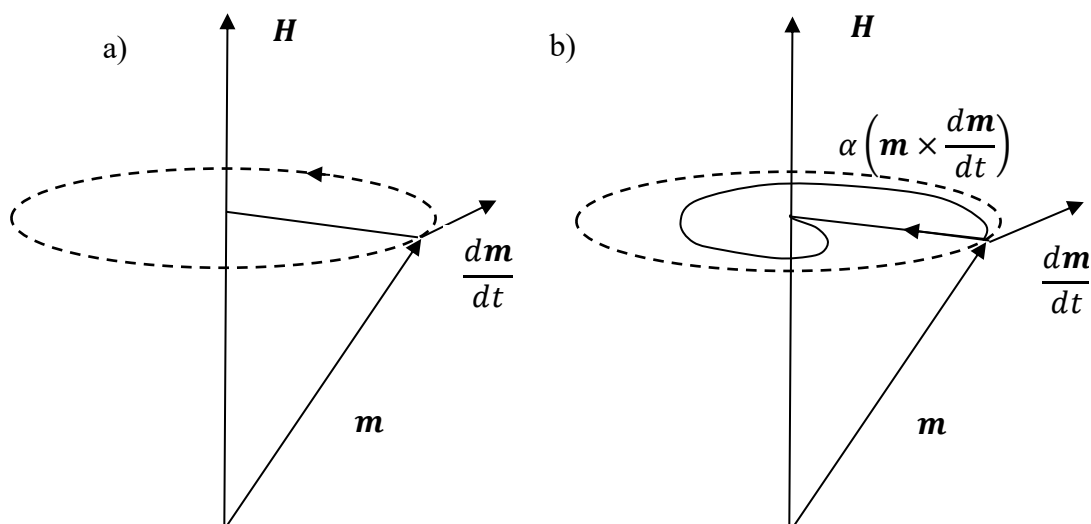
$$E_{\text{tot}} = \sum E \quad (1.6.16)$$

Kde sčítáme dohromady veškeré energie, které jsme popsali v kapitole (1.2). Dále definujeme efektivní magnetické pole \mathbf{H}_{ef} , které vystupuje v LLG rovnici, pomocí derivace funkcionálu celkové energie systému podle magnetizace.

$$\mathbf{H}_{\text{ef}} = -\frac{1}{\mu_0 M_S} \frac{\delta E_{\text{tot}}}{\delta \mathbf{m}} \quad (1.6.17)$$

Dále existuje LL rovnice, která má podobný tvar se stejnými hodnotami, ale jinými koeficienty. Tyto rovnice jsou si matematicky ekvivalentní pro nízká tlumení. LL rovnice je vhodnější na numerické výpočty.

V obou rovnicích platí, že $\frac{d\mathbf{m}}{dt}$ je ortogonální k \mathbf{m} , díky tomu lze zapsat magnetizaci jako $|\mathbf{M}| = M_S$ [8].



Obrázek 3: Grafická reprezentace rovnice (1.6.14) a) Ukazuje precesi pouze prvního členu rovnice b) Ukazuje precesi při započítání i druhého členu s tlumící konstantou α

1.7 Magnetické domény

Ve feromagnetických materiálech má jejich tvorba a konfigurace, vliv na funkci koncentrátoru. Jsou základem magnetické mikrostruktury magneticky upořádaného materiálu. Jsou tvořeny, aby minimalizovaly celkovou energii. Přeuspořádání domén v magnetickém poli určuje křivku magnetizace. Lze je uměle vytvářet, jejich velikost záleží na použitém materiálu, tvaru a historii magnetického pole [9].

1.8 Koncentrátory magnetického pole

Vyrábí se z magneticky měkkých materiálů s vysokou susceptibilitou a permeabilitou, ta se udává poměrem mezi magnetickou indukcí a magnetickým polem. Když jsou umístěny do externího pole a díky vysoké permeabilitě zesílí hustotu magnetického toku [10].

Zakomponovány v cívce jsou běžně používány k indukčnímu zahřívání podobně jak jsou magnetická jádra využita v transformátorech. Jsou tři tradiční funkce koncentrátorů v indukčním tvrzení: selektivní zahřívání určitých míst, vylepšení účinnosti indukční cívky a působení jako elektromagnetický štít k předejití nechtěnému zahřívání vedlejších ploch [2].

1.8.1 Magnetický tok

Princip koncentrátorů spočívá v koncentraci magnetického toku. Máme B což je magnetická indukce nebo hustota magnetického toku. Takže B můžeme vyjádřit jako

$$B = \frac{\Phi}{A} \quad (1.8.18)$$

Předpokládáme, že čáry magnetického pole jsou kolmé k ploše A

$$\Phi = BA \cos \alpha \quad (1.8.19)$$

Φ je magnetický tok přes obsah A , B je velikost hustoty magnetického toku \mathbf{B} a α je úhel mezi normálou k ploše A a směrem \mathbf{B} . Pokud \mathbf{B} není rovnoměrný přes plochu vzorec () vyměníme za plošný integrál

$$\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.8.20)$$

$d\mathbf{s}$ je vektor se směřovým normálem k elementu povrchu [11].

1.8.2 Zesílení koncentrátoru

Vzorec pro zjištění zesílení koncentrátoru:

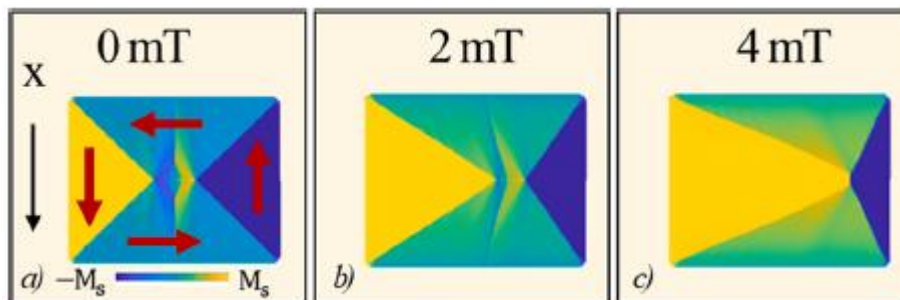
$$G = \frac{B_0 \cdot B_{\text{ext}}}{|B_{\text{ext}}|^2} \quad (1.8.21)$$

B_0 je rozptylové pole, které naměříme ve středu koncentrátoru a B_{ext} je externí pole [1].

Zásadní veličina pro určení jejich účinnosti. Pro makroskopické koncentrátory $G \approx 10^1$ a vyšší. Pro mikroskopické je tato hodnota, kterou získali v literatuře [1] podstatně menší $G \approx 2$. Místa, kde se tyto hodnoty určují jsou vyznačeny na Obrázku 6.

1.8.3 Vliv magnetických domén na koncentrátory

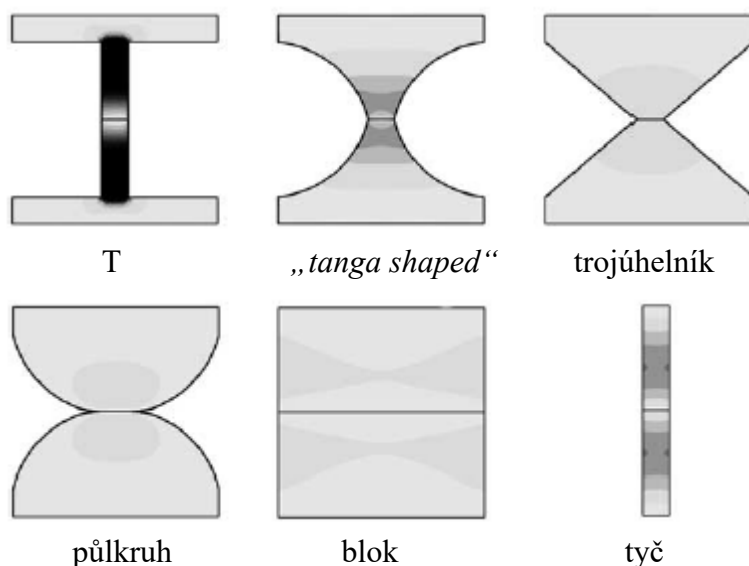
Ve feromagnetických materiálech, jak již bylo nastíněno v kap. 1.7, domény se převážně formují, aby měly minimální energii v souvislosti s kap. 1.3, mohou však také být v metastabilním stavu, ve kterém není nutně jejich minimum, závisí také na historii magnetického pole v předešlém stavu. Těmto stavům často náleží uzavřené smyčky magnetizace. Při aplikování externího pole se nám domény souhlasně orientované se směrem pole zvětšují, a naopak domény opačně orientované se smršťují; lze vidět viz Obrázek 4. Tento trend by postupoval do saturace, kdy by převládala dominantní doména rovnoběžná se směrem pole [12].



Obrázek 4: Tvorba magnetických domén v materiálu při aplikaci externího pole ve směru x . Převzato z [12]

1.8.4 Geometrie

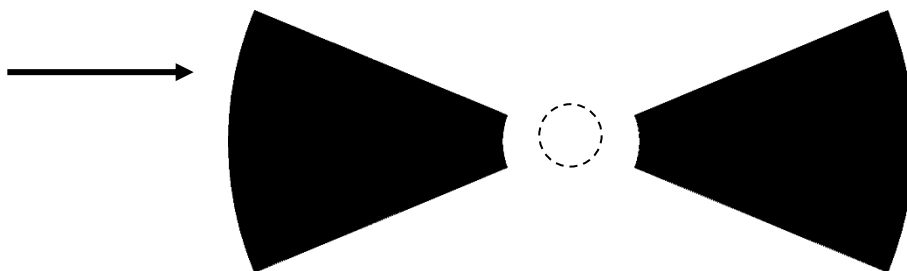
Různé tvary dosahují rozdílné délky linearity závislosti zesílení na externím magnetickém poli a maximálního zesílení. Každý z těchto tvarů má různé výhody a nevýhody podle výsledků, které jsou schopny dosáhnout nebo náročnosti na zhotovení tvaru. Na obrázku 5. můžeme vidět různé zkoumané typy, odstín barvy ukazuje, jak blízko je materiál k saturaci při aplikovaném externím poli. Vidíme, že tvary T, tangenciální a tyčový mají temnější zabarvení, ale pouze T a „tanga“ tvar dosahují většího zesílení než všechny ostatní za cenu kratší lineární působnosti. Pouze trojúhelníkový tvar je schopný zesilovat magnetické pole i při dvojnásobné hodnotě pro jednotky mT, kdy u tvaru T dochází k saturaci.



Obrázek 5: Různé geometrie magnetických koncentrátorů. Převzato z [13]

Dalším tvar, který byl studován je „petal“ neboli, okvětní lístek viz obrázek 6. Lze vidět, že je velmi podobný trojúhelníku a také dosahuje hodnot s ním srovnatelným [1,13].





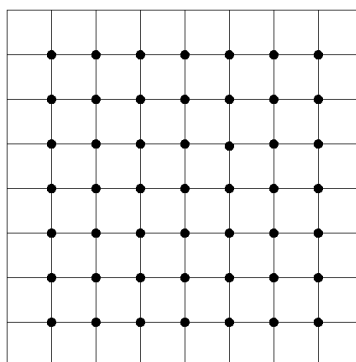
Obrázek 6: Magnetický koncentrátor tvaru „petal“ a určení místa měření hledaných hodnot

1.9 Mikromagnetické simulace

Jsou výpočetní technikou, která se využívá k počítání chování magnetických materiálů v mikroskopickém měřítku. V této práci je to hlavní zaměření praktické části a simulačním programem, který budeme používat je Mumax3 [3].

1.9.1 Mumax3

Je to GPU-poháněný program na simulování mikromagnetismu [3]. Počítá prostorově a časově závislou magnetizaci v nano až mikro feromagnetech pomocí metody konečných diferencí a diskretizací prostoru pomocí malých kvádrů [14]. Podobné programy jsou OOMMF nebo MicroMagnum [15,16].



Obrázek 7: Mřížka diskretních bodů. Převzato z [17]

Mumax3 používá diskretizaci prostoru konečnými diferencemi pomocí 2D nebo 3D mříží ortorombických buněk. Objemové hodnoty, jako magnetizace a efektivní magnetické pole, jsou počítány uprostřed buněk a párové hodnoty jako výměnná síla, jsou umístěny na stěnách mezi buňkami.

Program umožňuje výpočty pomocí následujících funkcí:

1. Minimize – Řeší pouze energetické příspěvky viz kap 1.2 a zminimalizuje je. Nejhrubější přístup, využívá se, když jsme blízko ustálenému stavu.
2. Relax – Počítá už LLG rovnici viz kap 1.6, ale bez precese.

3. Run – Tato funkce jako jediná poskytuje skutečný časový vývoj magnetizace; předchozí slouží pouze pro nalezení ustáleného stavu (lokálního minima). Je to nepřesnější numerický výpočet, avšak potřebuje nejdelší výpočetní čas.

[3]

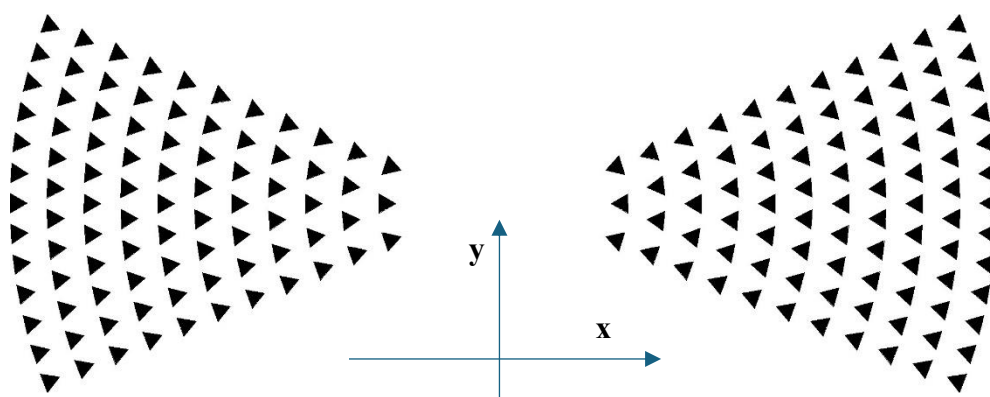
Ke všem důležitým myšlenkám jsme přidali teoretický základ. Nyní smíme přejít na praktickou část.

2 Praktická část

Jak už víme, cílem této práce je zkoumat problematiku magnetických koncentrátorů při velikostech menších jak 100 μm . V kap 1.5 jsme se o nich dozvěděli základní informace. Prvním úkolem se stává výběr vhodného tvaru pro nejlepší zesílení magnetického pole.

2.1 Geometrie

V rámci teoretické části jsme provedli průzkum literatury na nalezení ideálního tvaru, který by pro koncentrátor fungoval nejlépe. Ve článku [1], používají tvar nazývaný „petal“, který lze vidět viz. Obrázek 5, avšak tento tvar dosahoval nízkých zesílení. Proto za použití trojúhelníků, které mají dobré hodnoty zesílení, se pokusíme vytvořit metamateriál (geometrie viz Obrázek 8), který by ideálně dosahoval $G > 2$.



Obrázek 8: Koncentrátor skládající se z rovnostranných trojúhelníků

V této práci budeme zkoumat tuto geometrii pro různé velikosti trojúhelníků a vzdálenostmi mezi nimi. Při výběru příliš malého elementu by mohlo dojít k saturaci ve velmi malém magnetickém poli, proto uděláme simulace pro rozměry 100 nm, 150 nm a 200 nm. Pro všechny tři rozměry budeme postupně snižovat vzdálenost mezi trojúhelníky, dokud nebudou přímo vedle sebe. Poloměr větší kružnice je 5 μm a vnitřní kružnice je 500 nm.

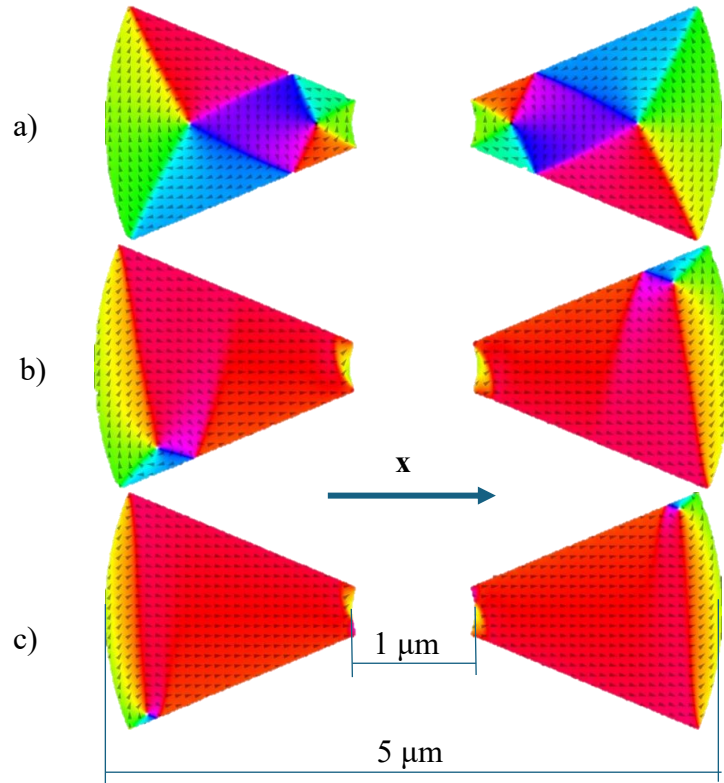
2.2 Simulace

Pro porozumění simulačním kódům si stačí prostudovat oficiální stránky a workshop, kde je několik řešených problémů [18,19]. V simulacích používáme permalloy NiFe s materiálovými parametry $M_s = 860 \text{ kAm}^{-1}$ a $A = 13 \text{ pJm}^{-1}$. Nyní budeme simulovat různé rozměry, vzdálenosti a tloušťky, porovnáme jejich hodnoty, odhadneme trendy a zhodnotíme.

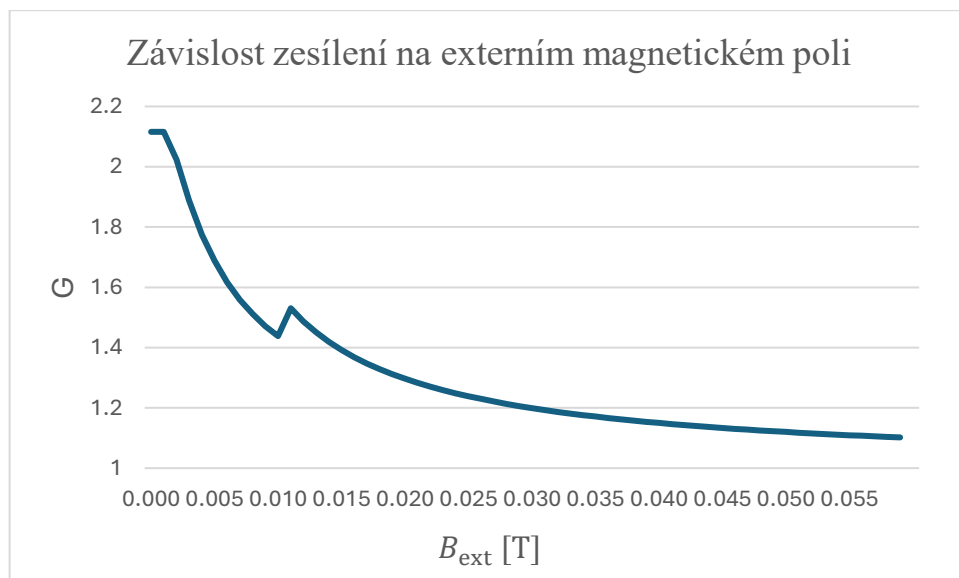
Ve všech simulacích aplikujeme počáteční indukci $\mathbf{B} = (0; 0.01; 0) \text{ T}$, kterou zrelaxujeme na ustálený stav pro indukci $\mathbf{B} = (0; 0; 0) \text{ T}$. Na tento stav necháme působit externí magnetickou indukci ve směru x s krokem 1 mT od 1 mT do 60 mT. Počítáme pro tloušťku 15 nm a u koncentrátorů s největší hustotou elementů proměříme i závislost na tloušťce.

2.2.1 Okvětní lístek

Jako první pokus a kontrolu, že máme správně nastavené simulace uděláme replikaci výsledků z literatury pro okvětní lístky viz Obrázek 6, kde okvětní lístek má vnější poloměr 2500 nm a vnitřní poloměr 500 nm. Krajiní osy lístku spolu svírají úhel 45°.



Obrázek 9: Koncentrátor tvaru okvětního lístku a) relaxovaný stav s $B_{\text{ext}} = 0 \text{ mT}$ b) stav s $B_{\text{ext}} = 15 \text{ mT}$ c) stav s $B_{\text{ext}} = 30 \text{ mT}$

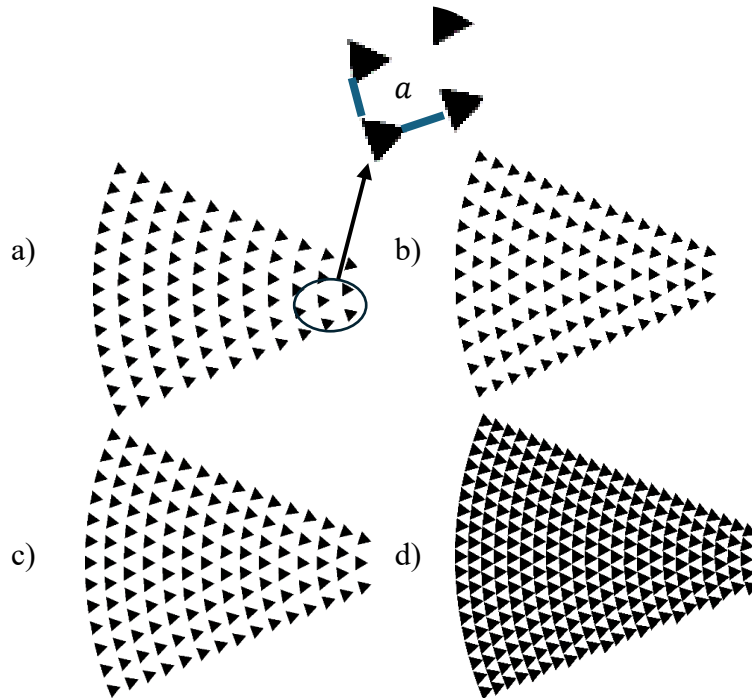


Obrázek 10: Zesílení koncentrátoru z okvětních lístků

Zesílení nám vyšlo $G \approx 2$, jsme teda v rámci podobných výsledků jak v literatuře [1]. Nyní přejdeme na simulování vybraných geometrií.

2.2.2 Trojúhelník 100 nm

Nyní budeme simulovat stejný tvar okvětního lístku za použití metamateriálu. Koncentrátor bude složený z rovnostranných trojúhelníků se stranou 100 nm. Proměříme pro 4 hustoty obsazení elementů, viz Obrázek 11, kde u prvního metamateriálu je vzdálenost $a = \text{strana trojúhelníku}$ a postupně tuto vzdálenost budeme snižovat, až se budou trojúhelníky přímo dotýkat; tento přístup využijeme i u ostatních velikostí trojúhelníků. Koncentrátory si označíme podle počtu trojúhelníků, ze kterých jsou složeny.

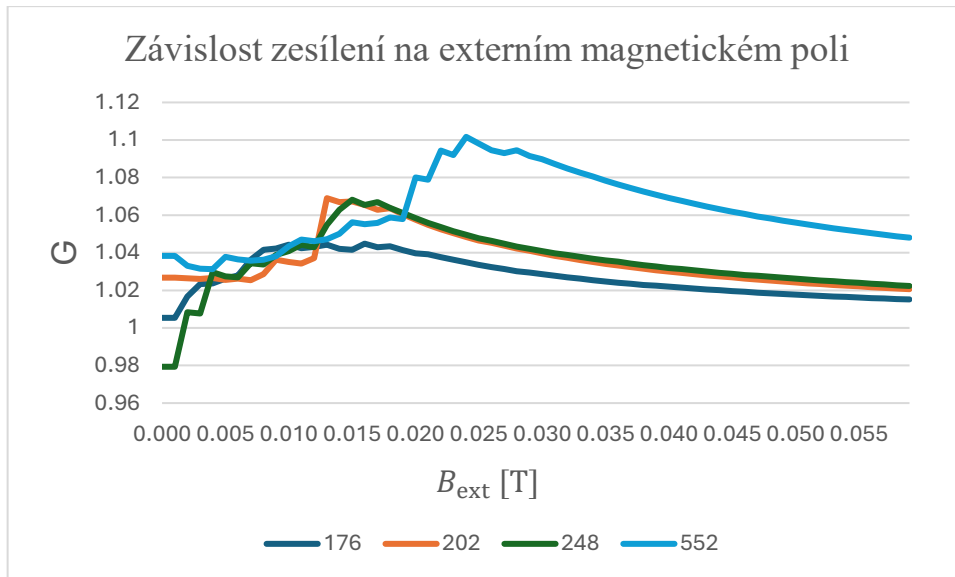


Obrázek 11: Místo, kde se v koncentrátoru nachází vzdálenost a . Hustota obsazení koncentrátoru
 a) 176 trojúhelníků b) 202 trojúhelníků c) 258 trojúhelníků d) 552 trojúhelníků

Tabulka 1: Hodnota a pro různé hustoty trojúhelníků v koncentrátoru

Počet trojúhelníků	176	202	258	552
a [nm]	100	66	33	5

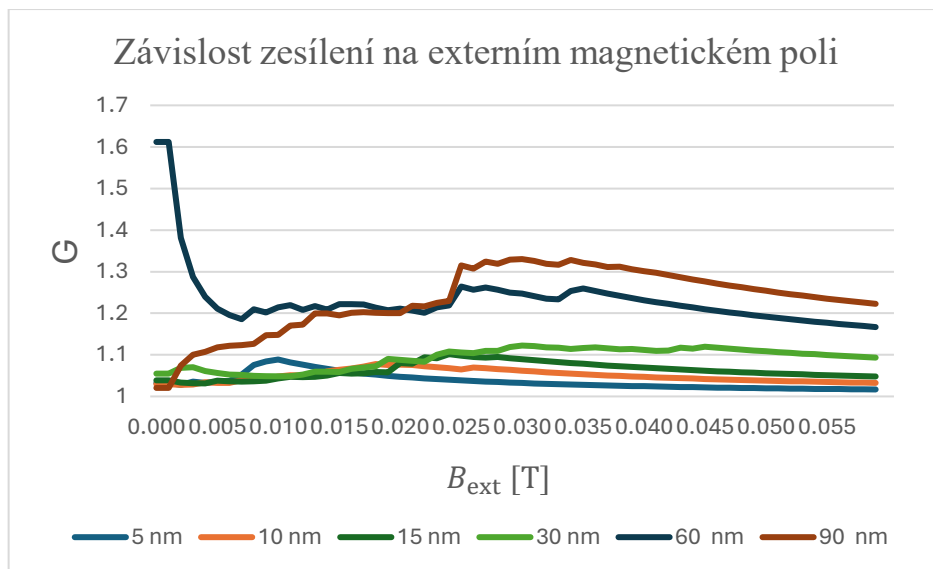
Po vytvoření koncentrátorů spustíme simulace jejichž parametry jsme uvedli na začátku kapitoly 2.2. Naměřené hodnoty dosadíme do vzorce (1.8.21), z kterého zjistíme zesílení v závislosti na externím magnetickém poli. Závislosti pro 4 typy metamateriálů jsou vykresleny viz Obrázek 12.



Obrázek 12: Porovnání zesílení pro koncentrátoři tvořené z 176, 202, 258 a 552 trojúhelníky

Lze vidět, že větší hustota (větší objem materiálu) má od $B_{ext} \approx 20$ mT přímý vliv na velikost zesílení G . Před touto hodnotou zesílení pro všechny typy „nahodile“ kolísá, což může být způsobeno, že orientace magnetizace v ustáleném stavu měla podstatnou část ve směru y .

Nyní proměříme pro nejhustěji obsazený metamateriál jeho závislost na tloušťce, pro hodnoty 5, 10, 15, 30, 60 a 90 nm. Vynesená závislost zesílení na externím poli je na Obrázek 13.

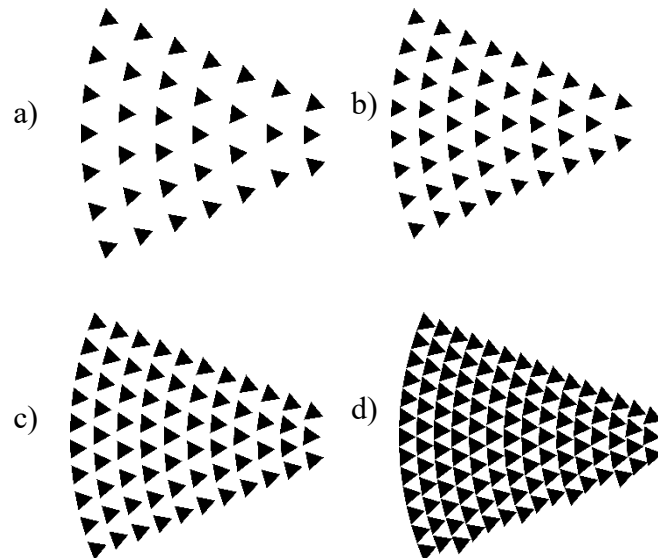


Obrázek 13: Porovnání zesílení pro různé tloušťky koncentrátoři tvořených z 552 trojúhelníků

Největšího zesílení od počáteční stavu dosahujeme pro tloušťku 60 nm.

2.2.3 Trojúhelník 150 nm

V této sekci zaměníme délky strany trojúhelníků za 150 nm, postup snižování vzdálenosti mezi trojúhelníky postupně až k nule, provedeme stejně jako v sekci 2.2.2; naše počáteční vzdálenost je $a = 150$ nm. Koncentrátory pro 4 různé hustoty zaplnění trojúhelníky ukázány viz Obrázek 10.

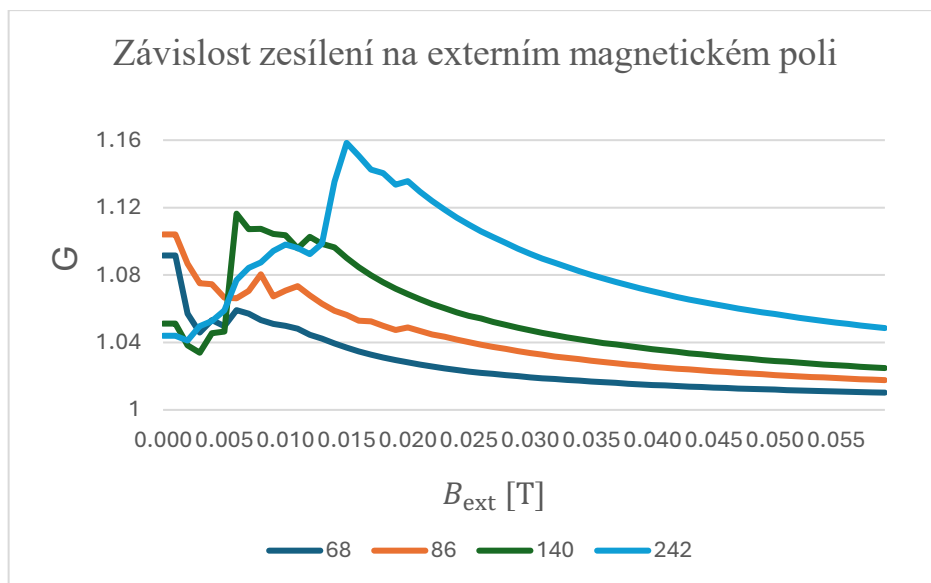


Obrázek 14: Hustota obsazení koncentrátoru a) 68 trojúhelníků b) 86 trojúhelníků c) 140 trojúhelníků d) 242 trojúhelníků

Tabulka 2: Hodnota a pro různé hustoty trojúhelníků v koncentrátoru

Počet trojúhelníků	68	86	140	242
a [nm]	150	100	50	5

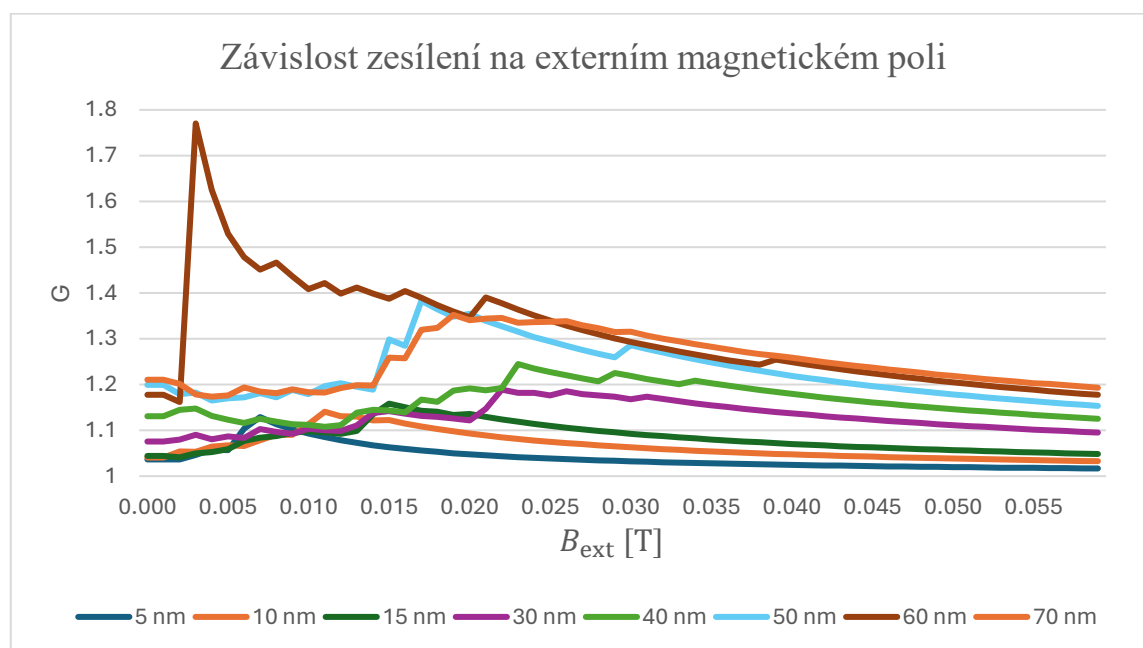
Identickým způsobem jak v sekci 2.2.2 provedeme simulace pro 4 různé koncentrátory a vypočítáme jejich zesílení v závislosti na externím magnetickém poli.



Obrázek 15: Porovnání zesílení pro koncentrátory tvořené z 68, 86, 140 a 242 trojúhelníky

Hodnota zesílení pro hustoty 68 a 86 je maximální na začátku a pro hustoty 140 a 242 dochází k růstu hodnoty, jak se víc magnetických domén překlápá do směru x .

Nyní proměříme pro nejhustější typ jeho závislost na tloušťce, pro hodnoty 5, 10, 15, 30, 40, 50, 60 a 70 nm. Vynesená závislost zesílení je na Obrázek 16.

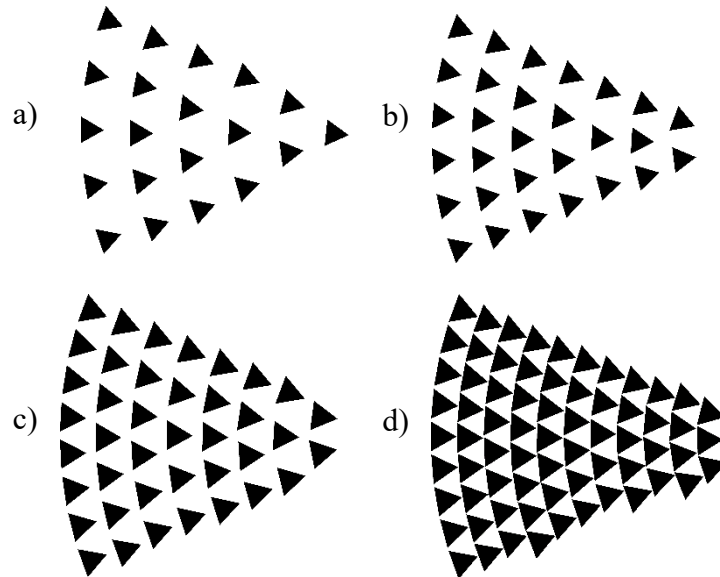


Obrázek 16: Porovnání zesílení pro různé tloušťky koncentrátorů tvořených z 242 trojúhelníků

Z měření lze vyčíst, že opět pro tloušťku 60 nm dochází k mnohem většímu zesílení než u ostatních, tloušťka 70 nm nedosahuje podobného zesílení nejspíše proto, že magnetické pole koncentruje více mimo osu x .

2.2.4 Trojúhelník 200 nm

V této sekci zaměníme délky strany trojúhelníků za 200 nm, postup snižování vzdálenosti mezi trojúhelníky postupně až k nule, provedeme stejně jako v sekcích 2.2.2 a 2.2.3; naše počáteční vzdálenost je $a = 200$ nm.

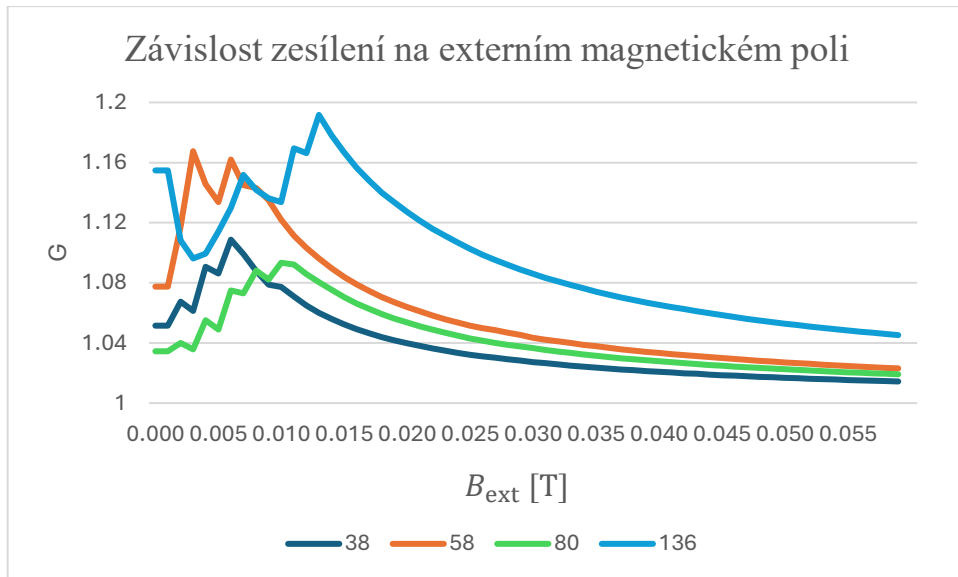


Obrázek 17: Hustota obsazení koncentrátoru a) 38 trojúhelníků b) 58 trojúhelníků c) 80 trojúhelníků d) 136 trojúhelníků

Tabulka 3: Hodnota a pro různé hustoty trojúhelníků v koncentrátoru

Počet trojúhelníků	38	58	80	136
a [nm]	200	123	66	5

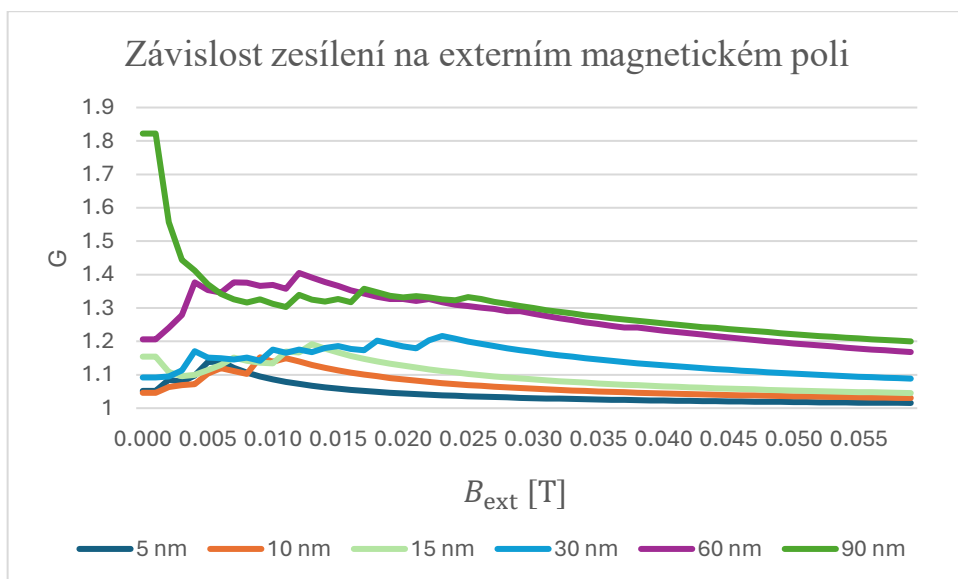
Stejně jako v předchozích sekcích provedeme simulace pro 4 různé hustoty zaplnění koncentrátorů a vypočítáme jejich zesílení v závislosti na externím magnetickém poli. Vynesené závislosti jsou na Obrázek 18.



Obrázek 18: Porovnání zesílení pro koncentrátoři tvořené z 38, 58, 80 a 136 trojúhelníků

Zesílení hustot 38, 58 a 80 nejprve rostou, jak se magnetické domény překlápí do směru externího pole a zesílení hustoty 136 po aplikování pole nejprve klesá a pak až začne růst do svého maxima, nejspíše vlivem směru magnetických domén v koncentrátoru.

Nyní proměříme pro nejhustější typ jeho závislost na tloušťce, pro hodnoty 5, 10, 15, 30, 60 a 90 nm. Vynesená závislost zesílení je na Obrázek 19.



Obrázek 19: Porovnání zesílení pro různé tloušťky koncentrátorů tvořených z 136 trojúhelníků

2.3 Diskuse

Nyní zhodnotíme výsledky dosažených v sekcích 2.2.2, 2.2.3 a 2.2.4. Z pravidla platí, že čím větší hustotu trojúhelníků jsme v koncentrátoru použili a čím větší tloušťku, tím větší jsme dosáhli zesílení. U některých lze říci, čím hustší obsazení a tloušťka, tím svého maximálního zesílení dosáhly ve vyšších magnetických polích, jelikož bylo potřeba většího pole k překlopení domén.

Výjimky tohoto tvrzení nastávají pro tloušťky 60 nm, které dosahují nejvyššího zesílení ze všech zkoumaných metamateriálů a to 1,6 pro trojúhelníky velikosti 100 nm a kolem 1,8 pro zbylé dvě velikosti. Můžeme usoudit, že kolem této tloušťky se nacházíme v ideálním poměru délky na šířku pro dosažení maximálního zesílení.

Kdybychom na začátku vybrali jinou počáteční magnetickou indukci, např $\mathbf{B} = (-0.01; -0.01; 0)$ T tak bychom dosáhli rozdílných výsledků. Dále ze závislosti lze vyvodit, že magnetické domény jsou i po ustálení více orientované do směru počáteční magnetizace, proto nám zesílení většinou z počátku roste, důsledkem změny směru magnetizace domén.

2.4 Závěr

Cílem práce bylo vytvořit různé magnetické koncentrátory v mikroskopickém měřítku a prozkoumat v simulacích jejich vlastnosti v oblasti zesílení magnetického pole vně koncentrátoru.

Nejprve jsme si určili nejvhodnější geometrii jako trojúhelník z průzkumu literatury. Vycházeli jsme z tvaru okvětního lístku, který byl prozkoumán v literatuře, tento tvar jsme využili a vytvořili jsme z něho metamateriál z rovnostranných trojúhelníků, pro jehož různé rozměry trojúhelníků, jejich hustotou obsazení a tloušťku metamateriálu jsme zkoumali jeho vlastnosti v mikromagnetických simulacích. Hustotu materiálu jsme měnili podle vzdálenosti a mezi trojúhelníky v koncentrátoru, která je uvedena v tabulkách v každé sekci, a kde se nachází uvnitř metamateriálu je na Obrázku 11. Simulace jsme provedli pro tři různé velikosti trojúhelníků, z kterých jsme naši geometrii stavěli.

Získané hodnoty zesílení v závislosti na externím magnetickém poli jsme si vynesli do grafů a porovnali. Nalezli jsme trend, který platil pro všechno závislosti až na výjimky, že s počtem trojúhelníků v koncentrátoru a tloušťkou roste maximální hodnota zesílení koncentrátorů.

Výjimky nastaly pro tloušťku 60 nm, kdy jsme naměřili zesílení 1,6 pro trojúhelníky s délkou strany 100 nm a zesílení kolem 1,8 pro trojúhelníky s délkou stran 150 a 200 nm. Z těchto výsledků lze usoudit, že tloušťka 60 nm pro průměr koncentrátorů 5000 nm je v ideálním poměru pro získání maximálního zesílení.

Dále v grafech lze vidět, že většinou v počátečních hodnotách externího pole zesílení roste. To může být zapříčiněno přesměrováním orientace magnetizace magnetických domén do směru osy x .

Na každý koncentrátor, abychom dosáhli stejných počátečních podmínek zreplicovatelných v praxi, jsme nejprve aplikovali externí pole ve směru osy y o velikosti 10 mT, i když jsme koncentrátory následně nechali zrelaxovat v nulovém poli, volba směru a velikosti má na konečnou závislost vliv.

Sice jsme v této práci nenalezli koncentrátor, který by dosahoval lepšího zesílení, jak dosáhli v literatuře s tvarem okvětního lístku, ale prozkoumali jsme použití metamateriálů a našli jsme ideální poměr délky a tloušťky, který by se mohl dále prozkoumat.

Seznam zdrojů

- [1] FOURNEAU, Emile; ARREGI, Jon Ander; BARRERA, Aleix; NGUYEN, Ngoc Duy; BENDING, Simon et al. Microscale Metasurfaces for On-Chip Magnetic Flux Concentration. Online. *Advanced Materials Technologies*. 2023, roč. 8, č. 16. ISSN 2365-709X. Dostupné z: <https://doi.org/10.1002/admt.202300177>. [cit. 2024-05-18].
- [2] RUDNEV, Valery, I; An objective assessmet of magnetic flux concentrators, Inductoheat Group, Heat Treating progress, November/December 2004
- [3] VANSTEENKISTE, Arne; LELIAERT, Jonathan; DVORNIK, Mykola; HELSEN, Mathias; GARCIA-SANCHEZ, Felipe et al. The design and verification of MuMax3. Online. *AIP Advances*. 2014, roč. 4, č. 10. ISSN 2158-3226. Dostupné z: <https://doi.org/10.1063/1.4899186>. [cit. 2024-05-18].
- [4] EXL, Lukas; SUESS, Dieter a SCHREFFL, Thomas. Micromagnetism. Online. In: COEY, J. M. D. a PARKIN, Stuart S.P. (ed.). *Handbook of Magnetism and Magnetic Materials*. Cham: Springer International Publishing, 2021, s. 347-390. ISBN 978-3-030-63208-3. Dostupné z: https://doi.org/10.1007/978-3-030-63210-6_7. [cit. 2024-05-18].
- [5] AHARONI, Amikam. *Introduction to the theory of ferromagnetism*. 2nd ed. International series of monographs on physics (Oxford, England). Oxford: Oxford University Press, 2007. ISBN 978-0-19-850809-0.
- [6] BLUNDELL, Stephen. *Magnetism in condensed matter*. Oxford master series in condensed matter physics. Oxford: Oxford University Press, 2001. ISBN 978-0-19-850591-4.
- [7] FRUCHART, Olivier; Nanomagnetism, Lecture notes; Spintec (Université Grenoble Alpes, CNRS & CEA); version 2018
- [8] PORTER, Donald; DONAHUE Michael; Standard Problems in Micromagnetics; National Institute of standards and technology 100 Bureau Drive,
- [9] SCHÄFER, Rudolf. Magnetic Domains. Online. In: COEY, J. M. D. a PARKIN, Stuart S.P. (ed.). *Handbook of Magnetism and Magnetic Materials*. Cham: Springer International Publishing, 2021, s. 391-434.

ISBN 978-3-030-63208-3. Dostupné z: https://doi.org/10.1007/978-3-030-63210-6_8. [cit. 2024-05-24].

- [10] Magnetické koncentrátory <https://www.pmlindia.com/pages/flux-concentrator> [cit. 2024-05-24].
- [11] KRAUS, John D.; CARVER, Keith R. a BURNS, Stephen H. Electromagnetics , 2nd ed. Online. *American Journal of Physics*. 1977, roč. 45, č. 1, s. 113-114. ISSN 0002-9505. Dostupné z: <https://doi.org/10.1119/1.10886>. [cit. 2024-05-24].
- [12] MASPERO, Federico; CUCCURULLO, Simone; MUNGPARA, Dhavalkumar; SCHWARZ, Alexander a BERTACCO, Riccardo. Impact of magnetic domains on magnetic flux concentrators. Online. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2021, roč. 535. ISSN 03048853. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2021.168072>. [cit. 2024-05-24].
- [13] DRLJAČA, Predrag M.; VINCENT, Franck; BESSE, Pierre-André a POPOVIĆ, Radivoje S. Design of planar magnetic concentrators for high sensitivity Hall devices. Online. *Sensors and Actuators A: Physical*. 2002, roč. 97-98, s. 10-14. ISSN 09244247. Dostupné z: [https://doi.org/10.1016/S0924-4247\(01\)00866-4](https://doi.org/10.1016/S0924-4247(01)00866-4). [cit. 2024-05-24].
- [14] LEVEQUE, Randall J. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. Online. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007. ISBN 978-0-89871-629-0. Dostupné z: <https://doi.org/10.1137/1.9780898717839>. [cit. 2024-05-24].
- [15] OOMMF <https://math.nist.gov/oommf/> [cit. 2024-05-24].
- [16] Magnum <http://micromagnetics.org/magnum.fd/> [cit. 2024-05-24].
- [17] https://www.researchgate.net/figure/Finite-difference-discretization-grids-for-the-model-problem-u-f-on-the-square-0_fig1_271699437
- [18] Mumax3 <https://mumax.github.io/> [cit. 2024-05-24].
- [19] Mumax3 workshop <https://mumax.ugent.be/mumax3-workshop/> [cit. 2024-05-24].

Seznam obrázků a tabulek

Obrázek 1: Směr magnetizace a její náležící výměnné energie. Převzato a upraveno z [9]	4
Obrázek 2: Závislost uniaxiální anizotropní energie na úhlu mezi magnetickým momentem a snadnou osou Převzato a upraveno z [9].....	5
Obrázek 3: Grafická reprezentace rovnice (1.6.14) a) Ukazuje precesi pouze prvního členu rovnice b) Ukazuje precesi při započítání i druhého členu s tlumící konstantou α	7
Obrázek 4: Tvorba magnetických domén v materiálu při aplikaci externího pole ve směru x. Převzato z [12].....	8
Obrázek 5: Různé geometrie magnetických koncentrátorů. Převzato z [13]	9
Obrázek 6: Magnetický koncentrátor tvaru „petal“ a určení místa měření hledaných hodnot	10
Obrázek 7: Mřížka diskretních bodů. Převzato z [17].....	10
Obrázek 8: Koncentrátor skládající se z rovnostranných trojúhelníků.....	12
Obrázek 9: Koncentrátor tvaru okvětního lístku a) relaxovaný stav s $B_{ext} = 0$ mT b) stav s $B_{ext} = 15$ mT c) stav s $B_{ext} = 30$ mT.....	13
Obrázek 10: zesílení koncentrátoru z okvětních lístků	13
Obrázek 11: Místo, kde se v koncentrátoru nachází vzdálenost a. Hustota obsazení koncentrátoru a) 176 trojúhelníků b) 202 trojúhelníků c) 258 trojúhelníků d) 552 trojúhelníků.....	14
Obrázek 12: Porovnání zesílení pro koncentrátoru tvořené z 176, 202, 258 a 552 trojúhelníky.....	15
Obrázek 13: Porovnání zesílení pro různé tloušťky koncentrátorů tvořených z 552 trojúhelníků.....	15
Obrázek 14: Hustota obsazení koncentrátoru a) 68 trojúhelníků b) 86 trojúhelníků c) 140 trojúhelníků d) 242 trojúhelníků	16
Obrázek 15: Porovnání zesílení pro koncentrátoru tvořené z 68, 86, 140 a 242 trojúhelníky	17
Obrázek 16: Porovnání zesílení pro různé tloušťky koncentrátorů tvořených z 242 trojúhelníků.....	17
Obrázek 17: Hustota obsazení koncentrátoru a) 38 trojúhelníků b) 58 trojúhelníků c) 80 trojúhelníků d) 136 trojúhelníků	18
Obrázek 18: Porovnání zesílení pro koncentrátoru tvořené z 38, 58, 80 a 136 trojúhelníky	19
Obrázek 19: Porovnání zesílení pro různé tloušťky koncentrátorů tvořených z 136 trojúhelníků.....	19
Tabulka 1: Hodnota a pro různé hustoty trojúhelníků v koncentrátoru	14
Tabulka 2: Hodnota a pro různé hustoty trojúhelníků v koncentrátoru	16
Tabulka 3: Hodnota a pro různé hustoty trojúhelníků v koncentrátoru	18