UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Hahn-Banachova věta

Vedoucí diplomové práce:

Doc. Mgr. Karel Pastor, PhD.

Rok odevzdání: 2015

Vypracovala:

Lucie Nováková

AME, prezenční studium

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Lucie Nováková

Název práce: Hahn-Banachova věta

Typ práce: Diplomová práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: Doc. Mgr. Karel Pastor, PhD.

Rok obhajoby práce: 2015

Abstrakt: Tato práce se zabývá jednou z nejdůležitějších vět funkcionální analýzy - Hahn-Banachovou větou. První kapitola je věnována životu Hanse Hahna a Stefana Banacha. V druhé kapitole jsou uvedeny základní pojmy a tvrzení potřebné k vyslovení věty a jejích důsledků a aplikací. Třetí kapitola obsahuje samotnou Hahn-Banachovu větu i její algebraickou a geometrickou verzi a důsledky věty. Ve čtvrté kapitole jsou pak uvedeny některé aplikace. Práce je proložena příklady z funkcionální analýzy, z nichž většina využívá Hahn-Banachovy věty, jejích důsledků nebo aplikací.

Klíčová slova: Hahn-Banachova věta, sublineární funkcionál, Zornovo lemma, Banachův prostor, teorémy oddělitelnosti, Mazurova věta

Počet stran: 59

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Lucie Nováková

Title: Hahn-Banach theorem

Type of thesis: Master's

Department:

Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: Doc. Mgr. Karel Pastor, Ph.D.

The year of presentation: 2015

Abstract: This thesis deals with one of the most important theorem in Functional analysis - Hahn-Banach theorem. First chapter presents the life of Hanse Hahn and Stefan Banach. In the second chapter some basic definitions and teorems are introduced, which are necessary for the theorem and its corollaries and applications. Third chapter contains Hahn-Banach theorem itself, its algebraic and geometric version and its corollaries. In the fourth chapter some applicatons are introduced. The thesis contains exercises from the Functional analysis, most of them put Hahn-Banach theorem, its corollaries and applications in use.

Key words: Hahn-Banach theorem, sublinear functional, Zorn lemma, Banach space, separation theorems, Mazur theorem

Number of pages: 59

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně pod vedením Doc. Mgr. Karla Pastora, PhD. a všechny použité zdroje jsem uvedla.

V Olomouci dne ....

. . . .

Lucie Nováková

Obsah

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat Doc. Mgr. Karlu Pastorovi, PhD. za jeho odborné vedení, za poskytnutí materiálů a rad a za čas, který mi při zpracování diplomové práce věnoval.

Úvod

V této práci jsem se zaměřila na představení jedné z nejvýznamnějších vět funkcionální analýzy - Hahn-Banachovy věty. Hahn-Banachova věta je tvrzení, které říká, že za jistých podmínek lze lineární funkcionál definovaný na nějakém podprostoru rozšířit na celý prostor tak, že se přitom nezmění jeho norma.

Větu uveřejnili Hans Hahn a Stefan Banach koncem 20. let 20. století, kteří ji dokázali nezávisle na sobě. Pro speciální případ (pro prostor spojitých funkcí na intervalu) ji dokázal již o několik let dříve Eduard Helly.

Bez Hahn-Banachovy věty by funkcionální analýza měla odlišnou strukturu, než jak ji známe dnes. Má mnoho aplikací a důsledků, jak právě ve funkcionální, tak i v konvexní analýze.

U čtenáře se předpokládají základní znalosti funkcionální a konvexní analýzy.
Práce byla vysázena pomocí typografického systému TEX ve formátu LATEX2ϵ.

1 Hans Hahn a Stefan Banach

V této kapitole bych ráda v krátkosti zmínila něco málo o životě Hanse Hahna a Stefana Banacha. Čerpala jsem z [13] a [14].

1.1 Hans Hahn

Hans Hahn se narodil 27. září 1879 ve Vídni v tehdejším Rakousku-Uhersku jako syn vysoce postaveného vládního úředníka. V roce 1898 začal studovat práva ve Vídni. O rok později změnil zaměření na matematiku a strávil nějaký čas na univerzitách v Mnichově, Strassburgu a Göttingenu. V roce 1902 získal titul Ph.D. ve Vídni. V roce 1909 byl nominován v Černovicích (Ukrajina) a později i v Bonnu (Německo) na titul mimořádný profesor. V roce 1917 pak na titul řádný profesor ve Vídni. Od roku 1915 byl v Rakouské armádě, bojoval v 1.světové válce, kde byl vážně raněn. Poté se vrátil do Vídně, kde zůstal do své brzké smrti 24. července roku 1934, ve věku 54 let. Byl ženatý s Eleonore Minor a měl s ní dceru Noru.

V matematice se zabýval především funkcionální analýzou, topologií, teorií množin, reálnou analýzou a teorií uspořádání. Zajímal se ale také o filosofii, především Machův novopozitivismus.

Je po něm pojmenováno několik vět a teorémů, například Hahnův teorém rozkladu, Hahn-Kolmogorova věta, Hahn-Mazurkiewiczův teorém, Vitali-Hahn-Saksiho teorém a další.

1.2 Stefan Banach

Stefan Banach se narodil 30. března 1892 v Krakově v Polsku jako syn daňového úředníka. Jeho matka zmizela a tak ho vychovávala babička. Po dokončení gymnázia chtěl Banach studovat matematiku, ale měl pocit, že v ní už nemůže být objeveno nic nového. Začal tak studovat techniku, odjel do Lvova a přihlásil se na Strojírenskou fakultu Lvovské technické univerzity. Vydělával si doučováním.

Během první světové války se kvůli špatnému zraku nedostal do armády a tak učil na krakovských školách. Navštěvoval matematické přednášky na Jagellonské univerzitě v Krakově. Zlomem v Banachově životě bylo setkání s Hugem Steinhausem v roce 1916. S ním v roce 1918 vydal svůj první článek. Potom začal s velkou rychlostí publikovat další důležité matematické články. Díky Steinhausovi také potkal Lucju Braus, kterou si v roce 1920 vzal.

V tomto roce se také stal asistentem polského matematika Antoni Lomnického na Lvovské technické univerzitě, kde také přednášel matematiku.

Roku 1922 vydal práci *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux*

équations intégrales, která je označována za zrod funkcionální analýzy. V roce 1922 byla Banachovi udělena docentura za jeho práci v teorii míry. Od roku 1924 byl profesorem. V roce 1929 začal vydávat společně se Steinhausem časopis *Studia Mathematica* zaměřený na funkcionální analýzu. V roce 1939 byl Banach zvolen prezidentem *Polské matematické společnosti*. Za nacistické okupace Lvovu od června 1941 žil Banach za velmi těžkých podmínek. Několik týdnů byl vězněn. Po dobytí Lvova Sověty obnovil své bývalé kontakty a setkal se opět se Sobolevem. Byl už ale vážně nemocný.
Zemřel 31. srpna 1945 ve Lvově (Ukrajina) na rakovinu plic.

2 Základní definice, pojmy a tvrzení

V této kapitole jsou shrnuty nejdůležitější definice a tvrzení potřebné k vyslovení dalších vět a lemmat, která později využiji k vyslovení Hahn-Banachových vět a jejich důsledků a aplikací. V kapitole **2.1 Teorie množin** jsem čerpala z [1], kapitole **2.2 Funkcionální analýza** z [1] a [3], v kapitole **2.3 Konvexní analýza** pak z [1],[7],[8] a [9].

2.1 Teorie množin

Následující definice jsou potřebné pro vyslovení Zornova lemmatu, které hraje důležitou roli při důkazu algebraické verze Hahn-Banachovy věty (věta 21).

Definice 1 (Uspořádané množiny) *Množina M s relací $\prec$ a vlastnostmi*

i) $a \prec a$ *(reflexivita)*

ii) $a \prec b$ *a* $b \prec c \Rightarrow a \prec c$ *(tranzitivita),*

kde $a, b, c \in M$, se nazývá částečně uspořádaná množina.
Jestliže navíc platí
iii) *jestliže* $a \prec b$ *a* $b \prec a \Rightarrow a = b$ *(antisymetrie),*
potom množinu M nazveme uspořádanou množinou.

Definice 2 (Lineárně uspořádaná množina) *Lineárně uspořádanou množinou nazveme takovou množinu M, kde každé dva prvky z M budou srovnatelné (lze říci, že jeden prvek je větší než druhý).*

Definice 3 (Řetězec) *Řetězcem v uspořádané množině $(M, \prec)$ je každá lineárně uspořádaná podmnožina M.*

Definice 4 (Horní závora) *Jestliže $p \prec x$ pro každé $p \in P$, $x \in M$, kde $P \subset M$ a M je uspořádaná množina, potom prvek x nazveme horní závorou (majorantou) množiny P.*

Definice 5 (Maximální prvek) *Prvek $z \in M$ nazveme maximálním prvkem množiny M, jestliže neexistuje žádný prvek $m \in M, m \neq z$ takový, že $z \prec m$.*

Nyní již můžeme vyslovit samotné lemma:

Lemma 1 (Zornovo lemma) *Nechť M je neprázdná uspořádaná množina taková, že každý její řetězec má horní závoru. Potom M má maximální prvek.*

Jistou analogií Zornova lemmatu je Hausdorffova věta (viz [12]).

Věta 1 (Hausdorffova věta) *Každý řetězec uspořádané množiny je obsažen v některém maximálním řetězci.*

2.2 Funkcionální analýza

Definice 6 (Metrický prostor) *Dvojice* (X, ρ)*, kde* X *je množina a* $\rho : X \times X \to \mathbf{R}$ *je reálná funkce splňující:*
i) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
ii) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
iii) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ *(trojúhelníková nerovnost),*
se nazývá metrický prostor.

Definice 7 (Normovaný lineární prostor, norma) *Nechť* $\boldsymbol{F}$ *je těleso reálných nebo komplexních čísel. Normovaným lineárním prostorem rozumíme každý vektorový prostor* W *nad* $\boldsymbol{F}$ *s* normou $\|.\|$*, což je nezáporná funkce na* W *splňující:*

$i)\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

$ii)\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|,$

$iii)\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(trojúhelníková nerovnost),*

$\forall x, y \in W \quad a \quad \forall \lambda \in \boldsymbol{F}.$

Poznámka: Norma $\|.\| : x \to \|x\|$ je na normovaném lineárním prostoru E spojitá funkce.

Definice 8 (Ekvivalence norem) *Řekneme, že normy* $\|.\|_1$ *a* $\|.\|_2$ *na vektorovém prostoru* E *jsou ekvivalentní, jestliže existují konstanty* $\alpha, \beta > 0$ *takové, že*

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1 \qquad \forall x \in E.$$

Věta 2 *Na konečně dimenzionálním vektorovém prostoru* E *jsou všechny normy navzájem ekvivalentní.*

Definice 9 (Banachův prostor) *Úplný normovaný lineární prostor se nazývá Banachův prostor.*

Definice 10 (Lineární forma) *Lineární formou na* W *nazýváme lineární zobrazení*

$$f : W \to \boldsymbol{F}.$$

Definice 11 (Algebraický duál) *Prostor všech lineárních forem na W nazýváme algebraickým duálem k prostoru W a značíme $W^{\#}$.*

Definice 12 (Topologický duál) *Prostor všech spojitých lineárních forem na X nazýváme topologickým duálem k prostoru X a značíme X^{*}.*

Definice 13 (Sublineární funkcionál) *Funkcionál $p : X \to \mathbf{R}$, kde X je lineární prostor se nazývá sublineární, jestliže platí*
i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in X$
ii) $p(\alpha x) = \alpha p(x), \forall x \in X, \alpha > 0.$

Definice 14 (Pseudonorma) *Nechť p je sublineární funkcionál. Pak p nazýváme pseudonormou, jestliže platí*

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$$

$\forall \lambda \in \boldsymbol{F}$ *a* $\forall x \in W$.

Definice 15 (Algebraický součet) *Řekneme, že vektorový prostor W je algebraickým součtem podprostorů A a B, jestliže*

$$W = A + B \text{ a } A \cap B = \{0\},$$

kde

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Označujeme $W = A \oplus B$.

Poznámka:

1) Každý prvek $w \in W$ lze jednoznačně zapsat jako součet $w_A + w_B$, kde $w_A \in A$ a $w_B \in B$.
2) Je-li

$$W = A \oplus B,$$

můžeme definovat projekce P_A a P_B, takto:

$$P_A(w) = w_A \text{ a } P_B(w) = w_B,$$

kde $w = w_A + w_B,\ w_A \in A, w_B \in B$.

Definice 16 (Algebraický doplněk) *Každý podprostor B splňující*

$$W = A \oplus B$$

nazýváme algebraickým doplňkem A ve W.

Definice 17 (Topologický součet) *Řekneme, že normovaný lineární prostor E je topologickým součtem podprostorů M a N, jestliže platí*

$$E = M \oplus N$$

a projekce P_M, P_N jsou spojité.

Značíme $E = M \oplus_t N$.

Poznámka: Je-li $E = M \oplus_t N$, jsou podprostory M a N uzavřené. Naopak je-li Banachův prostor E algebraickým součtem M a N a oba podprostory M, N jsou uzařené, je $E = M \oplus_t N$.

Definice 18 (Topologický doplněk) *Nechť M je uzavřený podprostor Banachova prostoru E. Jestliže existuje podprostor N takový, že $E = M \oplus_t N$, pak N nazýváme topologickým doplňkem M v E.*

Příklad ([2] str. 52)

Ukažte, že jestliže X je konečně-dimenzionální Banachův prostor, pak každý lineární funkcionál f na X je spojitý na X.

Řešení:

Nechť $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ je báze X. Uvažujeme daný problém v normě

$$\|x\| = \sum_i |x_i|$$

pro $x = \sum_i x_i e_i$. Nechť $x_n = \sum_n x_i^n e_i$.

Předpokládejme, že $x_i^n \to x_i$ pro $n \to +\infty$, tedy

$$\sum_n x_i^n e_i \to \sum_i x_i e_i.$$

Platí také

$$f(x_n) = \sum_n x_i^n f(e_i)$$

a

$$f(x) = \sum_i x_i f(e_i).$$

Dále (z linearity)

$$\|f(x_n) - f(x)\| = \|\sum_n (x_i^n - x_i) f(e_i)\|.$$

Protože

$$(x_i^n - x_i) \to 0,$$

potom i

$$\|\sum_n (x_i^n - x_i) f(e_i)\| \to 0,$$

čímž je spojitost dokázána.

Příklad ([2] str. 52)

Ukažte, že jestliže je X nekonečně-dimenzionální Banachův prostor, pak na X můžeme definovat nespojitý lineární funkcionál.

Řešení:

Vybereme z báze prostoru X spočetnou množinu $\{e_n\}$ takto:

$e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots)$

$e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots)$

$\vdots$

$e_i = (0, 0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$ (1 je na i-té pozici)

$\vdots$

Nyní definujeme lineární funkcionál $f : X \to \mathbf{R}$ na $\{e_n\}$ tak, že

$f(e_n) = n,\ \forall n = 1, \ldots, +\infty$, tzn:

$f(e_1) = 1$

$f(e_2) = 2$

$\vdots$

$f(e_i) = i$

$\vdots$

A pro ostatní prvky báze položíme $f = 0$. Potom

$$\|f(e_n)\| = n,\ \forall k \in \mathbf{N}.$$

Platí

$$sup_{n \in \mathbf{N}} f(e_n) = +\infty$$

$\Rightarrow$ funkcionál f není omezený a tedy ani spojitý.

Definice 19 (Kanonické vnoření) *Nechť X je normovaný lineární prostor, X^* je duál X a X^{**} je duál X^* (prostor všech spojitých lineárních forem na X^*), tedy druhý duál X.*

Definujme pro $x \in X$ formu ϵ_x předpisem

$$\epsilon_x : \varphi \mapsto \varphi(x),\ \varphi \in X^*$$

a zobrazení

$$\epsilon : x \mapsto \epsilon_x,\ x \in X.$$

Zobrazení ϵ nazveme kanonickým vnořením X do X^{**}, ϵ_x je lineární forma na X^*, která je omezená, protože

$$|\epsilon_x(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|\|x\|$$

pro každé $\varphi \in X^*$, a je prvkem druhého duálu X^{**}.

Definice 20 (Anihlátory) *Nechť X je normovaný lineární prostor. M je podprostor X, N podprostor X^*. Předpisem*

$$M^\perp = \{\varphi \in X^* : \varphi(x) = 0 \ \ \forall x \in M\},$$

$$N_\perp = \{x \in X : \varphi(x) = 0 \ \ \forall \varphi \in N\}$$

definujeme anihilátory.

Poznámka:

1) $M^\perp$ a $N_\perp$ tvoří uzavřené podprostory.

2) Platí $X^\perp = \{0\}$ a $X^*_\perp = \{0\}$.

Příklad ([2] str. 55)

Nechť X je Banachův prostor.

(i) Ukažte, že v X^* máme a) $X^\perp = \{0\}$ a b) $\{0\}^\perp = X^*$.

Ukažte, že v X máme c) $(X^*)_\perp = \{0\}$ a d) $\{0\}_\perp = X$.

(ii) Nechť $A \subset B$ jsou podmnožiny X. Ukažte, že $B^\perp$ je podprostor $A^\perp$.

Řešení:

(i)

Plyne z definice anihilátorů:

$$X^\perp = \{\varphi \in X^*; \varphi(x) = 0, \forall x \in X\}.$$

a) Z definice nulového funkcionálu, $\varphi \equiv 0$, tedy $X^\perp = \{0\}$.

b) Hledáme φ takové, že $\varphi(0) = 0$. To platí pro všechny spojité lineární funkcionály, tedy $\{0\}^\perp = X^*$. c)

$$X^*_\perp = \{x \in X; \varphi(x) = 0, \forall \varphi \in X^*\},$$

což platí pouze pro 0, tedy $X^*_\perp = \{0\}$.

d) Platí

$$\{0\}_\perp = \{x \in X; \varphi(x) = 0, \forall \varphi \in \{0\}\} = \{x \in X; 0(x) = 0\},$$

což platí $\forall x \in X$ a tedy $\{0\}_\perp = \{X\}$.

(ii)

$$A^\perp = \{\varphi \in X^*; \varphi(x) = 0, \forall x \in A\}, B^\perp = \{\varphi \in X^*; \varphi(x) = 0, \forall x \in B\}.$$

Pro $B^\perp$ je podprostor $A^\perp$, musíme dokázat, že pro $\forall x \in X$ platí:

pro $\forall \varphi_i \in B^\perp, \varphi_j \in B^\perp$ i $(\varphi_i + \varphi_j)(x) \in B^\perp$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \varphi \in B^\perp$ i $\alpha\varphi \in B^\perp$ (zřejmé)

a $B^\perp \subset A^\perp$, což platí z definice $A^\perp$a $B^\perp$, neboť

$$\varphi \in B^\perp \Rightarrow \varphi \in A^\perp.$$

Definice 21 (Faktorový prostor) *Nechť Z je podprostor vektorového prostoru W. Na W definujeme ekvivalenci takto: prvky $x, y \in W$ jsou ekvivalentní, jestliže $x - y \in Z$.*

Prostor W se tak rozpadne na třídy vzájemně ekvivalentních prvků.

Množina $x + Z$ je třídou obsahující prvek x.

Faktorovým prostorem W/Z rozumíme prostor právě všech tříd ekvivalentních prvků a definujeme zde

$$(x + Z) + (y + Z) := (x + y) + Z$$

a

$$\lambda(x + Z) := \lambda x + Z.$$

Definice 22 (Hustá množina) *Nechť A je libovolná podmnožina metrického prostoru (P, ρ). Jestliže $\bar{A} = P$, potom říkáme, že A je hustá v P.*

Věta 3 *Množina A je hustá právě tehdy, když pro každou neprázdnou otevřenou podmnožinu $G \subset P$ je $G \cap A \neq \emptyset$.*

Definice 23 (Separabilita prostorů) *Prostor (P, ρ), ve kterém existuje spočetná hustá podmnožina se nazývá separabilní.*

Definice 24 (Izomorfní a izometrické zobrazení) *Nechť V, W jsou vektorové prostory. Řekneme, že jsou izomorfní, jestliže existuje prosté lineární zobrazení V na W.*

Nechť $(E_1, \|.\|_1), (E_2, \|.\|_2)$ jsou normované lineární prostory a $f : E_1 \to E_2$.

Jestliže pro každé $x \in E_1$ platí

$$\|x\|_1 = \|f(x)\|_2,$$

potom zobrazení f nazveme izometrií.

Normované lineární prostory E_1, E_2 nazveme izometricky-izomorfní, jestliže exituje izomorfní zobrazení E_1 na E_2, které je navíc izometrické.

Poznámka: Izometricky-izomorfní zobrazení tedy zachovává jak algebraické operace, tak i normy.

Věta 4 *Nechť f je spojité zobrazení metrického prostoru P na metrický prostor Q a nechť P je separabilní. Potom je i $f(Q)$ separabilní. Speciálně, jsou-li M,N izomorfní normované lineární prostory a je-li M separabilní, potom je separabilní i N.*

Poznámka:

- Prostor c posloupností $\{x_n\}$, takových, že $lim_{n\to\infty}x_n < \infty$ a $\|x\| = sup_n|x_n|$, je separabilní.
- Prostor c_0 posloupností $\{x_n\}$, takových, že $lim_{n\to\infty}x_n = 0$ a $\|x\| = sup_n|x_n|$, je separabilní.
- Prostory $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{C}^n$, jsou separabilní.
- Prostor $C([0,1])$ všech reálných, resp. komplexních funkcí spojitých na intervalu $\langle 0,1\rangle$, kde $\|f\| = max_{t\in\langle 0,1\rangle}|f(t)|$ je separabilní.
- Prostory $\ell_p = \{x = (x_1,\dots,x_n); x_i \in \mathbf{R}, resp.\mathbf{C}; \|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}\}$ pro $1 \le p < \infty$, jsou separabilní.
- Prostory $L_p([0,1])$ všech Lebesgueovsky měřitelných funkcí na intervalu $\langle 0,1\rangle$ pro $1 \le p < \infty$, kde $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$, jsou separabilní.
- Prostor $\ell_\infty = \{x = (x_1,\dots,x_n); x_i \in \mathbf{R}, resp.\mathbf{C}; \|x\|_\infty = max_i\{|x_i|\}\}$, není separabilní.
- Prostor $L_\infty([0,1])$ všech Lebesgueovsky měřitelných funkcí na intervalu $\langle 0,1\rangle$, kde $\|f\|_\infty = sup_X|f|$, není separabilní.

Věta 5 *Nechť E je normovaný lineární prostor a E^* jeho duál. Je-li E^* separabilní, potom je i E separabilní.*

Příklad ([2] str. 60)

Ukažte, že c_0 není izomorfní s $C[0,1]$.

Řešení:

Ověříme separabilitu jejich duálů, tedy $c_0^*(=\ell_1)$ a $C[0,1]^*$. Prostor ℓ_1 je separabilní (viz poznámka výše). Prostor $C[0,1]^*$ separabilní není (viz [2]) a tedy mezi c_0 a $C[0,1]$ nemůže být izomorfismus.

Definice 25 (Jádro a obor hodnot operátoru) *Nechť T je operátor na Banachově prostoru X.*

Množinu

$$Ker\,T := \{x \in X : Tx = 0\}$$

nazveme jádro operátoru T.

Množinu

$$\mathcal{R}T := T(x)$$

pak oborem hodnot operátoru.

Abychom mohli vyslovit a dokázat geometrickou verzi Hahn-Banachovy věty, budeme potřebovat následující pojmy a tvrzení.

Věta 6 *Je-li f lineární forma na normovaném lineárním prostoru E, potom je f spojitá, právě tehdy, když její jádro $Ker f := \{x \in E : f(x) = 0\}$ je množina uzavřená.*

Důkaz: Zřejmě jádro Ker f je uzavřenou množinou pro každou spojitou funkci f na E. Nechť naopak f je lineární forma, jejíž jádro Ker f je uzavřená množina. Chceme ukázat, že f je spojitá. Jestliže $f = 0$, potom je to zřejmé. Je-li f nenulová, volme $z \in E$ pro nějž platí $f(z) = 1$. Protože Ker f je uzavřená množina, potom existuje $\delta > 0$ tak, že pro množinu

$$U := \{x \in E : \|x\| < \delta\}$$

platí

$$(z + U) \cap Ker f = \emptyset.$$

Potom ale

$$U \subset \{x \in E : |f(x)| < 1\}.$$

Kdyby tomu tak nebylo, potom by existovalo takové $u \in U$ takové, že

$$|f(u)| \geq 1.$$

V tom případě ale

$$w := \frac{-u}{f(u)} \in U$$

a protože $f(z+w)=0$, dostali bychom

$$z+w \in (z+U)\cap Ker f.$$

Ukázali jsme tak, že f je omezený funkcionál na jistém okolí 0, což nám už k jeho spojitosti stačí. ■

Věta 7 *Nechť E je normovaný lineární prostor, $f \in E^*$ nenulová lineární forma a $G \subset E$ otevřená množina. Potom množina $f(G)$ je otevřená.*

Důkaz: Nechť $x \in G$. Určitě existuje $a \in E$ takové, že $f(a)=1$. Pak existuje $\epsilon > 0$ tak, že $x+ta \in G$, jestliže $|t| < \epsilon$. Ukažme, že pak

$$U(f(x),\epsilon) \subset f(G).$$

Je-li totiž

$$y \in U(f(x),\epsilon)$$

a

$$t = y – f(x),$$

potom je $|t| < \epsilon$ a

$$y = f(x)+t = f(x+ta) \in f(G). \blacksquare$$

Definice 26 (Nadrovina) *Každou množinu typu*

$$\{w \in W : f(w)=\alpha\},$$

kde f je nenulová lineární forma na W a $\alpha \in \mathbf{R}$, nazýváme nadrovinou ve vektorovém prostoru W. Ekvivalentně tak můžeme říci, že H je nadrovina ve W, jestliže existuje $x \in W$ a maximální vlastní podprostor M tak, že

$$H = x + M.$$

Definice 27 (Uzavřená nadrovina) *Každou množinu tvaru $x+M$, kde M je maximální uzavřený vlastní podprostor E, nazveme uzavřenou nadrovinou v normovaném lineárním prostoru.*

Věta 8 *H je uzavřená nadrovina, právě tehdy, když existuje $f \in E^*, f \neq 0$ a $\alpha \in \mathbf{R}$ tak, že*

$$H = \{x \in E : f(x)=\alpha\}.$$

2.3 Konvexní analýza

Definice 28 (Konvexní množina, kužel) *Nechť X je reálný lineární prostor.*

1) Množinu $C \subset X$ nazveme konvexní, jestliže s libovolnými dvěma svými body x_1, x_2 obsahuje celou úsečku

$$[x_1, x_2] = \{x \in X : x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}.$$

2) Množina $K \subset X$ se nazývá kužel, jestliže s každým svým bodem x_0 obsahuje celý paprsek

$$\{\alpha x_0, \alpha > 0\}.$$

Poznámka: Prázdnou množinu považujeme za konvexní množinu i kužel.

Věta 9 *Nechť X, Y jsou reálné lineární prostory.*

1) Průnik libovolného počtu konvexních množin (kuželů) je opět konvexní množina (kužel).

2) Obraz $f(A)$ a úplný vzor $f^{-1}(B)$ konvexních množin (kuželů), $A \subset X, B \subset Y$ je při lineárním zobrazení $f : X \to Y$ konvexní množinou (kuželem).

3) Kužel je konvexní množinou právě tehdy, když

$$x_1, x_2 \in K \Rightarrow (x_1 + x_2) \in K.$$

Definice 29 (Konvexní, kuželový, lineární obal množiny)

1) Průnik všech konvexních množin C obsahujících danou množinu M se nazývá konvexní obal množiny M. Značí se conv$M$.

2) Pokud v předchozím vztahu místo konvexních množin uvažujeme všechny možné konvexní kužely $K, (M \subset K)$, nebo lineární podprostory $L, (M \subset L)$, potom se průnik nazývá kuželový (cone$M$) nebo lineární (lin$M$) obal M.

Definice 30 (Lineární, kuželová, konvexní kombinace prvků)

Nechť X je lineární prostor, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$. Potom prvek

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

se nazývá lineární kombinace prvků $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Jestliže čísla λ_i splňují:

$$\lambda_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, n$$

pak se tento prvek nazývá kuželová kombinace prvků $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Jestliže:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, n$$

pak tento prvek nazýváme konvexní kombinace prvků $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Věta 10

1) Konvexní (kuželový/ lineární) obal množiny M je tvořen konvexními (kuželovými/ lineárními) kombinacemi prvků z M.
2) Množina M je konvexní (konvexní kužel/ lineární prostor) právě tehdy, když je totožná se svým konvexním (kuželovým/ lineárním) obalem.

Definice 31 (Efektivní množina, nadgraf) *Nechť*

$$f : X \to \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

je funkce.
1) Množinu

$$dom f = \{x \in X, f(x) < \infty\}$$

nazýváme efektivní množinou.
2) Množinu

$$epi f = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbf{R}, x \in dom f, \alpha \geq f(x)\}$$

nazýváme epigrafem (nadgrafem) funkce f.

Definice 32 (vlastní a nevlastní funkce) *Funkce, pro které $dom f \neq \emptyset$ a $f(x) > -\infty$ všude na X, se nazývají vlastní funkce.*
Ostatní funkce se nazývají nevlastní funkce.

Definice 33 (Konvexní funkce) *Funkce $f : X \to \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ se nazývá konvexní funkce, jestliže $epi f$ je konvexní množina.*

Věta 11 *Nechť f je vlastní funkce definovaná na lineárním prostoru X. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*
i) Funkce f je konvexní.
ii) Platí Jensenova nerovnost, tj.:

$$\forall x, y \in X, \forall \alpha \in \langle 0, 1\rangle : f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

iii) $\forall x_i \in X_i, \forall \alpha_i \geq 0, i = 1, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, n \in \mathbf{N}$ platí:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i).$$

Důsledek 1 *Nechť X je lineární prostor. Dále nechť*
1) $f_i : X \to \mathbf{R}, i = 1, \ldots, n$ jsou konvexní funkce. Potom také

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

je konvexní funkce.

2) $f_\alpha : X \to \mathbf{R}$ *je konvexní funkce* $\forall \alpha \in A$, *kde* A *je libovolná konvexní množina. Pak také*

$$g(x) = sup_{\alpha \in A} f_\alpha(x), x \in X$$

je konvexní.

Poznámka: *Konstrukce funkcionálu:*

Nechť M je podmnožina v $X \times \mathbf{R}$. Označíme

$$M^{[1]} = \{x \in X; \exists \alpha \in \mathbf{R} : (x, \alpha) \in M\}$$

řez a

$$M(x, .) = \{\alpha \in \mathbf{R}; (x, \alpha) \in M\}.$$

Důsledek 2 *Nechť* M *je konvexní podmnožina prostoru* $X \times \mathbf{R}$. *Pro každé* $x \in X$ *položme*

$$f(x) = inf M(x, .).$$

Potom f *je konvexní funkce.*

Poznámka: Funkce $f : X \to \mathbf{R}$ je konvexní právě tehdy, když je konvexní na každém řezu, tj.: $\forall x, y \in X$ je funkce

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : \ g(t) = f[tx + (1 - t)y]$$

konvexní.

Definice 34 (Uzavřené a otevřené poloprostory) *Nechť* X^* *je prostor všech spojitých lineárních funkcionálů definovaných na X,* $f : X \to \mathbf{R}$ *je funkcionál. Potom množinu*

$$H(f, \alpha) := \{x \in X : f(x) = \alpha\}$$

nazveme nadrovinou v X, množiny

$$H_+(f, \alpha) := \{x \in X : f(x) \leq \alpha\}, \ H_-(f, \alpha) := \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$$

uzavřené poloprostory v X a množiny

$$H_+^\circ(f, \alpha) := \{x \in X : f(x) < \alpha\}, \ H_-^\circ(f, \alpha) := \{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

otevřené poloprostory v X.

Definice 35 (Minkovského funkce) *Nechť* X *je lineární prostor,* $A \subset X$ *je konvexní množina obsahující bod 0. Potom Minkovského funkce* $\mu A(.)$ *množiny* A *je pro* $x \in X$ *definovaná takto:*

$$\mu A(x) = inf\left\{t > 0 : \frac{x}{t} \in A\right\}.$$

Na tomto místě bych ráda uvedla Testy na nerovnost, neboť jich bude potřeba v důkazu vlastností Minkovského funkce (věta 14). Testy často využíval docent Jokl (viz [8]).

Věta 12 (1.test) *Nechť* $a, b \in \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. *Potom platí:* $a \leq b$ *právě tehdy, když pro každé* $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\lambda < a \Rightarrow \lambda \leq b.$$

Věta 13 (2.test) *Nechť* $a, b \in \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. *Potom platí:* $a \leq b$ *právě tehdy, když pro každé* $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\lambda > b \Rightarrow \lambda \geq a.$$

Věta 14 *Minkovského funkce je nezáporná, sublineární a platí*

$$\{x \in X : \mu A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X : \mu A(x) \leq 1\}.$$

Jestliže navíc X *je normovaný lineární prostor, pak* $\mu A(.)$ *je spojitá funkce v bodě 0 právě tehdy, když* $0 \in intA$.

Důkaz:

Krok 1: Dokážeme, že pro libovolné $x, y \in X$ platí

$$\mu A(x+y) \leq \mu A(x) + \mu A(y)$$

pomocí 2. testu na nerovnost. Uvažujeme $\lambda \in \mathbf{R}$ tak, že

$$\lambda > \mu A(x) + \mu A(y).$$

Potom existují $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$ taková, že platí

$$k_1 + k_2 = \lambda,\ k_1 > \mu A(x),\ k_2 > \mu A(y).$$

Z definice $\mu A(x)$ plyne existence $t_1 > 0, t_2 > 0$ takových, že

$$k_1 > t_1, k_2 > t_2, \frac{x}{t_1} \in A, \frac{y}{t_1} \in A.$$

Poté

$$\frac{x+y}{t_1+t_2} = \frac{x}{t_1}\frac{t_1}{t_1+t_2} + \frac{y}{t_2}\frac{t_2}{t_1+t_2} \in A,$$

z čehož vyplývá

$$\mu A(x+y) \leq t_1 + t_2 < k_1 + k_2 = \lambda,$$

což dokazuje

$$\mu A(x+y) \leq \mu A(x) + \mu A(y).$$

Krok 2: Dokážeme, že pro libovolné $x \in X, \alpha > 0$ takové, že

$$\mu A(\alpha x) = inf \left\{ t > 0 : \frac{\alpha x}{t} \in A \right\},$$

platí

$$\mu A(\alpha x) = \alpha \mu A(x).$$

Položíme $s = \frac{t}{\alpha}$. Tedy

$$\mu A(\alpha x) = inf \left\{ \alpha s : \frac{x}{s} \in A \right\} = \alpha inf \left\{ s : \frac{x}{s} \in A \right\} = \alpha \mu A(x).$$

Spolu s krokem 1 je tedy $\mu A(.)$ sublineární funkce.

Nezápornost Minkovského funkce je zřejmá z její definice.

Krok 3: S ohledem na definici Minkovského funkce je zřejmá inkluze

$$A \subset \{x \in X : \mu A(x) \leq 1\}. \tag{1}$$

Dokážeme tedy, že

$$\{x \in X : \mu A(x) < 1\} \subset A.$$

Je-li $x \in X : \mu A(x) < 1$ potom existuje $t \in (0, 1)$ takové, že $\frac{x}{t} \in A$.

Jelikož $0 \in A$ a A je konvexní množina, platí

$$x = 0(1 - t) + \frac{x}{t} t \in A$$

(konvexní kombinace), tedy platí i první inkluze

$$\{x \in X : \mu A(x) < 1\} \subset A.$$

Krok 4: $0 \in intA$ právě tehdy, když existuje okolí U_1bodu 0 takové, že $U_1 \subset A$, tj podle (1) je Minkovského funkce $\mu A(x) \leq 1, \ \forall x \in U_1$.

Vzhledem k pozitivní homogenitě $\mu A(x)$ pro každé $\epsilon > 0$ při položení $U_\epsilon = \epsilon U_1$ dostáváme implikaci

$$x \in U_\epsilon \Rightarrow \mu A(x).$$

Zřejmě

$$\mu A(0) = 0.$$

Tedy $\mu A(.)$ je spojitá v bodě 0, právě když $0 \in intA$. ■

Věta 15 *K tomu aby byl lineární funkcionál f na normovaném lineárním prostoru X spojitý stačí, aby existoval v nule spojitý sublineární funkcionál $p : X \to \mathbf{R}$ tak, že $\forall x \in X$:*

$$f(x) \leq p(x).$$

Definice 36 (Oddělování nadrovin) *Nechť X je lineární prostor. Řekneme, že funkcionál f odděluje množiny $A \subset X$ a $B \subset X$, jestliže platí*

$$sup_{x \in A} f(x) \leq inf_{x \in B} f(x)$$

a ostře odděluje množiny $A \subset X$ a $B \subset X$, jestliže

$$sup_{x \in A} f(x) < inf_{x \in B} f(x).$$

Poznámka: Geometrický význam:

Nadrovina

$$H(f, c) = \{x \in X : f(x) = c\},$$

kde

$$sup_{x \in A} f(x) \leq c \leq inf_{x \in B} f(x)$$

odděluje množiny A a B v tom smyslu, že množina A leží v jednom poloprostoru a množina B ve druhém:

$$A \subset H_+(f, c) = \{x \in X : f(x) \leq c\},\ B \subset H_-(f, c) = \{x \in X : f(x) \geq c\}.$$

Definice 37 (Uzavřená funkce) *Funkce $f : X \to \mathbf{R}$, kde X je normovaný lineární prostor, se nazývá uzavřená, jestliže její nadgraf (epi f) je uzavřená množina.*

Definice 38 *Nechť X je normovaný lineární prostor, $f : X \to \mathbf{R}$ je funkce a $x_0 \in X$. Potom definujeme:*

$$a)\ lim\ inf_{x \to x_0} f(x) = inf\{A : A = lim_{n \to +\infty} f(x_n), lim_{n \to +\infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0\}$$

$$b)\ lim\ sup_{x \to x_0} f(x) = sup\{A : A = lim_{n \to +\infty} f(x_n), lim_{n \to +\infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0\}.$$

Poznámka: Funkce $f : X \to \mathbf{R}$ je spojitá v bodě x_0 právě tehdy, když platí

$$lim\ inf_{x \to x_0} f(x) = lim\ sup_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Definice 39 (Gâteauxův diferenciál) *Nechť X je normovaný lineární prostor, $x \in X$ a $f : X \to \mathbf{R}$ je funkce. Jestliže pro každé $h \in X$ existuje limita*

$$f'_G(x, h) := lim_{t \to 0^+} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

a funkce $h \mapsto f'_G(x, h)$ je spojitá a lineární, pak píšeme $f'_G(x)(h)$ a funkcionál $f'_G(x) \in X^*$ nazýváme Gâteauxovým diferenciálem (Gâteauxovou derivací) funkce f v bodě x.

Věta 16 *Nechť funkce $f : X \to \mathbf{R}$ je diferencovatelná v Gâteauxově smyslu. Uvažujeme pro ni tzv. Weierstrassovu funkci*

$$W(x, x_0) = f(x) - f(x_0) - f'_G(x_0)(x - x_0).$$

Pak W je konvexní právě tehdy, když $W(x, x_0) \geq 0$ pro každé $x, x_0 \in X$.

Definice 40 (Subdiferenciál funkce) *Nechť X je normovaný lineární prostor, $x_0 \in X$ a $f : X \to \mathbf{R}$ je funkce. Podmnožinu prostoru X^*, která je tvořena těmi prvky $g \in X^*$, pro které platí*

$$f(x) - f(x_0) \geq g(x - x_0)$$

pro každé $x \in X$, nazýváme subdiferenciálem funkce f v bodě x_0.
Značíme $\partial f(x_0)$.

Poznámka: Subdiferenciál $\partial f(x_0)$ je množinou směrnic afinních funkcí $a(x) = g(x) - b$, které jsou opěrnými funkcemi pro f a platí $b = g(x_0) - f(x_0)$.

Věta 17 *Subdiferenciál $\partial f(x_0)$ je konvexní množina v X^*.*

Důkaz: Nechť $g_1, g_2 \in \partial f(x_0)$. Podle definice subdiferenciálu platí

$$g_1(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0)\ \forall x \in X,$$

$$g_2(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0)\ \forall x \in X.$$

Zvolme $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$, potom $\forall x \in X$:

$$\alpha\,[f(x) - f(x_0)] \geq \alpha g_1(x - x_0)$$

$$(1 - \alpha)\,[f(x) - f(x_0)] \geq (1 - \alpha) g_2(x - x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) \geq (\alpha g_1 + (1 - \alpha) g_2)(x - x_0).$$

Tedy

$$\alpha g_1 + (1 - \alpha) g_2 \in \partial f(x_0). \blacksquare$$

Věta 18 *Nechť X je normovaný linerní prostor, $\varphi : X \to \mathbf{R}$ konvexní funkce, $x_0 \in X$, $\varphi(x_0) \in \mathbf{R}$. Pro každé $h \in X$ uvažujeme funkci f tak, že*

$$f(h) = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0).$$

Potom platí
(i) f je konvexní funkce

(ii) $f(0) = 0$

(iii) $h \in X \Rightarrow -f(-h) \leq f(h)$

(iv) $h \in X, 0 < t < 1 \Rightarrow f(th) \leq tf(h)$

(v) pro pevné $h \in X$ *funkce* $t \mapsto \frac{f(th)}{t}$ *neklesá v intervalu* $(0, +\infty)$

(vi) pro každé $h \in X$ *existuje limita*

$$p(h) := lim_{t \to 0^+} \frac{f(th)}{t}$$

(vii) funkce p *je sublineární a taková, že* $p(0) = 0$

(viii) $h \in X \Rightarrow p(h) \leq f(h)$.

Důkaz:

(i) Posun nadgrafu a ii) dosazení jsou zřejmé.

(iii) Dokážeme sporem.

Nechť pro nějaké $h \in X$ platí $f(h) < -f(-h)$. Poté

$$0 > \frac{1}{2}(f(h) + f(-h)) \geq f\left(\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}(-h)\right) = f(0) = 0$$

což je spor, tedy $f(h) \geq -f(-h)$.

(iv) $h \in X, 0 < t < 1$, potom

$$f(th) = f(th + (1-t)0) \leq tf(h) + (1-t)f(0) = tf(h).$$

(v) Zvolme $0 < t < s$, potom $0 < \frac{t}{s} < 1$ a podle (iv) platí, že

$$f(th) = f\left(\frac{t}{s}sh\right) \leq \frac{t}{s}f(sh)$$

$$\frac{f(th)}{t} \leq \frac{f(sh)}{s}.$$

(vi) $\frac{f(th)}{t}$ má limitu pro $t \to 0^+$, neboť podle (v) je to monotónní posloupnost.

(vii) Funkce p je zřejmě homogenní, stačí tedy dokázat, že $p(h+k) \leq p(h) + p(k)$. Počítejme

$$p(h) + p(k) = lim_{t \to 0^+} \frac{f(th)}{t} + lim_{t \to 0^+} \frac{f(tk)}{t}$$

$$= lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{1}{2}f(th)}{\frac{1}{2}t} + lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{1}{2}f(tk)}{\frac{1}{2}t} = lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{1}{2}f(th) + \frac{1}{2}f(tk)}{\frac{1}{2}t}$$

$$\geq lim_{t \to 0^+} \frac{f(\frac{1}{2}th + \frac{1}{2}tk)}{\frac{1}{2}t} = lim_{t \to 0^+} \frac{f(\frac{1}{2}t(h+k))}{\frac{1}{2}t} = lim_{t \to 0^+} \frac{f(t(h+k))}{t} = p(h+k).$$

(viii) Platí

$$p(h) = lim_{t \to 0^+} \frac{f(th)}{t} = inf_{t > 0} \frac{f(th)}{t} \leq f(h). \blacksquare$$

Věta 19 *Nechť X je normovaný lineární prostor, $f : X \to \mathbf{R}$ je konvexní funkce, $x_0 \in X$ a $f(x_0) \in \mathbf{R}$. Pak platí*

$$\partial f(x_0) = \{g \in X^*, g(h) \leq f'_+(x_0, h)\ \forall h \in X\},$$

kde

$$f'_+(x_0, h) = lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$$

je směrová derivace.

Důkaz:

Krok 1 ($\subset$): Nechť nejdříve prvek

$$g_0 \in \partial f(x_0) = \{g \in X^*, g(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0)\ \forall x \in X\}.$$

Zvolme $h \in X, t > 0$ a položme $x = x_0 + th$. Poté

$$g(th) = g(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0) = f(x_0 + th) - f(x_0).$$

Odtud

$$g(h) \leq \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}, \quad \forall t > 0$$

$$g(h) \leq f'_+(x_0, h).$$

Krok 2 ($\supset$): Předpokládejme, že

$$g_0 \in \{g \in X^* : g(h) \leq f'_+(x_0, h)\ \forall h \in X\}.$$

Zvolme $x \in X$ a položme $h = x - x_0$. S využitím věty 18 (v) platí:

$$g_0(x - x_0) = g(h) \leq f'_+(x_0, h) \leq f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x) - f(x_0).$$

Tedy $g_0 \in \partial f(x_0)$. ■

Věta 20 *Nechť E je reálný Banachův prostor, X neprázdná konvexní otevřená podmnožina E. Je-li konvexní funkce f spojitá v bodě $x_0 \in X$, potom $f'_+(x_0)$ je spojitý sublineární funkcionál na E. Proto $f'_G(x_0)$, pokud existuje, je spojitý lineární funkcionál.*

3 Hahn-Banachova věta a její důsledky

V této kapitole uvedu samotnou Hahn-Banachovu větu, a to její algebraickou, funkcionální i geometrickou verzi. Dále zde uvedu její důsledky, jak pro funkcionální analýzu (Mazurova věta), tak i pro konvexní analýzu (Teorémy oddělitelnosti). Také zde zmíním několik příkladů využívajících různé verze věty a důsledky. Definice a věty v této kapitole jsem čerpala z [1],[6],[8] a [9], příklady z [2] a [10].

Věta 21 (Algebraická verze Hahn-Banachovy věty) *Nechť p je konvexní funkcionál na reálném vektorovém prostoru W, M je lineární podprostor W a f lineární forma na M, $f \leq p$ na M. Potom $\exists$ lineární forma $F \in W^{\#}$ tak, že $F = f$ na M a $F \leq p$ na W. Předpokládáme-li, že p je pseudonorma, lze zvolit F, tak aby $|F| \leq p$ všude na W.*

Důkaz: Použijeme Zornovo lemma 1. Uvažujme tedy množinu $\mathcal{Z}$ všech lineárních forem h definovaných na podprostorech $H_h \supset M$ takových, že $h = f$ na M a $h \leq p$ na H_h. Pro $h, g \in \mathcal{Z}$ definujeme $h \prec g$, pokud $H_h \subset H_g$ a $h = g$ na H_h. Ihned je vidět, že $(\mathcal{Z}, \prec)$ je uspořádaná množina.

Buď nyní $\mathcal{S} \subset \mathcal{Z}$ žetězec.

Položme

$$\tilde{H} = \cup\{H_h : h \in S\}.$$

Je-li $x \in \tilde{H}$ a $x \in H_h \cap H_g$, kde $h, g \in \mathcal{S}$, je $h(x) = g(x)$ ($\mathcal{S}$ je řetězec.) Existuje tedy lineární forma $\tilde{h}$ na $\tilde{H}$ tak, že $\tilde{h}(x) = h(x)$, pokud $h \in \mathcal{S}$ a $x \in H_h$. Zřejmě $\tilde{h} = f$ na M a $\tilde{h} \leq p$ na $\tilde{H}$. Je tedy $\tilde{h}$ horní závorou $\mathcal{S}$.

Podle Zornova lemmatu 1 existuje maximální prvek množiny $\mathcal{Z}$, označme ho F. Když ukážeme, že $H_F = W$, je důkaz, alespoň pro případ konvexního funkcionálu p, hotov.

Nechť je tedy H_F vlastní podprostor W. Volme $y \in W \setminus H_F$ a položme

$$H := \{x + \lambda y : x \in H_F, \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

Zřejmě H je podprostor W, $H \neq H_F$. Volme dále $c \in \mathbf{R}$ libovolně a definujeme

$$h : x + \lambda y \mapsto F(x) + \lambda c$$

pro $x + \lambda y \in H$. Tato definice je korektní, neboť pokud

$$x_1 + \lambda_1 y = x_2 + \lambda_2 y,$$

je

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\, y = x_2 - x_1 \in H_F,$$

a tudíž $\lambda_1 = \lambda_2$ a $x_1 = x_2$. Zřejmě h je lineární forma na H, $h = f$ na M, $F \prec h$ a $h \neq F$. Když ukážeme, že lze volit takové $c \in \mathbf{R}$, aby $h \leq p$ na H, máme spor s maximalitou F. Hledáme tedy takové c, aby

$$h(x + \lambda y) = F(x) + \lambda c \leq p(x + \lambda y), \forall x \in H_F, \forall \lambda \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

K tomu stačí nalézt c tak, aby pro všechna $x \in H_F$ a $\lambda > 0$ platilo

$$F\left(\frac{x}{\lambda}\right) - p\left(\frac{x}{\lambda} - y\right) \leq c \leq p\left(\frac{x}{\lambda} + y\right) - F\left(\frac{x}{\lambda}\right), \tag{3}$$

neboť pro $\lambda > 0$ z druhé nerovnosti ve (3) po vynásobení číslem λ dostaneme, že

$$\lambda c \leq p(x + \lambda y) - F(x), \forall x \in H_F, \forall \lambda > 0,$$

tedy

$$F(x) + \lambda c \leq p(x + \lambda y), \forall x \in H_F, \forall \lambda > 0. \tag{4}$$

Pro $\lambda < 0$ položme $\mu = -\lambda$ a pak z první nerovnosti ve (3) dostaneme postupně

$$F\left(\frac{x}{\mu}\right) - p\left(\frac{x}{\lambda} - y\right) \leq c, \forall x \in H_F, \forall \mu > 0,$$

$$F(x) - p(x - \mu y) \leq c\mu, \forall x \in H_F, \forall \mu > 0,$$

$$F(x) - c\mu \leq p(x - \mu y), \forall x \in H_F, \forall \mu > 0,$$

Tedy

$$F(x) + \lambda c \leq p(x + \lambda y), \forall x \in H_F, \forall \lambda < 0. \tag{5}$$

Pro $\lambda = 0$ je nerovnost

$$F(x) \leq p(x), \forall x \in H_F \tag{6}$$

splněna rovněž, neboť F je maximální prvek množiny $\mathcal{Z}$.

Vztahy (4), (5) a (6) již implikují (2).

Protože však pro všechna $u, v \in H_F$ platí

$$F(u) + F(v) = F(u + v) \leq p(u + v) \leq p(u - y) + p(v + y),$$

určitě existuje c tak, aby

$$F(u) - p(u - y) \leq c \leq p(v + y) - F(v)$$

pro všechna $u, v \in H_F$. Je-li p pseudonorma a $x \in W$, máme

$$-p(x) = -p(-x) \leq -F(-x) = F(x) \leq p(x). \blacksquare$$

Poznámka: Často bývá užitečné použít následující speciální případ algebraické verze Hahn-Banachovy věty: Je-li p konvexní funkcionál na reálném vektorovém prostoru W, existuje lineární forma $F \in W^{\#}$ tak, že $F \leq p$ na W. Stačí totiž položit $f = 0$ na $M := \{0\}$. Je-li p nenulový funkcionál, lze volit i F tak, aby byla nenulová lineární forma. Není co řešit, pokud $p(x) < 0$ v nějakém bodě $x \in W$. Pokud $p(\omega) \geq 0$ pro všechna $\omega \in W$ a $p(x) > 0$ pro jisté $x \in W$, položme

$$M := \{\lambda x : \lambda \in \mathbf{R}\}$$

a

$$f(\lambda x) := \lambda p(x)$$

pro $\lambda x \in M$. Je-li $\lambda > 0$, je

$$f(\lambda x) = \lambda p(x) = p(\lambda x).$$

Pokud $\lambda < 0$, je

$$f(\lambda x) = \lambda p(x) < 0 \leq p(\lambda x).$$

Nyní stačí použít Hahn-Banachovu větu. Dostaneme $F \in W^{\#}, F \leq p$ na W a

$$F(x) = p(x) > 0.$$

Věta 22 (Hahn-Banachova věta) *Nechť f je spojitá lineární forma na podprostoru M reálného normovaného lineárního prostoru E. Potom existuje $F \in E^*$ tak, že $F = f$ na M a $\|F\|_E = \|f\|_M$.*

Důkaz: Položme $p(x) = \|f\|\|x\|$. Potom p je pseudonorma na E a $|f(x)| \leq p(x)$ pro $x \in M$. Podle algebraické verze Hahn-Banachovy věty existuje lineární forma F na E tak, že $F = f$ na M a $|F| \leq p$ na E. Odtud ihned plyne, že F je omezená a $\|F\| \leq \|f\|$.
Opačná nerovnost $\|f\| \leq \|F\|$ však plyne přímo z definice normy funkcionálu. ■

Poznámka: Tvrzení věty 21 pro případ pseudonormy p, a jejího důsledku (věta 22) platí také pro normované lineární prostory nad komplexními čísly. Tyto věty se někdy nazývají Bohnenblust-Sobczykovy věty.
Myšlenka důkazu algebraické verze Hahn-Banachovy věty pro komplexní případ (stručně):
(Z ní je současně vidět i přechod od komplexního k reálnému případu, či naopak.)
Je-li F lineární forma na komplexním vektorovém prostoru W, $F = f + ig$, jsou f a g reálné lineární formy. Navíc, neboť $F(ix) = iF(x)$, musí být nutně $g(x) = -f(ix)$.
Naopak, je-li f reálná lineární forma na W a

$$F(x) = f(x) – if(ix),$$

snadno ověříme, že F je komplexní lineární funkcionál na W.

Předpokládejme tedy, že jsme dokázali algebraickou verzi Hahn-Banachovy věty (věta 21) pro reálný případ, že p je pseudonorma na vektorovém prostoru W a

$$f = f_1 + if_2$$

lineární funkcionál na podprostoru

$$M \subset\subset W, |f| \leq p$$

na M. Neboť

$$|f_1| \leq |f| \leq p$$

na M, proto existuje reálný lineární funkcionál F_1 na W tak, že $f_1 = F_1$ na M a $|F_1| \leq p$ všude na W. Položme

$$F(x) = F_1(x) – iF_1(ix)$$

pro $x \in W$. Podle předchozího je

$$F(x) = f_1(x) – if_1(ix) = f(x),$$

jestliže $x \in M$. Musíme ještě ukázat, že $|F| \leq p$ na W. Zvolíme tedy $x \in W$.

Existuje $t \in \langle 0, 2\pi)$ tak, že

$$F(x) = |F(x)|e^{it}.$$

$|F(x)|$ je reálné číslo a $F(z) = F_1(z)$ pokud $F(z) \in \mathbf{R}$. Potom

$$|F(x)| = e^{-it}F(x) = F(e^{-it}x) = F_1(e^{-it}x) \leq p(e^{-it}x) = |e^{-it}|p(x) = p(x).$$

Příklad [10]

Ukažte, že

$$\|x\| = sup\{|f(x)| : f \in X^*, \|f\| = 1\}$$

pro $x \in X$, je-li X Banachův prostor (nad tělesem $\mathbf{F}$ *reálných nebo komplexních čísel).*

Řešení:

Jestliže $x = 0$, je to zřejmé. Nechť tedy $x \neq 0$, zřejmě

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\| \leq \|x\|$$

a přechodem k supremu na levé straně máme

$$\|x\| \geq sup\{|f(x)| : f \in X^*, \|f\| = 1\}.$$

Označme Y podprostor X, $dim Y = 1$, tak, že Y je generován prvkem x, tj.:

$$Y = \{\lambda x : \lambda \in \mathbf{F}\}.$$

Na Y uvažujeme lineární funkcionál

$$f(\lambda x) = \lambda \|x\|,$$

kde $\lambda \in \mathbf{F}$. Zřejmě

$$|f(\lambda x)| = |\lambda| \|x\| \leq \|x\|$$

pro $|\lambda| \leq 1$. Přitom $f(x) = \|x\|$ a tedy $\|f\| = 1$. Podle Hahn-Banachovy věty má tento lineární funkcionál rozšíření F na celé X takové, že $\|F\| = 1$ a

$$F(x) = f(x) = \|x\|,$$

odkud plyne opačná nerovnost.

Jedním z nejdůležitějších důsledků Hahn-Banachovy věty pro funkcionální a konvexní analýzu je bezpochyby Mazurova věta.

Věta 23 (Mazurova věta) *Nechť C je otevřená konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru E a $z \in E \backslash C$. Potom existuje uzavřená nadrovina $H \subset E$ tak, že $z \in H$ a $H \cap C = \emptyset$.*

Důkaz: Lze předpokládat, že $0 \notin C$ (posunutím bodu z do počátku).
Nechť

$$G := \cup \{\lambda C : \lambda > 0\}$$

(G je vlastně nejmenší otevřený kužel obsahující C).
Lehce lze ověřit, že G je zase otevřená množina (λC je otevřená množina).
Položme

$$p(x) := inf\{\|x + y\| : \ y \in G\}$$

pro $x \in X$. p je sublineární funkcionál na G, neboť podle definice:
i)

$$p(x + z) \leq p(x) + p(z), \ \forall x, z \in X,$$

protože

$$p(x + z) = inf\{\|x + z + g\| : \ g \in G\} = inf\{\|x + z + y + h\| : \ y, h \in G\},$$

kde $g = y + h$ a platí

$$\|x + z + g\| = \|x + z + y + h\| \leq \|x + y\| + \|z + h\|,$$

tedy i

$$p(x+z) = inf_{g\in G}\|x+z+g\| = inf_{y,h\in G}\|x+z+y+h\| \leq inf_{y\in G}\|x+y\|+inf_{h\in G}\|z+h\| = p(x)+p(z).$$

ii)

$$p(\alpha x) = \alpha p(x),\ \forall x \in X, \alpha > 0,$$

protože

$$p(\alpha x) = inf\{\|\alpha x + y\| :\ y \in G\} = inf\{|\alpha|\|x + y\| :\ y \in G\}$$

a platí

$$\|\alpha x + y\| \leq |\alpha|\|x + y\|$$

tedy i

$$inf\|\alpha x + y\| \leq |\alpha| inf\|x + y\|.$$

Dále pro $x \in G$ je $p(x) > 0$. Jinak by totiž existovala posloupnost $\{y_n\} \subset G$ taková, že

$$\|x + y_n\| \to 0.$$

Potom ale $-y_n \to x$ a z otevřenosti G by musel existovat index n_0, pro nějž by $-y_{n_0} \in G$. Což vede ke sporu , protože potom by díky konvexitě C

$$0 = y_{n_0} + (-y_{n_0}) \in G.$$

Podle algebraické verze Hahn-Banachovy věty (21) existuje nenulová lineární forma $f \in E^{\#}$ taková, že $f \leq p$ na E. Nechť $a \in G$. Potom

$$p(-a) = 0 \tag{7}$$

(z definice p, neboť $\|(-a) + a\| = 0$),
a tudíž

$$f(-a) \leq p(-a) = 0.$$

Vidíme, že $f \geq 0$ na G.
Kdyby náhodou $f(z) = 0$ pro jisté $z \in G$, pak buď existuje koule $B(z)$ se středem v z tak, že $f(b) = 0$ pro každé $b \in B(z)$, což implikuje $f \equiv 0$ na E, nebo existují body z_1, z_2:

$$z = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2$$

tak, že například: $f(z_1) > 0$ a $f(z_2) < 0$, neboť musí platit

$$f(z) = \frac{1}{2}f(z_1) + \frac{1}{2}f(z_2).$$

Poté však $f(-z_2) > 0$ a s ohledem na (7)

$$0 < f(-z_2) \leq p(-z_2) = 0,$$

což je spor.

Dále když položíme $H := Kerf$, pak je H nadrovina v E, $0 \in H$ a $H \cap G = \emptyset$.

Nyní zbývá ukázat, že f je spojitá. Jestliže je však $x \in E$ a $y \in G$, je

$$f(x) \leq p(x) \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Protože

$$inf\{\|y\| : y \in G\} = 0,$$

je

$$f(x) \leq \|x\|.$$

Potom ale i

$$-\|x\| = -\| - x\| \leq -f(-x) = f(x) \leq \|x\|.$$

Odtud hned plyne, že f je spojitá v 0, ale i všude na E, neboť f je lineární forma. ■

Poznámka: Mazurovu větu lze přeformulovat takto:

Nechť C je otevřená konvexní množina v normovaném lineárním prostoru E a $z \notin C$, potom existuje $\varphi \in E^*$ tak, že $\varphi(z) = 0$ a $\varphi > 0$ na C.

Poznámka: Konvexním kuželem ve vektorovém prostoru W rozumíme takovou množinu V, že

$$V + V \subset V,\ \lambda V \subset V,\ \forall \lambda > 0.$$

Někdy se také požaduje, aby $0 \in V$. Je-li A libovolná podmnožina W, definujeme $k(A)$ jako průnik všech kuželů obsahujících A. $k(A)$ je potom nejmenší kužel obsahující A.

(Průnik kuželů tvoří vždy kužel, W je také kužel.)

Ověřte, že

$$k(A) = \{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n : \alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_n > 0, x_1, \ldots, x_n \in A, n \in \mathbf{N}\}.$$

Nechť M je množina všech kuželových kombinací prvků z A

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,$$

kde $\alpha_i > 0, x_i \in A, n \in \mathbf{N}$. Zřejmě $A \subset M$. Ukážeme, že

$$M = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \alpha_i \geq 0, x_i \in A, n \in \mathbf{N} \right\}$$

je kužel (pro $\alpha_i = 0$ platí $0 \in M$):

Platí

$$M + M = \left\{ z = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i, \beta_i \geq 0, x_i \in A, n \in \mathbf{N} \right\} \subset M$$

a pro libovolné $\lambda > 0$ je $\lambda M \subset M$, neboť

$$\lambda M = \left\{ \lambda x = \sum_{i=1}^{m} \lambda \alpha_i x_i, \lambda > 0, \alpha_i \geq 0, x_i \in A, n \in \mathbf{N} \right\} \subset M.$$

Platí tedy $k(A) \subset M$.

Na druhou stranu každý bod z M leží v libovolném kuželu obsahujícím A, tedy $M \subset k(A)$.

Dohromady dostáváme

$$k(A) = M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n, \alpha_i \geq 0, x_i \in A, n \in \mathbf{N} \right\}. \blacksquare$$

Věta 24 (Geometrická verze Hahn-Banachovy věty)

Nechť A, B jsou neprázdné disjunktní konvexní podmnožiny reálného normovaného lineárního prostoru E. Potom $\exists$ nenulová funkce $f \in E^*$ a $\alpha \in \boldsymbol{R}$, tak že

$$A \subset \{x \in E : f(x) > \alpha\}$$

a

$$B \subset \{x \in E : f(x) < \alpha\},$$

pokud A i B jsou navíc otevřené.

Důkaz: Nechť jsou množiny A i B otevřené. Položme $C := A - B$ Protože A i B jsou konvexní, je i C konvexní. Je také otevřená, neboť

$$C = \cup\{A - b : b \in B\}.$$

Podle Mazurovy věty (a po ní následující poznámky) existuje $f \in E^*$ takové, že $f > 0$ na C. Je-li $a \in A, b \in B$, pak je

$$0 < f(a - b) = f(a) - f(b).$$

Existuje tedy reálné α tak, že

$$sup\{f(b) : b \in B\} \leq \alpha \leq inf\{f(a) : a \in A\}.$$

Množiny A a B jsou otevřené a konvexní, tedy $f(A)$ a $f(B)$ jsou otevřené intervaly, protože (z věty 7) jsou to otevřené, ale také konvexní množiny, jakožto obrazy konvexních množin při lineárním zobrazení f. Z toho plyne, že $f > \alpha$ na A a $f < \alpha$ na B. ■

Poznámka:

1) Tato verze Hahn-Banachovy věty říká, že dvě konvexní disjunktní množiny A, B mohou být za jistých předpokladů odděleny (separovány) uzavřenou nadrovinou H tak, že A leží v jednom poloprostoru určeném H a množina B v druhém. Má tedy opravdu geometrický charakter.
2) Jsou-li A, B libovolné disjunktní množiny ve vektorovém prostoru , lze je oddělit nadrovinou právě tehdy, když lze oddělit nadrovinou jejich konvexní obaly. Požadavek konvexnosti množin A, B tedy nelze vypustit.

Následující věta je bezprostředním důsledkem Hahn-Banachovy věty (věta 22).

Věta 25 *Nechť x_0 je nenulový prvek normovaného lineárního prostoru E.*
Potom $\exists\ g \in E^*$ tak, že $\|g\| = 1$ a $g(x_0) = \|x_0\|$.
Speciálně jsou-li x, y dva různé body E, $\exists\ \varphi \in E^*$ tak, že $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Důkaz: viz příklad na straně 32. ■

Poznámka:

1) Nechť $\mathcal{G}$ je systém funkcí na množině A. Říkáme, že $\mathcal{G}$ odděluje body množiny A, jestliže ke každé dvojici $x, y \in A, x \neq y$ můžeme najít $g \in \mathcal{G}$ tak, že $g(x) \neq g(y)$. V tomto smyslu tedy prvky E^* oddělují body E.
2) Důsledek Hahn-Banachovy věty říká, že v každém bodě x_0, který leží na sféře

$$S := \{x \in E : \|x\| = \|x_0\|\},$$

můžeme sestrojit alespoň jednu tečnou nadrovinu: Existuje $g \in E^*$ tak, že $\|g\| = 1$ a označíme

$$M := \{x \in E : g(x) \leq \|x_0\|\},$$

leží celá uzavřená koule

$$B := \{x \in E : \|x\| \leq \|x_0\|\}$$

v M (pokud je $x \in B$, potom

$$g(x) \leq |g(x)| \leq \|g\|\|x\| \leq \|x_0\|.)$$

Přitom x_0 leží v nadrovině

$$\{x \in E : g(x) = \|x_0\|\}.$$

Proto důsledku 25 můžeme říkat *Věta o tečném funkcionálu*, nebo *Věta o tečně.* V daném bodě může existovat ke sféře S více takových tečen.

Věta 26 *Nechť M je uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru E a $x \in E \setminus M$. Potom $\exists\ \varphi \in E^*$ tak, že $\varphi = 0$ na M a $\varphi(x) \neq 0$.*

Poznámka: Vynásobíme-li vhodně funkcionál φ, můžeme docílit toho, aby $\varphi(x) = 1$ nebo aby $\|\varphi\| = 1$.

Dalšími známými a důležitými důsledky geometrické Hahn-Banachovy věty (věta 24) pro konvexní analýzu jsou Teorémy o oddělitelnosti.

Věta 27 (První teorém o oddělitelnosti) *Nechť množiny $A, B \subset X$ jsou konvexní, neprázdné, disjunktní a nechť A je otevřená. Pak existuje nenulový lineární spojitý funkcionál oddělující množiny A a B.*

Důkaz:

Krok 1: Jelikož A i B jsou neprázdné, existují body $a_0 \in A,\ b_0 \in B$. Množina

$$C := (A - a_0) - (B - b_0) = \{x \in X : x = a - a_0 - b + b_0; a \in A, b \in B\}$$

je zřejmě konvexní (protože A i B jsou konvexní), obsahuje 0 (pro $a \equiv a_0, b \equiv b_0$) a je otevřená ($A$ je otevřená, jestliže

$$\hat{x} = \hat{a} - a_0 - \hat{b} + b_0$$

a $\hat{a} \in A$, pak existuje okolí U takové, že $\hat{a} \in U \subset A$ a platí

$$\hat{x} \in U - a_0 - \hat{b} + b_0 \in C.)$$

Navíc prvek $c := b_0 - a_0 \notin C$, neboť v opačném případě by platilo

$$b_0 - a_0 = a - a_0 - b + b_0 \Rightarrow b = a \in A \cap B,$$

což ovšem nejde, protože A a B jsou disjunktní.

Krok 2: Uvažujme nyní Minkovského funkci $p(x)$ množiny C. Víme (dle věty 14), že funkce $p(x)$ je nezáporná, sublineární a spojitá v bodě 0. Také platí $p(x) \leq 1\ \forall x \in C$.

Krok 3: Na podprostoru

$$L := \{x \in X : x = \alpha c = \alpha(b_0 - a_0), \alpha \in \mathbf{R}\}$$

si definujeme lineární funkcionál l vztahem

$$l(\alpha c) = \alpha p(c)\ (\in \mathbf{R}).$$

Pak pro $\alpha > 0$ máme

$$l(\alpha c) = \alpha p(c) = p(\alpha c)$$

a pro $\alpha \leq 0$

$$l(\alpha c) = \alpha p(c) \leq 0 \leq p(\alpha c),$$

neboť p je nezáporná funkce.

Tedy $\forall x \in L$ platí nerovnost

$$l(x) \leq p(x)$$

a podle Hahn-Banachovy věty (věta 21) můžeme uvažovat rozšíření l na lineární funkcionál L takový, že platí:

$$L(\alpha c) = l(\alpha c) = \alpha p(c),\ \alpha \in \mathbf{R} \tag{8}$$

a zůstane zachována nerovnost

$$l(x) \leq p(x) \longrightarrow L(x) \leq p(x),\ x \in X. \tag{9}$$

Funkce p je (podle kroku 2) spojitá v bodě 0 a tudíž musí být spojitá i funkce L (viz věta 15).

Krok 4: Pro libovolné $a \in A$ a $b \in B$ máme

$$L(a-b) = L(a-a_0-b+b_0)+L(a_0-b_0) \leq p(a-a_0-b+b_0)+l(-1(b_0-a_0)) \leq 1-p(b_0-a_0),$$

protože

$$(a - a_0 - b + b_0) \in C$$

a na C platí $p(x) \leq 1$. a platí (8) a (9).

Pro $0 < t \leq 1$ bod

$$\frac{b_0 - a_0}{t} = \frac{c}{t} \notin C,$$

nemůže, neboť C je konvexní, obsahuje 0 a na interval $\langle 0, \frac{c}{t} \rangle$ leží bod $c = b_0 - a_0 \notin C$.

Proto tedy

$$p(b_0 - a_0) = inf \left\{ t > 0 : \frac{b_0 - a_0}{t} \in C \right\} \geq 1.$$

Tím pádem

$$L(a - b) \leq 1 - p(b_0 - a_0) \leq 0,$$

pak

$$L(a) \leq L(b),\ \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Odtud

$$sup_{a\in A} L(a) \leq inf_{b\in B} L(b).$$

Jelikož

$$p(b_0 - a_0) \geq 1 \text{ a } L(b_0 - a_0) = p(b_0 - a_0),$$

je $L \neq 0$. ■

Věta 28 (Druhý teorém o oddělitelnosti) *Nechť X je normovaný lineární prostor, A neprázdná uzavřená konvexní podmnožina X a $\hat{x} \in X$ je bod, který nenáleží do A. Potom existuje nenulový lineární spojitý funkcionál ostře oddělující množinu A a bod $\hat{x}$.*

Důkaz: Protože $\hat{x} \notin A$ a A je uzavřená množina, tak existuje okolí V bodu $\hat{x}$ takové, že $V \cap A = \emptyset$. Jelikož X je lokálně konvexní prostor, tak můžeme najít otevřené konvexní okolí $B \subset V$ bodu $\hat{x}$. Poté zřejmě $B \subset A = \emptyset$ a podle 1.teorému o oddělitelnosti (27) existuje nenulový lineární spojitý funkcionál f oddělující A a B, tj.:

$$sup_{x \in A} f(x) \leq inf_{x \in B} f(x).$$

Nyní si stačí uvědomit, že

$$inf_{x \in B} f(x) < f(\hat{x}),$$

neboť lineární funkcionál nemůže nabývat svého infima ve vnitřním bodě.

$$f(\hat{x}) > f(\hat{x} + th) = f(\hat{x}) + tf(h),$$

alespoň pro jedno h bude $tf(h) \neq 0$. ■

Jako další důsledky Hahn-Banachovy věty bych na tomto místě chtěla uvést dvě tvrzení publikovaná v článku docenta Jokla [6] a analogii Algebraické Hahn-Banachovy věty (věta 21) a ukázat, jak spolu tato tvrzení souvisí.
Nejdříve je ale potřeba vyslovit pomocné lemma (viz [8]).

Lemma 2 *Nechť A je lineární operátor, f konvexní funkce. Definujeme*

$$g(y) := inf\{f(x) : Ax = y\}.$$

Potom je g konvexní funkce.

Důkaz: Položme

$$g(y) = inf\ M(y, .) \quad \forall y \in Y,$$

kde

$$M = (epif) \circ (grA^{-1}).$$

Funkce f je konvexní, tedy i $epif$ je konvexní. Linearita A implikuje konvexitu A^{-1}.

$$grA := \{[x, y] \in X \times Y : y = Ax\}$$

je graf A a

$$grA^{-1} := \{[y, x] \in Y \times X : y = Ax\}$$

je graf A^{-1}, tedy množina M bude také konvexní. Z důsledku 2 nám potom vyplývá konvexita funkce g.

Věta 29 *Nechť $\varphi : X \to \mathbf{R}$ je v okolí počátku shora omezený konvexní funkcionál.*
Potom existuje lineární spojitý funkcionál $f \in X^*$ takový, že pro každé $x \in X$ platí $f(x) \leq \varphi(x)$.

Věta 30 *Nechť U je lineární prostor a V normovaný lineární prostor. Dále mějme konvexní funkcionály $f : V \to \mathbf{R}$ a $h : U \to \mathbf{R}$ a lineární zobrazení $T : U \to V$. Jestliže platí, že*
(i) existuje $u_0 \in \mathbf{R}$ takové, že f je konečný a spojitý v bodě $v_0 = Tu_0$,
(ii) $inf\{f(Tu) + h(u) : u \in U\} = 0$,
potom existuje lineární spojitý funkcionál $g \in V^*$ takový, že

$$u \in U, v \in V \Rightarrow g(v) - f(v) \leq h(u) + g(Tu).$$

Důkaz: Položme

$$F = \{(v, \lambda) \in V \times \mathbf{R} : f(v) \leq \lambda\}, H = \{(Tu, \mu) \in V \times \mathbf{R} : u \in U, \mu \leq -h(u)\}$$

a

$$M = F - H = \{(s,\beta) \in V \times \mathbf{R}, (s,\beta) = (v,\lambda) - (Tu,\mu) : f(v) \leq \lambda, u \in U, -h(u) \geq \mu\}.$$

F je konvexní množina, neboť f je konvexní funkce, tedy musí platit, že její nadgraf

$$epif = \{(v,\lambda) \in V \times \mathbf{R}, v \in domf, \lambda \geq f(v)\} = F$$

je konvexní množina. Také H je konvexní množina, což plyne z definice konvexních množin: Pro

$$u_1 \in U, Tu_1 \in V, \mu_1 \in \mathbf{R} : \mu_1 \leq -h(u_1)$$

$$u_2 \in U, Tu_2 \in V, \mu_2 \in \mathbf{R} : \mu_2 \leq -h(u_2)$$

a libovolné $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ platí

$$\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2 \leq -\lambda h(u_1) - (1-\lambda)h(u_2) = -[\lambda h(u_1) + (1-\lambda)h(u_2)]$$

$$\leq -h(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2),$$

neboť h je konvexní funkcionál a T je lineární zobrazení.
Rozdíl dvou konvexních množin je také konvexní množina, neboť uvažujeme-li například $f_1, f_2 \in F$ a $h_1, h_2 \in H$ s vlastností $f_1 - h_1 \in M$ a $f_2 - h_2 \in M$, potom pro $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$ platí

$$\alpha(f_1 - h_1) + (1-\alpha)(f_2 - h_2) = \underbrace{\alpha f_1 + (1-\alpha)f_2}_{\in F} - \underbrace{(\alpha h_1 + (1-\alpha)h_2)}_{\in H},$$

což implikuje

$$\alpha(f_1 - h_1) + (1-\alpha)(f_2 - h_2) \in M,$$

tedy M je konvexní množina.
Funkcionál

$$\varphi : V \to (-\infty, +\infty)$$

definovaný tak, že

$$w \in V \Rightarrow \varphi(w) = inf\{\lambda \in \mathbf{R} : (w,\lambda) \in M\}$$

$$= inf\{\lambda \in \mathbf{R} : (v - Tu, \lambda) \in M, w = v - Tu\}$$

$$= inf\{\lambda \in \mathbf{R} : (v - Tu, \lambda = r - s), r \geq f(v), s \leq -h(u), w = v - Tu\}$$

$$= inf\{f(v) + h(u) : u \in U, v \in V, v - Tu = w\}$$

je díky aplikaci lemmatu 2 konvexní.
Položíme-li totiž $A(u,v) = v - Tu$,

$$\Phi : U \times V \to \mathbf{R} : \Phi(u,v) = h(u) + f(v).$$

Φ je konvexní, neboť h a f jsou konvexní a

$$\varphi(w) := inf\{\Phi(u,v) : A(u,v) = w\} = inf\{h(u) + f(v) : v - Tu = w\}.$$

Z toho dosazením pro $v = Tu$ a z (ii) pak plyne

$$\varphi(0) = inf\{f(Tu) + h(u) : u \in U\} = 0$$

a také, že

$$u \in U, v \in V \Rightarrow \varphi(v - Tu) \leq f(v) + h(u).$$

Podle (i) existuje konstanta $\alpha \in \mathbf{R}$ a okolí počátku $N \subset V$, takové, že

$$w \in N \Rightarrow f(w + Tu_0) \leq \alpha.$$

Nechť $w \in N$. Potom dostaneme

$$\varphi(w) = \varphi((w + Tu_0) - Tu_0) \leq f(w + Tu_0) + h(u_0) \leq \alpha + h(u_0).$$

Tedy funkcionál φ je shora ohraničený na N. Z věty 29 plyne existence lineárního spojitého funkcionálu $g \in V^*$ takového, že

$$w \in V \Rightarrow g(w) \leq \varphi(w).$$

Nechť $u \in U, v \in V$, když položíme $w = v - Tu$, dostaneme

$$g(v - Tu) \leq f(v) + h(u).$$

Z toho ale dostáváme

$$g(v) - f(v) \leq h(u) + g(Tu). \blacksquare$$

Věta 31 *Nechť X je normovaný lineární prostor, $p : X \to \mathbf{R}$ je spojitý sublineární funkcionál, $Y \subset\subset X$ a $f \in Y^*$ lineární spojitý funkcionál takový, že platí $f \leq p$ na Y.*
Potom existuje lineární spojitý funkcionál $F \in X^*$ takový, že
$(i) F(x) \leq p(x), \forall x \in X$
$(ii) F(x) = f(x), \forall x \in Y$.

Důkaz: Důkaz provedeme za použití Zornova lemmatu (lemma 1) analogicky jako u algebraické verze Hahn-Banachovy věty (věta 21). ■

Nyní již mohu dokazovat vzájemnou ekvivalenci výše uvedených vět:
Věta 29 $\Rightarrow$ větu 30 $\Rightarrow$ větu 31 $\Rightarrow$ větu 29

1) Věta 29 $\Rightarrow$ větu 30:

Tato implikace je popsána v důkazu věty 30.

2) Věta 30 $\Rightarrow$ větu 31:

Uvažujme normovaný lineární prostor W a $M \subset\subset W$. Dále $p : W \to \mathbf{R}$ je spojitý sublineární funkcionál a l spojitý lineární funkcionál definovaný na M s vlastností

$$l(u) \leq p(u),\ \forall u \in M. \tag{10}$$

Ve větě 30 bude nyní v roli U podprostor M a v roli V podprostor W. Položme

$$T : M \to W : T(u) = u,\ \forall u \in M.$$

Dále v roli f uvažujeme sublineární funkcionál p a v roli konvexní funkce h funkcionál $-l$. Potřebujeme ukázat, že

$$inf\{p(u) - l(u); u \in M\} = 0. \tag{11}$$

Ze vztahu (10) víme, že

$$p(u) - l(u) \geq 0,\ \forall u \in M,$$

přičemž

$$p(0) - l(0) = 0.$$

Tedy (11) platí. Nyní již podle věty 30 existuje $L \in W^*$:

$$\forall u \in M,\ \forall v \in W : L(v) - p(v) \leq -l(u) + L(u).$$

Pro $u := 0$ dostaneme

$$L(v) \leq p(v),\ \forall v \in W \tag{12}$$

a pro $v := 0$ dostaneme

$$L(u) \geq l(u),\ \forall u \in M. \tag{13}$$

(12) + (13) $\Rightarrow L(u) = l(u), \forall u \in M.$ ■

3) Věta 31 $\Rightarrow$ větu 29:

Uvažujme konvexní shora omezený funkcionál

$$\varphi : X \to \mathbf{R},\ \varphi(0) = 0.$$

Poté podle vět 20 (viz [3]) a 18 existuje při volbě $x_0 = 0$ spojitý sublineární funkcionál $p : X \to \mathbf{R}$ tak, že

$$p(x) \leq \varphi(x), \forall x \in X. \tag{14}$$

Nyní již věta (31) dává existenci spojitého lineárního funkcionálu $f \in X^*$ s vlastností

$$f(x) \leq p(x), \forall x \in X. \tag{15}$$

Nerovnosti (14) a (15) dávají požadované

$$f(x) \leq \varphi(x), \forall x \in X. \blacksquare \tag{16}$$

Důležitou aplikací věty 30 je následující teorém.

Věta 32 (Moreaův-Rochefellarův teorém) *Nechť X je normovaný lineární prostor a $f_i : X \to \mathbf{R}$ jsou $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vlastní konvexní funkce. Potom*

$$\sum_{i=1}^{n} \partial f_i(x) \subseteq \partial \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \right)(x) \quad \forall x \in X.$$

Jestliže jsou navíc všechny funkce f_i spojité v nějakém bodě $\bar{x}$ (s výjmkou nejvýše jedné a ta je v $\bar{x}$ konečná), pak v libovolném bodě x platí

$$\sum_{i=1}^{n} \partial f_i(x) = \partial \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \right)(x).$$

Důkaz:

Krok 1:

1. část věty:

Omezíme se na případ $n = 2$, při větším počtu sčítanců postupujeme matematickou indukcí. Zvolme $x_0 \in X$. Předpokládejme, že

$$a \in \partial f_1(x_0), b \in \partial f_2(x_0).$$

Pak platí

$$\begin{array}{rl} & a(x - x_0) \leq f_1(x) - f_1(x_0) \quad \forall x \in X \\ + & \underline{b(x - x_0) \leq f_2(x) - f_2(x_0) \quad \forall x \in X} \\ & a + b(x - x_0) \leq (f_1 + f_2)(x) - (f_1 + f_2)(x_0) \quad x \in X. \end{array}$$

Potom

$$(a + b) \in \partial(f_1 + f_2)(x_0).$$

Vzhledem k libovolné volbě x_0 platí

$$\partial f_1(x) + \partial f_2(x) \subseteq \partial(f_1 + f_2)(x) \quad \forall x \in X.$$

Krok 2:

2.část věty:

Předpokládejme nyní, že

$$c \in \partial(f_1 + f_2)(x_0).$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že

$$x_0 = 0, \quad c = 0, \quad f_1(0) = 0, \quad f_2(0) = 0.$$

Pokud by tyto vztahy neplatily, tak bychom uvažovali následující funkce

$$g_1(x) = f_1(x_0 + x) - f_1(x_0) - c(x)$$

$$g_2(x) = f_2(x_0 + x) - f_2(x_0).$$

Krok 3:

Nechť tedy $0 \in \partial(f_1 + f_2)(0)$. Poté $\forall x \in X$ platí

$$(f_1 + f_2)(x) - (f_1 + f_2)(0) \geq 0(x - 0).$$

Odtud

$$(f_1 + f_2)(x) \geq (f_1 + f_2)(0) \quad \forall x \in X.$$

Poté

$$min_{x \in X}(f_1 + f_2)(x) = (f_1 + f_2)(0) = 0.$$

Nechť $\bar{x}$ je bod, ve kterém je f_1 spojitá a f_2 konečná. Uvažujeme konvexní množiny

$$C_1 = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbf{R},\ \alpha > f_1(x),\ x \in int\ dom\ f_1\} = int\ epi\ f_1$$

kde *int* značí vnitřek množiny,

$$C_2 = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbf{R},\ -\alpha \geq f_2(x)\}.$$

Množiny C_1 a C_2 jsou konvexní a neprázdné. C_1 je navíc otevřená a $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, pokud bychom totiž předpokládali, že nějaké

$$(x_1, \alpha) \in C_1 \cap C_2,$$

pak by

$$f_1(x_1) < \alpha \leq -f_2(x_1)$$

a dostali bychom

$$0 = min\{f_1(x) + f_2(x),\ x \in X\} \leq f_1(x_1) + f_2(x_1) < 0,$$

což je spor.

Podle 1. teorému o oddělitelnosti (věta 27) můžeme množiny C_1 a C_2 oddělit nenulovým lineárním funkcionálem (a, β) a platí:

$$inf_{(x,\alpha)\in C_2}(a(x) + \beta\alpha) \geq sup_{(x,\alpha)\in C_2}(a(x) + \beta\alpha). \tag{17}$$

Krok 4:

Zřejmě $\beta \leq 0$, neboť jinak by supremum a tím i infimum rovnalo $+\infty$. Připustíme-li $\beta = 0$, potom

$$sup_{x\in intdomf_1} a(x) \leq inf_{x\in domf_2} a(x).$$

Maximum lineární funkce se nenabývá uvnitř množiny:

$$a(\bar{x}) < sup_{x\in intdomf_1} a(x) \leq inf_{x\in domf_2} a(x) \leq a(\bar{x}).$$

$$a(\bar{x}) < a(\bar{x}),$$

což je spor. Proto $\beta < 0$.

Krok 5:

Nyní můžeme v (17) dělit $|\beta|$. Označíme-li $\tilde{a} = \dfrac{a}{|\beta|}$, pak

$$sup_{x\in X}(\tilde{a}(x) - f_1(x)) = sup_{x\in domf_1}(\tilde{a}(x) - \alpha) = sup_{(x,\alpha)\in C_1}(\tilde{a}(x) - \alpha) \leq inf_{(x,\alpha)\in C_2}(\tilde{a}(x) - \alpha)$$

(suprema se nanabývá uvnitř), kde $\alpha \geq f_1$, s využitím vztahu *epi* $f_1 =$ *int epi* f_1. Poté $\forall x \in X$

$$\tilde{a}(x) - f_1(x) \leq inf_{(y,\alpha)\in C_2}(\tilde{a}(y) - \alpha) \leq a(0) - 0,$$

protože $(0, 0) \in C_2$. Poté

$$\tilde{a}(x) \leq f_1(x) - f_1(0),$$

tedy

$$\tilde{a} \in \partial f_1(0).$$

Podobně bychom dokázali, že také

$$-\tilde{a} \in \partial f_2(0).$$

Proto

$$0 \in \partial f_1(0) + \partial f_2(0). \blacksquare$$

4 Aplikace Hahn-Banachovy věty

V této kapitole jsou popsány některé významné aplikace Hahn-Banachovy věty. Definice a tvrzení pro tuto kapitolu jsem opět čerpala z [1] a dále z [11], příklady z [1] a [2].

Věta 33 *Nechť M je podprostor normovaného lineárního prostoru E. Jestliže jediná spojitá lineární forma z E^*, která je rovna 0 na M, je nulová, potom je M hustý v E ($\overline{M} = E$).*

Důkaz: $\overline{M}$ je také podprostor E, tedy tvrzení je bezprostředním důsledkem věty 26. ■

Poznámka: Tuto větu lze vyslovit i pomocí anihilátorů: Je-li M podprostor E a $M^{\perp} = \{0\}$, pak je M hustý v E.

Věta 34 *Nechť je M konečně-dimenzionální podprostor Banachova prostoru X. Potom má M v X topologický doplněk.*

Důkaz: Položíme-li $\varphi_i(x) := \lambda_i$ kde $x = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ je vyjádření prvku $x \in M$ v jisté bázi, jsou φ_i (i=1,...,n) spojité lineární funkcionály na M.
Podle Hahn-Banachovy věty (věta 22) existují $\Phi_i \in X^*$ takové, že $\Phi_i = \varphi_i$ na M. Potom

$$X = M \oplus_t \left(\cap_{i=1}^{n} Ker \Phi_i\right). \blacksquare$$

Příklad ([1] str. 25)
Najděte jiný způsob důkazu předchozí věty.

Řešení:
Nechť $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je báze M. Nechť M_i je (pro pevné $i = 1, \ldots, n$) lineární obal množiny $\{e_j : j \neq i\}$. Potom je M_i uzavřený podprostor X (viz [1]) a $e_i \notin M_i$. Podle důsledku Hahn-Banachovy věty (důsledek 26) existuje $\varphi_i \in X^*$ tak, že $\varphi_i = 0$ na M_i a $\varphi_i(e_i) = 1$. Když pak definujeme

$$Px = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e_i$$

pro $x \in X$, potom je P projekce X na M.

Věta 35 (Vlastnosti kanonického vnoření) *Kanonické vnoření ϵ je prosté, izomorfní a izometrické zobrazení X na $\epsilon X \subset X^{**}$.*

Důkaz: Zobrazení ϵ je zřejmě lineární a platí

$$\|\epsilon(x)\| = \|\epsilon_x\| \leq \|x\|, \; \forall x \in X.$$

Nyní chceme ukázat, že

$$\|\epsilon_x\| \geq \|x\|.$$

V případě, že $x = 0$ je tato nerovnost zřejmá. V případě, že $x \neq 0$, existuje podle důsledku Hahn-Banachovy věty 25 $g \in X^*$ tak, že $\|g\| = 1$ a $g(x) = \|x\|$. Z toho pak dostáváme

$$\|x\| = g(x) \leq sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in X^*, \|\varphi\| \leq 1\} = \|\epsilon_x\|.$$

Pokud platí $x \neq y$, pak

$$\|\epsilon_x - \epsilon_y\| = \|\epsilon_{x-y}\| = \|x - y\| \neq 0,$$

tedy i $\epsilon_x \neq \epsilon_y$ (ostatně každá lineární izometrie je prosté zobrazení).

Na tomto místě uvedu aplikaci Hahn-Banachovy věty, která je publikována v [4] a [5].

Lemma 3 *Nechť X je Banachův prostor, C je konvexní kužel, $C \subset X$. Potom platí:*

$$L := inf_{c \in S_x} sup_{\xi \in \Gamma} |c(\xi)| > 0,$$

kde S_x je jednotková koule v X, $\Gamma = C^* \cap S_{X^*}$.

Důkaz: Pro každé $c \in X$ položme

$$p(c) := sup_{\xi \in \Gamma} |c(\xi)|.$$

Zřejmě $L \geq 0$. Protože $int(C^*) \neq 0$, existuje $\xi_0 \in C^*$ takové, že pro nějaké $\delta > 0$ platí:

$$\xi_0 + \delta S_{X^*} \subset C^*.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\xi_0 \in \Gamma$.
Nechť $\{c_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost v S_X, pro kterou platí

$$lim_{n \to \infty} p(c_n) = inf_{c \in S_X} p(c) = L \geq 0.$$

Nyní připadají v úvahu dvě možnosti:
1) Existuje konstanta $\alpha > 0$ taková, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ máme

$$|c_n(\xi_0)| \geq \alpha > 0.$$

Následně pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí

$$p(c_n) = sup_{\xi \in \Gamma} |c_n(\xi)| \geq |c_n(\xi_0)| \geq \alpha > 0$$

a $L > 0$.

2) Existuje podposloupnost

$$\{c_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty} \subset \{c_n\}_{n=1}^{+\infty}$$

splňující

$$|c_{n_k}(\xi_0)| \leq \frac{1}{k}, \forall k \in \mathbf{N}.$$

Odtud

$$lim_{k\to\infty}|c_{n_k}(\xi_0)| = 0.$$

Tudíž můžeme předpokládat, že pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí

$$c_{n_k}(\xi_0) \geq \frac{-\delta}{2}.$$

Protože $\{c_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset S_X$, existuje pro každé $k \in \mathbf{N}$ funkcionál $\xi_k \in S_{X^*}$ takový, že $c_{n_k}(\xi_k) = 1$ (viz věta 25). Potom lze také díky

$$\xi_0 + \delta\xi_k \in C^*$$

pro každé $k \in \mathbf{N}$ odvodit:

$$p(c_{n_k}) = sup_{\xi\in\Gamma}|c_{n_k}(\xi)| \geq \left| c_{n_k}\left(\frac{\xi_0 + \delta\xi_k}{\|\xi_0 + \delta\xi_k\|}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{\|\xi_0 + \delta\xi_k\|}|c_{n_k}(\xi_0 + \delta\xi_k)| \geq \frac{1}{1+\delta}|c_{n_k}(\xi_0) + \delta(c_{n_k}(\xi_k))|$$

$$= \frac{1}{1+\delta}|c_{n_k}(\xi_0) + \delta| \geq \frac{1}{1+\delta}\left(\frac{-\delta}{2} + \delta\right) \geq \frac{\delta}{2(1+\delta)} > 0.$$

Poněvadž $\{c_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ je podposloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{+\infty}$ a

$$lim_{n\to\infty}p(c_n) = inf_{c\in S_X}p(c),$$

potom předchozí výpočet dává $L > 0$.

Zajímavou aplikací Hahn-Banachovy věty ve funkcionální analýze jsou Banachovy limity.

Příklad ([2] str. 62)

Ukažte, že existuje lineární funkcionál L na ℓ_∞ s následujícími vlastnostmi:

(1) $\|L\| = 1$;

(2) jestliže $x = \{x_i\} \in c$, *pak* $L(x) = \lim_{i\to\infty}(x_i)$; $i = 1, \ldots \infty$

(3) jestliže $x = \{x_i\} \in \ell_\infty$ *a* $x_i \geq 0$ *pro všechna* i, *pak* $L(x) \geq 0$; $i = 1, \ldots \infty$

(4) jestliže $x = \{x_i\} \in \ell_\infty$ *a* $x' = (x_2, x_3, \ldots)$, *pak* $L(x) = L(x'), i = 1, \ldots \infty$.

Řešení:

Pro jednoduchost budeme uvažovat pouze posloupnost reálných čísel. Nechť M je podprostor ℓ_∞ tvořený prvky $x - x'$, kde

$$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

a

$$x' = (x_2, x_3, \ldots).$$

Nechť 1 značí jednotkový vektor $(1, 1, 1, \ldots)$. Ukažme, že platí $dist(1, M) \leq 1$:

Nechť $x \in \ell_\infty$. Jestliže $(x - x')_i \leq 0$ pro libovolné i, pak

$$\|1 - (x - x')\|_\infty \geq 1.$$

Jestliže $(x - x')_i \geq 0$ pro všechna i, pak $x_i \geq x_{i+1}$ pro všechna i, což znamená, že $\lim_{i\to\infty} x_i$ existuje. Proto

$$\lim_{i\to\infty}(x_i - x_i') = 0$$

a tedy

$$\|1 - (x - x')\| \geq 1.$$

Podle důsledku Hahn-Banachovy věty (důsledek 25) existuje $L \in \ell_\infty^*$ s normou $\|L\| = 1$ a $L(1) = 1$, $L(m) = 0$ pro všechna $m \in M$. Tento funkcionál splňuje *(1)* a *(4)*.

K důkazu *(2)* stačí ukázat, že $c_0 \subset L^{-1}(0)$. Abychom toho dosáhli, definujeme pro $x \in \ell_\infty$ induktivně: $x^{(1)} = x'$ a $x^{(n+1)} = (x^n)'$ a podle teleskopického argumentu máme

$$x^{(n)} - x = (x^{(n)} - x^{(n-1)}) + (x^{(n-1)} - x^{(n-2)}) + \ldots + (x^{(2)} - x^{(1)}) + (x^{(1)} - x).$$

Protože jednotlivé sčítance $(x^{(i)} - x^{(i-1)}) \in M$, potom i celkový součet $x^{(n)} - x \in M$. Odtud $L(x) = L(x^{(n)})$ pro každé $x \in \ell_\infty$ a pro každé n. Jestliže $x \in c_0$, pak $\|x^{(n)}\| \to 0$ a tak $L(x) = 0$.

K důkazu *(3)* předpokládejme, že pro nějaká $x = (x_n)$ máme $x_i \geq 0$ pro všechna i a $L(x) < 0$. Normováním můžeme předpokládat, že $1 \geq x_i \geq 0$ pro všechna i. Pak $\|1 - x\|_\infty \leq 1$ a

$$L(1 - x) = 1 - L(x) > 1,$$

což je spor s tím, že $\|L\| = 1$.

Takovéto funkcionály se nazývají *Banachovy limity* a je jich nekonečně mnoho.

Další aplikací Hahn-Banachovy věty je Gelfandova věta. Abychom ji mohli vyslovit, budeme potřebovat následující pojmy (viz [1]).

Definice 41 (Algebra) *Algebrou $\mathcal{A}$ nad tělesem $\mathbf{F}$ rozumíme vektorový prostor s vnitřním násobením, které splňuje*

i) je asociativní

ii) je distributivní vzhledem ke sčítání

iii) $\lambda(ab) = a(\lambda b) = (\lambda a)b$ pro $\lambda \in \mathbf{F}, a, b \in \mathcal{A}$.

Prvek e takový, že

$$xe = ex = x, \quad \forall x \in \mathcal{A}$$

nazveme jednotkou algebry.

Definice 42 (Banachova algebra) *Algebra, která je navíc opatřena normou, v níž je $\mathcal{A}$ Banachův prostor a platí*

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|,$$

se nazývá Banachova algebra.

Definice 43 *Řekneme, že prvek $x \in \mathcal{A}$ je regulární nebo invertibilní, jestliže existuje takové $z \in \mathcal{A}$, že*

$$xz = zx = e.$$

Označme množinu všech regulárních prvků $\mathcal{U}$. Ta spolu s operací násobení tvoří grupu s jednotkou e.

Definice 44 (Spektrum) *Nechť $\mathcal{A}$ je komplexní Banachova algebra s jednotkou e, pro niž $\|e\| = 1$. Množinu těch komplexních čísel λ, pro něž je prvek $\lambda e - x$ invertibilní, nazveme rezolventou a označíme $\rho(x)$.*

Doplněk v $\mathbf{C}$ nazýváme spektrum prvku x a značíme $\sigma(x)$.

Konečné číslo

$$r(x) := sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$$

nazveme spektrální poloměr prvku x.

Poznámka: Spektrum je uzavřená a omezená množina.

Definice 45 (Rezolventní funkce) *Nechť $\mathcal{A}$ je komplexní Banachova algebra s jednotkou e, pro niž $\|e\| = 1$ a $x \in \mathcal{A}$. Potom funkce*

$$R_\lambda(x) = (\lambda e - x)^{-1}$$

definovaná na množině $\rho(x)$ se nazývá rezolventní funkce.

Poznámka: Pro $|\lambda| \geq \|x\|$ platí

$$R_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n.$$

Věta 36 (Vlastnosti rezolventní funkce) *Nechť x je prvek Banachovy algebry $\mathcal{A}$. Potom platí*

i) $lim_{\lambda \to \infty} R_\lambda(x) = 0$

ii) jestliže $\lambda \in \rho(x)$ a $|\mu| < \|R_\lambda(x)\|^{-1}$, potom i $\lambda - \mu \in \rho(x)$ a

$$R_{\lambda-\mu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n R_\lambda^{n+1}(x),$$

iii) jestliže $\Phi \in \mathcal{A}^*$, potom je funkce $f : \lambda \to \Phi \circ R_\lambda(x)$ holomorfní na $\rho(x)$.

Nyní již můžeme uvést znění samotné věty.

Věta 37 (Gelfandova věta) *Spektrum libovolného prvku Banachovy algebry je neprázdná kompaktní podmnožina* **C**.

Důkaz: Víme, že spektrum je uzavřená omezená množina. Nechť pro nějaké $x \in \mathcal{A}$ je $\sigma(x) = \emptyset$. Podle věty 36 je $f : \lambda \to \Phi(R_\lambda(x))$ holomorfní v **C** pro každé $\Phi \in \mathcal{A}^*$. Jelikož je f podle věty 36 a Liouvillovy věty omezená, musí být konstantní. Dále (také dle věty 36) dostáváme $f = 0$ na celém **C**, speciálně $0 = f(0) = \Phi(x^{-1})$. Podle důsledku Hahn-Banachovy věty (věta 25) je tudíž $x^{-1} = 0$, což je spor. ■

Poslední aplikací Hahn-Banachovy věty, kterou zde uvedu je Krein-Milmanův teorém. Zde jsem využívala [11].

Definice 46 (Extremální bod, extremálních množina) *Nechť K je podmnožina normovaného lineárního prostoru. Řekneme, že x_0 je extremální bod množiny K, právě tehdy, když*

$$x_0 = tx + (1-t)y, \;\; 0 < t < 1, \;\; x, y \in K \Rightarrow x = y = x_0.$$

Jestliže pro $S \subset K$ platí

$$tx + (1-t)y \in S$$

pro nějaké $t \in (0,1)$,

$$x, y \in K \Rightarrow x, y \in S,$$

potom množinu S nazveme extremální množinou v K.

Věta 38 (Krein-Milmanův teorém) *Nechť K je kompaktní a konvexní množina v normovaném lineárním prostoru X. Potom K je uzavřený konvexní obal jejích extremálních bodů.*

Důkaz: Nechť $\mathcal{P}$ je soubor všech extremálních množin v K. Použijeme tyto vlastnosti:
i) Průnik prvků z $\mathcal{P}$ je buď v $\mathcal{P}$ nebo prázdná množina
ii) Nechť $S \in \mathcal{P}$ a $f \in X^*$, definujeme

$$S_f = \{x \in S : f(x) = max_S f\},$$

potom $S_f \in \mathcal{P}$.
Abychom to dokázali, nechť je

$$tx + (1-t)y \in S_f \subseteq S.$$

Potom

$$f(tx + (1-t)y) = max_S f.$$

Jelikož S je množina extremálních bodů, platí $x, y \in S$. Tedy

$$tf(x) + (1-t)f(y) = max_S f. \tag{18}$$

Kdyby $f(x) < max_S f$ nebo $f(y) < max_S f$ (tj. x nebo y by nenáleželo do S_f), měli bychom

$$tf(x) + (1-t)f(y) < max_S f,$$

což je spor s (18). Proto

$$f(x) = f(y) = max_S f.$$

To znamená, že $x, y \in S_f$. Odtud plyne, že S_f je extremální množina.

Nyní nechť $S \in \mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ je soubor všech množin extremálních bodů v S. Z Hausdorffovy věty (věta 1) existuje maximální, úplně uspořádaný podsoubor $\Omega \subset \mathcal{P}'$. Nechť $M = \cap_{T \in \Omega} T$, M je extremální množina, $M \in \mathcal{P}'$. Potom z definice M platí $M_f = M$

$$\Rightarrow \forall f \in X^*,\ \forall x \in M,\ f(x) = max_{x \in M} f(x) = const.$$

Proto každý f je konstantní na M. Avšak protože X^* odděluje body, je M jednoprvková množina. Následkem toho pro každé $S \in \mathcal{P}$ obsahuje S extremální bod.
Nechť H značí konvexní obal množiny extremálních bodů K. Chceme, aby $\bar{H} = K$.
Pro všechny $S \in \mathcal{P}$ platí $S \cap \bar{H} \neq \emptyset$. Zřejmě $\bar{H} \subseteq K$. Na druhou stranu přepokládejme, že existuje $x_0 \in K \setminus \bar{H}$. Potom je množina $\{x_0\}$ kompaktní a $\bar{H}$ uzavřená. Z Hahn-Banachovy věty (věta 24) plyne existence $f \in X^*$ tak, že $f(x) < f(x_0)$ pro každé $x \in \bar{H}$.
Proto pokud uvažujeme

$$K_f = \{x \in K : f(x) = max_K f\},$$

můžeme vidět, že $K_f \cap \bar{H} = \emptyset$, protože $\forall x \in \bar{H}$

$$f(x) < f(x_0) \leq max_K f.$$

Množina K_f je ale extremální množina a tedy musí mít neprázdný průnik s $\bar{H}$.
To je spor, tedy $K \subset \bar{H}$. ■

Nakonec bych ráda uvedla ještě další dva příklady, k jejichž řešení jsem využila Hahn-Banachovu větu.

Příklad ([2] str. 55)
Ukažte, že jestliže Y je podprostor Banachova prostoru X a X^* je separabilní, pak je také Y^* separabilní.

Řešení:
Prostor Y^* je izomorfní k separabilnímu faktorovému prostoru $X^* \setminus Y^{\perp}$. Neboť definujeme-li zobrazení

$$\sigma : Y^* \to X^* \setminus Y^{\perp}$$

tak, že $\sigma(y^*) = \{\text{množina všech rozšíření } y^* \text{ na } X\}$, je $\sigma(y^*)$ třída faktorové množiny v $X^* \setminus Y^{\perp}$. Pokud například $\sigma_1(y^*), \sigma_2(y^*) \in \sigma(y^*)$, pak musí platit, že

$$(\sigma_1(y^*) - \sigma_2(y^*))(y) = 0, \forall y \in Y,$$

tedy

$$\sigma_1(y^*), \sigma_2(y^*) \in \{z^* \in X^* : (y^* - z^*) \in Y^{\perp}\}.$$

Z Hahn-Banachovy věty (věta 22) nám plyne

$$\|\sigma(y^*)\| = \|y^*\|_Y$$

(σ je lineární a surjektivní zobrazení.) Tedy Y^* je také separabilní.

Příklad ([2] str. 55)

Nechť Y je podprostor Banachova prostoru X. Ukažte, že existuje prosté (obecně nelineární) izometrické zobrazení $\varphi : Y^* \to X^*$. Také $X^*|_Y = Y^*$ ($X^*|_Y$ je množina restrikcí na Y všech $f \in X^*$).

Řešení:

Použijeme Hahn-Banachovu větu k rozšíření funkcionálů na Y (Věta22). Jestliže $f \in Y^*$, potom $\exists F \in X^*$ takové, že $F|_Y = f$. Tj.: $\exists$ nějaké zobrazení $\varphi : Y^* \to X^*$, takové, že $\varphi(f) = F$ na $X^*|_Y$. Toto zobrazení je prosté a izometrické. Z toho $Y^* \subset X^*|_Y$, zároveň zřejmě platí $X^*|_Y \subset Y^*$, tedy $X^*|_Y = Y^*$.

Závěr

Cílem této diplomové práce bylo shrnout poznatky o Hahn-Banachově větě a zdůraznit její použití v důsledcích a aplikacích. První kapitolu jsem věnovala životu Hanse Hahna a Stefana Banacha. V druhé kapitole jsem uvedla základní pojmy a tvrzení, bez nichž by Hahn-Banachovu větu nebylo možné vyslovit. Třetí kapitola se zabývá přímo Hahn-Banachovou větou, dále pak jejími důsledky. Čtvrtá kapitola je věnována aplikacím věty.
Mým záměrem bylo také demonstrovat použití věty na příkladech, jejichž zadání lze najít v [1], [2] a [10]. Dále jsem provedla některé důkazy (například věty 31 a také vzájemného vztahu vět 29, 30 a 31) a podrobněji rozebrala důkazy vět a důsledků uvedených v [1] a [6] (například vět 21, 23 a 30).

Reference

[1] LUKEŠ, Jaroslav. Zápisky z funkcionální analýzy. Druhý dotisk 1. vydání, nakladatelství Karolinum, Praha 1, 2003, 354 s. ISBN 80-7184-597-3.

[2] FABIAN, Marián J., HABALA, Petr, HÁJEK, Petr, SANTALUCÍA, Vicente M., PELANT, Jan a ZIZLER, Václav *Functional analysis and infinite-dimensional geometry.* New York: Springer, c2001, ix, 451 p. ISBN 978-0-387-95219-2.

[3] PHELPS, Robert R. *Convex functions, monotone operators, and differentiability.* 2.vydání, New York: Springer-Verlag, 1993, ix, 116 p. 1364. ISBN 03-875-6715-1

[4] PASTOR, Karel. DIFFERENTIABILITY PROPERTIES OF ℓ-STABLE VECTOR FUNCTIONS IN INFINITE-DIMENSIONAL NORMED SPACES. Taiwanese Journal of Mathematics. Tainan Shi: Mathematical Society of the Republic of China (Taiwan), 2014-01-14, vol. 18, issue 1,DOI: 10.11650/tjm.18.2014.2605. Dostupné z: `http://journal.taiwanmathsoc.org.tw/index.php/TJM/article/view/2605`

[5] BEDNAŘÍK, Dušan a Karel PASTOR. On ℓ-stable mappings with values in infinite-dimensional Banach spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods.* 2010, vol. 72, 3-4, s. 1198-1209. DOI: 10.1016/j.na.2009.08.004. Dostupné z: `http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0362546X09009638`

[6] JOKL, Luděk. An application of the Hahn-Banach theorem in convex analysis.*Commentationes mathematicae Universitatis Carolinae.* Prague: [Mathematical Institute of the Charles University], 1981, roč. 22, č. 4, s. 799-807. Dostupné z: `http:/dml.cz/dmlcz/106121`

[7] ALEKSEJEV, V.M., V.M. TICHOMIROV a S.V. FOMIN. *Matematická teorie optimálních procesů.* 1. vyd. Praha: Akademia, 1991, 357 s. ISBN 80-200-0319-3

[8] JOKL, Luděk. *Přednášky z konvexní analýzy na PřF UP Olomouc v letním semestru akademického roku 1997-98.*

[9] DOŠLÝ, Ondřej. *Základy konvexní analýzy a optimalizace v* R^n. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2005, viii, 185 s. ISBN 80-210-3905-1.

[10] *Cvičení z ÚFA* [online]. 2009 [cit. 2014-05-22]. Dostupné z: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~pposta/dokuwiki/doku.php?id=hahn-banachova_veta`

[11] *Functional Analysis Notes Fall 2004 Prof. Sylvia Serfaty* [online]. 2006 [cit. 2015-03-16]. Dostupné z: `http://www.math.nyu.edu/~vilensky/Functional_Analysis.pdf`

[12] The Hausdorff Maximal Principle and Zorn's Lemma. In: *Auburn University web* [online]. [cit. 2015-02-03]. Dostupné z: http://www.auburn.edu/~harriga/mh7200/hints/hw2.pdf

[13] Hans Hahn. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2015-03-03]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Hans_Hahn_\%28mathematician\%29

[14] Stefan Banach. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2015-03-03]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Stefan_Banach