

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV FYZIKÁLNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF PHYSICAL ENGINEERING

## ZAŘÍZENÍ PRO MĚŘENÍ VLNOPLOCHY MIKROSKOPOVÝCH OBJEKTIVŮ

DEVICE FOR WAVEFRONT MEASUREMENT OF MICROSCOPE OBJECTIVE LENSES

DIPLOMOVÁ PRÁCE  
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

Bc. JAN BARTONÍČEK

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

Ing. TOMÁŠ SLABÝ

BRNO 2013



## **Abstrakt**

Předmětem diplomové práce je návrh a sestavení měřícího systému a vypracování výpočetního algoritmu pro rekonstrukci vlnoplochy světelné vlny transformované mikroskopovým objektivem. Účelem je stanovení optických vad a srovnávání kvality objektivů se stejnými parametry.

V první části práce je objasněn pojem vlnoplocha a její popis pomocí Zernikových polynomů. Dále je uveden souhrn možných metod pro rekonstrukci vlnoplochy.

Pro experimentální určení tvaru vlnoplochy byly vybrány dvě metody – stříhová interferometrie a řešení rovnice přenosu intenzity. V práci je uvedena stručná charakteristika obou metod včetně možných aplikací, dále matematický aparát, zpracování obrazu, výpočetní postup, popis sestavy a návrh a výsledky experimentů. Pro obě metody je diskutována vhodnost jejich použití pro určení optických vad a testování mikroskopových objektivů.

Na základě získaných výsledků bylo zjištěno, že obě metody lze použít pro srovnávání objektivů. Použitelnost pro určení optických vad je možná s určitými restrikcemi.

## **Abstract**

The wavefront reconstruction of a light wave transformed by a microscope objective is the main subject of this diploma thesis together with the design and assembly of a measuring device and the development of a computational algorithm. The purpose is to determine optical aberrations and to compare a quality of objectives with identical parameters.

The term wavefront is explained and its description using Zernike polynomials is introduced in the first part of the thesis. The following part summarizes possible methods for wavefront reconstruction.

Two methods were chosen for experimental determination of a wavefront shape – shearing interferometry and solution of the transport of intensity equation. For each method a brief characteristic is provided together with possible applications, mathematical apparatus, image processing, computational procedure, setup description and proposition and results of experiments. The suitability of both methods for optical aberration determination and microscope objective comparison is discussed.

Based on the obtained results, both methods were found to be suitable for comparison of microscope objectives. The suitability for optical aberration determination is possible with certain restrictions.

## **Klíčová slova**

Testování mikroskopových objektivů, rekonstrukce vlnoplochy, stříhová interferometrie, rovnice přenosu intenzity, optické vady, Zernikovy polynomy.

## **Keywords**

Testing of microscope objectives, wavefront reconstruction, shearing interferometry, transport of intensity equation, optical aberrations, Zernike polynomials.

BARTONÍČEK J. *Zařízení pro měření vlnoplochy mikroskopových objektivů*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 73 s. Vedoucí Ing. Tomáš Slabý.





Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval v celém rozsahu samostatně pod vedením Ing. Tomáše Slabého a že veškeré podklady, z nichž jsem čerpal, jsou uvedeny v seznamu literatury.

Bc. Jan Bartoníček



Rád bych poděkoval Ing. Tomáši Slabému za odborné vedení, konzultace a cenné připomínky a prof. RNDr. Miroslavu Liškovi, DrSc. za praktické rady a podnětné konzultace.

Bc. Jan Bartoníček



# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>3</b>
<b>1 Definice vlnoplochy</b>	<b>5</b>
1.1 Definice vlnoplochy . . . . .	5
1.2 Testovací kritérium . . . . .	7
1.3 Zernikeovy polynomy . . . . .	7
<b>2 Měření vlnoplochy</b>	<b>11</b>
2.1 Interferenční metody . . . . .	11
2.2 Ostatní metody . . . . .	12
<b>3 Stříhová interferometrie</b>	<b>13</b>
3.1 Murtyův interferometr . . . . .	14
3.2 Výpočet tvaru vlnoplochy . . . . .	15
3.3 Zpracování interferogramu . . . . .	19
3.3.1 Detekce stopy svazku . . . . .	21
3.3.2 Odstranění pozadí a normování amplitudy . . . . .	23
3.3.3 Navázání fázového rozdílu . . . . .	24
3.4 Převzorkování . . . . .	25
3.5 Aproximace fázové funkce . . . . .	25
3.6 Popis sestavy . . . . .	26
3.7 Výsledky experimentů . . . . .	27
3.7.1 Numerický experiment . . . . .	27
3.7.2 Výsledky měření objektivů . . . . .	33
<b>4 Rovnice přenosu intenzity</b>	<b>41</b>
4.1 Matematický aparát . . . . .	41
4.1.1 Derivace intenzity . . . . .	42
4.1.2 Okrajové podmínky . . . . .	43
4.1.3 TIE v reprezentaci ortogonálních funkcí . . . . .	44
4.2 Aplikace . . . . .	45
4.3 Výpočetní postup . . . . .	46
4.3.1 Zpracování obrazu . . . . .	47
4.3.2 Výpočet derivace intenzity . . . . .	47
4.3.3 Výpočet transformační matice . . . . .	47
4.4 Popis sestavy . . . . .	48
4.5 Výsledky experimentů . . . . .	49

## OBSAH

4.5.1	Numerický experiment . . . . .	50
4.5.2	Výsledky měření objektivů . . . . .	54
<b>Závěr</b>		<b>58</b>
<b>Dodatky:</b>		<b>60</b>
A.	Aplikace sdružených gradientů . . . . .	60
B.	Detekce stopy svazku . . . . .	63
C.	Nástroje statistické analýzy . . . . .	65
<b>Literatura</b>		<b>68</b>

# Úvod

Testování kvality optických prvků představuje použití vhodné metody pro měření určitých fyzikálních vlastností studovaného prvku a zjištění, jakou mírou se tyto vlastnosti liší od zadaných požadavků. Díky tomu jsme pak schopni prvky s identickými parametry vzájemně srovnávat a vybírat ty s nejlepšími vlastnostmi. Znalost zmíněných fyzikálních vlastností, kterými mohou být například stupně optických vad čoček nebo zrcadel, zároveň umožňuje stanovit kvalitu měření / zobrazení daným optickým přístrojem, kvantifikovat případné nepřenosti a správně interpretovat naměřená data.

Koherencí řízený holografický mikroskop druhé a třetí generace [33, 73, 83], vyvinutý na Ústavu fyzikálního inženýrství Vysokého učení technického v Brně, je interferenční mikroskop se separovanou referenční a předmětovou větví, sloužící pro rekonstrukci fáze předmětové vlny a umožňující zobrazení fázových objektů a interpretaci fyzikálních vlastností, které s hodnotou fáze předmětové vlny souvisí (výška profilu, rozložení indexu lomu, apod.). Obě větve se skládají vždy z dvojice prvků s identickými parametry, tvořících pár. Jedná se například o dvojici mikroskopových objektivů, dvojici kondenzorů, apod. Ideální situace pro korektní výpočet hodnot fáze předmětové vlny nastane, bude-li tvar vlnoplochy předmětové a referenční vlny ve výstupní rovině mikroskopu, kde dochází k interferenci, identický, umístíme-li do obou větví stejný předmět (například čisté krycí sklíčko).

Výše popsaná situace je z důvodu nepřesnosti výroby optických prvků pouze hypotetická. Můžeme se ji však přiblížit výběrem příslušných prvků, které se z hlediska určité vlastnosti co nejvíce shodují, k čemuž slouží právě zmíněné testování optických prvků. Cílem diplomové práce je návrh a sestavení měřicího systému, který by umožňoval testování mikroskopových objektivů, a vypracování procedury vyhodnocení naměřených dat.

Jelikož je v případě popsaného holografického mikroskopu klíčovým faktorem pro přesnost rekonstrukce fáze tvar vlnoplochy předmětové a referenční vlny, jako studovaná vlastnost pro testování objektivů byla zvolena právě rekonstrukce vlnoplochy světelné vlny transformované testovaným objektivem. Pojem vlnoplocha a její matematický popis uvádí kapitola 1. V téže kapitole je zavedeno kritérium pro srovnání dvou vlnoploch a objasnění vyjádření vlnoplochy v reprezentaci Zernikeových polynomů.

Kapitola 2 uvádí stručný výčet metod pro rekonstrukci vlnoplochy za účelem testování optických prvků. Kapitoly 3 a 4 obsahují hlavní část této práce. Detailně popisují dvě metody, které byly vybrány pro experimentální měření mikroskopových objektivů. Jde o stříhovou interferometrii a rekonstrukci vlnoplochy řešením rovnice přenosu intenzity. Pro obě metody je uveden stručný výčet aplikací, matematický aparát, detailní popis celé procedury rekonstrukce vlnoplochy od provedení experimentů až po konečný výpočet. Pro obě metody byl navržen numerický experiment, který demonstruje oprávněnost použití vypracovaného postupu výpočtu tvaru vlnoplochy. Nakonec jsou v obou kapitolách

## *ÚVOD*

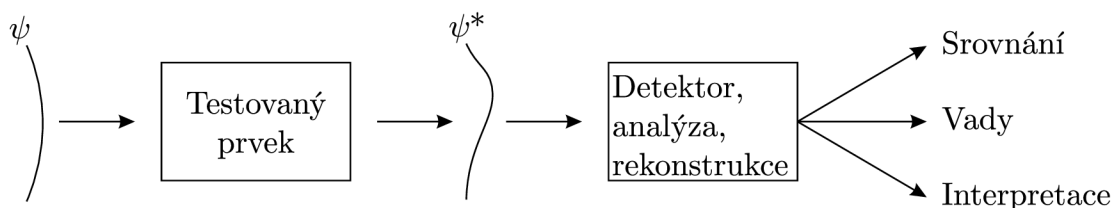
uvedeny výsledky měření mikroskopových objektivů s komentáři k získaným průběhům vlnoplochy, přenosti jejich určení, apod. Závěrečná část shrnuje dosažené výsledky.



# Kapitola 1

## Definice vlnoplochy

Princip testování optických prvků prostřednictvím rekonstrukce vlnoplochy světelné vlny objasňuje schéma na obrázku 1.1, kde je naznačeno šíření světelné vlny  $\psi$  se známým tvarem vlnoplochy. Po průchodu testovaným prvkem se tvar vlnoplochy změní. Následnou rekonstrukcí můžeme provést srovnání s referenční vlnoplochou, určit koeficienty optických vad, případně v závislosti na typu testovaného objektu interpretovat zjištěný tvar vlnoplochy jiným způsobem (může určovat například topografii povrchu objektu nebo rozložení indexu lomu, apod.).



**Obrázek 1.1:** Princip testování optických prvků rekonstrukcí vlnoplochy.

Pojem vlnoplocha je spolu s dalšími termíny objasněn v odstavci 1.1, možnosti matematického popisu a statistického zpracování vlnoplochy popisují odstavce 1.2 a 1.3.

### 1.1. Definice vlnoplochy

Světelnou vlnu můžeme matematicky popsat pomocí vlnové funkce  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  ve tvaru [34]

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) = A(\mathbf{r}) \exp[iW(\mathbf{r})] \exp(-i\omega t), \quad (1.1)$$

kde  $\psi(\mathbf{r})$  je část vlnové funkce závisující pouze na polohovém vektoru  $\mathbf{r}$ , vyjádřeném v kartézských souřadnicích  $x$ ,  $y$  a  $z$ , které lze převést do jiného systému, například cylindrických souřadnic  $\rho$ ,  $\theta$  a  $z$  [61, kap. 6.1]).  $A(\mathbf{r})$ , resp.  $W(\mathbf{r})$  je amplituda, resp. fáze,  $\omega$  označuje úhlovou frekvenci světelné vlny a  $t$  je čas. Jelikož je experimentální část této práce zaměřena na rekonstrukci vlnoplochy z naměřené intenzity světla, což je časově středovaná hustota světelného výkonu, nemusíme dále uvažovat faktor  $\exp(-i\omega t)$ , neboť podle odvození v [34, kap. 1.6] platí:

$$I(\mathbf{r}, t) = \overline{|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 = |\psi(\mathbf{r})|^2. \quad (1.2)$$

## 1.1. DEFINICE VLNOPLOCHY

Jako vlnovou funkci tedy dále uvažujeme pouze veličinu  $\psi(\mathbf{r})$  ze vztahu (1.1). Vlnoplochou obecně rozumíme plochu, pro kterou platí  $\psi(\mathbf{r}) = \text{konst.}$  [34]. Jedná se o plochu, kde je amplituda i fáze konstantní. V praxi je však tato podmínka splněna pouze ve speciálních případech a v dalším výkladu budeme za vlnoplochu považovat plochu, pro kterou platí  $W(\mathbf{r}) = \text{konst.}$ , tedy pouze plochu konstantní fáze.

Při rekonstrukci vlnoplochy například ze zaznamenaného interferogramu ve skutečnosti měříme průběh fázové funkce  $W(\mathbf{r})$  v rovině detektoru. Hodnoty  $W(\mathbf{r})$  tak představují fázové zpoždění jednotlivých bodů vlnoplochy oproti zvolené referenční hladině. Rovinu detektoru můžeme ztotožnit s rovinou  $z = 0$  a celý problém převést na dvourozměrný pomocí následujícího vztahu:

$$z = 0 : \quad (x, y, 0) \equiv (x, y) = \mathbf{r}. \quad (1.3)$$

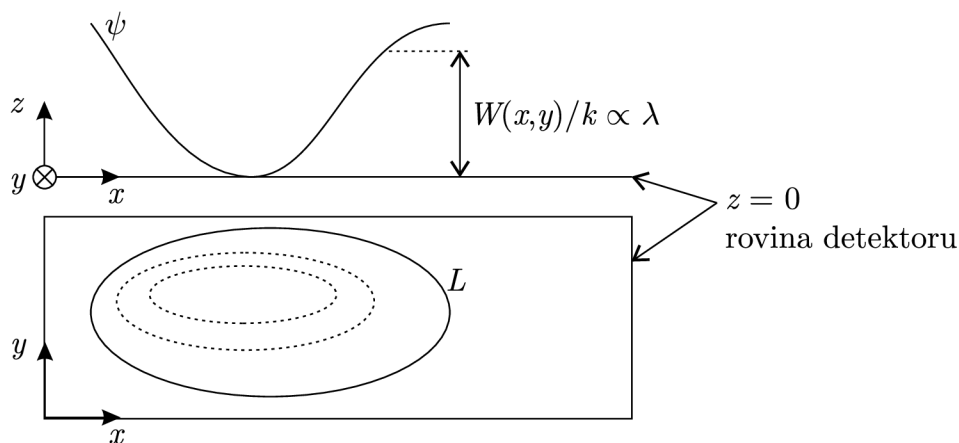
Nebude-li uvedeno jinak, budeme polohový vektor  $\mathbf{r}$  nadále uvažovat v rovině  $z = 0$  jako vektor pouze o dvou souřadnicích  $x$  a  $y$ , resp.  $\rho$  a  $\theta$  a souřadnici  $z$  vynecháme. Podobně budeme uvažovat veličiny  $\psi$ ,  $A$ ,  $W$  a  $I$  jako funkce pouze dvou proměnných v téže rovině. V případě rekonstrukce vlnoplochy v trojrozměrném prostoru vypočteme její  $z$ -ovou souřadnici v daném bodě  $\mathbf{r}$  nad rovinou detektoru z hodnoty fázového zpoždění:

$$z = \frac{W(\mathbf{r})}{k} = \frac{W(\mathbf{r})\lambda}{2\pi}, \quad (1.4)$$

kde  $k$  označuje vlnové číslo a  $\lambda$  vlnovou délku světelné vlny. Situaci znázorňuje obrázek 1.2. Z horní části obrázku vyplývá, že vlna  $\psi$  je prostorově ohraničená a na detektor (rovinu  $z = 0$ ) dopadá pouze v určité konečné oblasti. Označme tuto oblast  $L$  a dále definujme funkci  $P(\mathbf{r})$ :

$$P(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{r} \notin L, \\ 1 & \forall \mathbf{r} \in L. \end{cases} \quad (1.5)$$

Pomocí funkce  $P(\mathbf{r})$  můžeme definovat stopu světelného svazku. Výhoda zavedení této veličiny bude zřejmá v odstavci 3.2 při odvození výpočtu  $W(\mathbf{r})$ .



**Obrázek 1.2:** Znázornění vlny v souřadnicovém systému. Plná čára v horní části obrázku znázorňuje řez vlnoplochou vlny  $\psi$ . V průmětu do roviny  $xy$  je plnou čarou vyznačena hranice oblasti  $L$  (stopy vlny), přerušovanými pak místa se stejným fázovým zpožděním.

## 1.2. Testovací kritérium

Pro kvantitativní srovnání studované a referenční vlnoplochy bylo vybráno statistické zpracování odchylek mezi oběma vlnoplochami. Referenční vlnoplocha může být určena teoreticky nebo vzata z jiného měření. Předpokládejme, že v určitém konečném počtu bodů známe hodnoty studované vlnoplochy  $W(\mathbf{r})$  a referenční vlnoplochy  $\overline{W}(\mathbf{r})$ . Sestavme vektor  $\mathbf{W}$  s hodnotami  $W(\mathbf{r})$ :

$$\mathbf{W} = (W(\mathbf{r}_1), W(\mathbf{r}_2), \dots, W(\mathbf{r}_N))^T, \quad (1.6)$$

jehož délka je  $N$  a vyjadřuje celkový počet hodnot fáze  $W(\mathbf{r})$ . Symbol  $^T$  označuje transpozici. Analogicky sestavíme vektor  $\overline{\mathbf{W}}$ . Dále definujme vektor odchylek  $\mathbf{er}$ :

$$\mathbf{er} = \mathbf{W} - \overline{\mathbf{W}}. \quad (1.7)$$

Pro srovnání obou fází  $W(\mathbf{r})$  a  $\overline{W}(\mathbf{r})$  můžeme použít některou z popisných statistik souboru hodnot vektoru  $\mathbf{er}$  [1, 50]. V experimentální části této práce bude používán zejména podíl kvadratického průměru odchylek  $\mathbf{er}$  a hodnot  $\overline{\mathbf{W}}$  označený jako  $T$  [15]:

$$T(\mathbf{er}, \overline{\mathbf{W}}) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N \mathbf{er}_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \overline{\mathbf{W}}_i^2}}. \quad (1.8)$$

## 1.3. Zernikeovy polynomy

Zernikeovy polynomy lze s výhodou použít pro aproximaci spojitě funkce na oblasti ohraničené kružnicí o jednotkovém poloměru, neboť na této oblasti tvoří úplný ortogonální systém [37, 53, 61, kap. 16]. Born [9, kap. 9.3] uvádí vyjádření aberace<sup>1</sup> fázové (též aberační) funkce určitého řádu jako součet této aberace a aberací stejného typu, ale nižších řádů. Pro sekundární sférickou vadu tak půjde o členy  $\rho^6$ ,  $\rho^4$  a  $\rho^2$ . Výpočet koeficientů u jednotlivých členů provádí minimalizací rozptylu takto vyjádřené aberace přes pupilu ve tvaru kruhu s jednotkovým poloměrem. Jejich vzájemné poměry přesně odpovídají poměrům koeficientů jednotlivých členů příslušného Zernikeova polynomu o stejném tvaru. Použijeme-li tedy systém Zernikeových polynomů pro vyjádření funkce  $W(\mathbf{r})$ , pak koeficienty jednotlivých polynomů budou přímo určovat stupeň příslušných optických vad, navíc vyvážených vzhledem k vadám nižších řádů [41].

Systém Zernikeových polynomů má široké pole využití. Mimo určení aberací pro testování kvality optických prvků [30, 39] je lze také použít pro modelování změn vlnoplochy při fluktuacích indexu lomu prostředí, kterým se světelná vlna šíří, v důsledku atmosférických turbulencí [16, 78]. Jako popisný nástroj jsou Zernikeovy polynomy využívány v oftalmologických měřeních pro modelování povrchu rohovky [71] a určování aberací lidského oka [11]. Pomocí Zernikeových polynomů lze nejen popsat ale i přímo vypočítat tvar vlnoplochy z interferogramů získaných pomocí stříhové interferometrie [15, 25, 31]. Jako poslední příklad uvedme využití Zernikeových polynomů pro zpracování obrazu, například identifikace pozadí snímku [79] a výpočet obrazových momentů libovolného řádu [80].

<sup>1</sup>Jedná se o vyjádření fázové funkce ve tvaru  $W(\rho, \theta) = C_{nm}\rho^n \cos^m \theta$ , kde  $C_{nm}$  je konstanta [9, kap. 9.3].

### 1.3. ZERNIKEOVY POLYNOMY

Popišme nyní postup výpočtu koeficientů Zernikeových polynomů pro aproximaci známé funkce. Označme  $\{Z_j\}$  úplný ortonormální systém Zernikeových polynomů. Fázovou funkci  $W(\rho, \theta)$ , jejíž hodnoty jsou známy na celé oblasti ohraničené jednotkovou kružnicí, lze v reprezentaci  $J$  polynomů systému  $\{Z_j\}$  aproximovat tímto vztahem [42]:

$$W(\rho, \theta) = \sum_{j=1}^J c_j Z_j(\rho, \theta), \quad (1.9)$$

kde  $Z_j$  označuje  $j$ -tý Zernikeův polynom:

$$Z_j(\rho, \theta) = \begin{cases} \sqrt{n+1} R_n^0(\rho), & m = 0, \\ \sqrt{2(n+1)} R_n^m(\rho) \cos(m\theta), & m \neq 0 \text{ a } j \text{ je sudé,} \\ \sqrt{2(n+1)} R_n^m(\rho) \sin(m\theta), & m \neq 0 \text{ a } j \text{ je liché.} \end{cases} \quad (1.10)$$

$R_n^m(\rho)$  označuje radiální polynom:

$$R_n^m(\rho) = \sum_{s=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \left(\frac{n+m}{2} - s\right)! \left(\frac{n-m}{2} - s\right)!} \rho^{n-2s}. \quad (1.11)$$

Indexy  $n$  a  $m$  dále označují radiální řád a azimutální index [53] a s indexem  $j$  souvisí následovně:

$$n = \left( \sqrt{2j-1} + 0,5 \right)_{\text{int}} - 1, \quad (1.12a)$$

$$m = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 0, \\ 2 \left( \frac{2j+1-n(n+1)}{4} \right)_{\text{int}} & \text{pro sudé } n, \\ 2 \left( \frac{2(j+1)-n(n+1)}{4} \right)_{\text{int}} - 1 & \text{pro liché } n. \end{cases} \quad (1.12b)$$

Index  $\text{int}$  znamená, že vezmeme nejbližší menší přirozené číslo výsledné hodnoty výrazu v závorce. Jelikož se jedná o úplný ortogonální systém, pro koeficienty  $c_j$  platí [42]:

$$c_j = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} W(\rho, \theta) Z_j(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta. \quad (1.13)$$

Přehled prvních jedenácti polynomů a příslušné optické vady udává tabulka 1.1.

Zernikeovými polynomy můžeme také vyjádřit vlnoplochu popsanou funkcí  $W(\mathbf{r})$  na libovolné oblasti  $L$  [17], případně pouze na její části (například v konečném počtu bodů). V takovém případě nebude systém  $\{Z_j\}$  ortogonální a pro výpočet koeficientů nemůžeme použít vztah (1.13). Wang [87] porovnává stabilitu a přesnost dvou metod. Prvním způsobem je určení koeficientů metodou nejmenších čtverců. Problém lze formulovat následujícím způsobem:

$$\mathbf{X}\mathbf{c} = \mathbf{W}, \quad (1.14a)$$

$$\mathbf{X}_{ij} = Z_j(\rho_i, \theta_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (1.14b)$$

**Tabulka 1.1:** Ortonormální Zernikeovy polynomy  $Z_j(\rho, \theta)$  s uvedením příslušných aberací, případně geometrické interpretace (upraveno podle [42]).

j	n	m	$Z_j(\rho, \theta)$	Aberace
1	0	0	1	aditivní konstanta
2	1	1	$2\rho \cos \theta$	náklon, $x$
3	1	1	$2\rho \sin \theta$	náklon, $y$
4	2	0	$\sqrt{3}(2\rho^2 - 1)$	
5	2	2	$\sqrt{6}\rho^2 \sin 2\theta$	primární astigmatismus, $45^\circ$
6	2	2	$\sqrt{6}\rho^2 \cos 2\theta$	primární astigmatismus, $0^\circ$
7	3	1	$\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \sin \theta$	koma, $y$
8	3	1	$\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \cos \theta$	koma, $x$
9	3	3	$\sqrt{8}\rho^3 \sin 3\theta$	
10	3	3	$\sqrt{8}\rho^3 \cos 3\theta$	
11	4	0	$\sqrt{5}(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$	primární sférická

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_J)^T. \quad (1.14c)$$

Vztah (1.14a) představuje přeúřčenou soustavu lineárních rovnic. Vektor neznámých koeficientů  $\mathbf{c}$  lze určit takto [4]:

$$\mathbf{c} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W}. \quad (1.15)$$

Podle Wanga [87] není zaručena dobrá podmíněnost této úlohy a jako druhou metodu pro získání stabilnějšího řešení uvádí použití Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace [36, kap. 15.2–5], pomocí níž vytvoříme nový systém  $\{F_i\}$  jako lineární kombinaci  $\{Z_j\}$ , který již na dané oblasti  $L$  ortogonální bude<sup>2</sup>. Ortogonalizaci  $\{Z_j\}$  lze řešit rekurzivně [40, 87] nebo pomocí maticové reprezentace [17]. Koeficienty  $\{F_i\}$  určíme analogicky s (1.13). Vztah (1.13) můžeme podle [41, 87, 56] použít i tehdy, pokud známe aproximovanou funkci v konečném počtu bodů, ve vztahu(1.13) pouze upravíme konstantu před integrálem a integraci nahradíme sumací. Koeficienty  $\{Z_j\}$  lze pak již určit přímo z vypočtených koeficientů  $\{F_i\}$ . Vytvořme nejprve matici  $\mathbf{C}$ , jejíž prvky tvoří skalární součiny příslušných Zernikeových polynomů na oblasti  $L$ .

$$C_{ij} = \langle Z_i | Z_j \rangle = \frac{1}{A} \int_L Z_i Z_j d\tau, \quad i, j = 1, 2, \dots, J, \quad (1.16)$$

kde  $A$  je velikost plochy oblasti  $L$  a  $d\tau$  je plošný element.

$$A = \int_L d\tau. \quad (1.17)$$

Dále matici  $\mathbf{C}$  upravíme Choleského faktorizací [13] a vytvoříme matici  $\mathbf{N}$ .

$$\mathbf{C} = \mathbf{L}^T \mathbf{L}, \quad (1.18)$$

$$\mathbf{N} = (\mathbf{L}^T)^{-1}. \quad (1.19)$$

Nyní definujme nový systém  $\{F_i\}$ . Pro  $i$ -tý polynom  $F_i$  a jeho koeficient  $a_i$  platí [41, 56]:

$$F_i = \sum_{j=1}^J N_{ij} Z_j, \quad i = 1, 2, \dots, J, \quad (1.20)$$

<sup>2</sup>Ortogonalizaci tímto způsobem můžeme provést, neboť systém  $\{Z_j\}$  je úplný.

### 1.3. ZERNIKEOVY POLYNOMY

$$a_i = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N w_n F_i(\rho_n, \theta_n), \quad i = 1, 2, \dots, J. \quad (1.21)$$

Koeficienty  $a_i$  můžeme také vypočítat analogicky se vztahy (1.14) a (1.15):

$$\mathbf{X}\mathbf{a} = \mathbf{W}, \quad (1.22a)$$

$$\mathbf{X}_{ij} = F_j(\rho_i, \theta_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (1.22b)$$

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_J)^T. \quad (1.22c)$$

$$\mathbf{a} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W}. \quad (1.22d)$$

Hodnoty koeficientů  $c_j$  Zernikeových polynomů pak vypočteme podle následujícího vztahu.

$$\mathbf{c} = \mathbf{N}^T \mathbf{a}. \quad (1.23)$$

Chceme-li v reprezentaci Zernikeových polynomů vyjádřit funkci na obecné kruhové oblasti, můžeme vždy změnit měřítko souřadnic tak, aby byl poloměr kruhu roven jedné a pro výpočet koeficientů použít vztahy (1.14) a (1.15). Výsledky výpočtu pro oblasti tvaru šestiúhelníku, obdélníku, elipsy, apod. uvádějí [37, 40]. Pouze však pro kruhovou oblast budou mít hodnoty koeficientů Zernikeových polynomů význam klasicických optických vad [18].

Kvadrát koeficientu  $c_j$  také vyjadřuje rozptyl příslušné aberace kromě případu  $j = 1$ . Celkový rozptyl aberací je pak vyjádřen součtem kvadrátů jednotlivých koeficientů. Veličinu označíme  $\sigma_W^2$  [41]:

$$\sigma_W^2 = \sum_{j=2}^J c_j^2. \quad (1.24)$$

Pomocí rozptylu  $\sigma_W^2$  tak můžeme kvantitativně charakterizovat míru aberací studované fázové funkce, pro které odpovídající koeficienty zahrneme do výše uvedeného součtu. Závěrem ještě uveďme poznámku k chybám, k nimž dochází při numerickém výpočtu hodnoty radiálního polynomu (1.11). Pro polynomy vysokých řádů mohou být získané hodnoty nepoužitelné kvůli zaokrouhlovacím chybám, k nimž podle [53] dochází již pro stupně  $j > 45$ . Potlačení zaokrouhlovacích chyb umožňují rekurzivní metody výpočtu hodnot radiálních polynomů. Jejich přehled včetně popisu stability a náročnosti výpočtu uvádějí [53, 72]. Pro zajištění větší stability výpočtu je možné vyjádřit radiální polynom v jiném systému báзовých funkcí. Použití Čebyševových polynomů uvádí Janssen [29].

# Kapitola 2

## Měření vlnoplochy pro testování optických prvků

Následující text uvádí příklady měření tvaru vlnoplochy, resp. fázové funkce  $W$ , pro určování vlastností optických prvků a jejich testování. První skupinou jsou metody, které využívají interference vlny, jejíž vlnoplochu chceme určit, a vlny referenční. Příklady používaných interferometrů a jejich aplikací uvádí odstavec 2.1. Odstavec 2.2 popisuje příklady metod, které nevyžívají interference.

### 2.1. Interferenční metody

Jednoduché určení tvaru povrchu testovaného prvku umožňuje Newtonův interferometr [49]. Mezi dvěma prvky přiloženými k sobě, z nichž jeden je referenční o známém tvaru, vznikne vzduchová mezera vytvářející dvě polopropustná rozhraní, od nichž se odráží dopadající světelná vlna. Po odrazu obě vlny interferují<sup>1</sup> a mění se rozteč a tvar interferenčních proužků indikuje změnu velikosti vzduchové mezery a tedy i odchylku testovaného povrchu od referenčního. Metoda je vhodná pro testování povrchu jednoduchých čoček, klínovitosti planoparalelních desek, apod. Na podobném principu je založeno i použití Fizeaova a Haindingerova interferometru. Podrobnosti uvádí Mantravadi [49].

Poznamenejme, že v případě popsání aplikace Newtonova interferometru neurčujeme přímo tvar vlnoplochy, ale zajímá nás struktura interferenčních proužků, kterou tvar vlnoplochy, resp. její rozdíly od vlnoplochy referenční vlny určují. Jinými slovy, studovanou vlastnost optického prvku jsme schopni určit, aniž bychom přímo rekonstruovali tvar vlnoplochy. Podobné je to i v následujícím příkladě.

Chceme-li určit tvar vlnoplochy po průchodu optickým prvkem spíše než po odrazu od něho, je výhodné použít Twymanův–Greenův interferometr [44]. Jedná se o modifikaci Michelsonova interferometru. Testovaný prvek umístíme do cesty světelného svazku v předmětové větvi, po průchodu je svazek odražen zpět zrcadlem, znovu prochází testovaným prvkem a po odrazu od amplitudového děliče dochází k interferenci s referenční vlnou. Jednoduché schéma ukazuje obrázek 3.2a. Ze získané interferenční struktury, jež je determinována rozdíly ve tvaru vlnoploch obou vln, pak můžeme identifikovat studované vlastnosti. Twymanův–Greenův interferometr je možné použít pro určení nehomogenit indexu lomu transparentních objektů, stanovit úhlové odchylky pravoúhlých a koutových

---

<sup>1</sup>Předpokládáme použití koherentního zdroje světla. Vyrovnání rozdílu optických drah tak není nutné.

## 2.2. OSTATNÍ METODY

hranolů, kvalitativně určit optické vady čočky nebo mikroskopového objektivu, apod. Přizpůsobení uspořádání interferometru Machova–Zehnderova typu umožňuje pouze jeden průchod světelného svazku testovaným prvkem. Detailní popis celé problematiky uvádí Malacara [44].

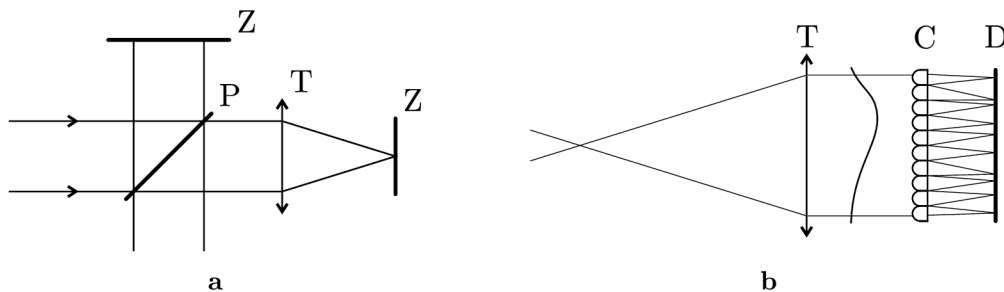
Výše uvedené metody umožňovaly určení sledovaných vlastností optických prvků pro jejich testování ze získané interferenční struktury. Pomocí Twymanova–Greenova interferometru můžeme hodnoty fázové funkce určit i absolutně, je k tomu ale nutné použít některou z technik řízeného posuvu fáze [70] (angl. phase shifting), kterého můžeme docílit změnou délky optické dráhy v referenční větvi. Výjimku v tomto ohledu tvoří stříhová interferometrie, která byla pro svou nenáročnost na uspořádání a provedení experimentálních měření vybrána pro testování mikroskopových objektivů. Metoda je detailně popsána v kapitole 3. Další příklady interferenčních metod uvádějí [14, 26, 48, 62].

## 2.2. Ostatní metody

Jednou z metod, které nevyužívají interference pro určení tvaru vlnoplochy, resp. vlastností optického prvku, je Hartmannův test pro testování konkávních zrcadel [45]. Před testované zrcadlo je umístěno nepropustné stínítko s pravidelně uspořádanými clonkami. Stínítko osvítíme bodovým zdrojem světla, který se nachází ve středu křivosti zrcadla. V případě dokonale sférického tvaru se uspořádání clonek zobrazí ve zmenšeném měřítku se stejným pravidelným uspořádáním. V opačném případě budou obrazy jednotlivých clonek posunuté od ideální polohy. Příčinou je odchylka od sférického tvaru zrcadla.

Pro testování čoček a mikroskopových objektivů je možné použít Hartmannovu–Schackovu variantu tohoto testu [45]. Místo stínítka a pole clonek použijeme pole identických čoček. Světelná vlna transformovaná například testovaným objektivem dopadá na toto pole. Každá čočka fokusuje segment vlny do bodu, jehož poloha vzhledem k optické ose čočky závisí na zakřivení vlnoplochy v příslušném segmentu. Princip objasňuje schéma na obrázku ???. Jde o velmi přímočaré určení tvaru vlnoplochy. Nevýhodou je však náročná výroba pole čoček a také nízké rozlišení určeného tvaru vlnoplochy.

Další možností určení tvaru vlnoplochy je řešení diferenciální rovnice přenosu intenzity. Tato metoda je podrobně popsána v kapitole 4, neboť se opět jedná o jednoduchou techniku co se týče náročnosti na uspořádání a návrhu experimentů a rovněž byla aplikována pro testování mikroskopových objektivů.



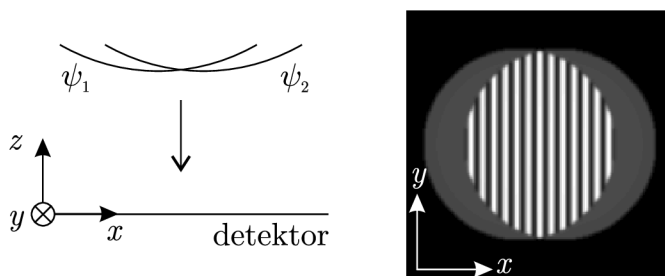
**Obrázek 2.1:** a – Twymanův–Greenův interferometr (upraveno podle [44]), b – Hartmannův–Shackův test (upraveno podle [45]). C – pole čoček, D – detektor, P – dělič svazku (například planparalelní deska), T – testovaný objektiv, Z – zrcadlo.



# Kapitola 3

## Střihová interferometrie

Základním principem střihové interferometrie je vytvoření vlny, která je shodná s původní (testovanou) z hlediska tvaru vlnoplochy. Druhá vlna je posunuta příčně nebo azimutálně ke směru šíření a v oblasti překrytí obou svazků dochází k interferenci [38, 76]. Z naměřené struktury interferenčních proužků je možné určit tvar vlnoplochy. Situaci znázorňuje obrázek 3.1.

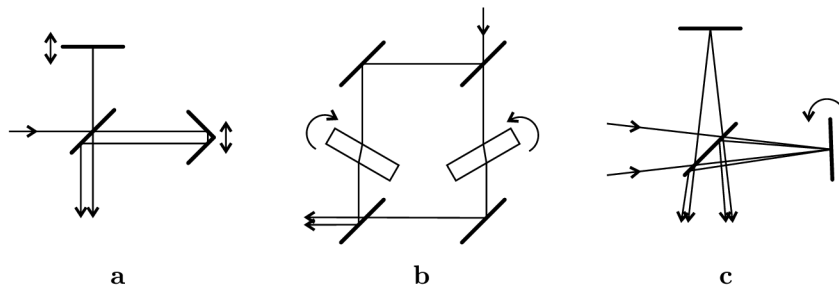


**Obrázek 3.1:** Princip střihové interferometrie. V levé části jsou schematicky znázorněny dvě příčně posunuté vlny s vyznačeným směrem šíření. Vpravo je pak zobrazena interference těchto vln.

Střihovou interferometrii lze rozdělit do dvou kategorií podle způsobu posunutí. Studujeme-li kolimovanou nebo téměř kolimovanou vlnu, provádíme posunutí příčné v rovině kolmé ke směru šíření. Pokud je vlna konvergentní, vzájemného částečného překrytí dosáhneme tím, že změním směr šíření druhého svazku (viz obrázek 3.2). Interferometry, jakými jsou Jaminův, Michelsonův nebo Machův–Zehnderův, je možné přizpůsobit oběma režimům. Druhou vlnu lze snadno vytvořit dopadem na polopropustné rozhraní. Příčné posunutí je pak možné provést použitím různých optických prvků, například koutového hranolu, planoparalelní desky, pravouhého zrcadla, otáčejícího se rovinného zrcadla, apod. Některé příklady znázorňuje obrázek 3.2. Obě vlnoplochy jsou vůči sobě často fázově posunuty. V případě použití zdroje s částečně koherentním světlem je nutné rozdíl optických drah kompenzovat, například změnou délky optické dráhy jedné z větví interferometru. Technické aspekty střihové interferometrie podrobně popisuje Strojník [76].

Místo zrcadel a polopropustných rozhraní je možné k dělení a příčnému posunutí vlny využít také jednoosé krystaly s různým indexem lomu (a tudíž různým směrem šíření) pro paprsek řádný a mimořádný. Často se jedná o dvojici identických hranolů pootočených vůči sobě o určitý úhel tak, aby se z řádného paprsku stal v druhém hranolu mimořádný

### 3.1. MURTYŮV INTERFEROMETR



**Obrázek 3.2:** Způsoby příčného posunutí. Uveden je vždy typ interferometru, použitý prvek pro posunutí a režim. a – Michelsonův interferometr, pravouhlé zrcadlo, kolimovaná vlna. b – Machův–Zehnderův, planoparalelní desky, kolimovaná vlna. c – Michelsonův, rovinné zrcadlo, konvergentní vlna. V případech a, b je tenkými čarami vyznačena osa svazku, v případě c ohraničení svazku (upraveno podle [76]).

a naopak. Na výstupu z hranolu jsou oba paprsky příčně posunuté. Tímto způsobem se používá například Savartův polariskop nebo Wollastonův hranol [48, 76].

Pro stříhovou interferometrii se také používají difrakční mřížky [63, 76]. Posunutí a vzájemného překrytí svazků je možné dosáhnout různými způsoby. Bude-li hodnota úhlu  $\beta$  mezi dvěma sousedními difrakčními řádů příslušné mřížky v rozsahu

$$\vartheta \leq \beta \leq 2\vartheta,$$

kde  $\vartheta$  je aperturní úhel svazku, bude docházet k částečnému překrytí a interferenci právě mezi dvěma svazky sousedních difrakčních řádů. Bude-li  $\beta$  větší než dvojnásobek aperturního úhlu a mřížka bude vyrobena s dvěma periodicitami s blízkými frekvencemi, opět dojde k částečnému překrytí nyní pouze odpovídajících si difrakčních řádů. Podobný výsledek získáme použitím dvou překrývajících se mřížek se stejnou periodicitou, které jsou vůči sobě navzájem pootočené. Tuto metodu využil Rimmer[63] pro určení aberací zrcadel.

Následující text této kapitoly podrobněji pojednává o další metodě stříhové interferometrie, Murtyově interferometru, která byla vybrána pro experimentální určení vlnoplochy světelného svazku prošlého mikroskopovým objektivem. Ze známého tvaru vlnoplochy lze určit koeficienty Zernikových polynomů a testovat tak kvalitu objektivů, případně je porovnávat mezi sebou. Postup výpočtu a zpracování interferogramů je uveden v odstavcích 3.1–3.4. Experimentální část je popsána v odstavcích 3.6–3.7.

### 3.1. Murtyův interferometr

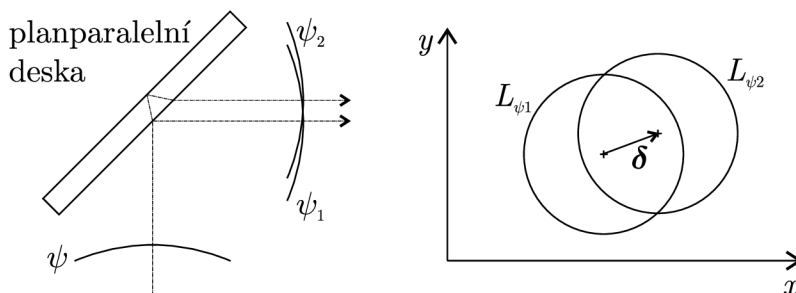
Vynález laseru v roce 1960 [8] a jeho následná aplikace v mnoha oborech umožnily výrazné zjednodušení v sestavách optických přístrojů využívajících pro určení tvaru vlnoplochy stříhové interferometrie. Použitím koherentního zdroje světla není nutné kompenzovat rozdíl optických drah a místo interferometrů složených ze dvou oddělených větví (Michelsonův, Machův–Zehnderův, aj.) je možné použít interferometr bez referenční větve.

Zřejmě nejjednodušší systém s koherentním zdrojem světla pro stříhovou interferometrii sestavil Murty [52] a jím publikované uspořádání se dnes označuje jeho jménem. Schematicky je znázorněno na obrázku 3.3. Testovaná vlna  $\psi$  dopadá na polopropustné

rozhraní planparalelní desky, od které se odráží jako vlna  $\psi_1$ . Vlna  $\psi_2$ , odražená od druhého rozhraní, se šíří po průchodu deskou ve stejném směru<sup>1</sup> jako vlna  $\psi_1$ , je ale vůči ní příčně posunuta o vektor posunutí  $\delta$ . Velikost posunutí můžeme měnit natočením desky vzhledem ke směru šíření dopadající vlny podle následujícího vztahu [76] za předpokladu, že desku obklopuje vzduch (index lomu  $n \doteq 1$ ),

$$\delta = \frac{t \sin 2\gamma}{n^2 - \sin^2 \gamma},$$

kde  $t$  je tloušťka desky,  $n$  je její index lomu a  $\gamma$  je úhel dopadu vlny  $\psi$ . V oblasti překrytí dochází mezi oběma vlnami k interferenci a ze struktury interferenčních proužků lze vypočítat tvar vlnoplochy.



**Obrázek 3.3:** Schéma Murtyova interferometru a znázornění stop svazků v rovině kolmé ke směru šíření obou vln (upraveno podle [38]).

Liška [38] popisuje jednoduchý způsob využití Murtyova interferometru k určení tvaru vlnoplochy a průběhu vlnové aberace sférické vlny z jednoho interferogramu na základě srovnání s libovolnou ideální sférickou vlnou. Je-li vlnoplocha rotačně symetrická, pak pro prostorové rozložení fáze stačí určit průběh pouze v jednom podélném řezu procházejícím osou rotační symetrie. V opačném případě je pro určení fázové plochy nutné získat více interferogramů s různým směrem posunutí svazků. Určení fázové plochy ze dvou interferogramů s navzájem kolmým směrem posunutí o stejné velikosti popisuje již Rimmer [63], pro Murtyův interferometr pak Servin [67], který vhodnost této metody demonstruje na numerickém experimentu.

Výpočetní postup určení fázové plochy, který popisuje Liška [38] nebo Servin [67], lze dále rozvíjet a aplikovat na testování optických prvků, například objektivů, jednoduchých čoček nebo zrcadel. Uspořádání sestavy pro testování jednoduché čočky a analýzu tvaru konkávních zrcadel uvádí Murty [52]. Pomocí Murtyova interferometru je také možné kontrolovat kolimování svazku, určovat některé parametry čoček (ohnisková vzdálenost, index lomu), měřit index lomu transparentních látek včetně kapalin, zjišťovat nehomogeneity optických prvků nebo teplotních polí, apod. [76].

## 3.2. Výpočet tvaru vlnoplochy

Následující popis objasňuje fyzikální význam interferenční proužků a zdůvodňuje, proč záznam interferenční struktury, získaný pomocí stříhové interferometrie, můžeme použít pro určení tvaru vlnoplochy, resp. výpočet fázové funkce  $W$ .

<sup>1</sup>Za předpokladu, že stěny planparalelní desky jsou dokonale rovnoběžné.

### 3.2. VÝPOČET TVARU VLNOPLOCHY

Předpokládejme, že jsme v rovině detektoru  $z = 0$  získali záznam intenzity  $I$  dvou interferujících vln  $\psi_1$  a  $\psi_2$ . Z principu superpozice pro intenzitu  $I(\mathbf{r})$  vzhledem ke tvaru vlnové funkce  $\psi$  uvedeném ve vztahu (1.1) platí [82]:

$$I(\mathbf{r}) = |\psi_1(\mathbf{r}) + \psi_2(\mathbf{r})|^2 = |\psi_1(\mathbf{r})|^2 + |\psi_2(\mathbf{r})|^2 + \psi_1^*(\mathbf{r})\psi_2(\mathbf{r}) + \psi_1(\mathbf{r})\psi_2^*(\mathbf{r}) = A_1^2(\mathbf{r}) + A_2^2(\mathbf{r}) + 2A_1(\mathbf{r})A_2(\mathbf{r}) \cos [(W_1(\mathbf{r}) - W_2(\mathbf{r}))]. \quad (3.1)$$

První dva členy v poslední úpravě vztahu (3.1) představují pozadí snímku. Třetí člen má význam modulace intenzity v podobě interferenčních proužků s amplitudou  $2A_1A_2$  v daném bodě. V případě stříhové interferometrie předpokládáme, že interferující vlny mají shodný tvar vlnoplochy, pouze jsou vůči sobě posunuté kolmo ke směru šíření. Pro fázové funkce  $W_1(\mathbf{r})$  a  $W_2(\mathbf{r})$  tedy platí:

$$W_1(\mathbf{r}) \equiv W(\mathbf{r}), \quad (3.2a)$$

$$W_2(\mathbf{r}) = W(\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}), \quad (3.2b)$$

kde  $\boldsymbol{\delta}$  je vektor příčného posunutí o souřadnicích  $\delta_x$  a  $\delta_y$ . Rovnici (3.1) pak můžeme zjednodušit tímto způsobem

$$I(\mathbf{r}) = A_1^2(\mathbf{r}) + A_2^2(\mathbf{r}) + 2A_1(\mathbf{r})A_2(\mathbf{r}) \cos [(W(\mathbf{r}) - W(\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}))] = a(\mathbf{r}) + b(\mathbf{r}) \cos [\Phi(\mathbf{r})], \quad (3.3)$$

kde veličinu  $\Phi(\mathbf{r})$  nazveme fázovým rozdílem v daném bodě  $\mathbf{r}$ . Hodnoty  $\Phi(\mathbf{r})$  je možné vyjádřit v násobcích  $2\pi s$ , kde  $s$  je reálné číslo představující interferenční řád [38]. Získáním hodnot funkcí  $a(\mathbf{r})$  a  $b(\mathbf{r})$  a jejich následným vyloučením lze intenzitu  $I(\mathbf{r})$  modifikovat na následující tvar

$$I(\mathbf{r}) \longrightarrow I^*(\mathbf{r}) = \cos [\Phi(\mathbf{r})] \quad (3.4)$$

a hodnotu fázového rozdílu určit přímo funkcí arkuskosinus. Vyloučení obou členů, tedy odstranění pozadí a normování amplitudy, je možné docílit vhodným zpracováním obrazu (odstavec 3.3.2).

Hodnoty fázového rozdílu vypočtené podle rovnice (3.4) jsou určeny nejednoznačně, neboť obor hodnot funkce arkuskosinus je  $\langle 0, \pi \rangle$ , kdežto hodnoty  $\Phi(\mathbf{r})$  náleží oboru reálných čísel. Pro jednoznačné určení fázového rozdílu, neboli jeho navázání, z libovolného interferogramu existuje řada metod [32, 68, 86]. Lze však přistupovat zcela intuitivně. Označme libovolný světlý proužek ( $I^* = 1$ ) libovolným reálným číslem  $s$  a sousední tmavé proužky ( $I^* = -1$ )  $s - 0,5$  a  $s + 0,5$  podle toho, zda dochází v daném směru k poklesu nebo vzrůstu interferenčního řádu (lze určit experimentálně). Ve směru vzrůstu (oblast mezi proužky  $s$  a  $s + 0,5$ ) pak k hodnotě  $\arccos(I^*)/2\pi$  připočteme zvolený řád  $s$ , ve směru poklesu (oblast mezi proužky  $s$  a  $s - 0,5$ ) tuto hodnotu od zvoleného řádu odečteme. Jak bude ukázáno v odstavcích 3.6 a 3.7, věnujících se experimentům, je tento způsob navázání fázového rozdílu pro proužky s monotónním průběhem interferenčního řádu efektivní a plně dostačující.

Známe-li fázový rozdíl  $\Phi(\mathbf{r})$ , můžeme již přejít k samotnému výpočtu fázové funkce  $W(\mathbf{r})$ . Pro stříhovou interferometrii byla vypracována řada algoritmů, jejichž výčet uvádí Dai [15]. Všechny postupy lze rozdělit na modální a zonální metody. Modální metody jsou založené na výpočtu koeficientů bázevých funkcí, kterými funkci  $W(\mathbf{r})$  aproximujeme (většinou je používán systém Zernikových polynomů, případně jeho modifikace pro stopy nekruhového tvaru). Principem je vytvoření nového systému bázevých funkcí pro

vyjádření  $\Phi(\mathbf{r})$  a definice převodních vztahů mezi koeficienty obou systémů. V případě výpočtů v maticové reprezentaci jsou převodní vztahy vyjádřeny ve formě tzv. stříhové matice (angl. shear matrix [15], obdoba transformační matice  $\mathbf{N}$  (1.19)). Koeficienty básových funkcí nového systému lze určit snadno pomocí regresní analýzy. Druhou skupinou jsou zonální metody, kdy v bodech s naměřeným fázovým rozdílem  $\Phi(\mathbf{r})$  určíme přímo hodnoty  $W(\mathbf{r})$ . Pro zpracování experimentálních výsledků byla aplikována zonální metoda vycházející z práce Servina [67] a Villy [84]. Následující text stručně popisuje její použití.

Označme  $\widehat{W}(\mathbf{r})$  odhad průběhu fázové funkce studované vlny v rovině detektoru na oblasti  $L$ , označující stopu této vlny. Není-li vlnoplocha této vlny rotačně symetrická, k jejímu určení na celé oblasti  $L$  je nutné získat minimálně dva interferogramy pomocí různých, ale nikoli libovolných příčných posunutí, lišících se směrem, případně i velikostí (bude vysvětleno dále). Z interferogramů získáme hodnoty fázových rozdílů  $\Phi_1(\mathbf{r})$  a  $\Phi_2(\mathbf{r})$ :

$$\Phi_1(\mathbf{r}) = W(\mathbf{r}) - W(\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}_1), \quad (3.5a)$$

$$\Phi_2(\mathbf{r}) = W(\mathbf{r}) - W(\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}_2). \quad (3.5b)$$

Pro určení  $\widehat{W}(\mathbf{r})$  je možné použít metodu nejmenších čtverců sestavením funkcionálu  $U$  [67, 84] a jeho následnou minimalizací.

$$U = \sum_{\mathbf{r} \in L} \{ [\widehat{W}(\mathbf{r}) - \widehat{W}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}_1) - \Phi_1(\mathbf{r})]^2 P(\mathbf{r})P(\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}_1) + [\widehat{W}(\mathbf{r}) - \widehat{W}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}_2) - \Phi_2(\mathbf{r})]^2 P(\mathbf{r})P(\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}_2) \}. \quad (3.6)$$

Minimalizaci provedeme výpočtem gradientu  $U$  podél  $\widehat{W}(\mathbf{r})$  [84]:

$$\frac{\partial U}{\partial \widehat{W}(\mathbf{r})} = 0, \quad (3.7)$$

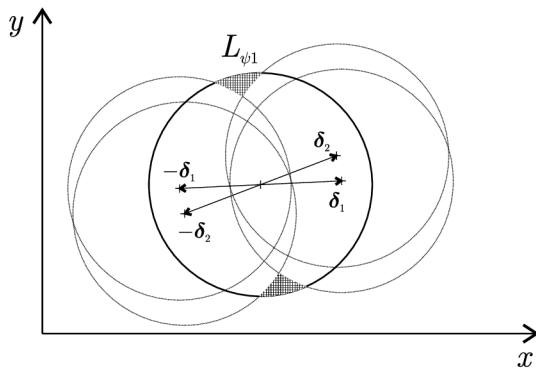
$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \widehat{W}(\mathbf{r})} = & 2 \{ [\widehat{W}(\mathbf{r}) - \widehat{W}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}_1) - \Phi_1(\mathbf{r})] P(\mathbf{r})P(\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}_1) - \\ & [\widehat{W}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}_1) - \widehat{W}(\mathbf{r}) - \Phi_1(\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}_1)] P(\mathbf{r})P(\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}_1) + \\ & [\widehat{W}(\mathbf{r}) - \widehat{W}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}_2) - \Phi_2(\mathbf{r})] P(\mathbf{r})P(\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}_2) - \\ & [\widehat{W}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}_2) - \widehat{W}(\mathbf{r}) - \Phi_2(\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}_2)] P(\mathbf{r})P(\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}_2) \}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Získáme tak soustavu lineárních rovnic pro výpočet  $\widehat{W}(\mathbf{r})$  v každém bodě  $\mathbf{r} \in L$ , pokud pro každý z těchto bodů bude alespoň jeden ze součinů  $P(\mathbf{r})P(\mathbf{r} \pm \boldsymbol{\delta}_{1,2})$  nenulový. Je zřejmé, že pro splnění této podmínky je nutné provést alespoň dvě posunutí o různých směrech lišících se o určitý minimální úhel, jak je znázorněno na obrázku 3.4.

Problém (3.7) je však špatně definovaný<sup>2</sup> a získané řešení není určeno jednoznačně. Důvod bude zřejmý, spočítáme-li frekvenční odezvu  $H$  jako podíl Fourierových transformací funkcí  $\Phi(\mathbf{r})$  a  $W(\mathbf{r})$ . Výsledek pro příčné posunutí pouze ve směru  $x$  uvádí Servin [67]:

<sup>2</sup>V anglicky psaných publikacích se označuje jako inverse problem nebo ill-posed problem [3, 7, 59].

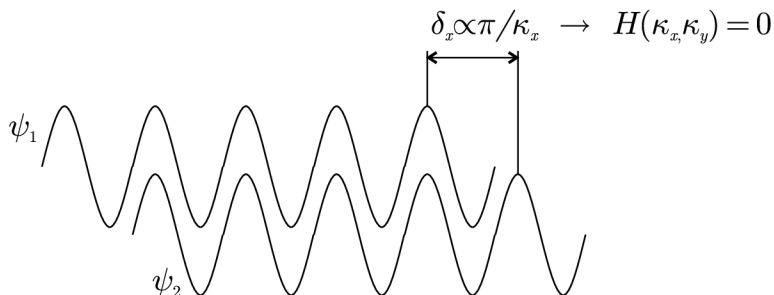
### 3.2. VÝPOČET TVARU VLNOPLOCHY



**Obrázek 3.4:** Překryv stop svazků při zvolených posunutích. Tečkovanými čarami jsou vyznačeny stopy svazků posunutých o  $+\delta_1$ ,  $-\delta_1$ ,  $+\delta_2$  a  $-\delta_2$  vzhledem k  $L_{\psi_1}$ . Při nevhodné volbě směru druhého posunutí může nastat situace, že hodnoty  $W(\mathbf{r})$  nevypočítáme na celé oblasti  $L$ , jak znázorňují vyšrafované úseky.

$$H(\kappa_x, \kappa_y) = \frac{\text{FT}\{\Phi(\mathbf{r})\}}{\text{FT}\{W(\mathbf{r})\}} = -2\kappa_x \sin(\delta_x \kappa_x), \quad (3.9)$$

kde  $\kappa_x$  a  $\kappa_y$  jsou prostorové frekvence v příslušných směrech. Z rovnice (3.9) je patrné, že frekvenční odezva bude pro určité hodnoty  $\kappa_x$  nulová a v těchto prostorových frekvencích ztratíme informaci o funkci  $W(\mathbf{r})$ . Problém ilustruje obrázek 3.5.



**Obrázek 3.5:** Vlnoplocha, jejíž tvar nebude určen jednoznačně (upraveno podle [67]).

Pokud je nám známá určitá informace o průběhu funkce  $W(\mathbf{r})$  (angl. priori information [3]), můžeme ji implementovat do funkcionálu (3.6) pro získání jednoznačného řešení. To je principem regularizační teorie a s ní souvisejícího nalezení vhodného regularizačního členu, který modifikuje funkcionál (3.6) [59]. V případě rovinné vlnoplochy transformované čočkou můžeme předpokládat, že průběh vlnoplochy na výstupu z čočky bude spojitý a hladký a pro sestavení vhodného regularizačního členu tak můžeme použít diskrétní aproximaci laplaciánu  $\Delta$  funkce  $W(x, y)$  [23].

$$\Delta = \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} \approx [W(x-1, y) - 2W(x, y) + W(x+1, y)] + [W(x, y-1) - 2W(x, y) + W(x, y+1)]. \quad (3.10)$$

Minimalizace hodnoty laplaciánu v daném bodě zajistí, že změna tvaru vlnoplochy bude v tomto bodě velmi malá. Regularizační člen  $R$  sestavíme následujícím způsobem [67]:

$$\begin{aligned}
 R = & \mu \sum_{(x,y) \in L} [R_x^2(x,y) + R_y^2(x,y)] = \\
 & \mu \sum_{(x,y) \in L} \{ [\widehat{W}(x-1,y) - 2\widehat{W}(x,y) + \widehat{W}(x+1,y)]^2 + \\
 & [\widehat{W}(x,y-1) - 2\widehat{W}(x,y) + \widehat{W}(x,y+1)]^2 \}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Faktor  $\mu$  slouží pro zaručení, že odhadovaná funkce bude hladká, a jeho hodnota, zvolená čistě intuitivně, závisí na množství šumu  $\Phi(\mathbf{r})$  [67, 84]. Označme pravou stranu rovnice (3.6)  $U_{LS}$  a definujme nový funkcionál  $U$ :

$$U = U_{LS} + R. \tag{3.12}$$

Minimalizací (3.12) vzhledem k  $\widehat{W}(\mathbf{r})$  získáme novou soustavu lineárních rovnic:

$$\frac{\partial}{\partial \widehat{W}(\mathbf{r})} (U_{LS} + R) = 0, \tag{3.13}$$

kde derivace  $U_{LS}$  je dána (3.8) a pro derivaci regularizačního členu platí

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R}{\partial \widehat{W}(\mathbf{r})} = & \mu [R_x(x+1,y)P(x,y)P(x+2,y) - 2R_x(x,y)P(x+1,y)P(x-1,y) + \\
 & R_x(x-1,y)P(x,y)P(x-2,y)] + \mu [R_y(x,y+1)P(x,y)P(x,y+2) - \\
 & 2R_y(x,y)P(x,y+1)P(x,y-1) + R_y(x,y-1)P(x,y)P(x,y-2)].
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Řešíme tedy následující problém

$$A\widehat{W} = \mathbf{Y}. \tag{3.15}$$

Vektor  $\widehat{W}$  je analogický k (1.6) a  $\mathbf{Y}$  označuje vektor pravých stran obsahující hodnoty fázových rozdílů, získané z naměřených interferogramů. Ze vztahů (3.8) a (3.14) je zřejmé, že každou<sup>3</sup> rovnici tvoří pouze třináct sčítanců sdružených kolem  $\widehat{W}(x,y)$  s příslušnými souřadnicemi a řádek matice  $A$  příslušející dané hodnotě  $\widehat{W}(x,y)$  bude tedy obsahovat pouze třináct nenulových prvků. Získaná matice bude řídká a pro řešení této soustavy bude výhodné použít iterační metodu sdružených gradientů [61, 69]. Podrobný postup sestavení matice  $A$  a vektorů  $\mathbf{W}$  a  $\mathbf{Y}$  a použití metody sdružených gradientů je uvedeno v dodatku A.

Z vypočtených hodnot  $\widehat{W}(x,y)$  můžeme rekonstruovat vlnoplochu podle (1.4), použít testovací kritérium (1.8) nebo určit koeficienty Zernikových polynomů (odstavec 1.3).

### 3.3. Zpracování interferogramu

Následující text se věnuje výpočtu fázového rozdílu  $\Phi(\mathbf{r})$  ze zaznamenané interferenční struktury. Nejprve uveďme několik poznámek k digitalizaci signálu a jeho zpracování. Při

<sup>3</sup>Tvrzení není pravdivé pro takový bod  $(x,y)$ , pro který platí  $P(x,y) = 0$ . Příslušné prvky matice  $A$  budou rovněž nulové. Týká se to bodů v blízkosti hranice oblasti  $L$ .

### 3.3. ZPRACOVÁNÍ INTERFEROGRAMU

použití CCD nebo jiného podobného detektoru získáme kvantovaný<sup>4</sup> záznam intenzity světla<sup>5</sup>, který bude prostorově vzorkován. Získaný obraz bude mít formu matice. Hodnota jednotlivého prvku této matice vyjadřuje intenzitu světla zaznamenanou příslušným pixelem použitého detektoru [27, kap. 6]. Polohu pixelu budeme charakterizovat vektorem  $\mathbf{r}_i$  o souřadnicích  $(x_i, y_i)$  ve zvoleném souřadnicovém systému pro  $i = 1, 2, \dots, N$ , kde  $N$  vyjadřuje celkový počet prvků matice. V dalším výkladu budeme jednotlivý pixel nazývat bodem.

Zavedme následující formalismus.  $I$  označíme matici (též pole hodnot), jejíž prvky vyjadřují zaznamenané hodnoty intenzity  $I(\mathbf{r}_i)$ . Analogicky označíme pole fázového rozdílu  $\Phi$  s hodnotami  $\Phi(\mathbf{r}_i)$ , fázové funkce  $W$  s hodnotami  $W(\mathbf{r}_i)$ , apod.

Postup výpočtu  $\Phi(\mathbf{r}_i)$  ze získaného záznamu interferenční struktury  $I$  lze rozdělit do následujících kroků:

1. Určení oblasti  $L$  charakterizující stopu světelného svazku v rovině záznamu.
2. Vyloučení členů  $a(\mathbf{r}_i)$  a  $b(\mathbf{r}_i)$  z rovnice (3.3) pro získání  $I^*(\mathbf{r}_i)$ .
3. Výpočet  $\Phi(\mathbf{r}_i)$  a jeho navázání.

Postup ukazuje v přehledné formě diagram na obrázku 3.6.

Záznam intenzity světla je degradován šumem a v případě použití koherentního zdroje také zrnitostí, což může vést k nepřesnostem při různých úpravách a identifikaci určitých vlastností obrazu, a je proto výhodné zrnitost a šum předem potlačit. Artefakty tohoto typu představují ostré přechody v záznamu intenzity a ve Fourierově obrazu jsou reprezentovány vysokými frekvencemi, které je možné potlačit, a zpětnou Fourierovou transformací rekonstruovat obraz již bez degradace šumem a zrnitostí. Označme rekonstruovaný obraz  $I_r$ . Filtraci lze provést i diskrétní konvolucí původního signálu  $I$  a konvoluční masky  $h$  [23].

$$I_r = I * h, \quad (3.16a)$$

$$I_r(x_i, y_i) = \sum_{m \in \mathcal{O}} \sum_{n \in \mathcal{O}} h(x_i - x_m, y_i - y_n) I(x_m, y_n). \quad (3.16b)$$

Hodnota  $I_r(x_i, y_i)$  je tedy lineární kombinací vstupního signálu  $I$  v okolí  $\mathcal{O}$  pixelu  $(x_i, y_i)$  s koeficienty danými prvky konvoluční masky [27]. Konvoluční maska označuje matici, jejíž prvky aproximují zvolenou filtrační funkci. Uvedme zde dva typy masek použitých pro úpravu obrazu v rámci procesu rekonstrukce vlnoplochy. Označme  $h_g$  masku aproximující Gaussovu funkci s parametrem  $\sigma$ , která slouží pro potlačení vysokých pro-

<sup>4</sup>Kvantováním je zde myšlena diskretizace spojitého vstupního signálu [27].

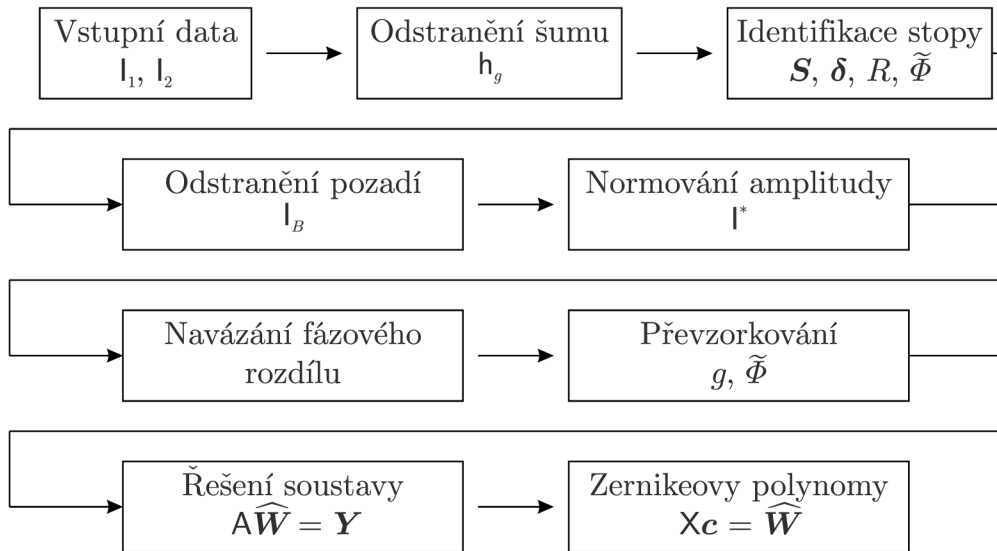
<sup>5</sup>Ve skutečnosti jde o záznam intenzity světla vynásobenou kvantovou účinností daného pixelu [75]. Zaznamenaná hodnota je navíc ve formě digitálního údaje příslušné stupnice [27]. Mezi záznamem a intenzitou však zůstává přímá úměra a pro zjednodušení dalšího výkladu nebudeme kvantovou účinnost a digitalizaci uvažovat.



storových frekvencí (angl. gaussian lowpass filter) a  $h_p$  masku obvyčejného průměrování [23, 27].

$$\mathbf{h}_g = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.17a)$$

$$\mathbf{h}_p = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.17b)$$



**Obrázek 3.6:** Proces určení fázové funkce a následné aproximace Zernikeovými polynomy.

### 3.3.1. Detekce stopy svazku

Nalezení tvaru a polohy stopy svazku v rovině záznamu, čili určení oblasti  $L$  (obrázek 1.2), je klíčové pro identifikaci množiny bodů  $\mathbf{r}_i$ , v kterých chceme vypočítat hodnoty  $\widehat{W}(\mathbf{r}_i)$ . Zároveň můžeme v rámci tohoto kroku určit vektor příčné posunutí  $\boldsymbol{\delta}$ . Úlohu lze řešit pro libovolný tvar stopy svazku, výhodnější však bude přizpůsobit postup určitému očekávanému tvaru vzhledem k příslušné aplikaci. Použitý systém pro testování mikroskopových objektivů, jak bude ukázáno v části 3.6, se skládá ze soustavy čoček a procházející světelný svazek tak bude ohraničen aperturními clonami jednotlivých optických členů, které mají většinou v případě čoček a mikroskopových objektivů kruhový tvar. Předpokládejme, že stopa v rovině záznamu bude rovněž kruhová. Pro její určení stačí nalézt střed  $\mathbf{S}$  a poloměr  $R$ , pro stopu příčně posunuté vlny ještě vektor posunutí  $\boldsymbol{\delta}$ .

K nalezení parametrů  $\mathbf{S}$ ,  $\boldsymbol{\delta}$  a  $R$  je možné aplikovat nelineární regresní analýzu. Identifikujme nejprve hranici oblasti  $L$  množinou bodů nalézajících se v její nejtěsnější blízkosti. Souřadnice těchto bodů použijeme pro nalezení regresní funkce  $f$  ve tvaru levé strany rovnice kružnice, jejíž pravá strana se rovná nule [61, kap. 5.9]:

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - S_{x_1} - x_3\delta_{x_1})^2 + (x_2 - S_{x_2} - x_3\delta_{x_2})^2 - R^2. \quad (3.18)$$

### 3.3. ZPRACOVÁNÍ INTERFEROGRAMU

$\mathbf{x}$  je vektor, obsahující proměnné  $x_j, j = 1, 2, 3$ .

$$x_1 \equiv x, \quad (3.19a)$$

$$x_2 \equiv y, \quad (3.19b)$$

$$x_3 = \begin{cases} 0 & \forall (x, y) \in L_{\psi_1}, \\ 1 & \forall (x, y) \in L_{\psi_2}. \end{cases} \quad (3.19c)$$

$x_3$  představuje identifikační proměnnou [4], která označuje, zda se daný bod nalézá na hranici příčně posunuté vlny. Řešíme tedy následující problém:

$$f(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}) \approx 0, \quad (3.20)$$

Pro vektor  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{x}_i$  platí

$$\mathbf{p} = (S_{x_1}, \delta_{x_1}, S_{x_2}, \delta_{x_2}, R)^T, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{x}_i = (x_{1,i}, x_{3,i}, x_{2,i}, x_{3,i}, 1), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.22)$$

Jelikož je regresní funkce (3.18) nelineární, je vhodné pro nalezení odhadu parametrů  $\mathbf{p}$  použít iterační metodu. V tomto případě byla aplikována Gaussova–Newtonova metoda podle postupu, který uvádí Bates [4]. Z vypočtených parametrů můžeme identifikovat  $L_{\psi_1}$  a  $L_{\psi_2}$  a také oblast, kde dochází k interferenci, danou jejich průnikem. Hodnoty  $\widehat{W}(\mathbf{r}_i)$  budeme počítat pouze v bodech  $\mathbf{r}_i \in L_{\psi_1}$ . Přítomnost artefaktů v obrazu (zrnitost, šum) může vést k nepřesné identifikaci hranice oblasti  $L$  a následně i špatnému odhadu parametrů  $\mathbf{p}$ . V rámci předzpracování byla použita filtrace maskou  $h_g$  s vhodně zvolenou velikostí a parametry Gaussovy funkce. Podrobný postup detekce stopy svazku včetně způsobu identifikace hranice oblasti a použití Gaussovy–Newtonovy iterační metody je uveden v dodatku B.

Hodnoty parametrů dostaneme v oboru reálných čísel. Fázové rozdíly  $\Phi_1$  a  $\Phi_2$  však po následné rekonstrukci získáme ve formě diskrétního pole hodnot. Abychom při sestavování vektoru pravých stran v soustavě rovnic (3.15) mohli vzít například člen  $\Phi_1(\mathbf{r}_i + \boldsymbol{\delta}_1)$ , kde  $\mathbf{r}_i$  označuje diskrétní souřadnici bodu daného pole hodnot, bude výhodné mít souřadnice posunutí  $\boldsymbol{\delta}_1$  a  $\boldsymbol{\delta}_2$  celočíselné, abychom opět získali souřadnici bodu daného pole. Problém vyřešíme zaokrouhlením souřadnic vektorů posunutí na nejbližší celé číslo a výpočtem nového pole fázového rozdílu  $\tilde{\Phi}_1$ , resp.  $\tilde{\Phi}_2$  podle následujících vztahů [67, 84]:

$$\tilde{\Phi}_1(\mathbf{r}_i) = \sqrt{\frac{(\tilde{\delta}_{x,1})^2 + (\tilde{\delta}_{y,1})^2}{(\delta_{x,1})^2 + (\delta_{y,1})^2}} \Phi_1(\mathbf{r}_i), \quad (3.23a)$$

$$\tilde{\Phi}_2(\mathbf{r}_i) = \sqrt{\frac{(\tilde{\delta}_{x,2})^2 + (\tilde{\delta}_{y,2})^2}{(\delta_{x,2})^2 + (\delta_{y,2})^2}} \Phi_2(\mathbf{r}_i). \quad (3.23b)$$

$$\tilde{\delta}_{l,m} = (\delta_{l,m} + 0,5)_{\text{int}}, \quad l = x, y, \quad m = 1, 2. \quad (3.23c)$$

### 3.3.2. Odstranění pozadí a normování amplitudy

Pro výpočet fázového rozdílu je třeba mít zaznamenané hodnoty intenzity ve tvaru (3.4), neboli v oboru hodnot  $\langle -1, 1 \rangle$ , což představuje eliminaci pozadí snímku (člen  $a$  v rovnici (3.3)) a normování amplitudy (člen  $b$  v rovnici (3.3)).

Existuje celá řada metod zpracování obrazu pro odstranění pozadí v záznamu interferenčních proužků. Odpovídají-li hodnoty pozadí nízkým prostorovým frekvencím ve Fourierově obrazu, pak je pro jeho eliminaci možné aplikovat filtr nízkých prostorových frekvencí (angl. highpass filter [23]) [68]. Další možností je použití metody BEMD (z angl. bidimensional empirical mode decomposition), která spočívá v rozložení snímku na konečný počet záznamů oscilací o různých frekvencích [5, 19]. Hodnoty intenzity je také možné proložit vhodným systémem funkcí a rekonstruované pozadí poté od zaznamenaného snímku odečíst [79]. Další jednoduché metody popisují Quiroga [60] a Ochoa [54].

Pro předzpracování záznamů interference byl použit postup odstranění pozadí, který popisuje Tien [79]. Naměřené hodnoty intenzity v oblasti interference se proloží regresní funkcí tvořenou součtem  $J$  Zernikových polynomů systému  $\{Z_j\}$  (1.10). Problém je analogický k (1.14), pouze pravou stranu rovnice (1.14a) tvoří vektor hodnot intenzity v bodech  $\mathbf{r}_i \in (L_{\psi_1} \cap L_{\psi_2})$ :

$$\mathbf{X}\mathbf{c} = \mathbf{I}, \quad (3.24a)$$

$$\mathbf{I} = (I(\mathbf{r}_1), I(\mathbf{r}_2), \dots, I(\mathbf{r}_N))^T. \quad (3.24b)$$

Pro získání stabilního řešení přeurčené soustavy rovnic (3.24a) je možné matici  $\mathbf{X}$  transformovat QR faktorizací [4, 61, kap. 30.13]:

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}\mathbf{Q} = \mathbf{R}_1\mathbf{Q}_1, \quad (3.25)$$

kde  $\mathbf{Q}_1$  je prvních  $J$  sloupců matice  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}_1$  je prvních  $J$  řádků matice  $\mathbf{R}$  (zbylé řádky jsou nulové). Vektor koeficientů  $\mathbf{c}$  vypočteme tímto způsobem:

$$\mathbf{c} = \mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{Q}_1^T\mathbf{I}. \quad (3.26)$$

Hodnoty pozadí  $B(\mathbf{r}_i)$  rekonstruujeme podle následujícího vztahu:

$$B(\mathbf{r}_i) = \sum_{j=1}^J c_j Z_j(\mathbf{r}_i), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.27)$$

Upravené hodnoty intenzity  $I_B$  získáme odečtením pozadí od původního snímku.

$$I_B = I - B. \quad (3.28)$$

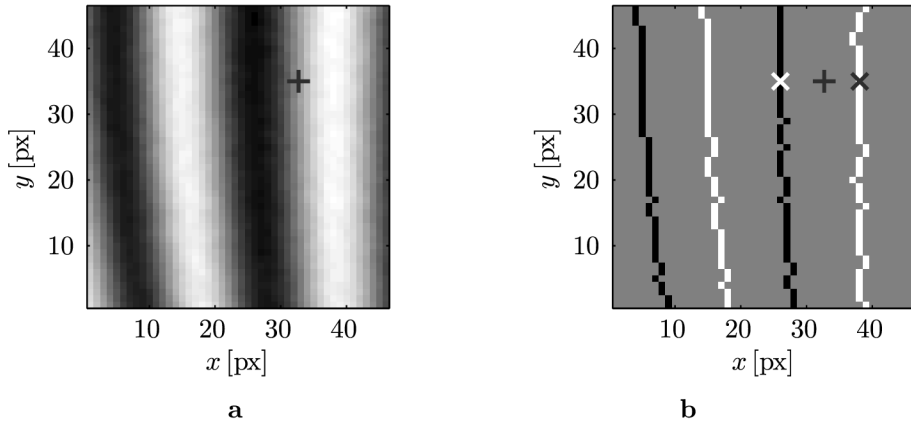
Při zpracování interferogramů byl vždy použit počet Zernikových polynomů  $J = 10$ .

Dalším krokem je normování amplitudy interferenčních proužků postupem, který uvádí Tay [77] a znázorňuje jej schéma na obrázku 3.7. Jednotlivé interferenční proužky nejprve identifikujeme nalezením lokálního extrému (maxima pro světlý proužek, minima pro tmavý proužek) v poli hodnot  $I_B$ . Průběh jednotlivých proužků pak určíme postupným „stopováním“ přilehlých extrémních hodnot. Získáme mapu (soubor bodů) s maximy a minimy interferenční struktury. Pro každý bod  $\mathbf{r}_i \in (L_{\psi_1} \cap L_{\psi_2})$  nalezneme nejbližší bod  $\mathbf{r}_{\max}$  ze souboru maxim, resp.  $\mathbf{r}_{\min}$  ze souboru minim, vezmeme hodnoty  $I_B(\mathbf{r}_i)$  v těchto třech bodech a určíme hodnotu intenzity  $I^*(\mathbf{r}_i)$ :

$$I^*(\mathbf{r}_i) = \frac{2[I_B(\mathbf{r}_i) - I_B(\mathbf{r}_{\min})]}{I_B(\mathbf{r}_{\max}) - I_B(\mathbf{r}_{\min})} - 1, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.29)$$

Vypočtením  $\arccos[I^*(\mathbf{r}_i)]$  získáme hodnotu nenavázaného fázového rozdílu  $\Phi(\mathbf{r}_i)$ .

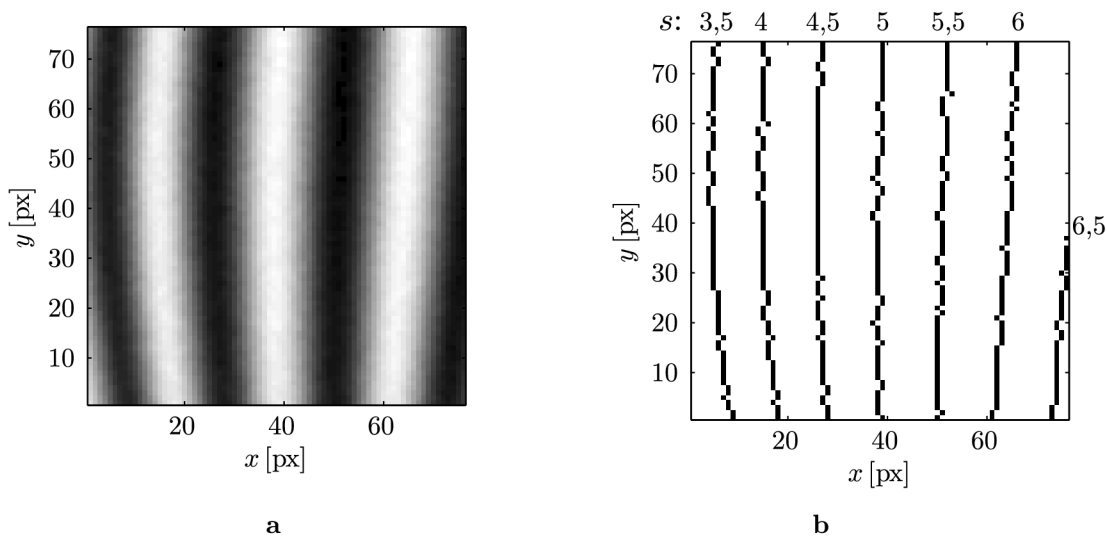
### 3.3. ZPRACOVÁNÍ INTERFEROGRAMU



**Obrázek 3.7:** Normování amplitudy. a – záznam interferogramu s vyznačeným bodem  $r_i$ , b – mapa maxim (bílé čáry) a minim (černé čáry) s vyznačeným bodem  $r_i$  a nejbližšími extrémů  $r_{\max}$  (černý křížek) a  $r_{\min}$  (bílý křížek).

#### 3.3.3. Navázání fázového rozdílu

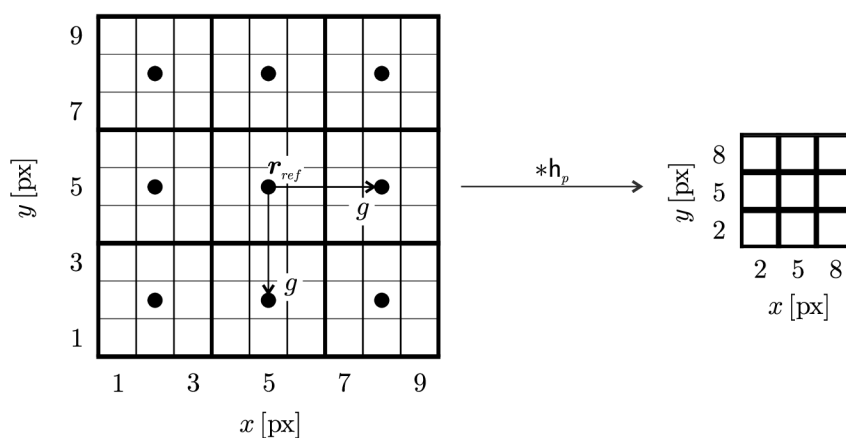
Pro navázání fázového rozdílu použijeme postup popsany v odstavci 3.2 a soubory bodů získané při normování amplitudy (viz odstavec 3.3.2), které označují průběh maxim a minim interferenčních proužků. Z této mapy vybereme libovolný proužek a označíme ho libovolným reálným číslem  $s$  (nejlépe kladným a celočíselným). Jde-li o světlý proužek, pak ostatní světlé proužky označíme příslušným celočíselným násobkem  $s$ , tmavé násobkem  $(s + 0,5)$ . Situace je znázorněna na obrázku 3.8. Interferenční řád fázového rozdílu ve zbylých bodech určíme ve shodě s postupem uvedeným v odstavci 3.2.



**Obrázek 3.8:** Navázání fázového rozdílu. a – záznam interferogramu, b – mapa extrémů a přiřazení interferenčního řádu  $s$  jednotlivým proužkům.

### 3.4. Převzorkování

Záznam intenzity světla detektorem s vysokou plošnou hustotou pixelů vede k práci s velkým datovým souborem a k vysoké časové náročnosti řešení určitých úloh. V případě celého procesu rekonstrukce vlnplochy jde o problémy (3.15) a (3.24a). Pokud se průběh hledané funkce  $W(\mathbf{r})$ , resp.  $a(\mathbf{r})$  mění velmi pomalu vzhledem k velikosti plochy, kde provádíme výpočet, můžeme datový soubor výrazně zredukovat převzorkováním, aniž bychom vnesli do výpočtu výraznou nepřesnost. Na obrázku 3.9 je znázorněno převzorkování vytvořením pravidelné čtvercové sítě se zvoleným referenčním bodem  $\mathbf{r}_{ref}$  a krokem  $g$ . Jednotlivým bodům nové sítě je přiřazena hodnota konvoluce původního signálu s konvoluční maskou  $h_p$ , jejíž velikost je rovna kroku  $g$ , jak je patrné z obrázku 3.9. Jde tedy o střední hodnotu okolních bodů původní sítě za účelem potlačení artefaktů v obrazu (šum, zrnitost, nefunkční pixely).



**Obrázek 3.9:** Převzorkování. V levé části je tenkými čarami znázorněna původní síť pixelů, tlustými čarami nová, hrubší. V pravé části je pak naznačeno nové pole hodnot s původními souřadnicemi.

Při převzorkování pole hodnot fázového rozdílu  $\Phi_1$ , resp.  $\Phi_2$  byla vždy za referenční bod  $\mathbf{r}_{ref}$  vzata poloha středu  $\mathbf{S}$  oblasti  $L_{\psi_1}$ . Po převzorkování je nutné přepočítat souřadnice vektorů posunutí vydělením krokem  $g$  a provést přepočet hodnot fázových rozdíků podle vztahů (3.23).

### 3.5. Aproximace fázové funkce

Pro aproximaci vypočtených hodnot fázové funkce  $\widehat{W}(\mathbf{r})$  byl použit systém Zernikových polynomů  $\{Z_j\}$ , definovaný v odstavci 1.3. Hodnoty koeficientů zvoleného počtu  $J$  Zernikových polynomů určíme použitím vztahů (1.14) a (1.15). Pro korektní výpočet jednotlivých prvků matice  $\mathbf{X}$  použijeme následující vztah:

$$X_{ij} = Z_j(\rho(\mathbf{r}_i - \mathbf{S}, R), \theta(\mathbf{r}_i - \mathbf{S})), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad \text{a} \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (3.30)$$

kde pro převod mezi kartézským a polárním souřadnicovým systémem platí:

$$\rho(\mathbf{r}, R) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}, \quad (3.31a)$$

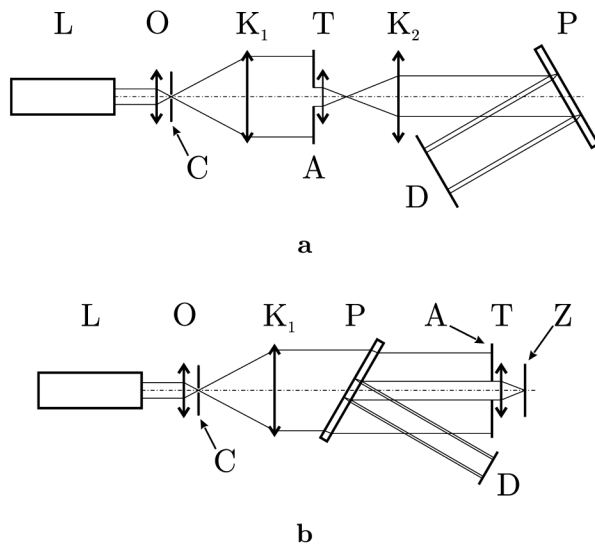
$$\theta(\mathbf{r}) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(-\frac{x}{y}\right), & x \geq 0 \quad \wedge \quad y \geq 0, \\ \operatorname{arctg}\left(-\frac{x}{y}\right) + \pi, & y < 0, \\ \operatorname{arctg}\left(-\frac{x}{y}\right) + 2\pi, & x < 0 \quad \wedge \quad y \geq 0. \end{cases} \quad (3.31b)$$

Jedná se o polární souřadnicový systém normovaný vzhledem k poloměru  $R$ .

Zaveďme dále notaci vyjadřující aproximaci pouze určitým počtem Zernikových polynomů. Pomocí  $W_{a-b}$ , resp.  $W_a$  budeme označovat aproximaci fázové funkce polynomy stupně  $a, a+1, \dots, b-1, b$ , resp. aproximaci pouze polynomem stupně  $a$ .  $\mathbf{W}_{a-b}$ , resp.  $\mathbf{W}_a$  pak bude označovat vektor hodnot aproximované fázové funkce příslušnými polynomy. Analogicky budeme označovat vektor koeficientů  $\mathbf{c}_{a-b}$ , resp.  $\mathbf{c}_a$  příslušející dané aproximaci.

### 3.6. Popis sestavy

Použitá sestava pro testování mikroskopových objektivů Murtyovým interferometrem je podobná uspořádání, které uvádí Murty [52]. Systém byl navržen ve dvou modifikacích pro záznam interferogramu na stínítko, případně fotografický film a pro záznam na digitální kameru. Jednotlivá uspořádání jsou schematicky znázorněna na obrázku 3.10. První



**Obrázek 3.10:** Schéma sestavy pro záznam stříhové interferometrie pro testování mikroskopových objektivů. a – sestava pro záznam na stínítko, b – záznam na kameru, A – aperturní clona testovaného objektivu, C – clonka, D – detektor,  $K_{1,2}$  – kolimační čočky, L – laser, O – objektiv v prostorovém filtru, P – planoparalelní deska, T – testovaný objektiv, Z – zrcadlo.

část je společná pro obě modifikace. Zdrojem světla je helium–neonový laser se střední vlnovou délkou 632,8 nm a délkou rezonátoru 12 cm. Laserový svazek prochází prostorovým filtrem, který tvoří mikroskopový objektiv O s dvacetinásobným zvětšením a clonka C o průměru přibližně 30  $\mu\text{m}$ . Po průchodu clonkou je světelný svazek kolimován čočkou  $K_1$  o ohniskové vzdálenosti 150 mm a poté dopadá na testovaný objektiv T. Pro záznam na stínítko je svazek po průchodu testovaným objektivem opět kolimován další čočkou

$K_2$  o ohniskové vzdálenosti 150 mm a dopadá na planparalelní desku P, od které se odraží obě vlny<sup>6</sup> a dopadají na stínítko nebo fotografický film D. Uspořádání je vhodné pouze pro objektivy s nízkou numerickou aperturou ( $NA < 0,1$ ), kdy nedochází k ořezu svazku aperturní clonou kolimující čočky. V případě uspořádání pro záznam na kameru je světelný svazek po průchodu objektivem odražen zpět rovinným zrcadlem Z, podruhé prochází testovaným prvkem a dopadá na planparalelní desku, která je umístěná před ním. Interference odražených svazků je pak snímána kamerou.

Požadovaný směr a velikost příčného posunutí druhé vlny je nastaveno otáčením a naklápěním planparalelní desky. Čočka, kolimující svazek vycházející z prostorového filtru, je zvolena tak, aby průměr výstupního svazku byl větší, než průměr vstupní pupily testovaného objektivu. Amplituda svazku vystupujícího z laseru a tedy i jeho intenzita má gaussovský profil, který bude mít i svazek transformovaný prostorovým filtrem a kolimační čočkou [65, kap. 3]. Pro získání interferující vlny s co nejmenší změnou amplitudy (důvod je uveden v odstavci 3.4) bude proto vhodné, pokud kolimovaný svazek rozšíříme a aperturní clonou A testovaného objektivu bude procházet pouze jeho středová část. Generování druhého posunutí je umožněno úchytem testovaného objektivu v kroužku s úhlovou stupnicí s možností otáčení kolem rotační osy souměrnosti kroužku. Pro všechny experimenty byla použita rotace o  $90^\circ$  a tedy výpočet fázové funkce z interferogramů s navzájem kolmým posunutím.

Oba měřicí systémy byly sestaveny na optické lavici. Pro zajištění stabilní polohy jednotlivých komponent byly použity aretovatelné magnetické držáky. Všechny komponenty byly k magnetickým držákům připevněny pomocí stojánků s polohovatelnou výškou. Úchyt testovaného objektivu navíc umožňoval jeho jemný posuv v rovině kolmé k optické ose a jeho naklápění. Úchyt zrcadla a kolimačních čoček  $K_1$  a  $K_2$  umožňoval posuv ve směru optické osy a v případě zrcadla také naklápění.

## 3.7. Výsledky experimentů

Odstavec 3.7.1 popisuje provedení numerického experimentu pro ověření platnosti použitého výpočetního postupu (diagram 3.6) a analýzy jeho přesnosti. Následující část 3.7.2 obsahuje výsledky měření objektivů používaných v koherenci řízeném holografickém mikroskopu. Veškeré výpočty byly provedeny v prostředí programu Matlab R2011a pomocí vlastních procedur.

### 3.7.1. Numerický experiment

Pro posouzení přesnosti výpočtu tvaru vlnoplochy postupem popsáným v předchozím výkladu byl navržen model stříhové interference vlny co nejvíce odpovídající reálnému záznamu interferogramu. Intenzitu v rovině detektoru můžeme simulovat následujícími vztahy:

$$I_{1,2}(\mathbf{r}) = A^2(\mathbf{r} - \mathbf{S}_{1,2})P(\mathbf{r} - \mathbf{S}_{1,2}) + A^2(\mathbf{r} - \mathbf{S}_{1,2} - \boldsymbol{\delta})P(\mathbf{r} - \mathbf{S}_{1,2} - \boldsymbol{\delta}) + 2A(\mathbf{r} - \mathbf{S}_{1,2})A(\mathbf{r} - \mathbf{S}_{1,2} - \boldsymbol{\delta}) \times \cos [W_v^{(1,2)}(\mathbf{r} - \mathbf{S}_{1,2}) - W_v^{(1,2)}(\mathbf{r} - \mathbf{S}_{1,2} - \boldsymbol{\delta})]P(\mathbf{r} - \mathbf{S}_{1,2})P(\mathbf{r} - \mathbf{S}_{1,2} - \boldsymbol{\delta}), \quad (3.32a)$$

<sup>6</sup>Uvnitř planparalelní desky dochází k vícenásobnému odrazu, intenzita těchto vln je však oproti dvěma hlavním zanedbatelná.

### 3.7. VÝSLEDKY EXPERIMENTŮ

$$A(\mathbf{r}) = \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}|^2}{2\sigma^2}\right) + C_1, \quad (3.32b)$$

$$W_v^{(1)}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^J c_{v,j} Z_j(\rho(\mathbf{r}, R), \theta(\mathbf{r})), \quad (3.32c)$$

$$W_v^{(2)}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^J c_{v,j} Z_j(\rho(\mathbf{r}, R), \theta(\mathbf{r}) - \pi/2), \quad (3.32d)$$

$$P(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (3.32e)$$

Pro polární souřadnice  $\rho(\mathbf{r}, R)$  a  $\theta(\mathbf{r})$  platí vztahy (3.31). Amplitudová funkce  $A$  je vyjádřena Gaussovou funkcí s rozptylem  $\sigma^2$  a konstantním posunutím  $C_1$ . Vstupní fázová funkce  $W$  je generována součtem Zernikových polynomů se zvolenými koeficienty. Indexy 1,2 u intenzity  $I$ , fázové funkce  $W_v$  a poloze středu stopy  $\mathbf{S}$  označují, zda se jedná o případ, kdy je vlnoplocha potočena o úhel  $\pi/2$ , jak je patrné z argumentu  $Z_j$  v rovnici (3.32d). Tímto způsobem je simulováno generování druhého interferogramu s posunutím v kolmém směru vzhledem k prvnímu uspořádání, aniž by se změnila vzájemná poloha obou stop, což odpovídá návrhu experimentu, kde je druhý interferogram získán pootočením objektivu. Může však dojít k malému posunu celého interferogramu v rovině detektoru, a proto jsou indexy připsány i k poloze středu  $\mathbf{S}$ .  $R$  označuje poloměr stopy světelného svazku. Pro generování fázové funkce jsou použity Zernikovy polynomy tvořící ortogonální systém na jednotkovém kruhu, proto je pro výpočet fázové funkce polární souřadnice  $\rho$  normována vzhledem k  $R$ .

Dále byly vytvořeny matice  $l_{1,2}$  s prvky  $l_{1,2}(\mathbf{r}_i)$  s kartézským souřadnicovým systémem zvoleným tak, aby souřadnice prvku v levém sloupci a v dolním řádku byla (1, 1). Pořadí sloupců ve směru zleva doprava přímo určuje  $x$ -ovou sořadnici a pořadí řádků ve směru zdola nahoru určuje  $y$ -ovou sořadnici. Takto zvolenou délkovou jednotku označíme px. Známe-li rozměry pixelu, můžeme délkovou jednotku px převést na skutečné měřítko. Pro numerický experiment to však není důležité.

Získané matice byly poté modifikovány následujícím způsobem:

$$l_{m,1,2} = \left\{ C_2 \frac{l_{1,2} * h_g}{\max(l_{1,2} * h_g)} + C_3 + C_4 G + 0,5 \right\}_{\text{int}}. \quad (3.33)$$

Při analýze skutečných snímků nebyl zjištěn ostrý přechod intenzity na rozhraní osvětlené plochy, vymežující stopu svazku, a okolního neosvětleného pole, přestože je světelná vlna ohraňována aperturními nebo jinými clonami příslušných optických prvků měřicího systému. Příklad neostrého přechodu naměřené intenzity ukazuje obrázek B.2. Toto "roz-mazání" můžeme simulovat konvolucí pole intenzity  $l_{1,2}$  s filtrační maskou  $h_g$ . Konstanta  $C_2$  mění rozsah hodnot intenzity a konstanta  $C_3$  má význam rovnoměrného pozadí. Matice  $G$  slouží pro generování náhodného gaussovského šumu [23, kap. 5]. Má stejný počet řádků a sloupců jako matice  $l_{1,2}$  a její prvky obsahují náhodná čísla s normální rozdělením. Konstanta  $C_4$  mění jejich rozsah. Každý prvek je zaokrouhlen na nejbližší menší přirozené číslo. Ve stejné formě bychom získali záznam intenzity ze skutečného snímku. Hodnoty

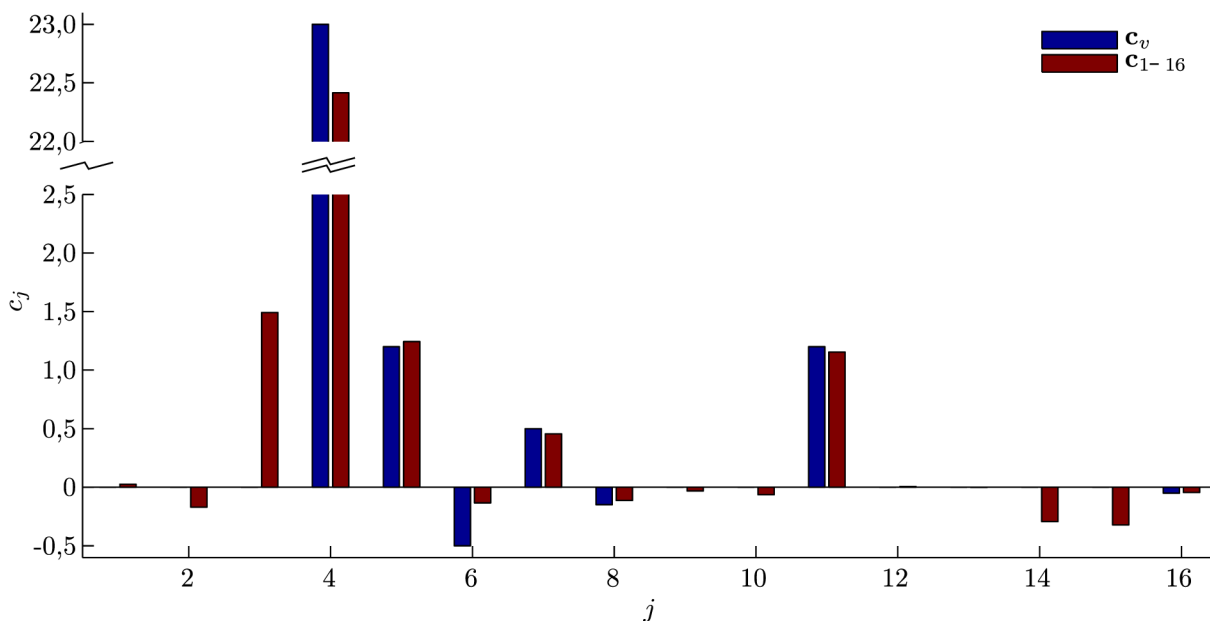


digitálního záznamu budeme označovat arbitrární jednotkou se zkratkou AU (z angl. arbitrary unit). Jak již bylo uvedeno v odstavci 3.3, jsou v přímé úměře<sup>7</sup> se skutečnými hodnotami intenzity dopadajícího světla, jejichž znalost není pro určení tvaru vlnoplochy nutná.

Vstupní parametry simulované interference jsou uvedeny v tabulce 3.1, hodnoty koeficientů Zernikových polynomů, označené jako  $c_{v,j}$ , pro vytvoření modelu fázové funkce znázorňují modré sloupce na obrázku 3.11. Vypočítané snímky interferogramů a získané průběhy fázových funkcí v normovaných souřadnicích ukazuje obrázek 3.12.

**Tabulka 3.1:** Vstupní parametry pro simulaci stříhové interference.

Velikost obrazu	(351 × 351) px	$A$	$\sigma$	0,8 px	
$L_{\psi_{1,2}}$	$S_1$	(161, 176) px	$C_1$	5 AU	
	$S_2$	(161, 176) px	$C_2$	27550 AU	
	$\delta$	(18, 3) px	$l_m$	$C_3$	6200 AU
	$R$	100 px		$C_4$	577 AU
$h_g$	velikost	10 px			
	$\sigma$	1,5 px			

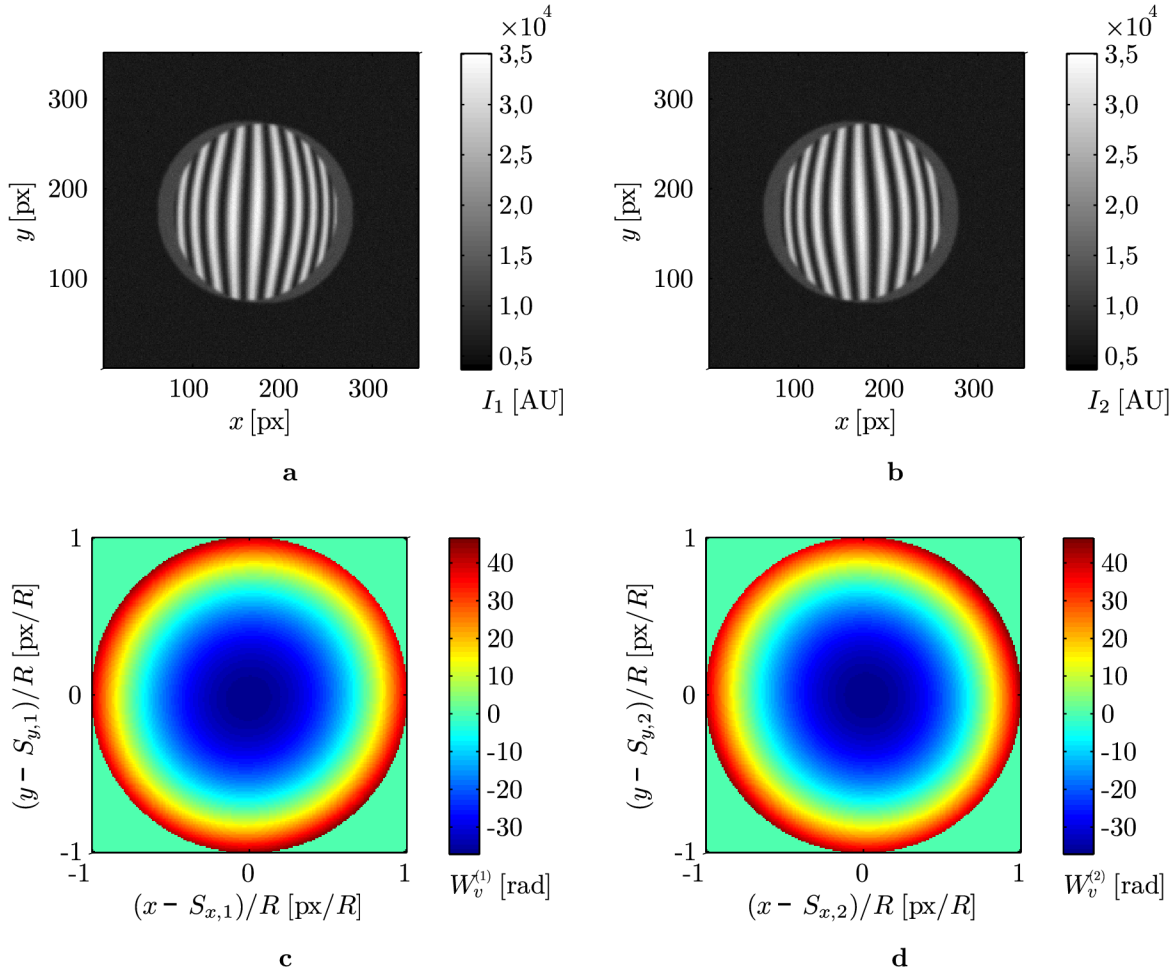


**Obrázek 3.11:** Srovnání koeficientů Zernikových polynomů.  $c_v$  označuje vektor vstupních koeficientů,  $c_{1-16}$  označuje vektor koeficientů aproximace šestnácti polynomy.

Prvním krokem je detekce stopy svazku podle postupu, uvedeném v odstavci 3.3.1 a dodatku B. Tabulka 3.2 uvádí vypočtené hodnoty parametrů  $\mathbf{p}$  (3.21) pro oba interferogramy. Prvky derivační matice  $X$  (B.2c) jsou pro každý interferogram různé, což má za následek odlišnost konfidenčních intervalů odpovídajících si parametrů v tabulce 3.2.

<sup>7</sup>Přímá úměra platí pouze v omezeném rozsahu hodnot intenzity světla, který je určen fyzikálními vlastnostmi detektoru.

### 3.7. VÝSLEDKY EXPERIMENTŮ



**Obrázek 3.12:** Vstupní data pro analýzu přesnosti výpočtu fázové funkce. a – interferogram  $I_1$ , b – interferogram  $I_2$ , c – fázová funkce  $W_v^{(1)}$ , d – fázová funkce  $W_v^{(2)}$ .

Porovnání vypočtených parametrů se vstupními údaji prostřednictvím testačních charakteristik, popsanych v dodatku C, je uvedeno v tabulce 3.3. Vypočtené parametry pro oba interferogramy by se měly v ideálním případě shodovat se vstupními hodnotami a také navzájem, neboť vstupní parametry byly pro oba interferogramy zvoleny shodně. Podle

**Tabulka 3.2:** Výsledky určení parametrů stopy svazku pro oba interferogramy. Získané hodnoty parametrů jsou uvedeny s konfidenčními intervaly s příslušnou hladinou spolehlivosti a v jednotkách px.

	Vstupní parametry	Vypočtené parametry	
	$\mathbf{p}_0$	$\mathbf{p}_{I_1}, \alpha = 0,05$	$\mathbf{p}_{I_2}, \alpha = 0,05$
$S_{x,1,2}$	161	$159,7 \pm 0,9$	$160,0 \pm 0,7$
$\delta_x$	18	$18,8 \pm 1,7$	$18,1 \pm 1,3$
$S_{y,1,2}$	176	$174,9 \pm 0,4$	$174,9 \pm 0,3$
$\delta_y$	3	$3,1 \pm 0,6$	$3,1 \pm 0,4$
$R$	100	$99,6 \pm 0,7$	$99,9 \pm 0,5$

výsledků testu pro celý soubor parametrů je mezi vstupními a vypočtenými hodnotami signifikantní rozdíl na dané hladině významnosti pro oba interferogramy. Při vzájemném

**Tabulka 3.3:** Výsledky testování hypotéz o rovnosti parametrů. Stručný popis jednotlivých testů je uveden v dodatku C.

Test hypotézy $H_0: \mathbf{p}_{1,2} = \mathbf{p}_0$ na hladině významnosti $\alpha = 0,05$				
$T_{1,kr}$	$T_1$			
	$H_0: \mathbf{p}_{1_1} = \mathbf{p}_0$	$H_0: \mathbf{p}_{1_2} = \mathbf{p}_0$	$H_0: \mathbf{p}_{1_1} = \mathbf{p}_{1_2}$	
2,36	17,20	32,14	0,31	

Test hypotézy $H_0: p_i = p_{0,i}$ na hladině významnosti $\alpha = 0,05$				
Parametr	$T_{2,kr}$	$T_2$		
		$H_0: p_{i,1_1} = p_{i,0}$	$H_0: p_{i,1_2} = p_{i,0}$	$H_0: p_{i,1_1} = p_{i,1_2}$
$S_x$	2,00	2,20	2,38	0,42
$\delta_x$		0,07	0,06	0,64
$S_y$		4,30	5,45	0,24
$\delta_y$		0,38	0,28	0,18
$R$		0,88	0,37	0,60

srovnání signifikantní rozdíl zjištěn nebyl, což indikuje, že chyba, které se při odhadu parametrů dopouštíme, se při analýze různých interferogramů nemění. Tabulka 3.3 dále ukazuje srovnání jednotlivých parametrů. Signifikantní rozdíl na dané hladině významnosti byl zjištěn v případě  $x$ -ové a  $y$ -souřadnice středu stopy opět pouze ve srovnání se vstupními hodnotami. Podle hodnot uvedených v tabulce 3.2 je odchylka mezi vstupní a vypočtenou souřadnicí přibližně 1 px, což vzhledem k nominálnímu rozměru stopy 100 px představuje pouze 1%. Pro určení polohy a poloměru stopy svazku a příčného posunutí je tedy možné použít postup popsany v odstavci 3.3.1.

Pomocí určených hodnot parametrů  $\mathbf{S}_{1,2}$ ,  $\boldsymbol{\delta}$  a  $R$  je možné z interferenční struktury rekonstruovat fázový rozdíl  $\Phi_{1,2}(\mathbf{r}_i)$  a přistoupit k výpočtu tvaru vlnoplochy postupem uvedeným v odstavci 3.2 a dodatku A. Tabulka 3.4 udává základní informace o výpočtu provedeném na počítači s dvoujádrovým procesorem s taktovací frekvencí 3 GHz, paměť 4 GB RAM a 64-bitovým operačním systémem. Vypočítaný průběh fázové funkce ukazuje obrázek 3.14a.

**Tabulka 3.4:** Základní údaje o výpočtu tvaru vlnoplochy.

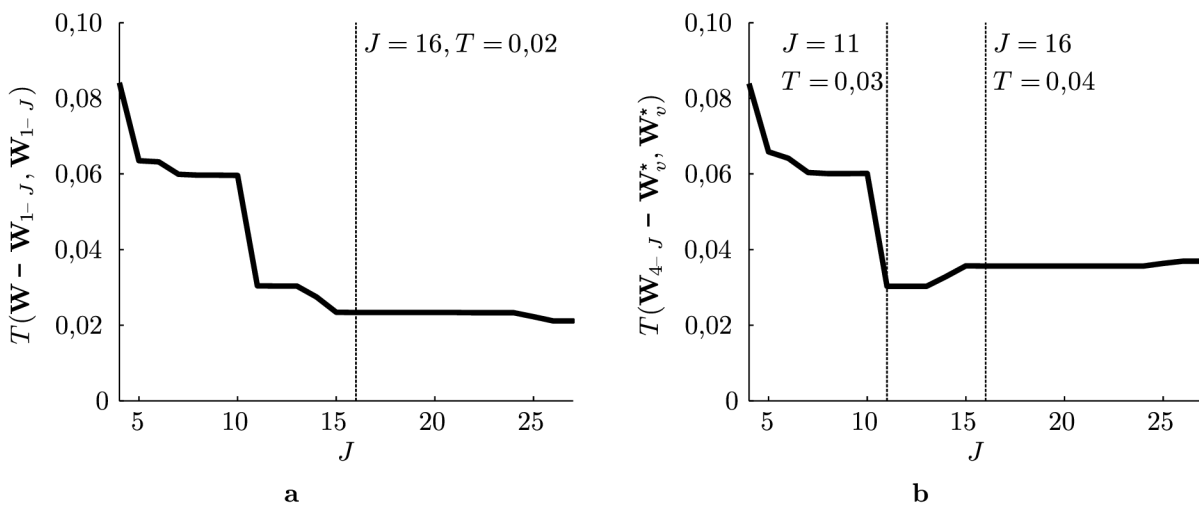
Počet rovnic	31205
Požadovaná přesnost	$\varepsilon = 10^{-10}$
Počet iterací	308
Doba výpočtu	$\tau = 22,7$ s

Nyní analyzujeme vypočítaný průběh vlnoplochy aproximací Zernikovými polynomy. Fázová funkce byla proložena postupně čtyřmi až třiceti Zernikovými polynomy na kruhové ploše v polárním souřadnicovém systému, normovaném vzhledem k poloměru  $R$ . Graf na obrázku 3.13a ukazuje závislost srovnávací statistiky  $T$  na počtu polynomů  $J$  použitých pro aproximaci fázové funkce.  $\widehat{\mathbf{W}}$  zde označuje vektor hodnot určených výpočtem metodou sdružených gradientů. V grafu je vyznačena svislou čarou hodnota pro  $J = 16$ . Dalším zvýšením počtu polynomů již nezískáme výrazně přesnější aproximaci a optické vady, dané koeficienty polynomů, můžeme pro stupně  $17 \leq j \leq 30$  vzhledem k ortogonálním vlastnostem systému Zernikových polynomů považovat za zanedbatelné. Poznatek je v souladu se vstupními daty numerického experimentu, kdy nejvyšší nenulový

### 3.7. VÝSLEDKY EXPERIMENTŮ

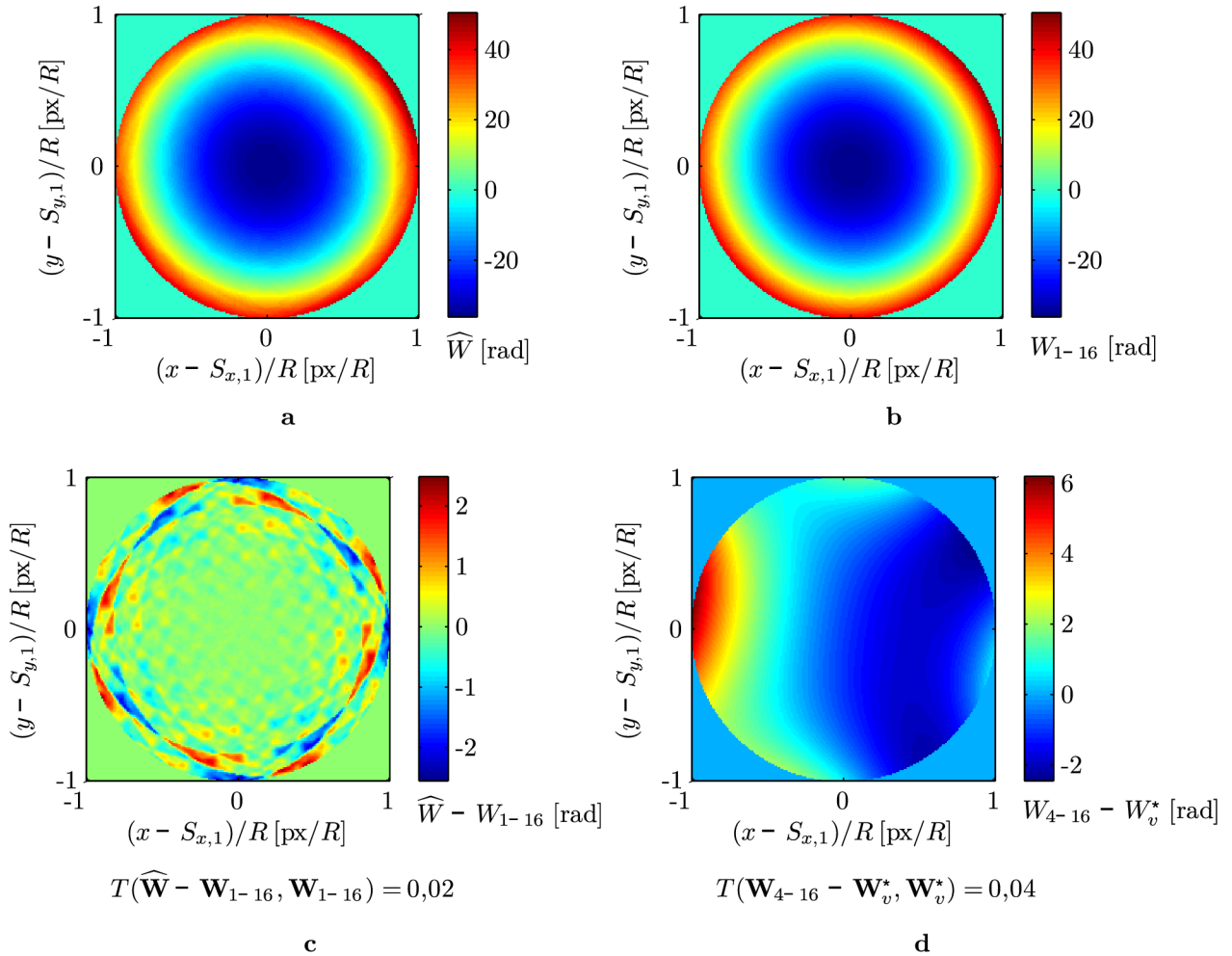
koeficient byl zvolen pro  $j = 16$ . Tento přístup můžeme využít při zjišťování stupňů optických vad studované vlnoplochy. V momentě, kdy dochází k malému zlepšení ve zpřesnění aproximace, výpočet přerušíme a vady vyšších stupňů budeme považovat za zanedbatelné.

Graf 3.13b ukazuje hodnoty statistiky  $T$  srovnávající získané aproximace se vstupními hodnotami fázové funkce definované vztahem (3.32c). V grafu a dále také na obrázku 3.14 je vstupní funkce označena  $W_v$ . Při výpočtu hodnot této funkce byly zanedbány první tři Zernikovy polynomy, které postrádají význam klasických optických vad. Z matematického hlediska jde o rovinné plochy a jím příslušné vlnoplochy není možné stříhovou interferometrií jednoznačně určit. Označme tuto funkci  $W_v^*$ . Pokud budeme určovat optické vady výše uvedeným postupem, může nastat situace, kdy zvolený počet polynomů (zde 16) pro aproximaci vlnoplochy nebude představovat nejpřesnější odhad, který určuje minimální hodnotu  $T$  (zde pro  $J = 11$ , jak je patrné z grafu).



**Obrázek 3.13:** Závislost srovnací statistiky  $T$  na počtu Zernikových polynomů  $J$  použitých pro aproximaci vlnoplochy. a – srovnání aproximací s hodnotami získanými výpočtem metodou sdružených gradientů. Svislou čarou je vyznačena mez, kdy při dalším zvýšení počtu polynomů nezískáme výrazně přesnější aproximaci. b – srovnání aproximací se vstupními hodnotami. Označena je hodnota jako v prvním grafu a také minimální hodnota  $T$ .

Aproximace šestnácti Zernikovými polynomy je ukázána na obrázku 3.14b. 3.14c znázorňuje mapu odchylek mezi výpočtem a touto aproximací a obrázek 3.14d zobrazuje mapu odchylek mezi vstupními hodnotami a aproximací v obou případech se zanedbáním prvních tří polynomů. Srovnání hodnot obou souborů koeficientů ukazuje graf na obrázku 3.11. Při analýze testu hypotézy o rovnosti jednotlivých parametrů byl zjištěn signifikantní rozdíl na hladině významnosti  $\alpha = 0,05$  pro všechny koeficienty. Největší procentuální odchylka přibližně 70% byla zaznamenána při chybném určení stupně optické vady odpovídající primárnímu astigmatismu  $0^\circ$  ( $Z_6 \propto \rho^2 \cos 2\theta$ ). Zjištění nenulových hodnot koeficientů polynomů  $Z_{14}$  a  $Z_{15}$  úměrných  $\rho^4 \cos 4\theta$ , resp.  $\rho^4 \sin 4\theta$  indikuje chybu při výpočtu fázové funkce nebo zpracování interferogramu. Příčinu této nepřesnosti by bylo možné zjistit nastavením různých vstupních parametrů (například  $c_{v,j}$ ) a sledováním změny vypočtených koeficientů. Procentuální odchylky ostatních koeficientů se pohybují do 10%.



**Obrázek 3.14:** Výsledky výpočtu fázové funkce. a – hodnoty fázové funkce  $\widehat{W}$  získané výpočtem, b – aproximace vypočtené fázové funkce Zernikovými polynomy, c – rekonstrukce odchylek mezi vypočtenými a aproximovanými hodnotami, d – rekonstrukce odchylek mezi aproximovanými a vstupními hodnotami (vstupní fázová funkce je vyobrazena na obrázku 3.12c).

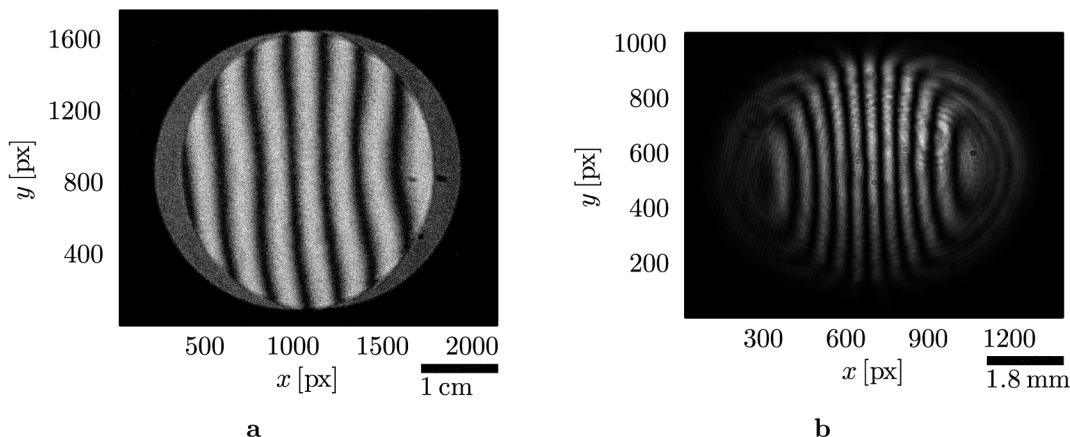
Vzhledem k této skutečnosti a zejména nízké hodnotě kritéria, srovnávající vstupní a rekonstruované hodnoty fázové funkce (přibližně rovné 0,04), byla vypracovaná procedura použita pro rekonstrukci fázové funkce ze získaných záznamů stříhových interferogramů.

### 3.7.2. Výsledky měření objektivů

Následující část uvádí výsledky měření mikroskopových objektivů používaných v holografickém mikroskopu druhé generace na Ústavu fyzikálního inženýrství v Brně [83] a diskusi použití sestav, popsaných v části 3.6. Pro sestavu na obrázku 3.10a byl jako stínítko použit bílý průsvitný papír a pro vyfocení získaného obrazu digitální fotoaparát Lumix FZ30 s počtem obrazových bodů  $3248 \times 2160$ , s manuálním nastavením průměru clony, doby expozice a zaostření, se samospouští a stabilizátorem obrazu. Pro druhé uspořádání dle 3.10b byla použita CCD kamera Softhard MR285\_BH s počtem obrazových bodů  $1376 \times 1038$

### 3.7. VÝSLEDKY EXPERIMENTŮ

a rozměry jednoho pixelu  $6,45 \times 6,45 \mu\text{m}$ . Příklady nasnímaných interferogramů oběma způsoby jsou uvedeny na obrázku 3.15.



**Obrázek 3.15:** Příklady nasnímaných stříhových interferogramů s uvedeným reálným měřítkem. a – interferogram pro objektiv P1  $40\times/0,60$ , fotografie obrazu na stínítku. b – interferogram pro objektiv  $10\times/0,25$ , záznam na kameru.

Výsledky pro každou testovanou sadu objektivů jsou uvedeny ve formě tabulky, která obsahuje základní parametry objektivu – hodnotu numerické apertury NA, zvětšení M a korekci optických vad. Dále je uvedena doba expozice a v případě záznamu na stínítko také použitá clona fotoaparátu, vyjádřená clonovým číslem. Velikost stopy je pro rámcovou představu charakterizována hodnotou  $\bar{R}$ , označující aritmetický průměr poloměrů stop ze všech interferogramů v rámci dané sady. Výpočet vlnoplochy je specifikován uvedením hodnoty parametru  $\mu$ , vystupujícím v regularizačním členu (3.11), požadovaná přesnost  $\varepsilon$  pro řešení soustavy rovnic metodou sdružených gradientů (viz dodatek A) a krok  $g$ , použitý pro převzorkování.

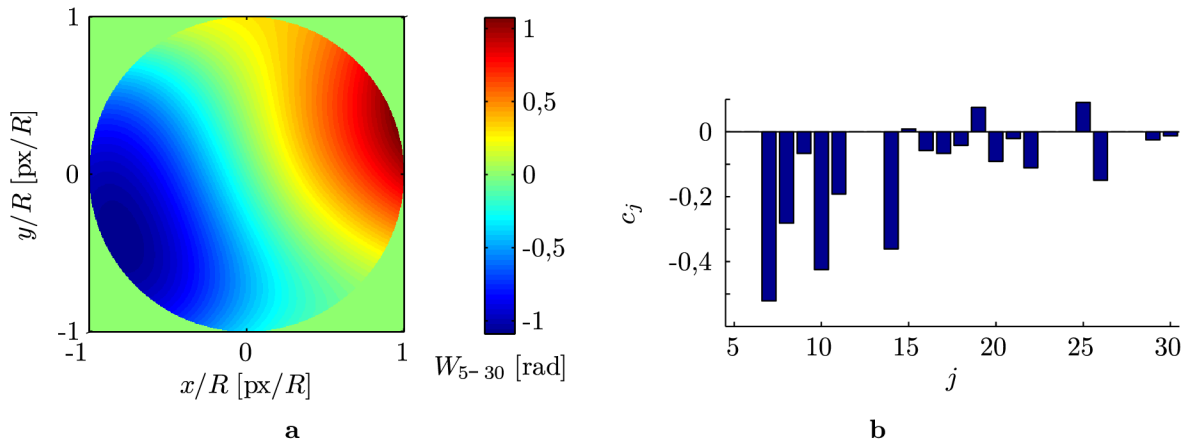
Získané průběhy fázových funkcí  $\widehat{W}$  byly aproximovány prvními 30 Zernikovými polynomy. Jak již bylo zmíněno v předchozí části, polynomy stupně jedna až tři nerepresentují optické vady. Polynom čtvrtého stupně vyjadřuje rovnici sférické plochy. Poloměr sférické vlny můžeme regulovat posunem objektivu nebo kolimační čočky  $K_2$  podél optické osy, a proto ani tento člen nebudeme považovat za optickou vadu. Navíc pro získání interferenční struktury málo aberované vlnoplochy je nutné generovat sférickou vlnu. Ve skutečnosti tedy měříme odchylky od vlny s ideální sférickou vlnoplochou.

Pro srovnání objektivů tedy použijeme fázovou funkci  $W_{5-30}$  na kruhové ploše se středem v bodě (0,0) v normovaných souřadnicích vzhledem k poloměru  $R$ , zjištěném při identifikaci stopy svazku. Přestože mají objektivы v rámci jedné sady stejné parametry, vypočtený poloměr stopy se při zpracování výsledků lišil řádově v jednotkách pixelů. Rekonstrukcí fázové funkce v normovaných souřadnicích vliv odlišného určení poloměru pro vzájemné srovnání potlačíme. Pro každý objektiv je vyobrazena fázová funkce  $W_{5-30}$ , spočítán aberční rozptyl  $\sigma_W^2$  jako suma kvadrátů koeficientů  $c_j, j = 5, 6, \dots, 30$  a každá dvojice objektivů v rámci jedné sady, označených indexy  $l$  a  $m$ , je porovnána použitím kritéria  $T_{lm} = T(\mathbf{W}_{5-30,l} - \mathbf{W}_{5-30,m}, \mathbf{W}_{5-30,m})$ . Formou grafu jsou znázorněny hodnoty koeficientů Zernikových polynomů pro každý objektiv.

Nejprve se věnujme záznamu stříhové interference použitím sestavy na obrázku 3.10a. Příklad stříhového interferogramu je na obrázku 3.15a. Před uvedením výsledků měření



mikroskopových objektivů diskutujeme vliv ostatních optických prvků na přesnost určení aberací způsobených pouze testovaným objektivem. Nejprve ověříme, zdali na testovaný objektiv skutečně dopadá rovinná vlna a pokusme se odhadnout kvalitu použité planoparalelní desky odstraněním testovaného objektivu a čočky  $K_2$ . Získáme tak stříhovou interferenci vlny transformované čočkou  $K_1$ . Nerovnoběžnost stěn desky nebo odchylky od rovinné vlnoplochy by se projevíly vznikem interferenční struktury v oblasti překryvu obou vln. Jemným posuvem čočky  $K_1$  podél optické osy bylo docíleno získání rovnoměrného průběhu intenzity v oblasti překryvu obou vln. Případné odchylky jsou pod hranicí zjistitelnosti použitou metodou a na určení aberací, způsobených pouze testovaným objektivem, má čočka  $K_1$  a planoparalelní deska velmi malý vliv. Dále se věnujeme kolimační čočce  $K_2$ . Předpokládejme, že z prostorvého filtru se šíří vlna s ideální sférickou vlnoplochou, kterou transformuje kolimační čočka  $K_2$ , jíž umístíme na místo čočky  $K_1$ . Metodou stříhové interferometrie můžeme změřit odchylky fázové funkce od ideální sférické plochy. Obrázek 3.16a zobrazuje rekonstrukci fázové funkce  $W_{5-30}$ , aproximující vypočtené hodnoty  $\widehat{W}$  z interferogramů zaznamenaných na stínítko. Graf 3.16b ukazuje hodnoty příslušných koeficientů Zernikových polynomů.



**Obrázek 3.16:** Fázová funkce kolimační čočky  $K_2$ . a – rekonstrukce fázové funkce  $W_{5-30}$ , b – hodnoty koeficientů příslušných polynomů.

Kritérium  $T(\mathbf{W}_{5-30} - \mathbf{W}_4, \mathbf{W}_4)$ , srovnávající hodnoty fázové funkce odpovídající sférické a aberované vlnoploše, činí 0,01. Pokud pro měřenou vlnoplochu dostaneme hodnotu kritéria menší nebo přibližně rovnou 0,01, následná interpretace optických vad studovaného prvku může být značně obtížná, neboť vliv optických vad kolimační čočky může převažovat. Proto je v následujících tabulkách pro každý objektiv uvedena hodnota  $T(\mathbf{W}_{5-30} - \mathbf{W}_4, \mathbf{W}_4)$ , dále označená jako  $T_{sf}$ .

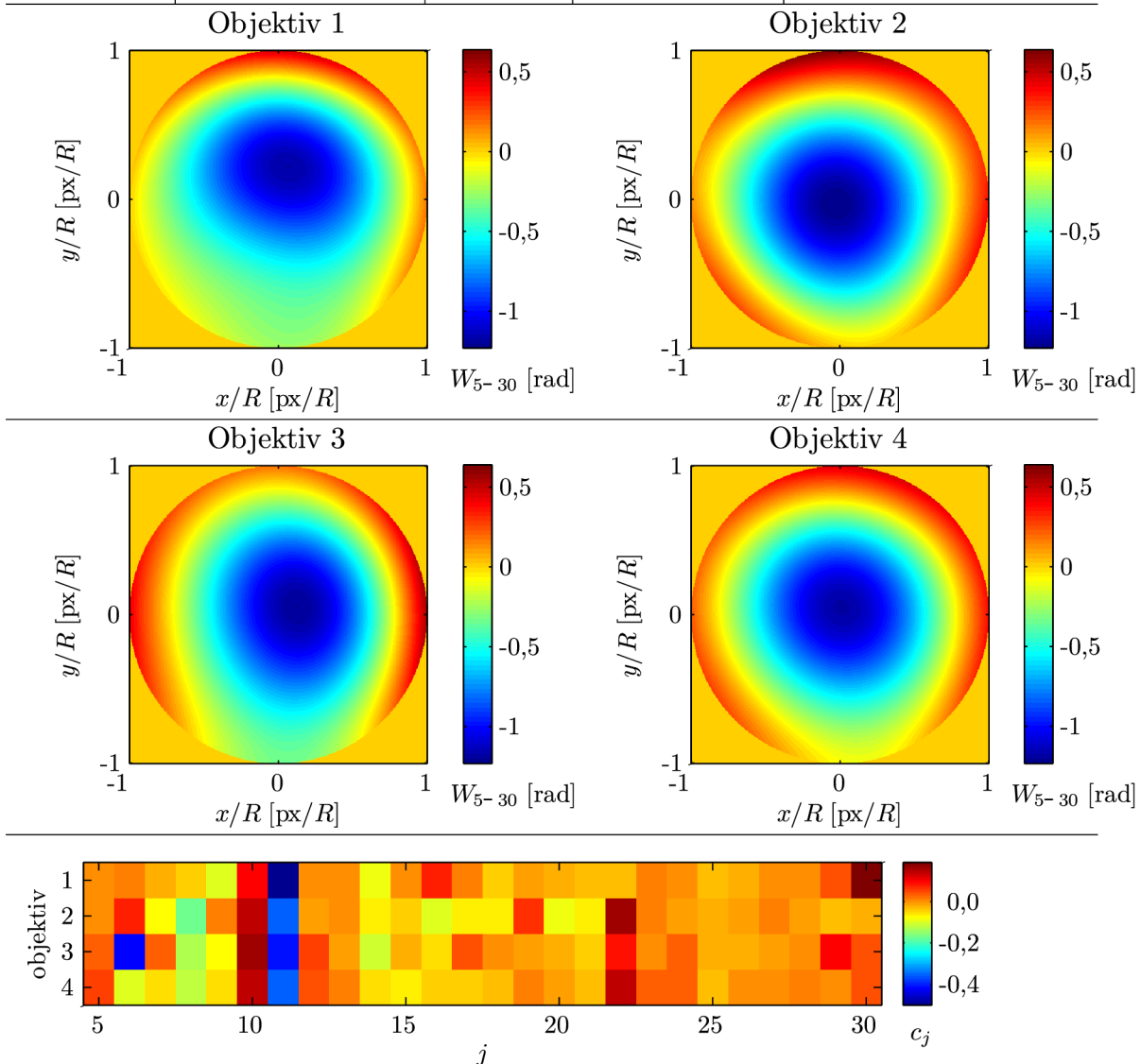
Tabulky 3.5, 3.6 a 3.7 ukazují výsledky měření vlnoplochy mikroskopových objektivů záznamem na stínítko. Jedná se o objektivy korigované na konečnou vzdálenost a pro laboratorní sklíčko o tloušťce 0,17 mm. Diskutujeme nyní použitelnost této metody pro srovnávání studovaných optických prvků. Je důležité připomenout, že numerická apertura uvedených objektivů je oproti kolimační čočce značně vysoká a měříme pouze část vlnoplochy, ohraničenou aperturní clonou kolimační čočky. I přes tento fakt byly mezi jednotlivými objektivy se stejnými parametry zjištěny rozdíly ve tvaru vlnoploch a rozdíly v hodnotách koeficientů Zernikových polynomů. Výpočty kritéria  $T_{sf}$  ukazují, že nezanedbatelný vliv na aberaci vlnoplochy má vedle kolimační čočky i testovaný objektiv, neboť

### 3.7. VÝSLEDKY EXPERIMENTŮ

vypočítané hodnoty jsou větší než hodnota uvedená v předchozím odstavci. Pomocí rozptylu  $\sigma_W^2$  můžeme vybrat objektiv s nejmenšími stupni optických vad a použitím kritéria  $T_{lm}$  vybrat z dané sady takovou dvojici objektivů, které se co do tvaru vlnoplochy nejvíce shodují. Například pro sadu Plan 60×/0,85 (tabulka 3.5) jde o objektivy 2 a 4.

**Tabulka 3.5:** Výsledky měření vlnoplochy pro objektivy Plan 60×/0,85 záznamem na stínítko.

Objektiv		Záznam / stopa		Výpočet		$\sigma_W^2$		$T_{sf}$	$T_{lm}$				
NA	0,85	expozice	60 s	$\mu$	1	1	0,33	0,02	$l \backslash m$	1	2	3	
M	60×	clona	f/2,8	$\varepsilon$	$10^{-10}$	2	0,26	0,02		4	0,30	0,14	0,24
kor.	Plan	$\tilde{R}$	780 px	$g$	6 px	3	0,45	0,02		3	0,32	0,34	
						4	0,22	0,02		2	0,39		

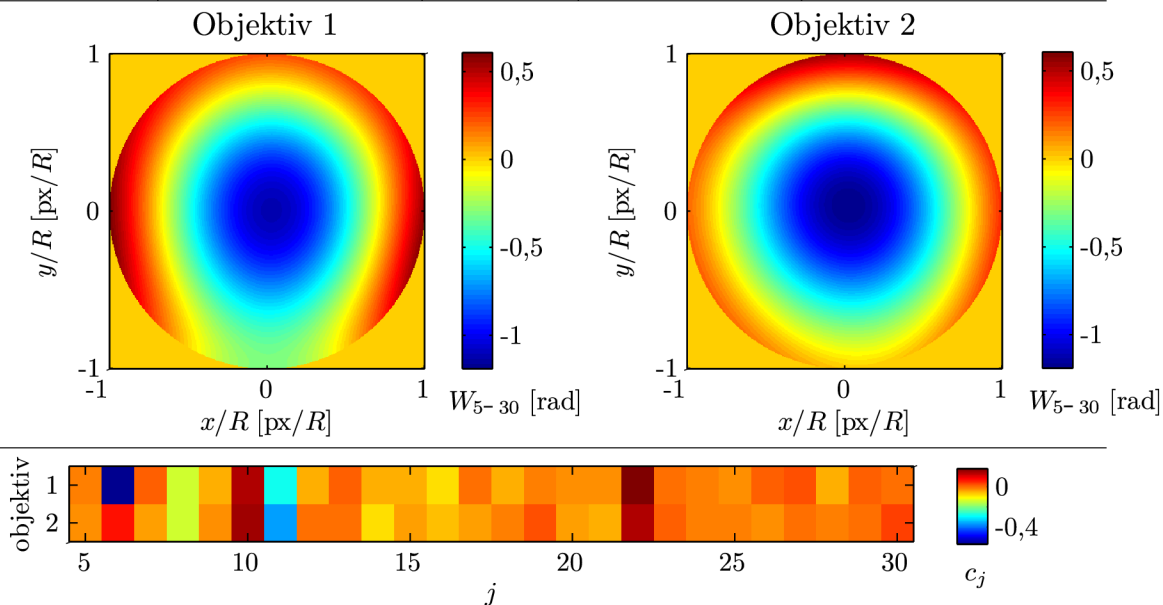


Dále diskutujeme vliv výměny testovaných objektivů během měření jedné sady na výslednou interpretaci vypočtených dat. Vzhledem k faktu, že při použití sestavy na obrázku 3.10a zůstává poloha všech ostatních komponent během měření neměnná, jedinou chybu vnesenou do výpočtu může představovat umístění testovaného prvku do odlišné polohy podél optické osy a různá volba počátečního úhlu při otáčení objektivu kolem optické osy

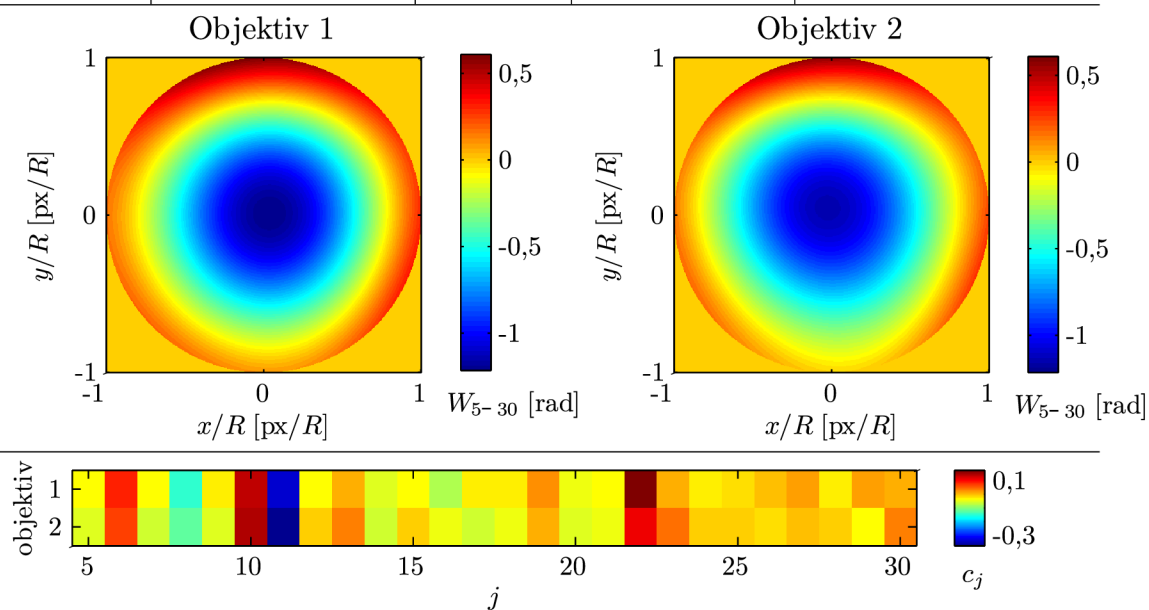


**Tabulka 3.6:** Výsledky měření vlnoplochy pro objektivy Plan 40×/0,65 záznamem na stínítko.

Objektiv	Záznam / stopa		Výpočet		$\sigma_W^2$	$T_{sf}$	$T_{lm}$		
NA 0,65	expozice	30 s	$\mu$	1	1	0,50	0,02	$l^m$	1
M 40×	clona	f/2,8	$\varepsilon$	$10^{-10}$	2	0,22	0,02	2	0,29
kor. Plan	$\tilde{R}$	782 px	$g$	6 px					

**Tabulka 3.7:** Výsledky měření vlnoplochy pro objektivy Pl 40×/0,60 záznamem na stínítko.

Objektiv	Záznam / stopa		Výpočet		$\sigma_W^2$	$T_{sf}$	$T_{lm}$		
NA 0,60	expozice	30 s	$\mu$	1	1	0,21	0,02	$l^m$	1
M 40×	clona	f/2,8	$\varepsilon$	$10^{-10}$	2	0,23	0,02	2	0,30
kor. Pl	$\tilde{R}$	779 px	$g$	6 px					



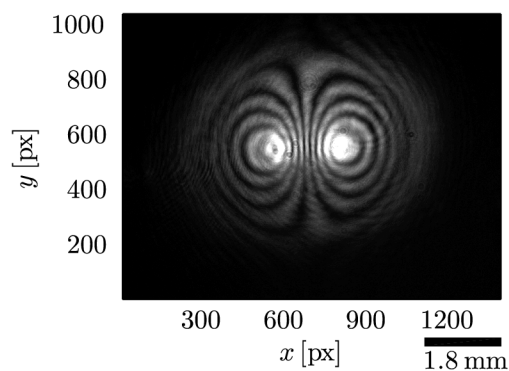
### 3.7. VÝSLEDKY EXPERIMENTŮ

vzhledem k nějaké značce na těle objektivu. První problém může být způsoben například různou délkou závitu objektivu. Při malém posunutí můžeme předpokládat, že se změní pouze poloměr vlnoplochy na výstupu z kolimační čočky. Vzhledem k ortogonálním vlastnostem Zernikových polynomů by však tato změna měla mít na určení hodnot ostatních koeficientů zanedbatelný vliv. Zernikovy polynomy jsou zároveň rotačně invariantní [41] a vliv volby počátečního úhlu by měl být při rekonstrukci fázové funkce pomocí Zernikových polynomů rovněž zanedbatelný.

Metoda stříhové interferometrie podle uspořádání na obrázku 3.10a, založená na principu Murtyova interferometru, tedy představuje robustní nástroj pro měření vlnoplochy vlny transformované testovaným optickým prvkem a lze ji využít i pro srovnávání objektivů s vysokou numerickou aperturou.

Nyní přejděme k záznamu stříhové interference pomocí sestavy na obrázku 3.10b. Příklad interferogramu ukazuje obrázek 3.15b. Měnicí se šířka interferenčních proužků signalizuje optickou vadu, nejspíše primární sférickou aberaci [38]. Přítomnost vady je pravděpodobně způsobena odrazem vlny od rovinného zrcadla Z. Pohybováním zrcadla ve směru optické osy byla zjištěna celková změna interferenční struktury a rovněž tvar stopy svazku, který od určité vzdálenosti zrcadla od ohniskové roviny objektivu přestává být kruhový. Průběh aberací, odpovídajících Zernikovým polynomům i stupně většího než pět, tedy závisí na poloze zrcadla vzhledem k ohniskové rovině objektivu. Vlna dopadající na planoparalelní desku po průchodu objektivem bude tedy vždy aberovaná a interpretace výsledků je tak výrazně komplikovanější než v předchozím případě, kde jsme porovnávali ideální sférickou vlnoplochu s naměřenou s přítomnými optickými vadami.

Značný problém také představuje výměna objektivu. Při testování objektivu s nízkou pracovní vzdáleností je nejprve třeba odsunout zrcadlo, provést výměnu a vrátit zrcadlo do stejné polohy vzhledem k ohniskové rovině objektivu, což vyžaduje další posuv zrcadla ve směru optické osy. Toho je možné docílit zobrazením nějakého objektu, například hrany zrcadla, a posouvat s ním, dokud není obraz stejný jako pro předchozí objektiv. Pro objektivy s vysokou numerickou aperturou (vyzkoušeno pro  $NA > 0,40$ ) je interferenční struktura velmi citlivá na posun zrcadla a nalezení správné polohy je velmi obtížné. Navíc, jak ukazuje obrázek 3.17, zobrazující záznam stříhové interference pro objektiv s  $NA = 0,40$ , je vlnoplocha po transformaci objektivem v tomto případě výrazně aberována a průběh interferenčního řádu není ryze monotónní. Protože by musel být modifikován postup zpracování interferogramu, nebyly záznamy stříhové interference pro objektivy s  $NA = 0,40$  zpracovány. Pro objektivy s  $NA > 0,40$  nebyl použitelný záznam stříhové interference vůbec získán.



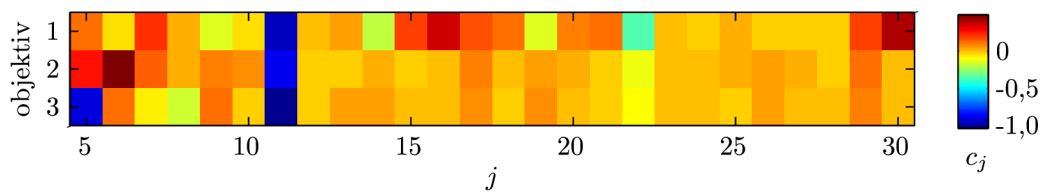
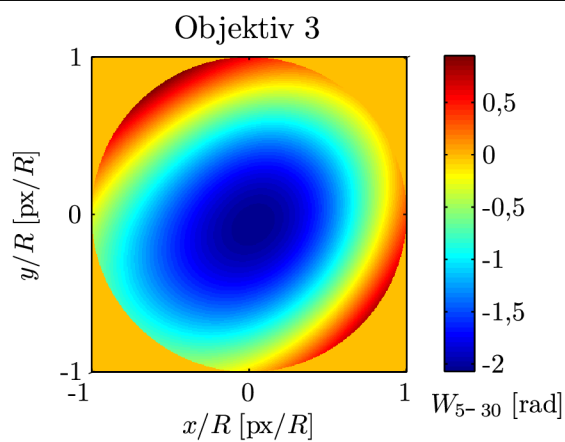
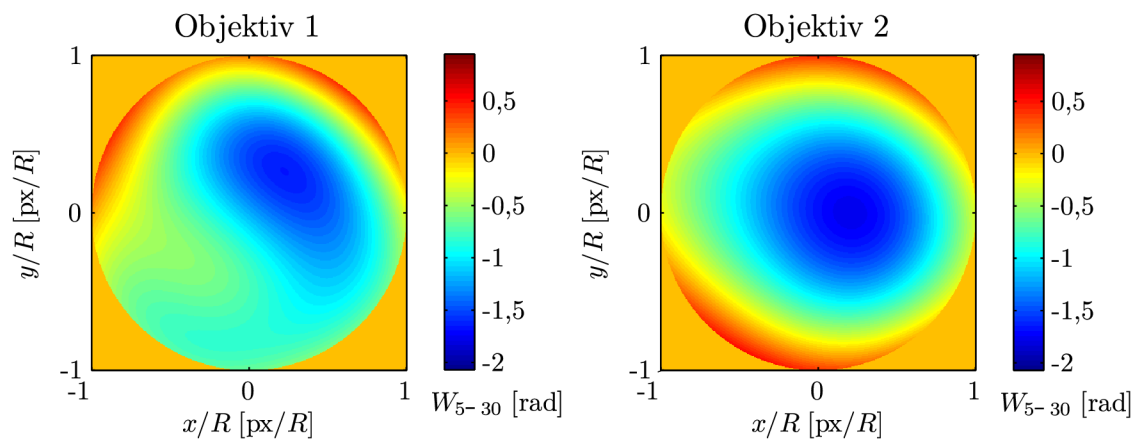
**Obrázek 3.17:** Stříhový interferogram pro objektiv  $40\times/0,60$ , záznam na kameru.

Tabulka 3.8 uvádí výsledky měření objektivů  $10\times/0,25$  záznamem na kameru. Jde o objektivy používané v laboratoři Laserové spektroskopie na témže ústavu jako v předchozím případě. Příklad interferogramu je na obrázku 3.15b. Podle očekávání jsou hodnoty rozptylu aberací  $\sigma_W^2$  a kritéria  $T_{sf}$  větší než u objektivů v přechozích případech, testovaných první metodou. Domněnku, že vlnoplocha má primární sférickou vadu, potvrzují hodnoty koeficientů  $c_{11}$ , které jsou přibližně rovny  $-1$ , jak je patrné z grafu v tabulce 3.8. Vysoké hodnoty kritéria  $T_{lm}$  pro každou dvojici mohou poukazovat na různá umístění zrcadla vzhledem k ohniskovým rovinám jednotlivých objektivů. Jak bylo popsáno výše, důsledkem je odlišný průběh aberací, který na poloze zrcadla závisí. Vzhledem k této nepřesnosti je možné metodu použít pro srovnávání objektivů pouze se zvýšenou opatrností ohledně vzájemné polohy testovaného objektivu a zrcadla. Získané hodnoty koeficientů Zernikeových polynomů však nelze interpretovat jako stupně optických vad vlny transformované testovaným objektivem, což je evidentní již z uspořádání sestavy na obrázku 3.10b. Světelná vlna je totiž transformována objektivem dvakrát a tvar vlnoplochy se rovněž mění po odrazu od zrcadla.

### 3.7. VÝSLEDKY EXPERIMENTŮ

**Tabulka 3.8:** Výsledky měření vlnplochy pro objektivy 10×/0,25 záznamem na kameru.

Objektiv	Záznam / stopa	Výpočet	$\sigma_W^2$	$T_{sf}$	$T_{lm}$		
NA 0,25	expozice 185 $\mu s$	$\mu$ 2	1 1,64	0,04	$l$	$m$	1 2
M 10×	$\tilde{R}$ 438 px	$\varepsilon$ 10 <sup>-10</sup>	2 1,21	0,04			
kor. -		$g$ 3 px	3 2,01	0,04	2 0,44		



# Kapitola 4

## Rovnice přenosu intenzity

Fázovou funkci studované vlny lze určit řešením parciální diferenciální rovnice přenosu intenzity (angl. transport of intensity equation nebo irradiance transport equation [28, 85], dále TIE). Jde o imaginární část Helmholtzovy rovnice v paraxiálním tvaru [47]. Jedná se o neinterferenční metodu, jejímž principem je rekonstrukce vlnoplochy ze známé derivace intenzity vlny podél směru šíření. Derivace intenzity vystupuje přímo v TIE a určení fázové funkce je potom téměř přímočaré. Derivaci intenzity můžeme odhadnout ze snímků studované vlny naměřených v různých rovinách kolmých ke směru šíření, jejichž poloha je známá, a použití vhodného vzorce pro numerický výpočet derivace [13].

Odvození TIE pro rekonstrukci fázové funkce uvádí již Teague [81] a její použití demonstruje na numerickém experimentu. Stručná zmínka o této práci a příklady dalších aplikací využívajících TIE včetně testování optických prvků jsou uvedeny v odstavci 4.2. V části 4.1 je popsáno odvození TIE a uvedeny možnosti řešení diferenciální rovnice. Odstavec 4.3 se věnuje zpracování obrazu a výpočetnímu postupu. Výsledky měření a jejich diskuse je uvedena v části 4.5.

### 4.1. Matematický aparát

Helmholtzova rovnice je část vlnové rovnice závisující pouze na prostorových souřadnicích a v paraxiální aproximaci (modul derivace vlnové funkce podél směru šíření je malý v porovnání s modulem vlnové funkce) ji můžeme vyjádřit v následujícím tvaru při ztotožnění směru šíření s osou  $z$  [34]:

$$\nabla_{\perp}^2 \psi(\mathbf{r}) = -2ik \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial z}. \quad (4.1)$$

Pro operátory  $\nabla_{\perp}^2$  a  $\nabla_{\perp}$  (použitý v dalším výkladu) platí [61, kap. 7.2]:

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad (4.2a)$$

$$\nabla_{\perp} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (4.2b)$$

Rozkladu Helmholtzovy rovnice na reálnou a imaginární část je možné docílit jednoduchou úpravou [81]. Vynásobme rovnici (4.1) komplexně sdruženou funkcí  $\psi^*(\mathbf{r})$  a rovnici komplexně sdruženou k (4.1) vynásobme  $\psi(\mathbf{r})$ :

$$\psi^*(\mathbf{r}) \nabla_{\perp}^2 \psi(\mathbf{r}) = -2ik \psi^*(\mathbf{r}) \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial z}, \quad (4.3a)$$

#### 4.1. MATEMATICKÝ APARÁT

$$\psi(\mathbf{r})\nabla_{\perp}^2\psi^*(\mathbf{r}) = 2ik\psi(\mathbf{r})\frac{\partial\psi^*(\mathbf{r})}{\partial z}. \quad (4.3b)$$

Součtem rovnic (4.3) dostaneme reálnou část Helmholtzovy rovnice, odečtem získáme imaginární část.

Mějme vlnovou funkci ve tvaru [47, 81]

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{I(\mathbf{r})} \exp[iW(\mathbf{r})]. \quad (4.4)$$

Vztah (4.4) dosadíme do rovnic (4.3) a jejich odečtením po jednoduchých úpravách dostaneme TIE v následujícím tvaru:

$$\nabla_{\perp} \cdot [I(\mathbf{r})\nabla_{\perp}W(\mathbf{r})] = -k\frac{\partial I(\mathbf{r})}{\partial z}. \quad (4.5)$$

Tvar rovnice (4.5) stojí za povšimnutí, neboť je podobný rovnici kontinuity [61, kap. 18.7]. Skutečně, rovnice přenosu intenzity vyjadřuje zákon zachování energie vlny šířící se prostorem. Velmi názorné odvození TIE pomocí Poyintingova teoremu v interpretaci geometrické optiky uvádí Campos-García [12].

Rovnice (4.5) představuje parciální diferenciální rovnici eliptického typu [51]. Zavedením nového skalárního potenciálu  $\varphi$

$$\nabla_{\perp}\varphi = I\nabla_{\perp}W \quad (4.6)$$

můžeme (4.5) převést na Poissonovu rovnici:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -k\frac{\partial I(\mathbf{r})}{\partial z}. \quad (4.7)$$

Paganin [55] (dále také [20, 85]) uvádí přímé určení fázové funkce  $W(\mathbf{r})$  využitím inverzního Laplaceova operátoru  $\nabla_{\perp}^{-2}$ . Úpravou rovnice (4.5) můžeme předpis pro fázovou funkci napsat v následujícím tvaru:

$$W(\mathbf{r}) = -k\nabla_{\perp}^{-2} \left\{ \nabla_{\perp} \cdot \left[ \frac{\nabla_{\perp}\nabla_{\perp}^{-2}\frac{\partial I(\mathbf{r})}{\partial z}}{I(\mathbf{r})} \right] \right\}, \quad I(\mathbf{r}) \neq 0. \quad (4.8)$$

Inverzní Laplaceův operátor je možné vyjádřit pomocí Fourierovy a inverzní Fourierovy transformace (zde pro libovolnou funkci  $u(x, y)$ ):

$$\nabla_{\perp}^{-2}u(x, y) = \text{FT}^{-1} \left\{ \frac{\text{FT}[u(x, y)]}{\kappa_x^2 + \kappa_y^2} \right\}, \quad \kappa_x^2 + \kappa_y^2 \neq 0. \quad (4.9)$$

##### 4.1.1. Derivace intenzity

Pro určení hodnot fázové funkce podle vztahu (4.8) ve zvolené rovině  $z = z_0$  potřebujeme znát hodnoty intenzity a její derivace ve směru  $z$  v této rovině, čehož lze docílit získáním snímků v  $z = z_0$ ,  $z = z_0 + h$ , případně  $z = z_0 - h$ . Situaci znázorňuje obrázek 4.1. Hodnoty intenzity ve zvolené rovině získáme přímo ze snímku pořízeného v  $z = z_0$ . Derivaci

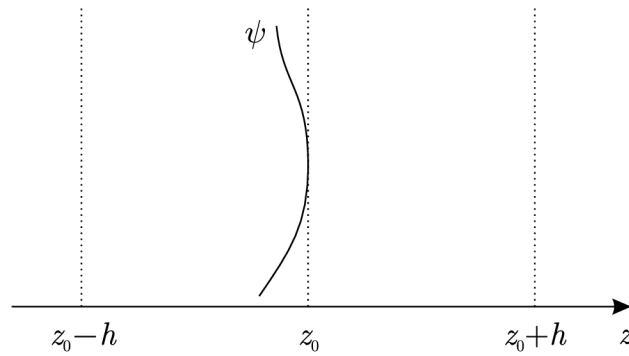
intenzity určíme použitím vhodného vzorce pro numerický výpočet derivace [13]. Pro dva, případně tři snímky máme následující možnosti:

$$\frac{\partial I(\mathbf{r}, z_0)}{\partial z} \approx \frac{I(\mathbf{r}, z_0 + h) - I(\mathbf{r}, z_0)}{h}, \quad (4.10a)$$

$$\frac{\partial I(\mathbf{r}, z_0)}{\partial z} \approx \frac{I(\mathbf{r}, z_0) - I(\mathbf{r}, z_0 - h)}{h}, \quad (4.10b)$$

$$\frac{\partial I(\mathbf{r}, z_0)}{\partial z} \approx \frac{I(\mathbf{r}, z_0 + h) - I(\mathbf{r}, z_0 - h)}{2h}. \quad (4.10c)$$

Volba optimálního kroku  $h$  je určena zejména velikostí naměřených hodnot intenzity a její derivace a mírou šumu v obraze. Podrobnosti uvádí Teague [81].



**Obrázek 4.1:** Schéma experimentu pro určení fázové funkce řešením TIE. Tečkovanými čarami jsou vyznačeny roviny záznamu.

#### 4.1.2. Okrajové podmínky

Pro získání jednoznačného řešení problému (4.5), resp. (4.7) je nutné definovat okrajové podmínky, jež jsou důsledkem zákona zachování elektromagnetické energie. Podle [85] platí:

$$\int_L \frac{\partial I(\mathbf{r})}{\partial z} d\tau = 0, \quad (4.11)$$

kde  $\tau$  je plošný element a kde integrujeme přes osvětlenou rovinnou oblast  $L$ . Vztah (4.11) vyjadřuje zachování energie vlny šířící se ve směru osy  $z$  a můžeme jej využít pro ověření platnosti naměřených dat. Dosadíme-li za integrand levou stranu rovnice (4.7), pak s využitím Greenovy identity [85] získáme okrajovou podmínku na hranici  $\partial L$  oblasti  $L$ :

$$\oint_{\partial L} \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi(\mathbf{r}) ds = 0. \quad (4.12)$$

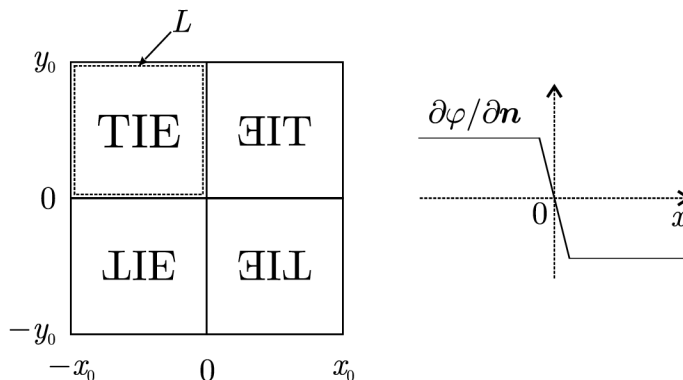
$ds$  označuje délkový element křivky  $\partial L$  a integrand vyjadřuje derivaci skalárního potenciálu  $\varphi(\mathbf{r})$  ve směru normály k  $\partial L$ , dané jednotkovým vektorem  $\mathbf{n}$ .

#### 4.1. MATEMATICKÝ APARÁT

Průběh integrandu ze vztahu (4.12) podél  $\partial L$  však neznáme, což představuje značné obtíže v implementaci této podmínky pro řešení Poissonovy rovnice. Volkov [85] však uvádí použití Neumannovy podmínky ve tvaru

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r} \in \partial L} = 0 \quad (4.13)$$

pro speciální případy záznamů intenzity na oblasti obdélníkového tvaru. Pro určení fáze  $W$  používá vztah (4.8) a použitím symetrizace vstupních snímků zaručuje periodicitu nutnou pro korektní použití výpočtů Fourierových transformací a zároveň splnění uvedené Neumannovy okrajové podmínky. Symetrizaci úlohy schematicky znázorňuje obrázek 4.2. Mimo obdelníkový tvar oblasti je dalším omezením předpoklad konstantního průběhu fázové funkce  $W(\mathbf{r})$  uvnitř úzkého pásu podél hranice  $\partial L$ .



**Obrázek 4.2:** Schéma symetrizace snímků pro určení fázové funkce zaručující splnění okrajové podmínky (4.13). Původní snímek intenzity  $I(\mathbf{r}, z_0)$  leží v levém horním kvadrantu. Připojené snímky ve zbývajících kvadrantech jsou zrcadlově převrácené. Graf znázorňuje průběh  $\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial n}$  v okolí  $\partial L$ . Upraveno podle [85].

Roddier [64] uvádí řešení (4.5) pro kruhovou oblast a vlnu s konstantní amplitudou  $\sqrt{I_0}$ . Levou stranu (4.5) je možné zjednodušit a TIE psát v následujícím tvaru:

$$I_0 [\mathbf{n} \cdot \nabla W(\mathbf{r})] \delta_{\partial L} + I_0 P(\mathbf{r}) \nabla_{\perp}^2 W(\mathbf{r}) = -k \frac{\partial I(\mathbf{r})}{\partial z}, \quad (4.14a)$$

$$\delta_{\partial L} = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in \partial L, \\ 0, & \mathbf{r} \notin \partial L. \end{cases} \quad (4.14b)$$

První člen levé strany rovnice (4.14a) představuje Neumannovu okrajovou podmínku již implementovanou do diferenciální rovnice.

#### 4.1.3. TIE v reprezentaci ortogonálních funkcí

Určení fázové funkce vlny, jejíž amplituda není konstantní, na spojitě libovolného tvaru pomocí TIE uvádí Gureyev [24]. Principem metody, jejíž odvození podrobně popisuje, je vyjádření fázové funkce a derivace intenzity v reprezentaci systému ortogonálních funkcí a svázání koeficientů těchto funkcí, aproximujících danou veličinu, transformační maticí. Pro kruhovou oblast  $L$  bude výhodné použít systém Zernikeových polynomů.



Mějme  $J$  Zernikeových polynomů, vyjádřených v polárních souřadnicích, definovaných v odstavci 1.3, pro aproximaci výše zmíněných veličin. Vynásobme rovnici (4.5)  $i$ -tým polynomem  $Z_i(\rho(\mathbf{r}, R), \theta(\mathbf{r}))$ ,  $i = 1, 2, \dots, J$  a normovací konstantou  $1/(\pi R^2)$  a integrujme obě strany rovnice přes kruhovou oblast  $L$  s poloměrem  $R$  (pro přehlednost jsou proměnné  $\rho(\mathbf{r}, R), \theta(\mathbf{r})$  a  $z$  u veličin  $I, W, Z_i$  a  $Z_j$  v následujících vztazích vynechány):<sup>1</sup>

$$\frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \nabla_{\perp} \cdot (I \nabla_{\perp} W) Z_i r dr d\theta = -k \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial I}{\partial z} Z_i r dr d\theta. \quad (4.15)$$

Podle vztahu (1.13) vyjadřuje pravá strana rovnice  $i$ -tý koeficient aproximace  $\frac{\partial I}{\partial z}$  polynomem  $Z_i$ . Označme tento koeficient  $d_i$ . Funkci  $W(\rho(\mathbf{r}, R), \theta(\mathbf{r}))$  aproximujme  $J$  Zernikeovými polynomy  $Z_j(\rho(\mathbf{r}, R), \theta(\mathbf{r}))$  s příslušnými koeficienty  $c_j$ :

$$W = \sum_{j=1}^J c_j Z_j. \quad (4.16)$$

Dosadíme-li toto vyjádření do (4.15), dostaneme rovnici přenosu intenzity v následujícím tvaru:

$$\sum_{j=1}^J c_j \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R I \nabla_{\perp} Z_j \cdot \nabla_{\perp} Z_i r dr d\theta = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, J. \quad (4.17)$$

Definujme nyní prvek  $M_{ji}$  transformační matice  $\mathbf{M}$ :

$$M_{ji} = \int_0^{2\pi} \int_0^R I \nabla_{\perp} Z_j \cdot \nabla_{\perp} Z_i r dr d\theta, \quad i, j = 1, 2, \dots, J. \quad (4.18)$$

Pro vektor  $\mathbf{c}$  s koeficienty  $c_j$  platí

$$\mathbf{c} = \pi R^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{d}, \quad (4.19)$$

kde  $\mathbf{d}$  je vektor koeficientů  $d_i$ . Z určených koeficientů  $c_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$  můžeme rekonstruovat fázovou funkci  $W$ . Půjde-li o fázovou funkci, příslušející světelné vlně transformované objektivem, případně jiným optickým prvkem, můžeme tohoto postupu využít pro určení aberací této vlny a k testování studovaných optických prvků.

Gureyev dále ukazuje, že řešení TIE je určeno jednoznačně až na aditivní konstantu. Tento poznatek je však zcela v souladu s výše uvedeným postupem, neboť ze vztahu (4.18) je patrné, že prvek  $M_{ji}$  bude nulový pro  $i = 1$  nebo  $j = 1$ , neboť  $\nabla Z_1 = 0$  a prvky transformační matice budeme počítat pouze pro  $i, j = 2, 3, \dots, J$ . Tvar vlnoplochy získaný tímto postupem vykazuje podle [24] dobrou shodu s teoretickým výpočtem.

## 4.2. Aplikace

Možnost použití rovnice přenosu intenzity pro rekonstrukci fáze poprvé publikuje Teague [81] a včetně popisu teorie uvádí návrh experimentu pro určení tvaru vlnoplochy vlny na výstupu z čočky. Pro zvýšení změny intenzity ve směru osy  $z$  navrhuje použití kompresoru (afokální soustavy zmenšující průměr svazku). Výpočet tvaru vlnoplochy z naměřených

<sup>1</sup>Faktor  $1/\pi$  je v rovnici (4.15) uveden z důvodu odlišné definice Zernikeových polynomů v [24].

### 4.3. VÝPOČETNÍ POSTUP

dat popisuje Ichikawa [28] záznamem konvergentní vlny s modulovanou amplitudou po průchodu difrakční mřížkou a uvádí dobrou shodu experimentálních výsledků s teoretickým výpočtem.

Rekonstrukci fáze prostřednictvím TIE aplikuje Dorrer [20] pro testování kvality optických prvků. Metodu používá jako profilometr pro analýzu povrchu tyčinek používaných v Nd:YLF laserech. Oproti jiným profilometrům je tato metoda výhodná z hlediska jednoduchosti sestavy, nedestruktivnosti a přesnosti výpočtu. Pinhasi [57] popisuje použití TIE také pro rekonstrukci topografie povrchu a srovnává tři přístupy výpočtu fáze z naměřených snímků – dva způsoby řešení Poissonovy rovnice s konstantní Dirichletovou okrajovou podmínkou a využití systému ortogonálních funkcí (viz odstavec 4.1.3). Strukturu povrchu určenou použitím Hartmannova–Shackova senzoru používá jako referenční topografii. Největší shodu vykazuje metoda využívající ortogonálních funkcí s dosaženým rozlišením poloviny vlnové délky použitého zdroje světla. Jak již bylo zmíněno v odstavci 4.1.2, použití Dirichletovy podmínky není v obecném případě zcela oprávněné, neboť průběh hledané fáze na hranici dané oblasti nemusí být konstantní a jde tedy o hrubý odhad způsobující nepřesný výsledek, jak ukazuje Pinhasi v této práci.

Frank [22] ukazuje použití rekonstrukce fáze řešením TIE pro určení indexu lomu transparentních objektů se známou geometrií. Metodu používá pro měření indexu lomu skleněných mikrokuliček a pláště a jádra optických vláken. Studovaný objekt je umístěn v roztoku se známou hodnotou indexu lomu a osvětlen kolimovanou vlnou. Ze záznamu prošlého světla je rekonstruována fáze vlny, která odpovídá fázovému zpoždění v důsledku průchodu prostředím s různou optickou mohutností. V případě mikrokuličky je fáze prošlé vlny v místech, kde se nenachází objekt, konstantní a jedná se tak o další úlohu se známými okrajovými podmínkami.

Mezi další obory, kde je využívána TIE, se řadí transmisní elektronová mikroskopie, kde představuje užitečný nástroj pro snadný výpočet fáze elektronové vlny, umožňující analyzovat magnetické vlastnosti studovaného vzorku [2]. TIE je také využívána při analýze snímků biologických vzorků, kde hodnota fáze souvisí s indexem lomu v daném místě snímku, který má pak ve vztahu s živými objekty zajímavé interpretace [58].

### 4.3. Výpočetní postup

Vzhledem k charakteru získaných snímků intenzity světla vlny, transformované mikroskopovým objektivem, byl pro výpočet fázové funkce zvolen postup popsáný v části 4.1.3. Při provádění experimentů totiž měla stopa světelného svazku kruhový tvar a průběh intenzity nebyl konstantní.

Předpokládejme, že jsme získali záznam intenzity světla  $I_1$ ,  $I_2$  a  $I_3$  v rovinách  $z = z_0 - h$ ,  $z = z_0$  a  $z = z_0 + h$  (například posunem detektoru podél směru šíření studované vlny). Následnou rekonstrukci fázové funkce  $W(\mathbf{r})$  lze rozdělit do následujících kroků:

1. Předzpracování snímků zahrnující odstranění šumu a určení polohy středu a poloměru stopy svazku.
2. Výpočet derivace intenzity a aproximace Zernikeovými polynomy.
3. Výpočet transformační matice  $M$  podle vztahu (4.18).

4. Výpočet koeficientů  $\mathbf{c}$  podle vztahu (4.19) a následná rekonstrukce fázové funkce podle vztahu (4.16).

### 4.3.1. Zpracování obrazu

Pro odstranění šumu použijeme konvoluci příslušného záznamu  $l$  s maskou  $h_g$  (3.17a) s vhodně zvolenou velikostí a parametrem  $\sigma$  Gaussovy funkce, kterou prvky masky aproximují. Každý záznam intenzity světla  $l, l = 1, 2, 3$  je upraven použitím stejné konvoluční masky.

Dalším krokem je identifikace kruhové stopy svazku neboli oblasti  $L$  určením polohy středu pro každý záznam intenzity  $l, l = 1, 2, 3$  zvlášť. Celý postup je analogický s detekcí stopy svazku, popsané v odstavci 3.3.1. Nejprve nalezneme body na hranici oblasti postupem uvedeným v dodatku B. Získanými body proložíme nelineární regresní funkci  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  proměnných  $\mathbf{x}$  a parametrů  $\mathbf{p}$ , která má v tomto případě následující tvar:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = (x_1 - S_{x_1})^2 + (x_2 - S_{x_2})^2 - R^2, \quad (4.20a)$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \equiv (x, y), \quad (4.20b)$$

$$\mathbf{p} = (S_{x_1}, S_{x_2}, R)^T. \quad (4.20c)$$

Postup řešení regresní analýzy je uveden v dodatku B. Pro všechny záznamy nastavíme společnou hodnotu poloměru  $R$  tak, aby oblast  $L_l$  zahrnovala největší stopu svazku z příslušných tří záznamů i s jejím neostrým okrajem. Hodnoty souřadnic středů  $\mathbf{S}_l$  zaokrouhlíme na nejbližší přirozené číslo a dále ze získaných poloh vybereme minimální  $x$ -ovou a  $y$ -ovou souřadnici, které označíme  $S_x$  a  $S_y$ . Z každé matice  $l_l$  odebereme  $(S_{x,l} - S_x)$  sloupců zleva a  $(S_{y,l} - S_y)$  řádků zdola a potřebný počet sloupců, resp. řádků zprava, resp. shora, aby byl počet řádků a sloupců pro všechny matice stejný. Střed  $\mathbf{S}$  oblastí  $L_l$  bude rovněž společný pro všechny záznamy. Tato úprava umožní zjednodušení dalších výpočtů. Zároveň jsme tak získali identifikaci integrační plochy ve vztahu (4.18).

### 4.3.2. Výpočet derivace intenzity

Pro výpočet derivace intenzity sestavme matici  $dI$  se stejným počtem řádků a sloupců jako matice  $l_l, l = 1, 2, 3$  po úpravě popsané v předchozím odstavci. Pro hodnoty jednotlivých prvků matice  $dI$  platí vztah (4.10c). Koeficienty  $d_i$ , vystupující v rovnicích (4.17) a (4.19), určíme pomocí regresní analýzy analogicky se vztahy (1.14) a (1.15), pouze vektor  $\mathbf{W}$  nahradíme vektorem  $dI$ , který sestavíme podle vztahu (A.5). Pro výpočet matice  $\mathbf{X}$  a převod souřadnic platí vztahy (3.30) a (3.31).

### 4.3.3. Výpočet transformační matice

Výpočet prvků transformační matice  $\mathbf{M}$  mezi koeficienty  $c_j$  a  $d_i$  uvádí vztah (4.18). Za intenzitu  $I(\mathbf{r}, z)$  dosazujeme v tomto případě hodnoty  $I_2(\mathbf{r}, z_0)$ . Funkční závislost intenzity  $I_2(\mathbf{r}, z_0)$  na polohovém vektoru  $\mathbf{r}$  však neznáme.

Pro vyjádření intenzity  $I_2(\mathbf{r}, z_0)$  byla použita Delauného triangulace a po částech lineární interpolace. Principem tohoto přístupu je segmentace obrazu  $l_2$  s hodnotami  $I_2(\mathbf{r}_n, z_0)$  v diskrétních bodech  $\mathbf{r}_n, n = 1, 2, \dots, N$  pomocí trojúhelníkové sítě. Vrcholy

#### 4.4. POPIS SESTAVY

každého trojúhelníku leží v bodech  $\mathbf{r}_n$ . Hodnoty  $I_2(\mathbf{r}_n, z_0)$  ve vrcholech určitého trojúhelníku tvoří rovinu, pomocí níž interpolujeme tuto funkci ve všech bodech uvnitř příslušného trojúhelníku [13]. Průběh  $I_2(\mathbf{r}, z_0)$  pak můžeme modelovat s přesností, kterou určuje hustota trojúhelníkové sítě.

Pro zefektivnění segmentace obrazu bude výhodné zvyšovat hustotu sítě selektivně v místech, kde se interpolovaná funkce mění rychleji v porovnání s okolím. Postup tvorby sítě uvádí Soomart [74]. Segmentaci započneme se dvěma trojúhelníky s jednou společnou stranou, jejichž vrcholy umístíme do rohových bodů. Vypočítáme interpolaci ve všech bodech  $\mathbf{r}_n$ , kterou označíme  $\tilde{I}_2(\mathbf{r}_n, z_0)$ . Bod  $\mathbf{r}_n$ , pro který odchylka  $|\tilde{I}_2(\mathbf{r}_n, z_0) - I_2(\mathbf{r}_n, z_0)|$  nabývá maxima, bude novým bodem neboli uzlem sítě. Postup opakujeme, dokud příslušná odchylka nedosáhne požadované minimální hodnoty, kterou budeme dále označovat jako  $D_{\min}$ , případně provedeme segmentaci pro předem zvolený počet uzlů. Postup segmentace ukazuje obrázek 4.3.

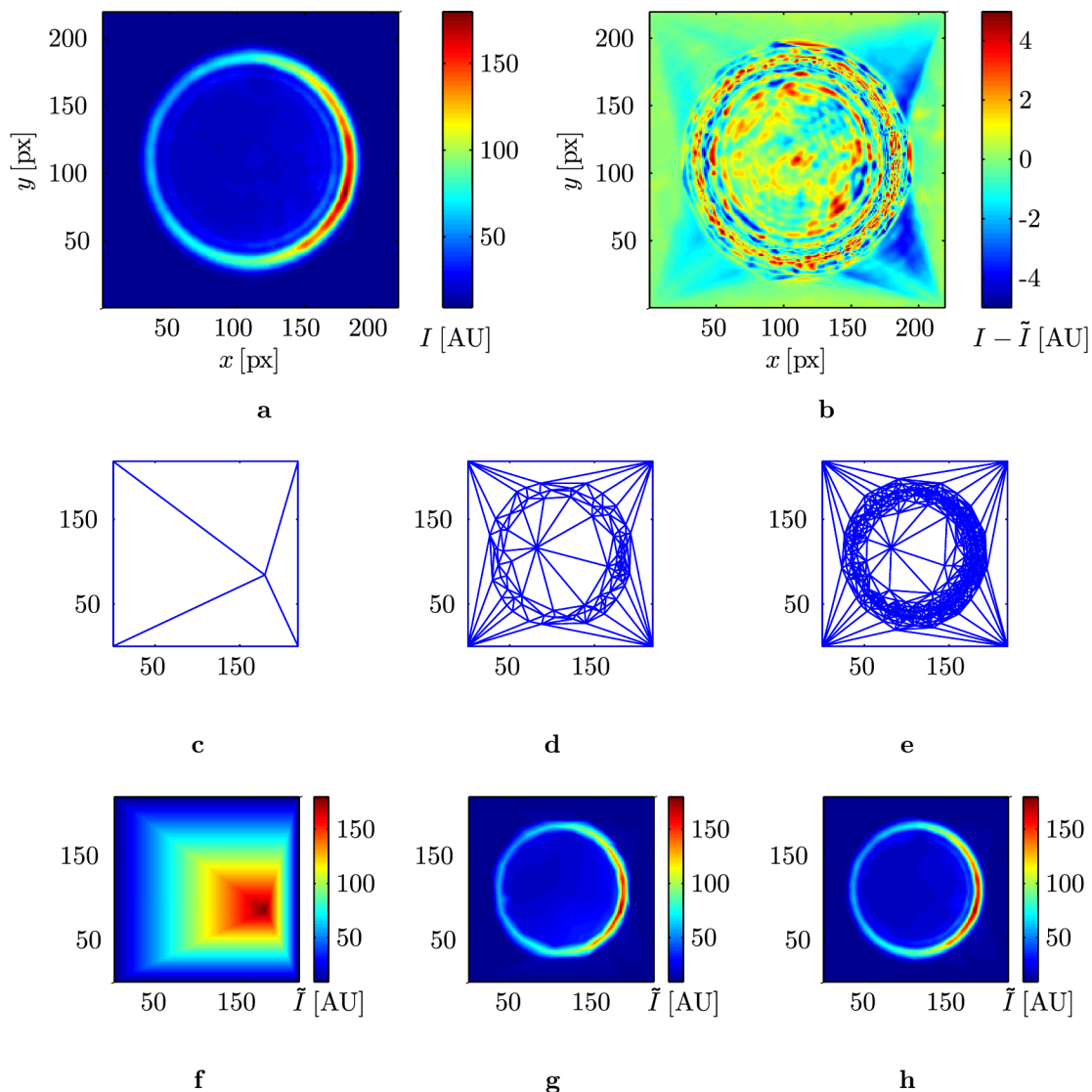
Integrály (4.18) byly počítány numericky použitím Gaussovy-Legendrovy kvadraturní formule pro funkci dvou proměnných [13, 59]. Iterační výpočet integrálu byl přerušen dosažením zadané tolerance, definované jako rozdíl nové a předchozí iterace v absolutní hodnotě. Pro všechny výpočty byla stanovena tolerance  $10^{-6}$ . Při dosažení limitních  $2^{11}$  uzlů pro dělení integračního intervalu, aniž bychom získali hodnotu integrálu s požadovanou tolerancí, bylo provedeno rozdělení intervalu pro proměnnou  $\theta$  na menší části.

Ze známých hodnot koeficientů  $\mathbf{d}$  a prvků transformační matice  $\mathbf{M}$  snadno vypočítáme koeficienty  $\mathbf{c}$  pro rekonstrukci fázové funkce použitím vztahu (4.19). Procedury numerických výpočtů byly implementovány do prostředí programu Matlab R2011a s využitím programu [66] pro segmentaci obrazu Delaunayho trinagulací a programu [10] pro numerický výpočet integrálu. Při zpracování naměřených dat byly záznamy intenzity před provedením segmentace a následné interpolace převzorkovány postupem popsáním v odstavci 3.4.

#### 4.4. Popis sestavy

Schéma měřícího systému pro získání záznamů intenzity světla a následnou rekonstrukci fázové funkce řešením TIE ukazuje obrázek 4.4. Část po kolimační čočce  $K_1$  včetně je shodná se sestavami popsány v části 3.6 i co se týče parametrů jednotlivých komponent. Kolimovaný světelný svazek se poté odráží od planparalelní desky  $P$  a vstupuje do testovaného objektivu  $T$  s aperturní clonou  $A$ . Svazek je fokusován na rovinné zrcadlo  $Z$ , po odrazu znovu prochází objektivem, planparalelní deskou a dopadá na detektor  $D$ , kterým je možné posouvat podél optické osy a zaznamenat tak intenzitu světla v různých rovinách kolmých k optické ose.

Pro úchyty a zajištění stabilní polohy jednotlivých komponent byly použity stejné nástroje jako v případě sestav pro měření stříhové interference. Pouze kamera byla navíc umístěna na posouvatelném podstavci, vybaveném mikrometrickým šroubem se stupnicí s nejmenším dílkem  $10 \mu\text{m}$  a umožňujícím posouvat kamerou v rozsahu 1 cm. Planparalelní deska byla vybrána tak, aby její tloušťka umožňovala úplnou separaci svazků odrážejících se směrem k testovanému objektivu od prvního a druhého rozhraní desky.

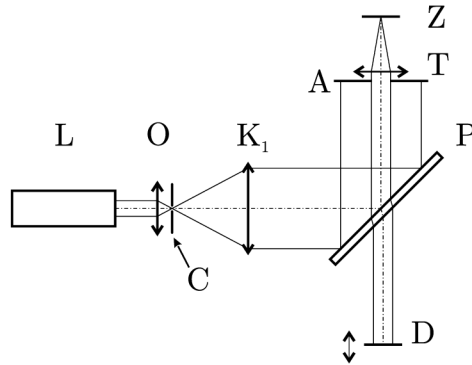


**Obrázek 4.3:** Delaunayho triangulace a po částech lineární interpolace. a – vstupní obraz, b – mapa odchylek mezi vstupním a interpolovaným obrazem po dosažení požadované hodnoty  $D_{\min}$ , c,f – triangulace s jedním krokem, d,g – triangulace s 50 kroky, e,h – triangulace po dosažení odchylky 5 AU. U obrázků c – h je vždy vyobrazena získaná síť a výsledek interpolace, označení souřadnicových os zde bylo pro přehlednost vynecháno.

## 4.5. Výsledky experimentů

V odstavci 4.5.1 je ukázáno použití procedury rekonstrukce fázové funkce ze zaznamenaných snímků řešením TIE na modelovém experimentu. Diskutována je přesnost použité metody srovnáním se vstupními daty. V odstavci 4.5.2 jsou pak uvedeny výsledky měření mikroskopových objektivů.

#### 4.5. VÝSLEDKY EXPERIMENTŮ



**Obrázek 4.4:** Schéma sestavy pro záznam snímků pro rekonstrukci fázové funkce řešením TIE. A – aperturní clona testovaného objektivu, C – clonka, D – detektor (šipkou je naznačen směr posuvu),  $K_1$  – kolimační čočka, L – laser, O – objektiv v prostorovém filtru, P – planparalelní deska, T – testovaný objektiv, Z – zrcadlo.

##### 4.5.1. Numerický experiment

Podobně jako v části 3.7.1 vytvoříme model intenzity světelné vlny v rovině  $z = z_0$  pomocí následujících vztahů:

$$I(\mathbf{r}, z_0) = |A(\mathbf{r} - \mathbf{S}, z_0) \exp [iW(\mathbf{r} - \mathbf{S}, z_0)]|^2 P(\mathbf{r} - \mathbf{S}) = A^2(\mathbf{r} - \mathbf{S}, z_0) P(\mathbf{r} - \mathbf{S}), \quad (4.21a)$$

$$A(\mathbf{r}, z_0) = A(\mathbf{r}) = \exp \left( -\frac{|\mathbf{r}|^2}{2\sigma^2} \right) + C, \quad (4.21b)$$

$$W_v(\mathbf{r}, z_0) = W_v(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^J c_{v,j} Z_j(\rho(\mathbf{r}, R), \theta(\mathbf{r})) \quad (4.21c)$$

$$P(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (4.21d)$$

Význam jednotlivých veličin je stejný jako v případě vztahů (3.32). Známe-li amplitudovou a fázovou funkci, intenzitu v rovinách  $z = z_0 - h$  a  $z = z_0 + h$  můžeme modelovat následujícím způsobem [85]:

$$I(\mathbf{r}, z_0 \pm h) = I(\mathbf{r}, z_0) \mp \frac{h}{k} \nabla_{\perp} \cdot [I(\mathbf{r}, z_0) \nabla_{\perp} W_v(\mathbf{r}, z_0)]. \quad (4.22)$$

Nyní můžeme generovat tři záznamy intenzity světelné vlny v příslušných rovinách pro zvolený krok  $h$  a vypočítat derivaci intenzity použitím vztahu (4.10c), kterou označíme symbolem  $dI(\mathbf{r}, z_0)$ . Vliv přítomnosti šumu v získaných snímcích na přesnost rekonstrukce fázové funkce podrobně diskutuje Gureyev [24]. Simulaci degradace šumem proto nebudeme provádět.

Vstupní parametry modelového experimentu, které byly z části převzaty z práce Gureyeva [24], uvádí tabulka 4.1, vstupní hodnoty koeficientů Zernikeových polynomů, označené  $c_{v,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ , pro vytvoření modelu fázové funkce uvádí tabulka 4.2. Veličiny  $s_x$  a  $s_y$  označují vzdálenost mezi jednotlivými body (pixely) v záznamu intenzity v příslušných směrech. Tyto hodnoty je nutné definovat pro korektní výpočet gradientu a divergence v rovnici (4.22). Kartézský souřadnicový systém byl zvolen stejným způsobem jako

**Tabulka 4.1:** Vstupní parametry pro vytvoření modelu intenzity v rovině  $z = z_0$ .

Velikost obrazu	$(129 \times 129)$ px	$L_\psi$	$\mathbf{S}$	$(1281, 1281) \mu\text{m}$
$s_x, s_y$	$20 \mu\text{m}$		$R$	$1010,5 \mu\text{m}$
$k$	$2\pi/0,5 \mu\text{m}^{-1}$	$A$	$\sigma$	$500 \mu\text{m}$
$h$	$1 \text{ cm}$		$C$	$-0, 12974 \text{ AU}$

**Tabulka 4.2:** Vstupní a vypočítané hodnoty koeficientů Zernikeových polynomů pro vyjádření fázové funkce a aproximace derivace intenzity.

$i, j$	$c_{v,j}$	$c_j$	$d_i \times 10^3$	$i, j$	$c_{v,j}$	$c_j$	$d_i \times 10^3$	$i, j$	$c_{v,j}$	$c_j$	$d_i \times 10^3$
1	0,0	–	0,3	8	0,0	–0,3	1,0	15	0,0	0,0	0,0
2	2,0	2,1	4,5	9	0,5	0,5	2,8	16	0,0	0,0	1,3
3	–3,0	–3,1	–6,7	10	0,0	0,0	0,0	17	0,0	–0,1	–2,0
4	1,0	1,1	6,5	11	0,0	0,0	–2,3	18	0,0	0,0	0,0
5	0,0	–0,1	0,0	12	0,0	0,0	0,0	19	–0,5	–0,5	–9,5
6	0,0	0,0	0,0	13	0,0	0,0	0,0	20	0,0	0,0	0,0
7	0,0	0,4	1,5	14	0,0	0,0	0,0	21	0,1	0,1	0,7

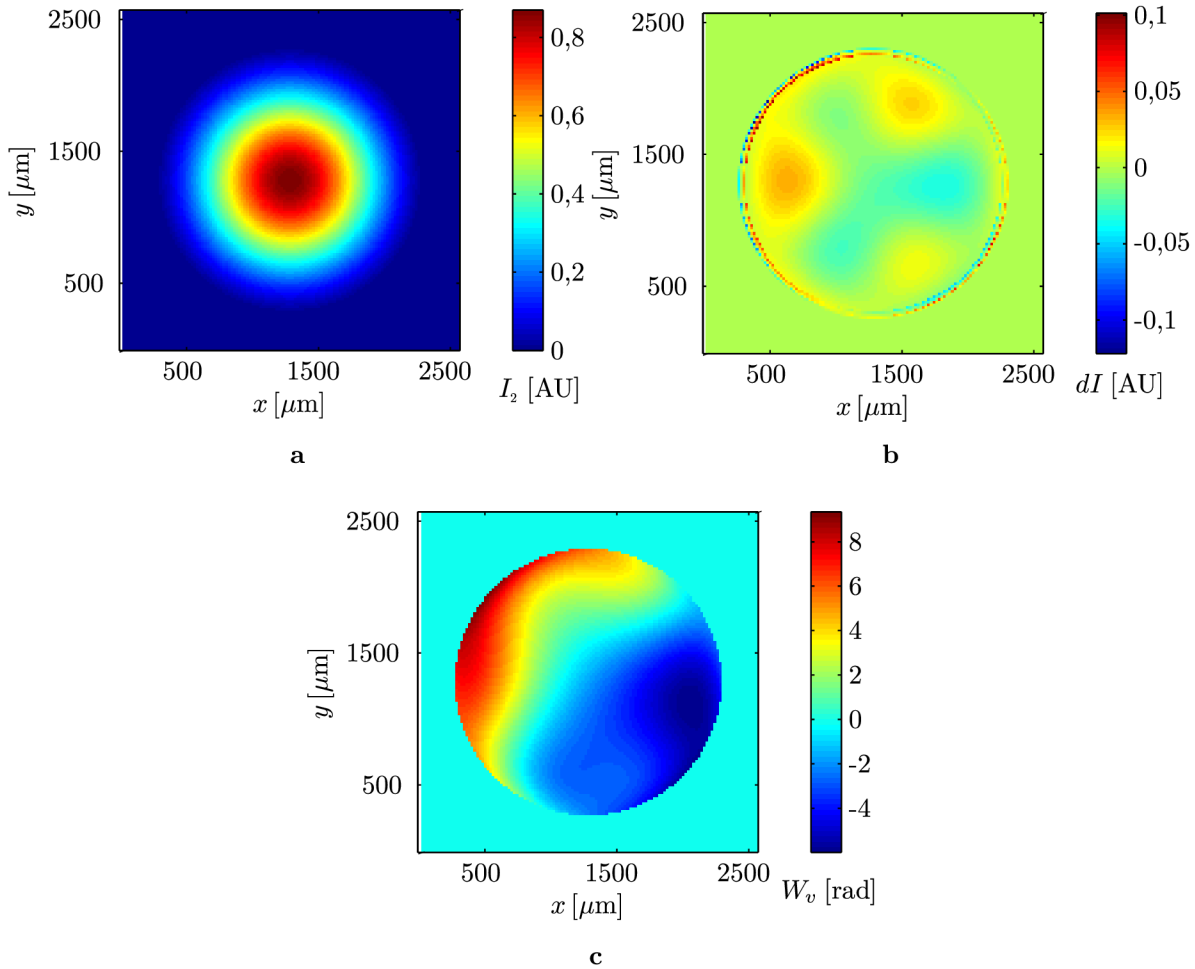
v části 3.7.1. Vypočítaný průběh intenzity, její derivace a fázové funkce v rovině  $z = z_0$  ukazuje obrázek 4.5.

Přesnost identifikace oblasti  $L$ , zahrnující nalezení poloměru  $R$  a souřadnic polohy středu  $\mathbf{S}$ , byla podrobně analyzována v části 3.7.1. Přesnost identifikace zde proto nebude znovu diskutována a pro další výpočty vezmeme za  $R$  a  $\mathbf{S}$  hodnoty vstupních parametrů. Přejdeme tedy k výpočtu pravé strany rovnice (4.15). Vypočítané hodnoty derivace intenzity  $dI(\mathbf{r}, z_0)$  byly aproximovány prvními 21 Zernikeovými polynomy postupem popsáním v odstavci 4.3.2. Získané hodnoty koeficientů  $d_i, i = 1, 2, \dots, J$  jsou uvedeny v tabulce 4.2.

Delaunayho triangulace a po částech lineární interpolace obrazu  $I_2$ , čili hodnot intenzity v rovině  $z = z_0$ , byla provedena pro 500 uzlů. Výsledný průběh interpolace včetně trojúhelníkové sítě a vyobrazení odchylek mezi vypočítanými a interpolovanými hodnotami intenzity ukazuje obrázek 4.6. Hodnota srovnávacího kritéria  $T(\tilde{\mathbf{I}}_2 - \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_2)$  vyšla menší než  $5 \times 10^{-3}$ . Výsledek poukazuje na zbytečně vysoký počet uzlů použitých pro segmentaci, pokud by postačovala hodnota kritéria 0,01. Dále byly spočítány jednotlivé prvky transformační matice  $\mathbf{M}$ . Výsledky výpočtu a porovnání s teoretickými hodnotami pro  $i, j = 2, 3, \dots, 6$  uvádí tabulka 4.3. Teoretické hodnoty byly získány dosazením kvadrátu amplitudové funkce  $A(\mathbf{r}, z_0)$  ze vztahu (4.21b) do rovnice (4.18) a analytickým výpočtem příslušného integrálu. Výsledné koeficienty  $c_j, j = 2, 3, \dots, J$  pro vyjádření fázové funkce, vypočtené podle vztahu (4.19) použitím numerického výpočtu transformační matice, jsou uvedeny v tabulce 4.2 a získaný průběh včetně vyobrazení odchylek mezi vypočítanými a vstupními hodnotami ukazuje obrázek 4.7. Hodnota kritéria  $T(\mathbf{W}_{2-21} - \mathbf{W}_v, \mathbf{W}_v)$  v tomto případě činí 0,14. Jelikož  $c_{v,1} = 0$ , nemusíme provádět novou rekonstrukci vstupních hodnot fázové funkce se zanedbáním prvního Zernikeova polynomu.

Přestože se některé prvky transformační matice, získané numerickým výpočtem, liší od teoretických hodnot, jak je patrné z tabulky 4.3, výsledné koeficienty Zernikeových polynomů (viz tabulka 4.2) se kromě stupně  $j = 7$  a  $j = 8$  přibližně shodují se vstupními hodnotami. I vzhledem k nízké hodnotě srovnávacího kritéria  $T(\mathbf{W}_{2-21} - \mathbf{W}_v, \mathbf{W}_v)$

#### 4.5. VÝSLEDKY EXPERIMENTŮ



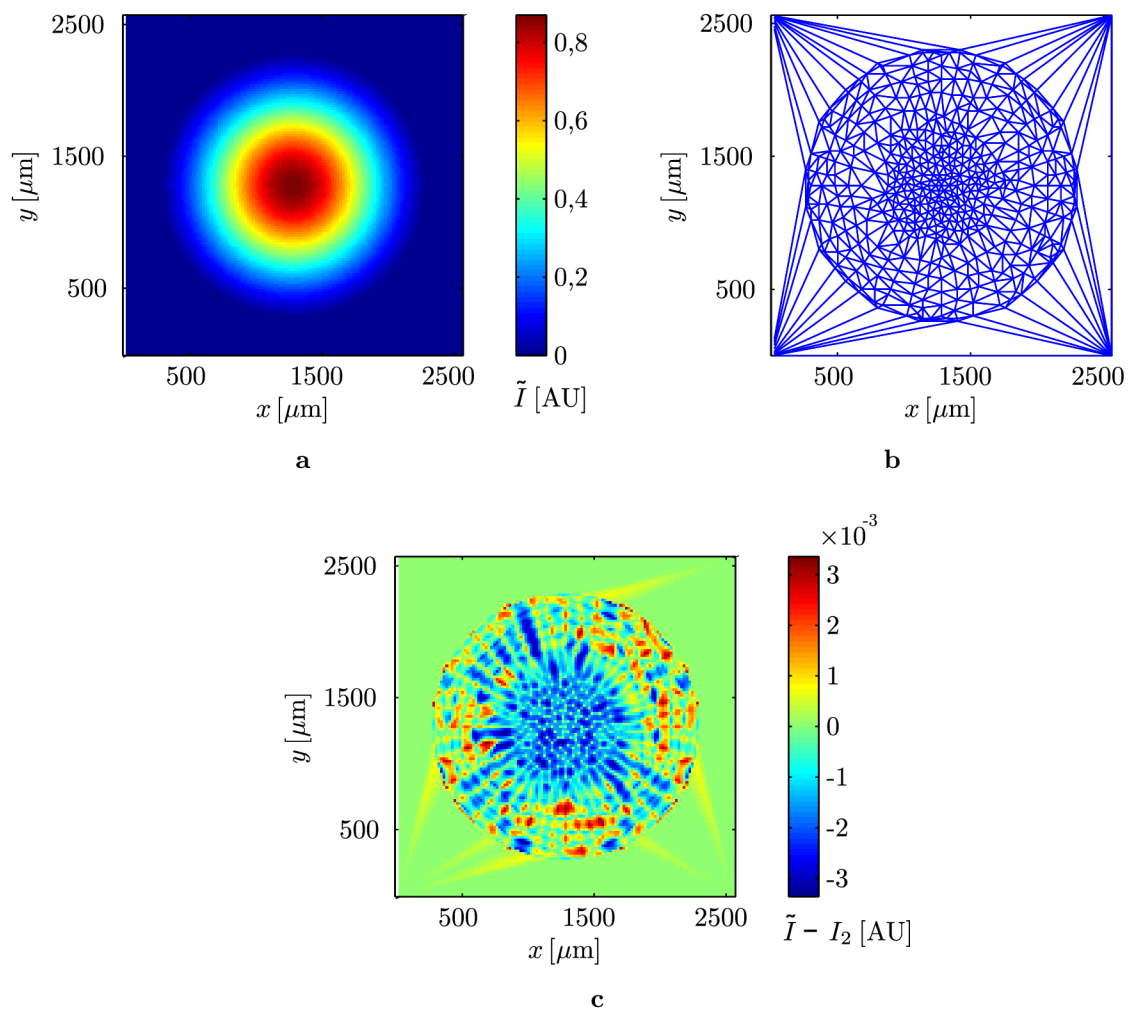
**Obrázek 4.5:** Vstupní data numerického experimentu pro rekonstrukci fázové funkce řešením TIE. a – záznam intenzity  $I_2$ , b – derivace intenzity  $dI$ , c – fázová funkce  $W_v$ .

**Tabulka 4.3:** Výpočet transformační matice  $M$ .

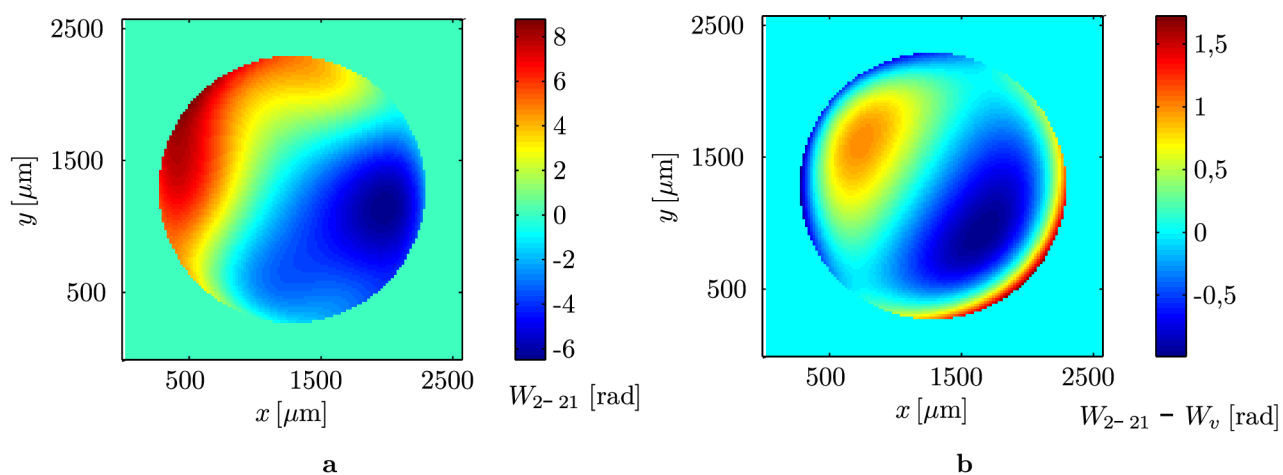
Numerický výpočet dosazením interpolační funkce $\tilde{I}_2$ do rovnice (4.18).						Analytický výpočet dosazením kvadrátu amplitudové funkce (4.21b) do rovnice (4.18).					
$j \backslash i$	2	3	4	5	6	$j \backslash i$	2	3	4	5	6
2	1,18	0,00	-0,08	0,05	-0,05	2	1,19	0	0	0	0
3	0,00	1,18	0,08	-0,05	-0,05	3	0	1,19	0	0	0
4	-0,08	0,08	3,85	-0,00	0,00	4	0	0	3,85	0	0
5	0,05	-0,05	0,00	1,93	0,00	5	0	0	0	1,93	0
6	-0,05	-0,05	0,00	0,00	1,93	6	0	0	0	0	1,93

byla procedura, popsaná v části 4.3, přijata pro přibližnou rekonstrukci fázové funkce z naměřených snímků intenzity.





**Obrázek 4.6:** Delaunayho triangulace a po částech lineární interpolace snímku  $I_2$  (viz obrázek 4.5a). a – výsledný průběh interpolace  $\tilde{I}_2$ , b – použitá síť s 500 uzly, c – průběh odchylek mezi hodnotami  $I_2$  a interpolací  $\tilde{I}_2$ .



**Obrázek 4.7:** Výsledek výpočtu fázové funkce. a – rekonstrukce fázové funkce, b – průběh odchylek mezi rekonstrukcí fázové funkce a vstupními hodnotami (viz obrázek 4.5c).

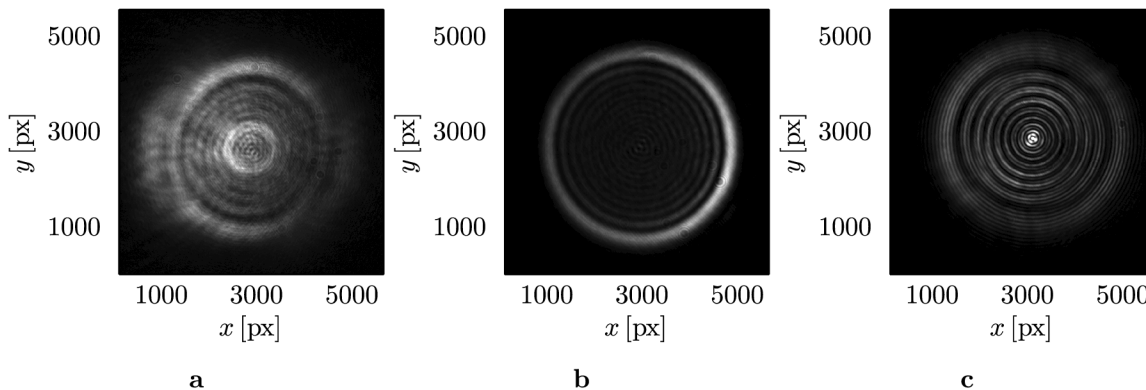
## 4.5.2. Výsledky měření objektivů

Následující část obsahuje výsledky měření stejných objektivů, jejichž vlnoplochy byly určovány metodou stříhové interferometrie v části 3.7.2. Pro záznam intenzity byla použita stejná kamera Softhard jako pro získání snímků stříhové interference. Pro pořízení všech snímků byl zisk kamery nastaven na hodnotu 0,0 dB a pro měření jedné sady objektivů i stejné nastavení expozičního času. Jiné parametry kamery nebyly upravovány. Pro každý objektiv byl získán snímek intenzity v rovinách  $z = z_0 - h$ ,  $z = z_0$  a  $z = z_0 + h$  posouváním kamery podél optické osy, jak již bylo zmíněno v odstavci 4.4. Získané snímky byly poté zpracovány použitím procedury, popsané v části 4.3, použitím 25 Zernikeových polynomů pro výpočet koeficientů  $d_i$  a transformační matice  $M$ .

Výsledky pro každou sadu objektivů jsou opět uvedeny v příslušné tabulce, jejíž forma je shodná jako pro zpracování dat, naměřených metodou stříhové interferometrie. Navíc je uveden posuv kamery  $h$  a kritérium  $D_{\min}$  pro provedení interpolace záznamu intenzity v rovině  $z = z_0$ . Aberační rozptyl  $\sigma_W^2$ , srovnávací kritéria  $T_{sf}$  a  $T_{lm}$  a rekonstrukce fázových funkcí  $W_{5-25}$  byly rovněž počítány stejným způsobem.

Vliv tvaru vlnoplochy světelné vlny po průchodu prostorovým filtrem a kolimační čočkou  $K_1$  na určení aberací, způsobených pouze testovaným objektivem, byl již rozveden při diskusi výsledků stříhové interferometrie. Při použití planparalelní desky jako děliče svazku nejsme limitováni její kvalitou, neboť případná nerovnoběžnost stěn desky pouze změní směr šíření světelné vlny, kterému můžeme přizpůsobit směr posuvu kamery. Výměna objektivů zde představuje stejný problém pro možnost srovnávání výsledků jako při záznamu stříhové interference sestavou 3.10b. Můžeme tedy očekávat, že pro fázovou funkci získáme nezanedbatelné hodnoty koeficientů Zernikeových polynomů stupně většího než čtyři.

Na obrázku 4.8 jsou snímky stop světelných svazků pro příslušné objektivy. Stopa na obrázku 4.8b připomíná Fresnelovu difrakci na kruhové apertuře [34] a vliv difrakce na výsledné rozložení intenzity bude jistě významný i pro případy zbylých dvou objektivů. Získané koeficienty  $c_j$  pro rekonstrukci fázové funkce tedy nemůžeme interpretovat jako stupně optických vad vlnoplochy světelné vlny transformované testovaným objektivem, což je zřejmé i z uspořádání experimentu, neboť studovaná vlna je transformována objektivem dvakrát a tvar její vlnoplochy určuje i povrch zrcadla.



**Obrázek 4.8:** Snímky stop světelných svazků. a – objektiv Plan 40×/0,65, b – Pl 40×/0,60, c – objektiv Plan 60×/0,85.

Tabulky 4.4, 4.5 a 4.6 ukazují výsledky měření objektivů, které byly testovány i metodou stříhové interferometrie. Ze zobrazených rekonstrukcí fázových funkcí příslušnými polynomy a z hodnot aberačního rozptylu  $\sigma_W^2$  je evidentní, že se vypočítané hodnoty některých koeficientů  $c_j$  a tedy i hodnoty fázových funkcí řádově liší od výsledků stříhové interferometrie. Příčinou je použité měřítko. Dosadíme-li do rovnice (4.15) za vlnové číslo  $k$  a do vztahu (4.10c) za vzdálenost  $h$  hodnoty vyjádřené v mikrometrech, pro korektní výpočet musíme ve stejných jednotkách vyjádřit i souřadnice bodů v poli hodnot  $l_l, l = 1, 2, 3$ , což můžeme provést, známe-li skutečnou vzdálenost mezi sousedními body (velikost pixelu). V mikrometrech pak získáme i poloměr  $R$ , který jako násobící faktor v druhé mocnině vystupuje v rovnici 4.19 pro výpočet koeficientů  $c_j$ .

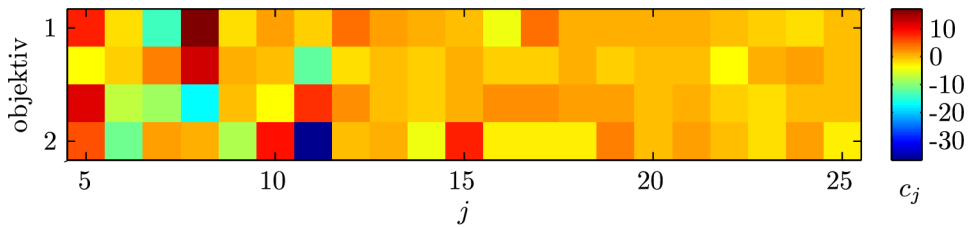
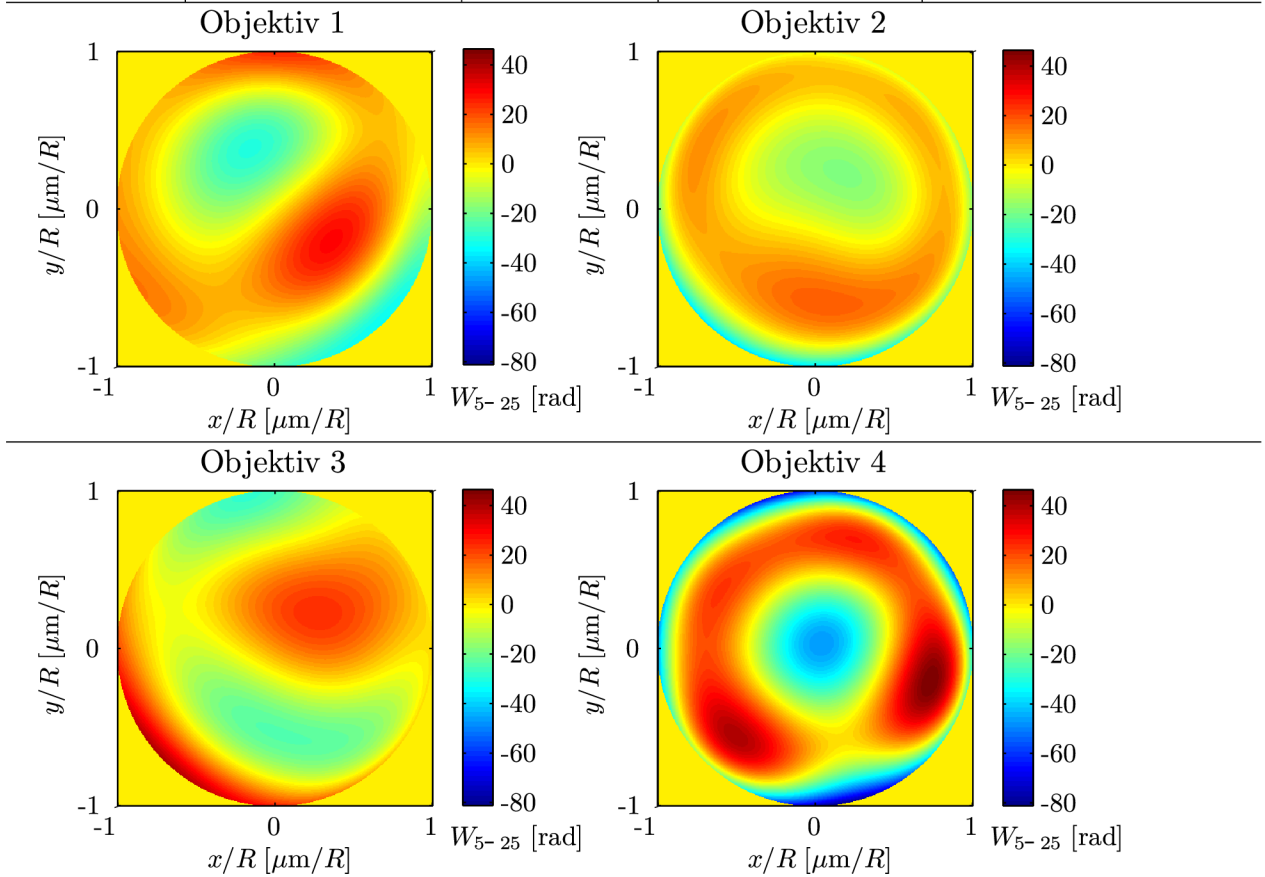
Na výraznou odlišnost od sférické plochy poukazují hodnoty kritéria  $T_{sf}$  větší než jedna, což je v souladu s již zmíněnou domněnkou, týkající se hodnot koeficientů Zernikeových polynomů stupně většího než čtyři. Pro diskusi vysokých hodnot kritérií  $T_{lm}$  platí zřejmě totéž, co v případě stříhové interferometrie v části 3.7.2, kde jsou komentovány výsledky měření použitím sestavy 3.10b. Do jaké míry určuje poloha zrcadla průběh fázové funkce, by však bylo vhodné ověřit rekonstruováním fázové funkce pro jeden objektiv při různých polohách zrcadla.

Při zaručení umístění zrcadla do stejné polohy vzhledem k ohniskové rovině objektivu v rámci testované sady stejným postupem jako v případě stříhové interferometrie pro sestavu 3.10b (viz část 3.7.2) můžeme i tuto metodu rekonstrukce fázové funkce použít pro srovnávání objektivů. Stejným způsobem jako pro stříhovou interferometrii můžeme podle hodnoty  $\sigma_W^2$  vybrat obektiv, pro který byla rekonstruována fázová funkce s nejmenším rozptylem aberací, nebo podle hodnoty  $T_{lm}$  vybrat objektiv, jejichž fázové funkce se nejlépe shodují.

#### 4.5. VÝSLEDKY EXPERIMENTŮ

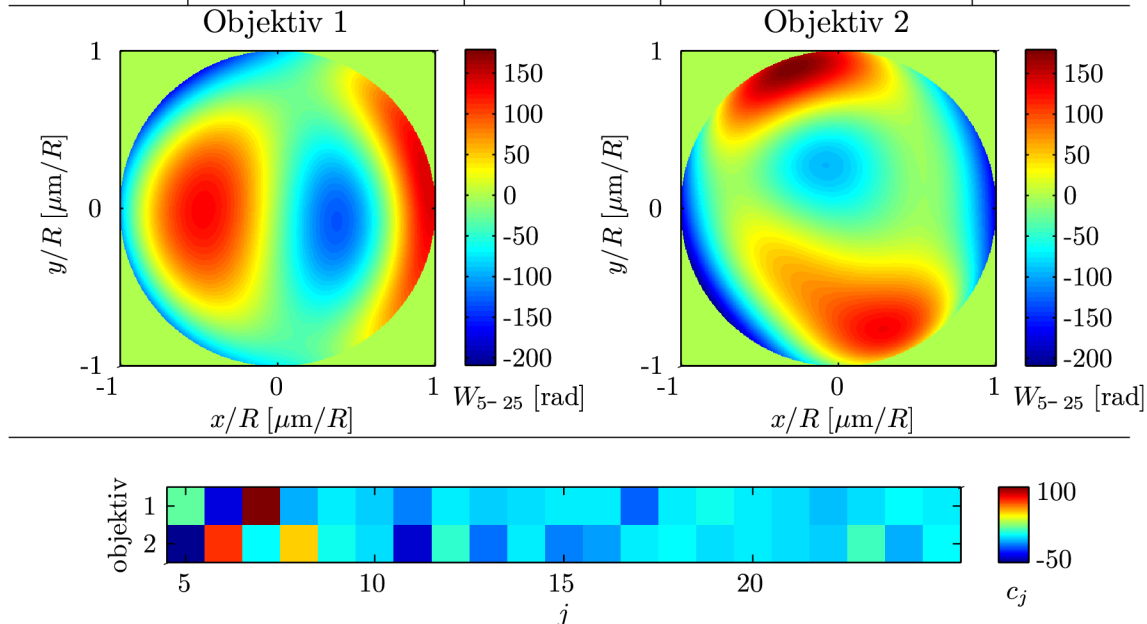
**Tabulka 4.4:** Výsledky měření vlnoplochy pro objektivy Plan 60×/0,85.

Objektiv	Záznam / stopa		Výpočet		$\sigma_W^2 \times 10^{-3}$		$T_{sf}$	$T_{lm}$		
	NA	expozice	$g$	$D_{\min}$	1	2	$l \setminus m$	1	2	3
0,85		430 $\mu\text{s}$	5 px		0,64	1,42				
M	60×	$h$ 2,0 mm	5 AU		0,35	1,07	4	1,87	1,94	2,10
kor.	Plan	$\tilde{R}$ 2,5 mm			0,63	1,54	3	1,47	2,23	
					1,83	1,20	2	1,06		

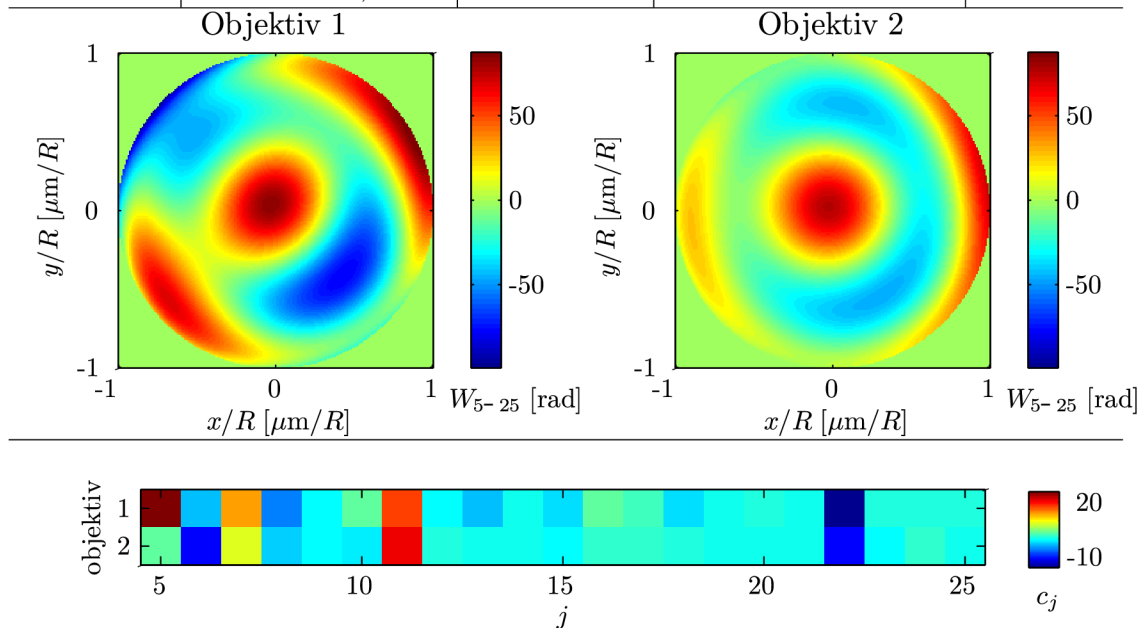


**Tabulka 4.5:** Výsledky měření vlnoplochy pro objektivy Plan 40×/0,65.

Objektiv	Záznam / stopa		Výpočet		$\sigma_W^2 \times 10^{-3}$	$T_{sf}$	$T_{lm}$	
NA 0,65	expozice	430 $\mu s$	$g$	5 px	1	15,43	1,65	$l \begin{matrix} m \\ 1 \end{matrix}$
M 40×	$h$	2,0 mm	$D_{\min}$	1 AU	2	16,11	1,09	2 1,60
kor. Plan	$\tilde{R}$	2,7 mm						

**Tabulka 4.6:** Výsledky měření vlnoplochy pro objektivy Pl 40×/0,60.

Objektiv	Záznam / stopa		Výpočet		$\sigma_W^2 \times 10^{-3}$	$T_{sf}$	$T_{lm}$	
NA 0,60	expozice	430 $\mu s$	$g$	5 px	1	1,51	1,25	$l \begin{matrix} m \\ 1 \end{matrix}$
M 40×	$h$	2,0 mm	$D_{\min}$	5 AU	2	0,79	1,08	2 0,68
kor. Pl	$\tilde{R}$	2,4 mm						



# Závěr

Cílem této diplomové práce bylo detailně se seznámit s problematikou testování kvality optických prvků a posléze vybrat vhodnou metodu pro měření vlnoplochy světelné vlny za účelem testování mikroskopových objektivů, navrhnout a sestavit měřící aparaturu, vypracovat postup zpracování a vyhodnocení naměřených dat a provést měření objektivů. Motivací pro tento úkol bylo získat vhodný nástroj především pro vzájemné srovnání mikroskopových objektivů, používaných v holografickém mikroskopu, kde je shoda z hlediska kvality používaných prvků klíčová pro správnou interpretaci naměřených snímků.

V první části této práce je uvedena definice a fyzikální význam vlnoplochy světelné vlny, které tvoří východisko pro další výklad. Dále jsou v první kapitole popsány použité nástroje pro statistické vyhodnocení a matematický popis vlnoplochy. V následující kapitole jsou uvedeny příklady metod využívajících vlnoplochu světelného svazku a její případnou rekonstrukci jako nástroj pro testování optických prvků.

Pro testování mikroskopových objektivů byly vybrány dvě metody rekonstrukce vlnoplochy světelné vlny, které jsou detailně popsány ve zbývajících částech práce. Jedná se o stříhovou interferometrii a řešení rovnice přenosu intenzity. Jako měřící systém byl pro stříhovou interferometrii zvolen Murtyův interferometr, představující zřejmě nejjednodušší nástroj v rámci tohoto typu interferenčních metod. Velký důraz je kladen na popis celého procesu rekonstrukce fázové funkce, který kombinuje řadu různých postupů výpočtu a zpracování naměřených dat včetně vlastních procedur. Oprávněnost použití vypracovaného postupu rekonstrukce fázové funkce je úspěšně demonstrována na numerickém experimentu.

Ve zbývajících částech, věnujících se stříhové interferometrii, je pak diskutována přesnost určení fázové funkce pro dvě modifikace měřící sestavy, které byly pro stříhovou interferometrii navrženy a které se liší uspořádáním a způsobem záznamu. V prvním případě jde o promítnutí interferogramu na stínítko a jeho následné vyfocení, v druhém případě jde o záznam na digitální kameru. Dále jsou zde uvedeny výsledky měření objektivů, používaných v holografickém mikroskopu. Na základě získaných výsledků bylo zjištěno, že pouze první sestava se záznamem na stínítko umožňuje testování a vzájemné srovnávání i objektivů s vysokou hodnotou numerické apertury ( $NA > 0,40$ ). Další výhodou měření pomocí této sestavy je její robustnost. Jedním z nedostatků je měření pouze malé části vlnoplochy světelné vlny transformované testovaným objektivem. I přes tento fakt byly mezi měřenými objektivy zjištěny průkazné rozdíly v průběhu rekonstruované fázové funkce.

Prostřednictvím druhé sestavy se záznamem interferogramů na digitální kameru byly změřeny objektivy s numerickou aperturou  $NA = 0,25$ . Pro tento případ je metoda pro srovnávání objektivů použitelná, ale zachovává si řadu praktických problémů, které činí samotné měření i následnou interpretaci výsledků značně komplikovanou.

V kapitole, věnující se rekonstrukci fázové funkce řešením rovnice přenosu intenzity, je značná část věnována matematickému odvození, z něhož plynou různé možnosti pro řešení této diferenciální rovnice. Vzhledem k charakteru naměřených snímků bylo pro řešení rovnice vybráno její vyjádření v reprezentaci systému ortogonálních funkcí. Kapitola dále obsahuje podrobný popis zpracování naměřených dat a výpočetních procedur, jejichž použití je následně demonstrováno prostřednictvím modelového experimentu s dobrou shodou získaných výsledků se vstupními údaji. Pomocí metody byly následně rekonstruovány průběhy fázových funkcí stejných objektů jako v případě stříhové interferometrie. Mezi objektivy byly zjištěny výrazné rozdíly v průběhu rekonstruovaných fázových funkcí. Vzhledem k tomu, že metoda má stejně jako druhá ze sestav pro stříhovou interferometrii řadu praktických problémů, případné rozdíly mohou být způsobeny její nízkou robustností.

Výhledově při dalším rozvíjení této problematiky by bylo vhodné zaměřit se na různé praktické problémy použití měřících sestav. Rovněž výpočetní postupy nabízejí řadu otázek, například vliv převzorkování na výsledné hodnoty fázové funkce, způsob sestavení kvadratického funkcionálu pro následný výpočet fázové funkce, apod. Zajímavé by bylo rovněž porovnat různé metody výpočtu fázové funkce pro stříhovou interferometrii i pro rovnici přenosu intenzity.

# Dodatky

## A. Aplikace sdružených gradientů

Metoda sdružených gradientů je iterační metoda pro nalezení minima kvadratického funkcionálu  $U$  (viz (3.6) nebo (3.12)). Při  $i$ -té iteraci je minimum  $U$  hledáno ve směru vektoru residua  $\mathbf{R}_i$ . Pro vektory  $\mathbf{R}_i$  platí [69]:

$$\mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_j = 0 \quad i \neq j. \quad (\text{A.1})$$

Směr pro nalezení nového minima je lineárně nezávislý na všech předchozích směrech, což přináší řadu užitečných vlastností. Podrobnosti o metodě sdružených gradientů uvádí v přehledné formě Shewchuk [69].

Nejprve stručně formulujme postup iterační metody. Řešíme následující soustavu lineárních rovnic (3.15):

$$\mathbf{A}\widehat{\mathbf{W}} = \mathbf{Y}. \quad (\text{A.2})$$

Mějme vektor  $\widehat{\mathbf{W}}_0$  počátečního odhadu hodnot funkce  $\widehat{W}$ . Postup iterační metody je pak následovný [61, 69]:

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{d}_0 = \mathbf{Y} - \mathbf{A}\widehat{\mathbf{W}}_0, \quad (\text{A.3a})$$

$$\alpha_i = \frac{\mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_i}{\mathbf{d}_i^T \mathbf{A} \mathbf{d}_i}, \quad (\text{A.3b})$$

$$\widehat{\mathbf{W}}_{i+1} = \widehat{\mathbf{W}}_i + \alpha_i \mathbf{d}_i, \quad (\text{A.3c})$$

$$\mathbf{R}_{i+1} = \mathbf{R}_i - \alpha_i \mathbf{A} \mathbf{d}_i, \quad (\text{A.3d})$$

$$\beta_i = \frac{\mathbf{R}_{i+1}^T \mathbf{R}_{i+1}}{\mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_i}, \quad (\text{A.3e})$$

$$\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{R}_{i+1} + \beta_i \mathbf{d}_i. \quad (\text{A.3f})$$

Iterování ukončíme, pokud pro zvolenou přesnost  $\varepsilon$  platí

$$\varepsilon^2 \mathbf{R}_0^T \mathbf{R}_0 > \mathbf{R}_{i+1}^T \mathbf{R}_{i+1}, \quad (\text{A.4})$$

případně počet iterací dosáhl stanoveného limitu  $i_{\max}$ .

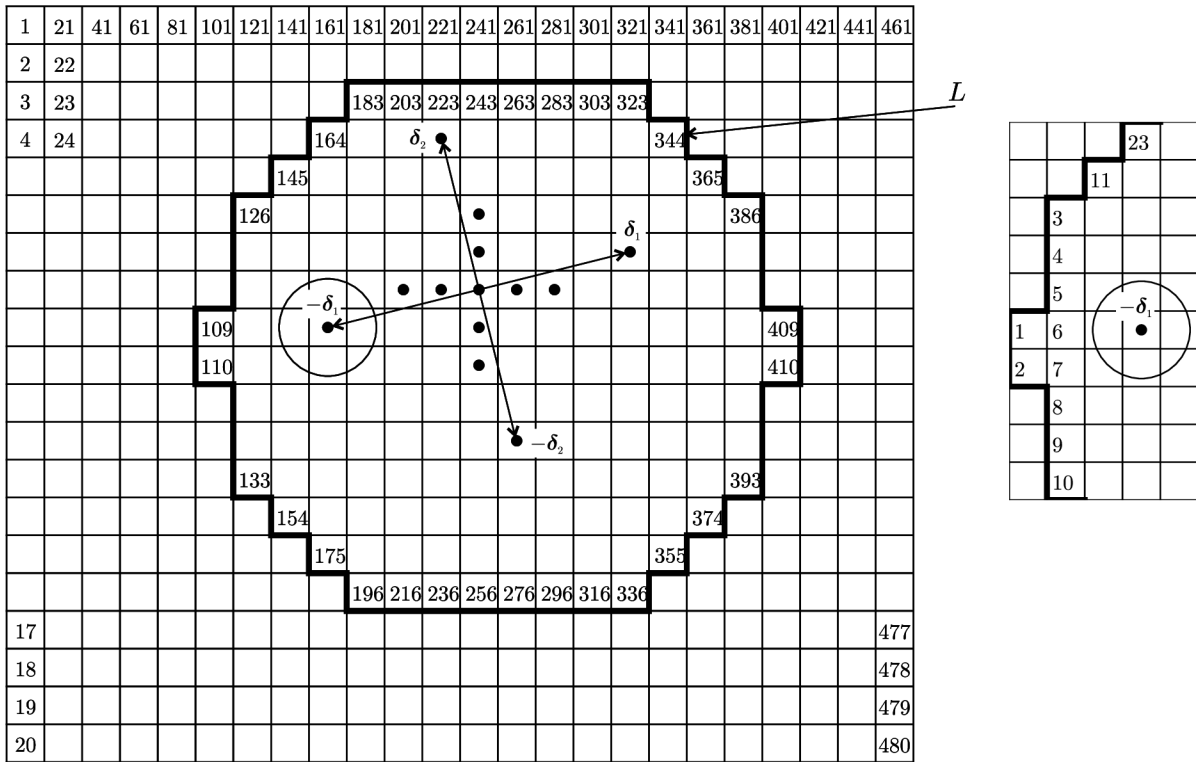
Výhoda sdružených gradientů dále spočívá v možnosti značně snížit náročnost výpočtů na paměť počítače. Řešení navrhuje Rektorys [61, kap. 30.6]. Matice  $\mathbf{A}$  v postupu (A.3) vystupuje vždy jako součin s vektorem  $\mathbf{d}$ , resp. pro výpočet  $\mathbf{R}_0$  s vektorem  $\mathbf{W}_0$ . Navrhne-li algoritmus generování vektoru  $\mathbf{A}\mathbf{d}$ , nemusíme mít uložené všechny prvky matice  $\mathbf{A}$ . Výhoda tohoto postupu se projeví zejména v případě, bude-li matice  $\mathbf{A}$  vysokého řádu a bude řídká. Následující text popisuje postup generování součinu  $\mathbf{A}\mathbf{d}$ , který



vykazoval největší úsporu doby výpočtu a náročnosti na paměť počítače při řešení konkrétního problému (3.15).

Nejprve popíšeme sestavení vektoru  $\widehat{\mathbf{W}}$ . Mějme matici  $\mathbf{W}$  s  $M_1$  řádky a  $M_2$  sloupce s hodnotami  $W(\mathbf{r}_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, M_1 M_2$ . Za index  $j$  zde budeme považovat pořadí prvku, číslované nejprve po sloupcích shora dolů a poté po řádcích zleva doprava, jak ukazuje obrázek A.1. Do vektoru  $\widehat{\mathbf{W}}$  zahrneme pouze  $N$  hodnot příslušejících oblasti  $L$  (vyznačené tlustou čarou), zahrnující  $V$  sloupců. Pořadí prvního sloupce zahrnutého v oblasti  $L$  označme  $N_1$ . Dále definujme vektory  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  s prvky  $u_k$  a  $v_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, V$  označující vždy pořadí prvního a posledního prvku ve sloupci  $k + N_1 - 1$ , a vektor  $\mathbf{n}$  s prvky  $n_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, V$  označující počet prvků příslušejících oblasti  $L$  ve všech předchozích sloupcích. Vektor  $\widehat{\mathbf{W}}$  pak sestavíme následujícím způsobem:

$$\widehat{\mathbf{W}} = (\widehat{W}_{u_1}, \widehat{W}_{u_1+1}, \dots, \widehat{W}_{v_1-1}, \widehat{W}_{v_1}, \widehat{W}_{u_2}, \widehat{W}_{u_2+1}, \dots, \widehat{W}_{v_2-1}, \widehat{W}_{v_2}). \quad (\text{A.5})$$



**Obrázek A.1:** Znázornění matice  $\mathbf{W}$  a číslování pořadí prvků. Dále je ukázáno vyčíslení vektorů  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{n}$  pro oblast  $L$  a příklad určení indexu  $p_{80,2}$ . Příslušný bod je v poli hodnot  $\mathbf{W}$  zakroužkován. Vpravo je pak ukázán výřez pole  $\mathbf{W}$  s indexy  $p_{lm}$ .

### A. Aplikace sdružených gradientů

Analogickou strukturu budou mít také vektory  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{W}_0$  a  $\mathbf{Y}$ . Nyní přeformulujeme soustavu rovnic (3.13):

$$\frac{\partial}{\partial \widehat{W}_l} (U_{LS} + R) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad (\text{A.6a})$$

$$\widehat{W}_l \equiv \widehat{W}(\mathbf{r}_l). \quad (\text{A.6b})$$

Jak již bylo uvedeno v části 3.2, získaná soustava rovnic reprezentována maticí  $\mathbf{A}$  bude řídká. Tabulka A.1 obsahuje nenulové prvky  $l$ -tého řádku, resp.  $l$ -té rovnice s příslušnými kartézskými souřadnicemi, indexy  $j_{lm}$  a hodnotami  $c_{lm}$  prvků matice  $\mathbf{A}$ , jak vyplývá z rovnic (3.8) a (3.14).

**Tabulka A.1:** Nenulové prvky  $l$ -tého řádku matice  $\mathbf{A}$ .

$m$	$x_{lm}, y_{lm}$	$j_{lm}$	$c_{lm}$
1	$x_{l1}, y_{l1}$	$j_{l1}$	$P(x_{l1}, y_{l1})P(x_{l2}, y_{l2}) + P(x_{l1}, y_{l1})P(x_{l3}, y_{l3}) + P(x_{l1}, y_{l1})P(x_{l4}, y_{l4}) + P(x_{l1}, y_{l1})P(x_{l5}, y_{l5}) + \mu[P(x_{l1}, y_{l1})P(x_{l6}, y_{l6}) + 4P(x_{l7}, y_{l7})P(x_{l8}, y_{l8}) + P(x_{l1}, y_{l1})P(x_{l9}, y_{l9}) + P(x_{l1}, y_{l1})P(x_{l10}, y_{l10}) + 4P(x_{l11}, y_{l11})P(x_{l12}, y_{l12}) + P(x_{l1}, y_{l1})P(x_{l13}, y_{l13})]$
2	$x_{l1} - \delta_{1,x}, y_{l1} - \delta_{1,y}$	$j_{l1} - M_1\delta_{1,x} + \delta_{1,y}$	$-P(x_{l1}, y_{l1})P(x_{l2}, y_{l2})$
3	$x_{l1} + \delta_{1,x}, y_{l1} + \delta_{1,y}$	$j_{l1} + M_1\delta_{1,x} - \delta_{1,y}$	$-P(x_{l1}, y_{l1})P(x_{l3}, y_{l3})$
4	$x_{l1} - \delta_{2,x}, y_{l1} - \delta_{2,y}$	$j_{l1} - M_1\delta_{2,x} + \delta_{2,y}$	$-P(x_{l1}, y_{l1})P(x_{l4}, y_{l4})$
5	$x_{l1} + \delta_{2,x}, y_{l1} + \delta_{2,y}$	$j_{l1} + M_1\delta_{2,x} - \delta_{2,y}$	$-P(x_{l1}, y_{l1})P(x_{l5}, y_{l5})$
6	$x_{l1} + 2, y_{l1}$	$j_{l1} + 2M_1$	$\mu P(x_{l1}, y_{l1})P(x_{l6}, y_{l6})$
7	$x_{l1} + 1, y_{l1}$	$j_{l1} + M_1$	$-2\mu[P(x_{l7}, y_{l7})P(x_{l8}, y_{l8}) + P(x_{l1}, y_{l1})P(x_{l6}, y_{l6})]$
8	$x_{l1} - 1, y_{l1}$	$j_{l1} - M_1$	$-2\mu[P(x_{l7}, y_{l7})P(x_{l8}, y_{l8}) + P(x_{l1}, y_{l1})P(x_{l9}, y_{l9})]$
9	$x_{l1} - 2, y_{l1}$	$j_{l1} - 2M_1$	$\mu P(x_{l1}, y_{l1})P(x_{l9}, y_{l9})$
10	$x_{l1}, y_{l1} + 2$	$j_{l1} + 2$	$\mu P(x_{l1}, y_{l1})P(x_{l10}, y_{l10})$
11	$x_{l1}, y_{l1} + 1$	$j_{l1} + 1$	$-2\mu[P(x_{l11}, y_{l11})P(x_{l12}, y_{l12}) + P(x_{l1}, y_{l1})P(x_{l10}, y_{l10})]$
12	$x_{l1}, y_{l1} - 1$	$j_{l1} + 1$	$-2\mu[P(x_{l11}, y_{l11})P(x_{l12}, y_{l12}) + P(x_{l1}, y_{l1})P(x_{l13}, y_{l13})]$
13	$x_{l1}, y_{l1} - 2$	$j_{l1} + 2$	$\mu P(x_{l1}, y_{l1})P(x_{l13}, y_{l13})$

Z tabulky A.1 je patrné, že ze známé hodnoty  $j_{l1}$  můžeme určit ostatních dvanáct indexů. Členy  $c_{lm}$  pak pronásobíme s příslušnými prvky vektoru  $\mathbf{d}$ . Oblast  $L$  je však nepravidelná a indexy  $j_{lm}$  neurčují pořadí příslušného prvku vektoru  $\mathbf{d}$ . Zavedme proto nový index  $p_{lm}$ , který je funkcí  $j_{lm}$ . Určeme nejprve pořadí  $o_{lm}$  sloupce, kde se nachází prvek s indexem  $j_{lm}$ , číslované vzhledem k oblasti  $L$ .

$$o_{lm} = \left( \frac{j_{lm}}{M_1} \right)_{\text{int}} - N_1 + 2, \quad (\text{A.7})$$

Známe-li hodnoty vektorů  $\mathbf{n}$  a  $\mathbf{u}$ , můžeme přímo určit index  $p_{lm}$ .

$$p_{lm} = n_{o_{lm}} + j_{lm} - u_{o_{lm}} + 1. \quad (\text{A.8})$$

Pro  $l$ -tý prvek vektoru  $\mathbf{Ad}$  pak platí:

$$(\mathbf{Ad})_l = \sum_{m=1}^{13} c_{lm} d_{p_{lm}}, \quad l = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{A.9})$$

Uvedme ještě sestavení vektoru pravých stran  $\mathbf{Y}$ , které tvoří hodnoty fázových rozdílů  $\Phi_1$  a  $\Phi_2$ . Z rovnice (3.8) plyne:

$$\begin{aligned} Y_l = & -\Phi_{1,j_{l1}} P(x_{l1}, y_{l1}) P(x_{l2}, y_{l2}) + \Phi_{1,j_{l3}} P(x_{l1}, y_{l1}) P(x_{l3}, y_{l3}) \\ & -\Phi_{2,j_{l1}} P(x_{l1}, y_{l1}) P(x_{l4}, y_{l4}) + \Phi_{2,j_{l5}} P(x_{l1}, y_{l1}) P(x_{l5}, y_{l5}), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$l = 1, 2, \dots, N.$$

Implementací uvedeného algoritmu do prostředí programu Matlab R2011a byla při určování průběhu vlnoplochy v části 3.7 dosažena průměrná doba výpočtu jedné iterace 0,13 s pro přibližně 50 000 rovnic. Parametry použitého počítače jsou uvedeny v části 3.7.1.

## B. Detekce stopy svazku

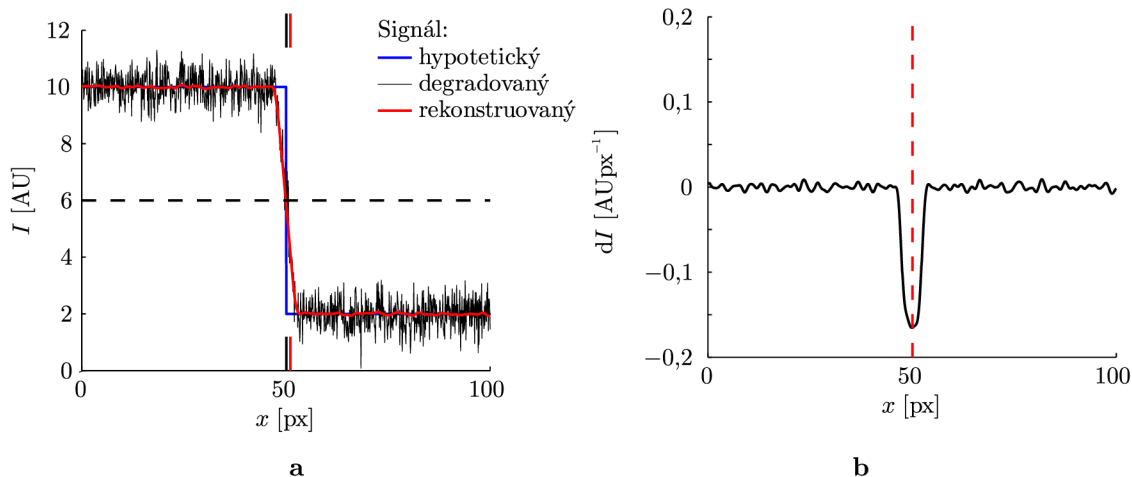
Následující část popisuje určení hranice stopy svazku v záznamu stříhového interferogramu a aplikaci Gaussovy-Newtonovy iterační metody pro výpočet parametrů nelineární regrese funkce.

Nalezení hranice stopy svazku, tj. hranice oblasti se zaznamenanou vyšší intenzitou světla, představuje segmentaci obrazu v podobě identifikace hran [23, kap. 10]. Postup pro nalezení hrany vysvětlíme na numerickém modelu záznamu intenzity. Hypotetický, prostorově ohraničený záznam intenzity světla popíšeme schodovitou funkcí se změněným rozsahem a aditivní konstantou, posunutou do bodu 50 px, jak ukazuje graf tlustou modrou čarou na obrázku B.1a. Při reálném záznamu dochází k degradaci šumem různého původu a hrany nejsou nikdy ostré. Degradovaný záznam s neostrými hranami simulujeme konvolucí s maskou aproximující Gaussovu funkci a k vypočtenému signálu přičtíme posloupnost vytvořenou pomocí generátoru náhodných čísel s normálním rozdělením pro vytvoření degradace gaussovským šumem. Výsledný signál ukazuje graf tenkou černou čarou na obrázku B.1a.

Z modelu reálného záznamu se nyní pokusme nalézt původní hranu schodovité funkce. Pro odstranění šumu použijeme konvoluci s maskou pro filtraci vysokých frekvencí (viz odstavec 3.3). Výsledek ukazuje graf červenou čarou na obrázku B.1a. Hranu nyní můžeme identifikovat průsečíkem rekonstruovaného signálu s vhodně zvolenou prahovou hodnotou. Z grafu je patrné, že průběh intenzity je v okolí hrany přibližně konstantní s různou hladinou. Za prahovou hodnotu pak zvolíme aritmetický průměr těchto dvou hladin. Druhou možností je výpočet numerické derivace [13] a identifikace hrany nalezením globálního minima. Výsledek výpočtu derivace ukazuje graf B.1b. Průběh derivace je upraven klouzavým průměrem 10 hodnot (vzdálenost mezi jednotlivými body je 0,1 px). Výsledná pozice hrany je v grafech vyznačena svislou černou čarou pro použití prahové hodnoty a červenou pro použití nalezení minima numerické derivace.

Generováním 100 posloupností náhodných čísel, rekonstrukcí signálu s různými hodnotami šumu a následných identifikací hrany oběma metodami byla vypočtena střední hodnota určení pozice hrany s intervalem spolehlivosti pro  $\alpha = 0,05$ . Použitím prahování byla získána pozice  $(50,1 \pm 0,1)$  px, použitím minima derivace  $(50,1 \pm 1,3)$  px. Metoda

## B. Detekce stopy svazku



**Obrázek B.1:** Model intenzity světla se skokovou změnou v bodě 50 px. a – grafy příslušných signálů. Přerušovanou vodorovnou čarou je vyznačena prahová hladina, přerušená svislá čára označuje vypočtenou pozici hrany použitím prahování (černá) a minima derivace (červená). b – klouzavý průměr výpočtu numerické derivace a nalezený extrém, označený červenou svislou čarou. Stejná pozice je zvýrazněna v grafu a.

prahování se vzhledem k menšímu rozptylu jeví jako robustnější, a proto byla použita při zpracování všech nasnímaných interferogramů při identifikaci stopy svazku.

Obrázek B.2 demonstruje použití výše uvedeného postupu pro identifikaci hranice stopy světelného svazku v záznamu stříhového interferogramu metodou prahování. Hranici kruhového tvaru stopy určíme následujícím způsobem. Odhadneme polohu středu stopy a z ní vedeme polopřímky pod určitými úhly, podél nichž si zobrazíme profil zaznamenaného signálu. Pro každý profil identifikujeme pozici hrany a výsledný soubor bodů bude určovat hranici stopy. Získanými body pak metodou nejmenších čtverců proložíme rovnici kružnice (3.18) a obdržíme poloměr a souřadnice středu stopy. Použitím identifikační proměnné  $x_3$  (3.19) získáme vektor posunutí  $\delta$  mezi oběma stopami.

Pro výpočet nelineární regresní funkce  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  (3.18) byla aplikována Gaussova-Newtonova iterační metoda [4, 50]. Pro stručné vysvětlení nejprve sestavme vektor  $\mathbf{Y}$  z naměřených hodnot v bodech  $\mathbf{x}_i, i = 1, 2, \dots, N^1$  a vektor  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{p})$  následujícím způsobem.

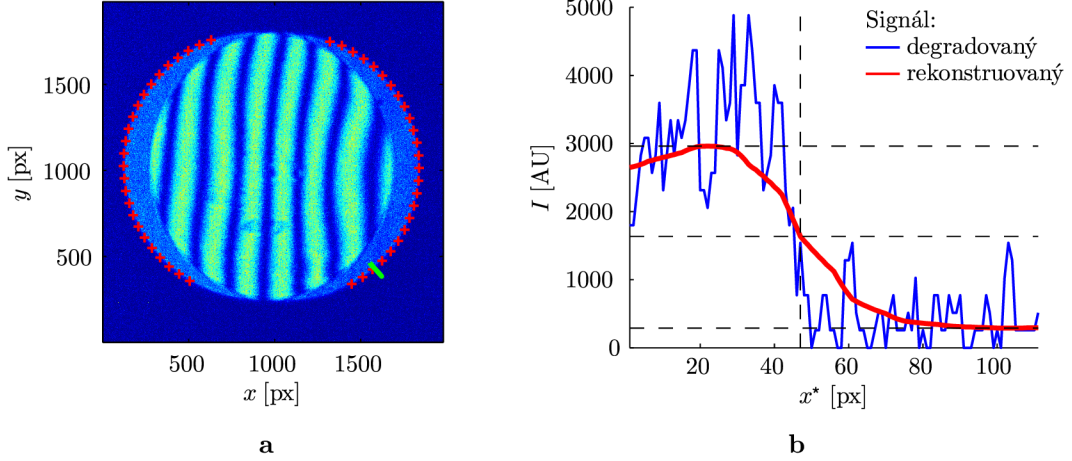
$$\eta_n(\mathbf{p}) = f(\mathbf{x}_n, \mathbf{p}), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{B.1})$$

Principem regresní analýzy je pak najít takový soubor parametrů  $\hat{\mathbf{p}}$ , pro který je vzdálenost bodů  $\mathbf{Y}$  a  $\boldsymbol{\eta}$  v  $N$ -rozměrném prostoru minimální [4, kap. 2.2]. Body  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{p})$  tvoří tzv. povrch míst řešení [50, kap. 8.4] (angl. expectation surface [4]), který je obecně zakřivený a nalezení bodu  $\boldsymbol{\eta}(\hat{\mathbf{p}})$  není triviální. Principem Gaussovy-Newtonovy iterační metody je aproximace povrchu míst řešení prvními dvěma členy Taylorova rozvoje (tedy lineární plochou) pomocí derivační matice  $\mathbf{X}$ .

Následující vztahy upravené podle [4, odst. 2.2.1] uvádějí ve stručné formě iterační postup. Vyjdeme z počátečního odhadu parametrů  $\mathbf{p}_0$ :

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{Y} - \boldsymbol{\eta}(\mathbf{p}_0), \quad (\text{B.2a})$$

<sup>1</sup>Jedná se o obecný popis. V případě použití rovnice kružnice ve tvaru (3.18) žádné hodnoty neměříme a vektor  $\mathbf{Y}$  obsahuje samé nuly.



**Obrázek B.2:** Zázornění detekce hrany v záznamu stříhové interference. a – záznam stříhové interference. Křížky označují hranici stopy obou svazků. Body v levé polovině interferogramu by byly označeny hodnotou identifikační proměnné  $x_3 = 0$ , body v pravé polovině hodnotou  $x_3 = 1$ . b – profil intenzity podél zelené čáry na obrázku a. Přerušovanými čarami jsou označeny příslušné hladiny intenzity a pozice hrany.  $x^*$  označuje souřadnici otočenou o určitý úhel vzhledem k  $x$ .

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{Y} - \boldsymbol{\eta}(\mathbf{p}_i), \quad (\text{B.2b})$$

$$\mathbf{X}_{i,nj} = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}_n, \mathbf{p})}{\partial p_j} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_i} \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, P, \quad (\text{B.2c})$$

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,i} \\ 0 \end{bmatrix} [\mathbf{Q}_{1,i} \quad \mathbf{Q}_{2,i}], \quad (\text{B.2d})$$

$$\boldsymbol{\xi}_i = \mathbf{R}_{1,i}^{-1} \mathbf{Q}_{1,i}^T \mathbf{R}_i, \quad (\text{B.2e})$$

$$\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{p}_i + \boldsymbol{\xi}_i. \quad (\text{B.2f})$$

Vztah (B.2e) představuje QR faktorizaci matice  $\mathbf{X}$  [4, dodatek 2]. Pro ukonečení iterování můžeme použít kritérium (A.4), případně limit počtu iterací  $i_{\max}$ .

## C. Nástroje statistické analýzy

Při výpočtu regresní analýzy, případně při kterémkoli jiném zpracování experimentálních dat, je výhodné získané výsledky kvantitativně zhodnotit použitím vhodných statistických nástrojů. V této práci byly použity nástroje regresní analýzy pro výpočet konfidenčních intervalů parametrů regresní funkce a testu hypotézy o odhadu parametrů. Následující vztahy jsou upraveny podle Batese [4].

Nejprve uveďme stručnou formulaci regresní analýzy. Mějme lineární regresní funkci  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  proměnných  $\mathbf{x}$  a  $P$  neznámých parametrů  $\mathbf{p}$ , které chceme určit. Předpokládejme, že jsme v  $N$  bodech  $\mathbf{x}_i, i = 1, 2, \dots, N$  určili hodnoty této funkce, které označíme  $Y_i(\mathbf{x}_i)$ . Pomocí metody nejmenších čtverců sestavíme přeuročenou soustavu lineárních rovnic pro odhad parametrů  $\hat{\mathbf{p}}$ :

$$\mathbf{X}\mathbf{p} = \mathbf{Y}, \quad (\text{C.1a})$$

$$X_{ij} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_i, \mathbf{p})}{\partial p_j}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, P, \quad (\text{C.1b})$$

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_P)^T, \quad (\text{C.1c})$$

$$\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)^T. \quad (\text{C.1d})$$

Odhad parametrů  $\hat{\mathbf{p}}$  pak můžeme určit přímo použitím následujícího vztahu:

$$\hat{\mathbf{p}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}. \quad (\text{C.2})$$

Dále definujeme odhad rozptylu odchylek  $s^2$ :

$$s^2 = \frac{\|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{p}}\|^2}{N - P}, \quad (\text{C.3})$$

kde čítec označuje kvadrát normy příslušného vektoru [61, kap. 30.3]. Nyní můžeme přistoupit k definici konfidenčních intervalů a formulaci testu hypotéz.

## Konfidenční intervaly parametrů

Konfidenční interval označuje rozmezí hodnot kolem odhadu příslušné statistiky (průměr, rozptyl, parametr, atd.), kde se s danou spolehlivostí nachází její přesná hodnota [50]. Interval parametru regresní funkce se spolehlivostí  $\alpha$  je roven

$$\hat{p}_j \pm s \sqrt{[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}]_{jj}} t(N - P, \alpha/2), \quad (\text{C.4})$$

kde  $t$  je hodnota studentova rozdělení se stupněm volnosti  $N - P$  a kvantilem  $\alpha/2$ .

## Test hypotézy o rovnosti souboru parametrů (test 1)

Testujeme hypotézu  $H_0: \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}_0$  na hladině významnosti  $\alpha$  proti alternativní hypotéze  $H_A: \hat{\mathbf{p}} \neq \mathbf{p}_0$ .  $\mathbf{p}_0$  označuje známý soubor parametrů, jehož shodu s  $\hat{\mathbf{p}}$  chceme testovat. Definujeme testační charakteristiku  $T_1$  a kritickou hodnotu  $T_{1,kr}$ :

$$T_1 = \frac{(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}_0)^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} (\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}_0)}{P s^2} \quad (\text{C.5a})$$

$$T_{1,kr} = F(P, N - P, \alpha), \quad (\text{C.5b})$$

kde  $F$  je hodnota Fisherova rozdělení s příslušnými stupni volnosti a kvantilem  $\alpha$ . Bude-li hodnota  $T_1$  větší než  $T_{1,kr}$ , pak zamítáme hypotézu  $H_0$  na dané hladině významnosti. Jinými slovy, mezi oběma soubory parametrů je signifikantní rozdíl.

## Test hypotézy o rovnosti jednotlivých parametrů (test 2)

Testujeme hypotézu  $H_0: \hat{p}_j = p_0$  na hladině významnosti  $\alpha$  proti alternativní hypotéze  $H_A: \hat{p}_j \neq p_0$ . Definujeme testační charakteristiku  $T_2$  a kritickou hodnotu  $T_{2,kr}$ :

$$T_2 = \frac{|\hat{p}_j - p_0|}{s \sqrt{[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}]_{jj}}}, \quad (\text{C.6a})$$

$$T_{2,kr} = t(N - P, \alpha/2), \quad (\text{C.6b})$$

Bude-li hodnota  $T_2$  větší než  $T_{2,kr}$ , pak zamítáme hypotézu  $H_0$  na dané hladině významnosti. Jinými slovy, mezi hodnotami parametrů je signifikantní rozdíl.

Závěrem ještě poznamenejme, že všechny uvedené vztahy platí i pro případ nelineární regresní funkce kromě vztahu pro výpočet  $\hat{\boldsymbol{p}}$ . V tomto případě je nutné řešit uvedenou soustavu rovnic použitím vhodné iterační metody.

# Literatura

- [1] Anděl J.: *Statistické metody*. MATFYZPRESS, Praha (2003).
- [2] Bajt S. *et al.*: Quantitative phase-sensitive imaging in a transmission electron microscope. *Ultramicroscopy*, 83 (1–2), 67–73 (2000).
- [3] Bal G.: *Introduction to Inverse Problems*. Columbia University, New York (2012).
- [4] Bates D. M., Watts D. G.: *Nonlinear Regression Analysis and Its Applications*. Wiley (1988).
- [5] Bernini M. B., Federico A., Kaufmann G. H.: Noise reduction in digital speckle pattern interferometry using bidimensional empirical mode decomposition. *Applied Optics*, 47 (14), 2592–2598 (2008).
- [6] Bernini M. B., Federico A., Kaufmann G. H.: Normalization of fringe patterns using the bidimensional empirical mode decomposition and the Hilbert transform. *Applied Optics*, 48 (36), 6862–6869 (2009).
- [7] Bertero M., Boccacci P.: *Introduction to Inverse Problems in Imaging*. Institute of Physics, London (1998).
- [8] Bertolotti M.: Twenty-five years of the laser. The European contribution to its development. *Optica Acta*, 32 (9–10), 961–980 (1985).
- [9] Born M., Wolf, E.: *Principles of Optics*, 7th ed. Cambridge University Press, Cambridge (1999).
- [10] Brodtkorb P. A.: *quadg/quad2dg* (1999, aktualizace 2005). Soubory pro spuštění v programu Matlab, verze R10 a vyšší. Dostupné na URL: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/33-quadgquad2dg> (květen 2013).
- [11] Campbell Ch. E.: A new method for describing the aberrations of the eye using Zernike polynomials. *Optometry and Vision Science*, 80 (1), 79–83 (2003).
- [12] Campos-García M., Díaz-Uribe R.: Irradiance transport equation from geometrical optics considerations. *Revista Mexicana de Física*, 52 (6), 546–549 (2006).
- [13] Čermák L., Hlavička R.: *Numerické metody*. Akademické nakladatelství CERM, Brno (2008).
- [14] Cornejo-Rodriguez A.: Ronchi test. In *Optical Shop Testing*, 3rd ed., Malacara D., ed. Wiley, New Jersey, s. 317–360 (2007).



- [15] Dai F. *et al.*: Modal wavefront reconstruction based on Zernike polynomials for lateral shearing interferometry: comparisons of existing algorithms. *Applied Optics*, 51 (21), 5028–5037 (2012).
- [16] Dai G.: Modal compensation of atmospheric turbulence with the use of Zernike polynomials and Karhunen–Loève functions. *Journal of the Optical Society of America A*, 12 (10), 2181–2193 (1995).
- [17] Dai G., Mahajan V. N.: Nonrecursive determination of orthonormal polynomials with matrix formulation. *Optics Letters*, 32 (1), 74–76 (2007).
- [18] Dai G., Mahajan V. N.: Orthonormal polynomials in wavefront analysis: error analysis. *Applied Optics*, 47 (19), 3433–3445 (2008).
- [19] Damerval Ch., Meignen S., Perrier V.: A fast algorithm for bidimensional EMD. *Signal Processing Letters*, 12 (10), 701–704 (2005).
- [20] Dorrer C., Zuegel J. D.: Optical testing using the transport-of-intensity equation. *Optics Express*, 15 (12), 7165–7175 (2007).
- [21] Fiala P., Richter I.: *Fourierovská optika a optické zpracování signálů*. Vydavatelství ČVUT (2004).
- [22] Frank J. *et al.*: Refractive index determination of transparent samples by noniterative phase retrieval. *Applied Optics*, 50 (4), 427–433 (2011).
- [23] Gonzalez R. C., Woods R. E.: *Digital Image Processing*, 2nd ed. Prentice Hall, New Jersey (2002).
- [24] Gureyev T. E., Nugent K. A.: Phase retrieval with the transport-of-intensity equation. II. Orthogonal series solution for nonuniform illumination. *Journal of the Optical Society of America A*, 13 (8), 1670–1682 (1996).
- [25] Harbers G., Kunst P. J., Leibbrandt G. W. R.: Analysis of lateral shearing interferograms by use of Zernike polynomials. *Applied Optics*, 35 (31), 6162–6172 (1996).
- [26] Hariharan P.: Multiple-pass interferometers. In *Optical Shop Testing*, 3rd ed., Malacara D., ed. Wiley, New Jersey, s. 259–274 (2007).
- [27] Hlaváč V., Sedláček M.: *Zpracování signálů a obrazů*. Vydavatelství ČVUT (2005)
- [28] Ichikawa K., Lohmann A. W., Takeda M.: Phase retrieval based on the irradiance transport equation and the Fourier transport method: experiments. *Applied Optics*, 27 (16), 3433–3436 (1988).
- [29] Janssen A. J. E. M., Dirksen P.: Computing Zernike polynomials of arbitrary degree using the discrete Fourier transform. *Journal of the European Optical Society – Rapid Publications*, 2, č. článku 07012 (2007).
- [30] Jiang M. *et al.*: Comparative analysis of Zernike aberrations generation with deformable mirrors for ocular adaptive optics. *Journal of Modern Optics*, 56 (16), 1741–1746 (2009).

## LITERATURA

- [31] Jeong T. M., Ko D., Lee J.: Method of reconstructing wavefront aberrations by use of Zernike polynomials in radial shearing interferometers. *Optics Letters*, 32 (3), 232–234 (2007).
- [32] Kemaq Q.: Two-dimensional windowed Fourier transform for fringe pattern analysis: Principles, applications and implementations. *Optics and Lasers in Engineering*, 45 (2), 304–317 (2007).
- [33] Kolman P., Chmelík R.: Coherence-controlled holographic microscope. *Optics Express*. 18 (21), 21990–22003 (2010).
- [34] Komrska J.: *Vlnová optika: difrakce světla*. Akademické nakladatelství CERM, Brno (2004).
- [35] Komrska J.: *Fourierovské metody v teorii difrakce a ve strukturní analýze*. Akademické nakladatelství CERM, Brno (2007).
- [36] Korn G. A., Korn T. M.: *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. Dover Publications, New York (2000).
- [37] Lakshminarayanan V., Fleck A.: Zernike polynomials: a guide. *Journal of Modern Optics*, 58 (7), 545–561 (2013).
- [38] Liška M.: Zjišťování tvaru vlnoplochy Murtyovým interferometrem. *Jemná mechanika a optika*, 36 (6), 177–180 (1990).
- [39] Liu W. *et al.*: Aerial image based technique for measurement of lens aberrations up to 37th Zernike coefficient in lithographic tools under partial coherent illumination. *Optics Express*, 17 (21), 19278–19291 (2009).
- [40] Mahajan V. N.: Orthonormal polynomials in wavefront analysis: analytical solution. *Journal of the Optical Society of America A*, 24 (9), 2994–3016 (2007).
- [41] Mahajan V. N.: Zernike Polynomial and Wavefront Fitting. In *Optical Shop Testing*, 3rd ed., Malacara D., ed. Wiley, New Jersey, s. 498–546 (2007).
- [42] Mahajan V. N.: Imaging characteristics of Zernike and annular polynomial aberrations. *Applied Optics*, 52 (10), 2062–2074 (2013).
- [43] Malacara D., ed.: *Optical Shop Testing*, 3rd ed. Wiley, New Jersey (2007).
- [44] Malacara D.: Twyman–Green interferometer. In *Optical Shop Testing*, 3rd ed., Malacara D., ed. Wiley, New Jersey, s. 46–96 (2007).
- [45] Malacara-Doblado D., Ghozeul I.: Hartmann, Hartmann–Schack, and other screen tests. In *Optical Shop Testing*, 3rd ed., Malacara D., ed. Wiley, New Jersey, s. 361–397 (2007).
- [46] Malacara D., Servín M., Malacara Z.: *Interferogram Analysis for Optical Testing*. Taylor & Francis (2005).
- [47] Malacara D., Welfrod W. T.: Star test. In *Optical Shop Testing*, 3rd ed., Malacara D., ed. Wiley, New Jersey, s. 398–434 (2007).

- [48] Mallick S., Malacara D.: Common-path interferometers. In *Optical Shop Testing*, 3rd ed., Malacara D., ed. Wiley, New Jersey, s. 97–121 (2007).
- [49] Mantravadi M. V., Malacara D.: Newton, Fizeau, and Haidinger interferometers. In *Optical Shop Testing*, 3rd ed., Malacara D., ed. Wiley, New Jersey, s. 1–45 (2007).
- [50] Meloun M., Militký J.: *Statistická analýza experimentálních dat*, 2. vyd. Academia, Praha (2004).
- [51] Míka S., Příkryl P., Brandner M.: *Speciální numerické metody*, 1. vyd. Vydavatelský servis, Plzeň (2006).
- [52] Murty M. V. R. K.: The use of a single plane parallel plate as a lateral shearing interferometer with a visible gas laser source. *Applied Optics*, 3 (4), 531–534 (1964).
- [53] Novák P.: Metody numerického výpočtu Zernikových polynomů. *Jemná mechanika a optika*, 58 (4), 108–111 (2013).
- [54] Ochoa N. A., Silva-Moreno A. A.: Normalization and noise-reduction algorithm for fringe patterns. *Optics Communications*, 270 (2), 161–168 (2007).
- [55] Paganin D., Nugent K. A.: Noninterferometric phase imaging with partially coherent light. *Physical Review Letters*, 80 (12), 2586–2589 (1998).
- [56] Pawlak M., Liao S. X.: On the recovery of a function on a circular domain. *Transactions on Information Theory*, 48 (10), 2736–2753 (2002).
- [57] Pinhasi S. V. et al.: Topography retrieval using different solutions of the transport intensity equation. *Journal of the Optical Society of America A*, 27 (10), 2285–2292 (2010).
- [58] Phillips K. G., Jacques S. L., McCarty O. J. T.: Measurement of single cell refractive index, dry mass, volume, and density using a transillumination microscope. *Physical Review Letters*, 109 (11), č. článku 118105 (2012).
- [59] Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P.: *Numerical Recipes in C*, 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge (1992).
- [60] Quiroga J. A., Gómez-Pedrero J. A., García-Botella Á.: Algorithm for fringe pattern normalization. *Optics Communications*, 197 (1–3), 43–51 (2001).
- [61] Rektorys K.: *Přehled užití matematiky I, II.* Prometheus, Praha (2000).
- [62] Roychoudhuri C.: Multiple-beam interferometers. In *Optical Shop Testing*, 3rd ed., Malacara D., ed. Wiley, New Jersey, s. 219–258 (2007).
- [63] Rimmer M. P., Wyant J. C.: Evaluation of large aberrations using a lateral-shear interferometer having variable shear. *Applied Optics*, 14 (1), 142–150 (1975).
- [64] Roddier F.: Wavefront sensing and the irradiance transport equation. *Applied Optics*, 29 (10), 1402–1403 (1990).

## LITERATURA

- [65] Saleh B. E. A., Malvin C. T.: *Základy fotoniky*, sv. 1. Wiley (1991), překlad Peřina J. *et al.*, MATFYZPRESS (1994).
- [66] Sakhi O.: *Image and Terrain Modeling Using Incremental Delaunay Triangulation* (2010). Soubory pro spuštění v programu Matlab, verze R2009a a vyšší. Dostupné na URL: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/26615-image-and-terrain-modeling-using-incremental-delaunay-triangulation> (březen 2013).
- [67] Servín M., Malacara D., Marroquin J. L.: Wave-front recovery from two orthogonal sheared interferograms. *Applied Optics*, 35 (22), 4343–4348 (1996).
- [68] Servín M., Marroquin J. L., Cuevas F. J.: Demodulation of a single interferogram by use of a two-dimensional regularized phase-tracking technique. *Applied Optics*, 36 (19), 4540–4548 (1997).
- [69] Shewchuk J. R.: *An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain*. Carnegie Mellon University, Pittsburgh (1994). Dokument dostupný na URL: <http://www.cs.cmu.edu/~quake-papers/painless-conjugate-gradient.pdf> (březen 2013).
- [70] Schreiber Horst, Bruning J. H.: Phase Shifting Interferometry. In *Optical Shop Testing*, 3rd ed., Malacara D., ed. Wiley, New Jersey, s. 547–666 (2007).
- [71] Schwiegerling J.: Representation of videokeratographic height data with Zernike polynomials. *Journal of the Optical Society of America A*, 12 (10), 2105–2113 (1995).
- [72] Singh C., Walia E.: Fast and numerically stable methods for the computation of Zernike moments. *Pattern Recognition*, 43(7), 2497–2506 (2010).
- [73] Slabý T. *et al.*: Off-axis setup taking full advantage of incoherent illumination in coherence-controlled holographic microscope. *Optics Express* (2013). Přijato k publikaci.
- [74] Soomart S., Paitoonwattanakij K.: Incremental Delaunay triangulation algorithm for digital terrain modelling. *Thammasat International Journal of Science and Technology*, 4 (2), 64–75 (1999).
- [75] Spring K. R., Davidson M. W.: *Concepts in Digital Imaging Technology. Quantum Efficiency*. URL: <http://micro.magnet.fsu.edu/primer/digitalimaging/concepts/quantumefficiency.html> (květen 2013).
- [76] Strojnik M., Paez G., Mantravadi M.: Lateral Shear Interferometers. In *Optical Shop Testing*, 3rd ed., Malacara D., ed. Wiley, New Jersey, s. 122–184 (2007).
- [77] Tay C. J. *et al.*: A new method for phase extraction from a single fringe pattern *Optics Communications*, 239 (4–6), 251–258 (2004).
- [78] ten Brummelaar T. A.: Modeling atmospheric wave aberrations and astronomical instrumentation using the polynomials of Zernike. *Optics Communications*, 132 (3–4), 329–342 (1996).

- [79] Tien Ch., Jyu S., Yang H.: A method for fringe normalization by Zernike polynomial. *Optical Review*, 16 (2), 173–175 (2009).
- [80] Teague M. R.: Image analysis via the general theory of moments. *Journal of the Optical Society of America*, 70 (8), 920–930 (1980).
- [81] Teague M. R.: Deterministic phase retrieval: a Green's function solution. *Journal of the Optical Society of America*, 73 (11), 1434–1441 (1983).
- [82] Totzeck M.: Interferometey. In *Springer Handbook of Lasers and Optics*, 2nd ed., Träger F., ed. Springer–Verlag, Berlin, s. 1255–1284 (2012).
- [83] Uhlířová H.: Mikroskopie časově proměnných biologických objektů. Dizertační práce, Ústav fyzikálního inženýrství FSI VUT v Brně (2010).
- [84] Villa J., García G, Gómez G.: Wavefront recovery in shearing interferometry with variable magnitude and direction shear. *Optics Communications*, 195 (1–4), 85–91 (2001).
- [85] Volkov V. V., Zhu Y., De Graef M.: A new symmetrized solution for phase retrieval using the transport of intensity equation. *Micron*, 33 (5), 411–416 (2002).
- [86] Wang H., Kemaio Q.: Frequency guided methods for demodulation of a single fringe pattern. *Optics Express*, 17 (17), 15118–15127 (2009).
- [87] Wang J. Y., Silva D. E.: Wave-front interpretation with Zernike polynomials. *Applied Optics*, 19 (9), 1510–1518 (1980).