

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta
Katedra fyziky

Diplomová práce

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta
Katedra fyziky

Studium spektrálních determinantů
nesamosdružených operátorů

Diplomová práce

Autor:	Bc. Tomáš Macháček
Studijní program:	S20FY002NP – PŘF
Studijní obor:	Učitelství fyziky a matematiky pro střední školy
Vedoucí práce:	RNDr. Jiří Lipovský, Ph.D.



Zadání diplomové práce

Autor: Tomáš Macháček

Studium: S20FY002NP

Studijní program: N0114A110004 Učitelství fyziky a matematiky pro střední školy

Studijní obor:

Název diplomové práce: Studium spektrálních determinantů nesamosdružených operátorů

Název diplomové práce Study of spectral determinants of non-selfadjoint operators
AJ:

Cíl, metody, literatura, předpoklady:

V různých fyzikálních aplikacích (např. kvantové teorii pole) se uplatňuje pojem tzv. spektrálního determinantu pro daný neomezený operátor. Spektrální determinant přiřazuje vhodně definovanou hodnotu součinu vlastních čísel daného operátoru. Pro tuto definici se využívá tzv. zeta funkce $\zeta(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-s}$, kde λ_j jsou vlastní hodnoty tohoto operátoru. Determinant je pak definován jako $\exp\{-\zeta'(0)\}$. Při výpočtu λ_j^{-s} pro komplexní s však využíváme komplexní logaritmus, jehož hodnota závisí na tom, jakou jeho větev zvolíme a kde tedy provedeme řez. V článku [1] bylo ukázáno, že takto vypočtené spektrální determinanty na zvoleném řezu závisí.

Úkolem studenta bude najít co nejobecnější podmínky na polohu vlastních čísel nesamosdruženého neomezeného operátoru, při kterých se spektrální determinant při dané změně řezu nemění, a podmínky, při kterých naopak ke změně výsledku dochází. Problém bude studovat nejdříve na konkrétních příkladech poloh vlastních čísel, poté obecněji.

[1] P. Freitas, J. Lipovský, Spectral determinant for the damped wave equation on an interval, Acta Physica Polonica A 136 (2019), 817 – 823, arXiv: 1908.06862 [math-ph], <http://dx.doi.org/10.12693/APhysPolA.136.817>

Garantující pracoviště: Katedra fyziky,
Přírodovědecká fakulta

Vedoucí práce: RNDr. Jiří Lipovský, Ph.D.

Oponent: doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D.

Datum zadání závěrečné práce: 4.4.2019

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a v seznamu použité literatury jsem uvedl všechny prameny, ze kterých jsem vycházel.

V Solnici dne

Poděkování

Moje největší poděkování patří vedoucímu práce panu doktorovi Jiřímu Lipovskému za výborné vedení diplomové práce a za velkou pomoc při studiu náročnějších témat. Mnoho jsem se jako jeho student naučil. Také děkuji své přítelkyni Anežce Hovorkové a své rodině za velkou podporu.

Anotace

MACHÁČEK, T. *Studium spektrálních determinantů nesamosdružených operátorů*. Hradec Králové, 2022. Diplomová práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí diplomové práce Jiří Lipovský. 95 s.

Tato diplomová práce se zabývá studiem spektrálních determinantů nesamosdružených operátorů. Teoretickou část práce tvoří veškerý matematický aparát, který je nutný k pochopení části praktické. Je rozdělen do šesti částí. Stěžejní je pak poslední část, kde jsou popsány právě operátory a jejich spektra. Praktický oddíl potom obsahuje příklady, kde zkoumám změny hodnot spektrálního determinantu nesamosdruženého operátoru v závislosti na různých řezech. Cílem práce je pak hledání co nejobecnější věty, která by závislost spektrálního determinantu na pozici řezu při daných vlastních hodnotách charakterizovala.

Klíčová slova

spektrum, operátor, spektrální determinant, zeta funkce

Annotation

MACHÁČEK, T. *Study of spectral determinants of non-selfadjoint operators*. Hradec Králové, 2021. Diploma Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Thesis Supervisor Jiří Lipovský. 95 p.

This diploma thesis deals with the study of spectral determinants of non-self-adjoint operators. The theoretical part of the work consists of all the mathematical apparatus that is necessary to understand the practical part. It is divided into six parts. The last part is crucial, where the operators and their spectra are described. The practical section then contains examples where I investigate changes in the values of the spectral determinant of a non-self-adjoint operator depending on different branch cuts of the logarithm. The aim of the work is to find the most general theorem that would characterize the dependence of the spectral determinant on the branch cut.

Key words

spectrum, operator, spectral determinant, zeta function

Obsah

Úvod	13
Teoretická část	14
1 Komplexní čísla	14
1.1 Zavedení komplexních čísel a jejich historie	14
1.2 Operace s komplexními čísly	14
1.2.1 Algebraický tvar komplexního čísla	15
1.2.2 Maticové zavedení komplexního čísla	15
1.3 Operace s komplexními čísly	16
1.3.1 Rovnost komplexních čísel	16
1.3.2 Součet komplexních čísel.....	16
1.3.3 Rozdíl komplexních čísel a číslo opačné.....	16
1.3.4 Součin komplexních čísel.....	16
1.3.5 Podíl komplexních čísel a číslo komplexně sdružené.....	17
1.3.6 Další operace s komplexními čísly	17
1.3.7 Mocniny komplexní jednotky	18
1.4 Absolutní hodnota komplexního čísla.....	19
1.4.1 Operace s absolutními hodnotami komplexních čísel.....	19
1.4.2 Komplexní jednotka.....	20
1.4.3 Geometrické znázornění komplexních čísel	20
1.5 Goniometrický tvar komplexního čísla.....	21
1.5.1 Převod komplexního čísla z algebraického tvaru na tvar goniometrický a naopak.....	21
1.6 Operace s komplexními čísly	22
1.7 Moivreova věta	22
1.8 Exponenciální tvar komplexního čísla	23
2 Číselné řady	24
2.1 Základní pojmy	24
2.1.1 Pojem číselné řady a posloupnosti částečných součtů	24
2.1.2 Pojem konvergence a divergence číselné řady	24
2.1.3 Aritmetická řada	24
2.1.4 Geometrická řada	25
2.1.5 Věta nutné podmínky konvergence.....	25

2.1.6	Harmonická řada	25
2.1.7	Grandiho řada	26
2.1.8	Zbytek řady po k-tém členu	26
2.1.9	Řada s nezápornými členy	26
2.1.10	Řady s libovolnými členy	26
2.1.11	Cauchyovská posloupnost	26
2.2	Aritmetika číselných řad	27
2.3	Kritéria konvergence	27
2.3.1	Srovnávací kritérium	27
2.3.2	Podílové kritérium též d'Alembertovo	27
2.3.3	Odmocninové kritérium též Cauchyovo	27
2.3.4	Cauchyovo kondenzační kritérium	28
2.3.5	Integrální kritérium	28
2.3.6	Leibnizovo kritérium	29
3	Funkce komplexní proměnné	30
3.1	Komplexní derivace a holomorfní funkce	30
3.2	Holomorfní funkce	30
3.3	Cauchyovy-Riemannovy podmínky	30
3.4	Harmonická funkce	31
3.5	Meromorfní funkce	31
3.6	Některé elementární funkce komplexní proměnné	31
3.6.1	Celočíselná mocninná funkce komplexní proměnné	31
3.6.2	Exponenciální funkce komplexní proměnné	31
3.6.3	Logaritmická funkce komplexní proměnné	31
3.6.4	Goniometrické funkce	33
4	Riemannova zeta funkce	34
4.1	Definice	34
4.2	Chování řady pro daná s podle klasické teorie řad	34
4.2.1	Chování na intervalu $-\infty; -1$	34
4.2.2	Chování pro $s = -1$	34
4.2.3	Chování na intervalu $-1; 1$	34
4.2.4	Chování pro $s = 1$	34
4.2.5	Chování na intervalu $1; \infty$	35

4.3	Riemannova hypotéza	35
4.4	Analytické prodloužení	35
4.4.1	Analytické prodloužení pro $s = -1$	36
4.4.2	Nalezení triviálních kořenů pro $\operatorname{Re}(s) < 0$	36
4.4.3	Hodnota $\zeta(0)$	36
4.4.4	Hodnota $\zeta'(0)$	37
5	Vybrané základní pojmy z lineární algebry	39
5.1	Matice	39
5.1.1	Čtvercová matice	39
5.1.2	Jednotková matice	39
5.1.3	Součet matic	39
5.1.4	Násobení matice číslem	39
5.1.5	Součin matic	40
5.1.6	Determinant matice	40
5.1.7	Regulární a singulární matice	40
5.1.8	Charakteristická matice a charakteristický polynom	40
5.1.9	Vlastní čísla a jejich násobnost, spektrum matice	40
5.1.10	Vlastní vektor	41
6	Operátory	42
6.1	Základní pojmy	42
6.1.1	Lineární (vektorový) prostor	42
6.1.2	Podprostor lineárního prostoru	42
6.1.3	Podprostor generovaný množinou	42
6.1.4	Lineárně nezávislá množina na lineárním prostoru	43
6.1.5	Báze lineárního prostoru	43
6.1.6	Dimenze lineárního prostoru	43
6.1.7	Lineární prostor se skalárním součinem neboli Pre-Hilbertův prostor a norma	43
6.1.8	Metrika indukovaná normou a úplnost	43
6.1.9	Banachův prostor	44
6.1.10	Hilbertův prostor	44
6.1.11	Operátor	44
6.1.12	Definiční obor operátoru	44

6.1.13	Vlastní čísla a vlastní vektor operátoru	44
6.2	Druhy operátorů	44
6.2.1	Lineární operátory	44
6.2.2	Operátor identity	45
6.2.3	Symetrický operátor	45
6.2.4	Sdružený neboli adjungovaný operátor	45
6.2.5	Samosdružený neboli samoadjungovaný operátor	45
6.2.6	Invertibilní operátor	45
6.3	Typy zobrazení podle pokrytí výchozí a cílové množiny	45
6.3.1	Surjektivní zobrazení neboli surjekce	45
6.3.2	Injektivní zobrazení neboli injekce	46
6.3.3	Bijektivní zobrazení neboli bijekce	46
6.4	Základní pojmy spektrální analýzy	47
6.4.1	Bodové spektrum operátoru	47
6.4.2	Reziduální spektrum operátoru	48
6.4.3	Spojitě spektrum operátoru	48
6.5	Věta o spektru operátoru	48
	Praktická část	49
7	Motivace	49
8	Vlastní hodnoty spektrálního determinantu jsou na imaginární ose	50
8.1	Příklad 1 – řez na záporné reálné ose	50
8.2	Příklad 1 – řez na kladné reálné ose	52
8.3	Příklad 2 – řez na záporné reálné ose	54
8.4	Příklad 2 – řez na kladné reálné ose	56
8.5	Příklad 3 – řez na záporné reálné ose	58
8.6	Příklad 3 – řez na kladné reálné ose	60
8.7	Příklad 4 – řez na záporné reálné ose	62
8.8	Příklad 4 – řez na kladné reálné ose	64
8.9	Příklad 5 – řez na záporné reálné ose	66
8.10	Příklad 5 – řez na kladné reálné ose	67
9	Vlastní hodnoty spektrálního determinantu jsou na několika polopřímkách	68
9.1	Příklad 1 – první řez	68
9.2	Příklad 1 – druhý řez	70

9.3	Příklad 2 – první řez.....	72
9.4	Příklad 2 – druhý řez.....	74
9.5	Příklad 3 – první řez.....	76
9.6	Příklad 3 – druhý řez.....	78
9.7	Příklad 3 – třetí řez.....	80
9.8	Příklad 3 – čtvrtý řez.....	82
10	Vlastní hodnoty spektrálního determinantu se blíží daným polopřímkám	84
10.1	Příklad 1 – řez na záporné reálné ose.....	84
10.2	Příklad 1 – řez na kladné reálné ose.....	89
11	Zobecnění předchozích výsledků	93
	Závěr.....	94
	Zdroje.....	95

Úvod

„Matematická fyzika je vědecká disciplína zabývající se aplikací matematiky k řešení fyzikálních problémů a s tím souvisejícímu (sic!) rozvíjení matematických metod vhodných pro takové aplikace.“ [37]

Tato diplomová práce je právě z oblasti matematické fyziky. Cílem její teoretické části je vystavět pojem spektrální determinant nesamoadjugovaného operátoru tak, aby čtenář po přečtení teoretické části mohl plynule přejít k části praktické.

Teoretická část nejprve pojednává o komplexních číslech, jejich historii, významu a aplikacích. Další oddíl detailně vysvětluje číselné řady a popisuje daná konvergenční kritéria. Práce s matematickými řadami je také jeden z důvodů, proč mě toto téma oslovilo. Počítání s nimi je nedílnou součástí praktické části. Následuje seznámení se základními pojmy komplexní analýzy, zejména pak tedy s funkcemi komplexní proměnné. V neposlední řadě teoretická část obsahuje stručné pojednání o Riemannově zeta funkci a v rychlosti připomíná stěžejní pojmy lineární algebry. Závěrečnou částí prvního oddílu je poté krok po kroku zavedený pojem spektrum operátoru.

Cílem praktické části je pak v návaznosti na článek [25] zkoumat závislost spektrálního determinantu pro daný operátor na řezu logaritmu. Praktická část má tři směry, které vyústily ve společné zobecnění.

V prvním směru máme vlastní hodnoty spektrálního determinantu na imaginární ose. Zkoumáme, jak se mění v determinant v závislosti na rozmístění vlastních hodnot.

V druhém směru máme vlastní hodnoty na několika polopřímkách dle daného předpisu a zkoumáme, jak se hodnota determinantu mění v závislost na úhlu, který polopřímky svírají s reálnou osou.

Třetí pohled praktické části na chování determinantu je ten, kdy se vlastní hodnoty daným polopřímkami pouze přibližují.

Výsledkem práce je pak zobecnění všech tří pohledů a sestavení věty, která takové vlastní hodnoty co nejobecněji popisuje.

Teoretická část

1 Komplexní čísla

1.1 Zavedení komplexních čísel a jejich historie

Historie komplexních čísel sahá až do starověkého Řecka. Starověcí matematici řešili různé úlohy, ve kterých se prakticky setkali s komplexními čísly, a to už před důkazem jejich existence. Jedním z nich byl například Herón, který narazil na odmocninu ze záporného čísla při výpočtu objemu komolého jehlanu. Další bádání vedla přes Diofanta, Leonarda Pisánského až po Gerolama Cardana, jemuž je objev komplexních čísel ve více zdrojích [2, 21] připisován, ačkoliv ne tak úplně právem. Niccolo Fontana, který přišel na řešení kubických rovnic, o které se Cardano tolik zajímal, nakonec prozradil, sice bez důkazu, Cardanovi tajemství onoho řešení. Ten měl slíbit, že tajemství nikdy neprozradí. Cardano však díky svým matematickým schopnostem uměl důkaz sestavit, a navíc vzorce, které dnes známe pod názvem "Cardanovy vzorce", vydal ve svém díle v roce 1545. Jako autora sice uvedl Fontanu, ale i tak se mezi nimi táhl věčný spor. Vítěz sporu je však evidentní již podle jména těchto vztahů. Toto dílo bylo první knihou o algebře psanou latinsky, měla ovšem velice nešťastnou a náročnou symboliku. V dnešní matematice samy „Cardanovy vzorce“ nehrají již tak velkou roli. Většinu kubických rovnic řešíme zejména za pomoci numerických metod. *„Velkou nevýhodou těchto vzorců je včetně jejich složitosti to, že v některých případech vyjadřují reálné kořeny kubické rovnice pomocí čísel imaginárních. Tento detail přitom nelze odstranit. Lze dokázat, že žádné jiné vzorce, které by tento nedostatek neměly, neexistují. Do doby, než byla otázka komplexních čísel v matematice dostatečně objasněna, znamenaly tyto případy značně nepřekonatelné těžkosti.“* [2, s. 19-20]

Právě Cardano ve svých spisech uvažoval zápis komplexního čísla, který je velice blízko zápisům dnešním: $z = a + b \cdot \sqrt{-1}$. [2]

1.2 Operace s komplexními čísly

Důvodů pro zavedení komplexních čísel je v matematice opravdu mnoho. Mají svá praktická využití v algebře, geometrii či fyzice. Na úvod uvedme jednoduchý středoškolský problém. Řešme rovnici: $x^2 + 1 = 0$.

Ze znalosti reálných čísel, popř. elementárních funkcí víme, že neexistuje takový čtverec čísla, aby zvětšený o jedna dal nulu, respektive, že daná funkce nemá průsečík s osou x . Na množině reálných čísel je tedy tento problém neřešitelný. Potřebovali bychom jako výsledek takové číslo x , pro které platí právě: $x = \sqrt{-1}$.

Právě odmocninu z mínus jedné označíme jako i a budeme ji nazývat imaginární jednotkou, z čehož vyplývá známý vztah: $i^2 = -1$.

Na základě těchto informací můžeme polynom $x^2 + 1$ rozložit na součin dvou závorek $(x - i) \cdot (x + i)$. [7, 21]

Komplexní čísla mají spousty „hezkých“ vlastností jako čísla reálná, ale mají i další, které jejich podobor nemá. Vyslovme ještě před zavedením komplexních čísel základní větu algebry: „Každý polynom nad komplexními čísly má kořen.“ Užití této věty zdaleka nekončí řešením algebraických rovnic, sahá daleko za hranice matematiky. První, kdo větu dokázal, byl německý matematik C. F. Gauss v roce 1799. [8, 21]

1.2.1 Algebraický tvar komplexního čísla

Komplexním číslem z nazvěme výraz ve tvaru: $z = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$. [27, s. 12] Člen a budeme nazývat reálnou částí, člen b budeme nazývat imaginární částí a číslo i je imaginární jednotka. Slovo „imaginární“ zavedl René Descartés, její označení i na místo $\sqrt{-1}$ zavedl Leonhard Euler. [22] Často se setkáváme s označením $\operatorname{Re}(z) = a$, $\operatorname{Im}(z) = b$. Množina všech komplexních čísel má značení $\mathbb{C}$. [27, s. 12]

Příklad: $z = 1 + 2i$, $\operatorname{Re}(z) = 1$; $\operatorname{Im}(z) = 2$.

1.2.2 Maticové zavedení komplexního čísla

Vyjděme z předchozího zavedení komplexního čísla $z = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$. Položme $z = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$ rovno $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^1$ a můžeme vyjádřit libovolné komplexní číslo jako matici 2×2 . Při pohledu na matici nikde neshledáváme imaginární jednotku. Ukažme, že je v matici obsažena, tedy, že je výše uvedený tvar matematicky korektní.

Vezměme číslo 1 a vyjádřeme jej jako matici tohoto typu. Víme, že je číslo 1 lze zapsat jako $1 + 0i$. Tedy $\operatorname{Re}(z) = a = 1$, zatímco $\operatorname{Im}(z) = b = 0$. Z toho vyplývá, že $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Díky tomuto faktu můžeme libovolné reálné číslo a vyjádřit následovně: $a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ a podobně i imaginární jednotku $i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Libovolné komplexní číslo, které by mělo pouze imaginární část, vyjádříme jako $bi = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$. Jak je již v práci zmíněno, komplexní čísla jsou spojena se vztahem $i^2 = -1$. Následně, ukážeme, že tento vztah platí i v maticových zápisech komplexního čísla:

¹ Přesněji zavedeme pojem matice a determinant v kapitole 5.

$i^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$. Je tedy jasné, jak se maticový tvar rozkládá na reálnou a imaginární část pomocí sčítání matic, které funguje tzv. „po složkách“: $a + bi = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. [27]

1.3 Operace s komplexními čísly

1.3.1 Rovnost komplexních čísel

Nechť jsou dána čísla $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, necht' jsou $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Necht' $z_0 = a + bi$ a dále $z_1 = c + di$. Rovnost $z_0 = z_1$ platí právě tehdy, když $a = c$ a zároveň $b = d$, tedy rovnají se reálné a imaginární složky čísel: $\text{Re}(z_0) = \text{Re}(z_1)$ a zároveň $\text{Im}(z_0) = \text{Im}(z_1)$. [7]

Příklad: $z_0 = 3 + i$, $z_1 = 3 + i$, pak $\text{Re}(z_0) = \text{Re}(z_1) = 3$ a $\text{Im}(z_0) = \text{Im}(z_1) = 1$.

1.3.2 Součet komplexních čísel

Nechť jsou dána čísla $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, necht' jsou $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Potom $z_0 = a + bi$ a dále $z_1 = c + di$. Pak operaci sčítání na komplexních číslech zavádíme následujícím způsobem: $z_0 + z_1 = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i = z_2$, komplexní číslo z_2 je tedy součet komplexních čísel z_0, z_1 . Tuto definici lze interpretovat tak, že součet dvou komplexních čísel je složen ze součtu reálných částí a součtu imaginárních částí: $\text{Re}(z_0 + z_1) + i \cdot \text{Im}(z_0 + z_1) = z_2$. [27, s. 15, upraveno]

Příklad: $(4 + i) + (-2 - 3i) = (4 + (-2)) + (i + (-3i)) = 2 - 2i$.

1.3.3 Rozdíl komplexních čísel a číslo opačné

Nechť jsou dána čísla $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, necht' jsou $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Pak řekneme, že komplexní číslo z_0' ve tvaru $z_0' = -a - bi$ je k číslu $z_0 = a + bi$ opačné, jestliže jeho reálná a imaginární část jsou tvořeny opačnými čísly k reálným číslům a, b . Potom operace odčítání komplexních čísel $z_1 = c + di$ a $z_0 = a + bi$ v tomto pořadí je definována jako součet čísel $z_1 + z_0'$, tedy $z_1 - z_0 = c + di + (-a - bi) = (c - a) + (-b + d)i = z_3$, kde z_3 je tedy rozdíl komplexních čísel z_1, z_0 v tomto pořadí. [27, s. 17, upraveno]

Příklad: $(4 + i) - (-2 - 3i) = (4 + i) + (2 + 3i) = (4 + 2) + (i + 3i) = 6 + 4i$.

1.3.4 Součin komplexních čísel

Nechť jsou dána čísla $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, necht' jsou $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Potom $z_0 = a + bi$ a dále $z_1 = c + di$. Pak operace násobení na komplexních číslech je stejná, jako násobení mnohočlenů, tedy: $z_0 \cdot z_1 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac + adi + bci -$

$$bd) = (ac - bd + adi + bci) = (ac - bd) + (ad + bc)i = z_4.$$

Komplexní číslo z_4 je tedy součin komplexních čísel z_0, z_1 . [7]

$$\text{Příklad: } (4 + i) \cdot (-2 - 3i) = -8 - 12i - 2i - 3i^2 = -5 - 14i.$$

1.3.5 Podíl komplexních čísel a číslo komplexně sdružené

Nechť jsou dána čísla $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, nechť jsou $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Potom řekneme, že číslo $\bar{z}_0$ ve tvaru $\bar{z}_0 = a - bi$ je číslem komplexně sdruženým k číslu $z_0 = a + bi$. Operaci dělení komplexních čísel $z_1 = c + di$ a $z_0 = a + bi$ v tomto pořadí zavedeme jako operaci, kde pro $a \neq 0 \vee b \neq 0$ platí: $\frac{z_1}{z_0} = \frac{z_1}{z_0} \cdot \frac{\bar{z}_0}{\bar{z}_0} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_0}{z_0 \cdot \bar{z}_0}$. Pomocí z výše zavedené operace násobení komplexních čísel a algebraického vzorce $\forall x, y \in \mathbb{R}: (x - y) \cdot (x + y) = x^2 - y^2$ je zřejmé, že jmenovatel tohoto zlomku je reálné číslo. Čítec nyní roznásobíme: $\frac{z_1 \cdot \bar{z}_0}{z_0 \cdot \bar{z}_0} = \frac{(c+di) \cdot (a-bi)}{(a+bi) \cdot (a-bi)} = \frac{ca-bci+dai+bd}{a^2+b^2} = \frac{(ac+bd)-(bc-da)i}{a^2+b^2} = z_5$. Komplexní číslo z_5 je podílem komplexních čísel z_1, z_0 v tomto pořadí. [7]

$$\text{Příklad: } \frac{4+i}{(-2-3i)} = \frac{4+i}{(-2-3i)} \cdot \frac{(-2+3i)}{(-2+3i)} = \frac{-8+12i-2i-3}{4-6i+6i+9} = \frac{-11+10i}{13} = -\frac{11}{13} + \frac{10}{13}i.$$

1.3.6 Další operace s komplexními čísly

Nechť jsou dána jiná libovolná $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ a čísla $m, n \in \mathbb{N}$, pak platí:

$$1. \quad z_0^m \cdot z_0^n = z_0^{m+n},$$

Důkaz: Zřejmý podle pravidel pro práci s mocninami.

$$2. \quad (z_0 \cdot z_1)^n = z_0^n \cdot z_1^n,$$

Důkaz: Zřejmý podle pravidel pro práci s mocninami.

$$3. \quad (z_0^m)^n = z_0^{mn},$$

Důkaz: Zřejmý podle pravidel pro práci s mocninami.

$$4. \quad z_0^n = \left(\frac{1}{z_0}\right)^{-n}, \text{ pro } n = 0: z_0^0 = 1,$$

Důkaz: Zřejmý podle pravidel pro práci s mocninami.

$$5. \quad \overline{-z_0} = -\bar{z}_0, \text{ kde } z_0 = a + bi, \text{ kde } a, b \in \mathbb{R},$$

Důkaz:

$$L: \overline{-(a + bi)} = \overline{-a - bi} = -a + bi.$$

$$P: \overline{-(a + bi)} = -(a - bi) = -a + bi.$$

$$L = P. \blacksquare$$

$$6. \quad \overline{z_0 + z_1} = \bar{z}_0 + \bar{z}_1, \text{ kde } z_0 = a + bi \text{ a } z_1 = c + di, \text{ kde } a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

Důkaz:

$$L: \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i$$

$$P: \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a - bi) + (c - di)} = (a + c) - (b + d)i$$

$$L = P. \blacksquare$$

$$7. \quad \overline{z_0} \cdot \overline{z_1} = \overline{z_0} \cdot \overline{z_1}, \text{ kde } z_0 = a + bi \text{ a } z_1 = c + di, \text{ kde } a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

Důkaz:

$$L: \overline{(a + bi) \cdot (c + di)} = \overline{ac + adi + bci - bd} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} \\ = (ac - bd) - (ad + bc)i$$

$$P: \overline{(a + bi)} \cdot \overline{(c + di)} = (a - bi) \cdot (c - di) = ac - adi - bci - bd \\ = (ac - bd) - (ad + bc)i$$

$$L = P. \blacksquare$$

$$8. \quad \overline{\left(\frac{z_0}{z_1}\right)} = \frac{\overline{z_0}}{\overline{z_1}}, \text{ kde } z_0 = a + bi \text{ a } z_1 = c + di, \text{ kde } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ a } c, d \neq 0,$$

Důkaz:

$$L: \overline{\left(\frac{a + bi}{c + di}\right)} = \overline{\left(\frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{c^2 + d^2}\right)} = \overline{\left(\frac{ac - adi + bci + bd}{c^2 + d^2}\right)} = \\ = \overline{\left(\frac{(ac + bd) - (ad - bc)i}{c^2 + d^2}\right)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{(ad - bc)}{c^2 + d^2}i$$

$$P: \frac{\overline{a + bi}}{\overline{c + di}} = \frac{a - bi}{c - di} = \frac{(a - bi) \cdot (c + di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + adi - bci + bd}{c^2 + d^2} = \\ = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{(ad - bc)}{c^2 + d^2}i$$

$$L = P. \blacksquare$$

$$9. \quad z_0 + \overline{z_0} = 2 \cdot \operatorname{Re}(z_0), \text{ kde } z_0 = a + bi, \text{ kde } a, b \in \mathbb{R},$$

Důkaz:

$$L: a + bi + a - bi = 2a$$

$$P: 2a$$

$$L = P. \blacksquare$$

$$10. \quad z_0 - \overline{z_0} = 2i \cdot \operatorname{Im}(z_0), \text{ kde } z_0 = a + bi, \text{ kde } a, b \in \mathbb{R}.$$

Důkaz:

$$L: a + bi - (a - bi) = 2bi$$

$$P: 2bi$$

$$L = P. \blacksquare$$

1.3.7 Mocniny komplexní jednotky

Necht' $n \in \mathbb{Z}$, potom:

1. $i^{4n} = 1,$
2. $i^{4n+1} = i,$
3. $i^{4n+2} = -1,$
4. $i^{4n+3} = -i.$

Pak lze říct, že množina čísel: $1; i; -1; -i$ tvoří s operací násobení cyklickou grupu², kde generátorem je prvek $\pm i$. Ukázka toho, jak prvek $\pm i$ generuje další prvky. [22]

$$i^1 = i; i^2 = -1; i^3 = -i; i^4 = 1; (-i)^1 = -i; (-i)^2 = -1; (-i)^3 = i; (-i)^4 = 1.$$

1.4 Absolutní hodnota komplexního čísla

Nechť je dáno komplexní číslo $z_0 = a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, potom absolutní hodnotou čísla z_0 , někdy nazývanou jako modul, myslíme: $|z_0| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ačkoliv mluvíme někdy o velikosti komplexního čísla, komplexní čísla nejdou uspořádat podle velikosti jako např. čísla reálná. Existuje i varianta, která obsahuje číslo komplexně sdružené, definujeme ji takto: $|z_0| = \sqrt{z_0 \cdot \bar{z}_0}$. Vraťme se ještě k našemu maticovému zápisu komplexního čísla, pomocí kterého můžeme zavést ještě jednu variantu definice absolutní hodnoty, a to za pomoci determinantu matice. $|z_0| = \sqrt{\det(z_0)}$. [7, 21, 27]

$$\text{Důkaz: } \det z_0 = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2 \rightarrow \sqrt{\det z_0} = \sqrt{a^2 + b^2}. \blacksquare$$

1.4.1 Operace s absolutními hodnotami komplexních čísel

Nechť jsou dána komplexní čísla $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, nechť jsou $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pak platí:

1. $|z_0| = |\bar{z}_0|$, kde $z_0 = a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$,

Důkaz:

$$L: |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$P: |\overline{a + bi}| = |a - bi| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$L = P$. ■

2. $|z_0| \cdot |z_1| = |z_0 \cdot z_1|$, kde $z_0 = a + bi$ a $z_1 = c + di$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

Důkaz:

$$L: |a + bi| \cdot |c + di| = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{a^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 + b^2 d^2}$$

$$\begin{aligned} P: |(a + bi) \cdot (c + di)| &= |ac + adi + bci - bd| = |(ac - bd) + (ad + bc)i| \\ &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\ &= \sqrt{a^2 c^2 - 2abcd + b^2 d^2 + a^2 d^2 + 2abcd + b^2 c^2} \\ &= \sqrt{a^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 + b^2 d^2} \end{aligned}$$

$L = P$. ■

3. $\frac{|z_0|}{|z_1|} = \left| \frac{z_0}{z_1} \right|$, kde $z_0 = a + bi$ a $z_1 = c + di$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

Důkaz:

² Grupa G je cyklická právě tehdy, když existuje $g \in G$ takové, že množina $G = \{g^k | k \in \mathbb{Z}\}$. Prvku g potom říkáme generátor. O teorii grup více v [22].

$$\begin{aligned}
L: \left| \frac{a+bi}{c+di} \right| &= \left| \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} \right| = \left| \frac{ac-adi+bci+bd}{c^2+d^2} \right| = \\
&= \left| \frac{(ac+bd) - (ad-bc)i}{c^2+d^2} \right| = \frac{\sqrt{(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2}}{c^2+d^2} = \\
&= \frac{\sqrt{a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2}}{c^2+d^2} = \frac{\sqrt{(c^2+d^2) \cdot (a^2+b^2)}}{c^2+d^2} = \\
&= \frac{\sqrt{(c^2+d^2) \cdot (a^2+b^2)}}{\sqrt{c^2+d^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}} = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{\sqrt{(c^2+d^2)}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}} \\
P: \frac{|a+bi|}{|c+di|} &= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}
\end{aligned}$$

$L = P$. ■

4. $|z_0| - |z_1| \leq |z_0 + z_1|$, kde $z_0 = a + bi$ a $z_1 = c + di$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

5. $|z_0 + z_1| \leq |z_0| + |z_1|$ kde $z_0 = a + bi$ a $z_1 = c + di$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Důkazy obou výše uvedených tvrzení vyplývají z trojúhelníkové nerovnosti.

1.4.2 Komplexní jednotka

Komplexní jednotkou nazýváme komplexní číslo z_0 , pro které platí: $|z_0| = 1$.
"Množina všech komplexních jednotek je jednotková kružnice se středem v počátku. Pěkná vlastnost těchto čísel je, že když je mezi sebou násobíme, dostáváme jen další komplexní jednotky." [27, s. 5]

Příklad:

$$z_0 = \frac{1}{i} \rightarrow |z_0| = \left| \frac{1}{i} \cdot \left(\frac{-i}{-i} \right) \right| = \left| \frac{-i}{1} \right| = |-i| = 1$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \rightarrow |z_1| = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$$

$$z_0 \cdot z_1 = \frac{1}{i} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -i \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \rightarrow |z_0 \cdot z_1| = 1$$

1.4.3 Geometrické znázornění komplexních čísel

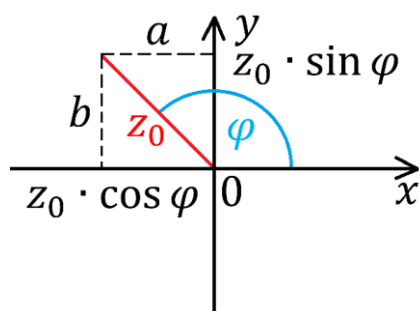
Komplexní čísla můžeme zobrazit do roviny pomocí zobrazení $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f: (a, b) \rightarrow a + bi$, tedy uspořádané dvojice reálných čísel, která se zobrazí jako číslo komplexní. Tuto rovinu budeme označovat jako Gaussovu rovinu. Ve frankofonní literatuře se můžeme setkat s názvem Argandova rovina. V Gaussově rovině je osa x takzvanou reálnou osou, osa y je takzvanou imaginární osou. [7]
 Zajímavým příkladem je $z = \infty$. Představme si, že máme nad komplexní rovinou kouli, která se jižním pólem dotýká v počátku. Spojením libovolného komplexního

číslo z_0 z komplexní roviny se severním pólem tzv. Riemannovy sféry dostaneme na kouli číslo z_0' , jež je dáno jednoznačně. Potom právě číslo $z = \infty$ je severní pól této koule. [34]

V Gaussově rovině má využití hlavně absolutní hodnota komplexního čísla, která znázorňuje vzdálenost od počátku. Absolutní hodnota rozdílu komplexních čísel označuje jejich vzdálenost v komplexní rovině.

1.5 Goniometrický tvar komplexního čísla

Algebraické zápisy komplexních čísel nejsou ale pro všechny operace vždy ty nejvýhodnější. Komplexní číslo $z_0 = a + bi$ lze zapsat i v jiné formě. Této formě budeme říkat goniometrický tvar: $z_0 = |z_0| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$, kde je $\varphi = \arg(z_0)$ a označujeme jej jako argument komplexního čísla a $\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$. Goniometrický tvar je dobré reprezentovat obrázkem, protože má skvělou geometrickou interpretaci. Absolutní hodnota čísla z_0 je délka úsečky od počátku k danému z_0 , a ta svírá s kladnou reálnou osou úhel φ . [7]



Obrázek 1 - Goniometrický tvar komplexního čísla
[17]

1.5.1 Převod komplexního čísla z algebraického tvaru na tvar goniometrický a naopak

Nechť je dáno komplexní číslo $z_0 = a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Ukažme, jak převedeme tento tvar na tvar goniometrický.

$$z_0 = |z_0| \cdot \left(\frac{a}{|z_0|} + \frac{bi}{|z_0|} \right) = |z_0| \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{bi}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = |z_0| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

Pokud se podíváme na obrázek 1, vidíme, že $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ je v našem pravoúhlém trojúhelníku přilehlá ku přeponě, tedy kosinus. Analogicky pak $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ je v našem pravoúhlém trojúhelníku protilehlá ku přeponě, tedy sinus. Připomeňme, že $\sqrt{a^2 + b^2} = |z_0|$. Získat z goniometrického tvaru tvar algebraický je mnohem jednodušší. Vypočítáme příslušné hodnoty sinu a kosinu.

1.6 Operace s komplexními čísly

Pro sčítání a odčítání je vždy výhodnější použít algebraický tvar. Ovšem pro násobení a dělení je praktičtější goniometrický tvar. Mějme tato komplexní čísla $z_0 = |z_0| \cdot (\cos \varphi_0 + i \cdot \sin \varphi_0)$ a $z_1 = |z_1| \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)$, potom platí:

1. $z_0 \cdot z_1 = |z_0 \cdot z_1| \cdot [\cos(\varphi_0 + \varphi_1) + i \cdot (\sin \varphi_0 + \varphi_1)],$
2. $\frac{z_0}{z_1} = \left| \frac{z_0}{z_1} \right| \cdot [\cos(\varphi_0 - \varphi_1) + i \cdot (\sin \varphi_0 - \varphi_1)],$
3. $\frac{1}{\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi} = \frac{\cos 0 + i \cdot \sin 0}{\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi} = \cos(0 - \varphi) + i \sin(0 - \varphi) = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi).$

Věty uvedeme bez důkazů. [7]

1.7 Moivreova věta

Uvažujme součin komplexních čísel $z_0 \cdot z_1 \cdot \dots \cdot z_{n-1}$ v goniometrickém tvaru: $|z_0| \cdot (\cos \varphi_0 + i \cdot \sin \varphi_0) \cdot |z_1| \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1) \cdot \dots \cdot |z_n| \cdot (\cos \varphi_n + i \cdot \sin \varphi_n)$. „Rovná-li se každý z těchto činitelů číslu $r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$, tzn. je-li $z_1 = z_2 = \dots = z_n = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$.“ [7, str. 54] Odtud plyne: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z = (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ platí: $[r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$. „Dosadíme-li sem $r = 1$, obdržíme následující tvrzení, tzv. Moivreovu větu, která je pojmenovaná po francouzském matematikovi jménem A. de Moivre již počátkem 18. století.“ [3, str. 54] $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \varphi \in \mathbb{R}$ platí: $(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi$

Důkaz provedeme matematickou indukcí. Dokazování matematickou indukcí spočívá ve třech krocích. Nejprve vždy uvažujeme, zda daný vztah funguje pro nejmenší n , které bývá zpravidla 1. Poté uvažujeme, že problém platí pro libovolné $k \in \mathbb{N}$. Této úvaze říkáme tzv. indukční předpoklad. Ten využijeme v posledním kroku, kdy dokážeme, že problém funguje i pro $k + 1$.

Důkaz: $\forall n \in \mathbb{N}: (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi,$

1. $n = 1: (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^1 = \cos 1\varphi + i \cdot \sin 1\varphi,$
2. $n = k: (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^k = \cos k\varphi + i \cdot \sin k\varphi,$
3. $n = k + 1: (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^{k+1} = (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^k \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$
 $= (\cos k\varphi + i \cdot \sin k\varphi) \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ /využití indukčního předpokladu
 $= \cos k\varphi \cdot \cos \varphi - \sin k\varphi \cdot \sin \varphi + i(\sin k\varphi \cdot \cos \varphi + \cos k\varphi \cdot \sin \varphi)$ ³
 $= \cos(k\varphi + \varphi) + i \cdot \sin(k\varphi + \varphi)$
 $= \cos(\varphi(k + 1)) + i \cdot \sin(\varphi(k + 1)). \blacksquare$

³ Použijeme goniometrické vzorce pro sinus a kosinus součtu argumentů. Připomeňme:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

1.8 Exponenciální tvar komplexního čísla

Definujme funkci, kterou nazveme komplexní exponenciála; $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$, která všem komplexním číslům $z_0 = a + bi$ přiřadí $e^a \cdot (\cos b + i \sin b)$. Tato funkce má periodu $2k\pi$.

Později v kapitole funkcí komplexní proměnné provedeme tu definici znovu a korektněji. Nyní nám stačí tato.

Všimněme si, že komplexní exponenciála je prakticky identická s exponenciálním tvarem komplexního čísla. Necht' je dáno komplexní číslo v goniometrickém tvaru: $z_0 = |z_0| \cdot (\cos \varphi_0 + i \cdot \sin \varphi_0)$. Pak lze definovat jako $z_0 = |z_0| \cdot e^{i\varphi_0}$. Jestliže zápis v goniometrickém tvaru nám značně ulehčil některé operace s komplexními čísly, pak exponenciální zápis je ještě „šikovnější“, neboť k němu pouze postačí znát vztahy pro práci s mocninami.

Důkazy následujících tvrzení uvádět nebudeme, jsou zřejmé podle pravidel pro práci s mocninami.

$$1. \quad z_0 z_1 = |z_0| \cdot e^{i\varphi_0} \cdot |z_1| \cdot e^{i\varphi_1} = |z_0 z_1| \cdot e^{i(\varphi_0 + \varphi_1)}$$

$$2. \quad \frac{z_0}{z_1} = \frac{|z_0| \cdot e^{i\varphi_0}}{|z_1| \cdot e^{i\varphi_1}} = \left| \frac{z_0}{z_1} \right| \cdot e^{i(\varphi_0 - \varphi_1)}$$

$$3. \quad z_0^n = (|z_0| \cdot e^{i\varphi_0})^n = |z_0|^n \cdot e^{in\varphi_0} \text{ pro } n \in \mathbb{Z}$$

Mezi další důležité vztahy, které jsou důsledky komplexní exponenciály, patří např. Eulerova identita, jež mezi matematiky bývá označována jako nejkrásnější vztah matematiky. Spojuje konstanty π a e s čísly 0, 1 a i . Její tvar má následující podobu: $e^{i\pi} + 1 = 0$. Svým fundamentálním významem připomíná Einsteinovu rovnici $E = mc^2$. [7, 27]

2 Číselné řady

2.1 Základní pojmy

2.1.1 Pojem číselné řady a posloupnosti částečných součtů

Nechť je dána posloupnost reálných nebo komplexních čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, potom číselnou řadou rozumíme formální symbol:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ nebo } a_1 + a_2 + a_3 + \dots \text{ in infinitum neboli do nekonečna.}$$

„Číselnou řadou tedy rozumíme úlohu "najít součet" nekonečně mnoha čísel, které jsou uspořádané do nějaké posloupnosti.“ [10] Prvky posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme členy řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nechť je dána posloupnost reálných nebo komplexních čísel $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde:

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \dots, s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots,$$

potom tuto posloupnost nazýváme posloupností částečných součtů této řady. Číslo s_n nazýváme n -tým částečným součtem této řady. [10]

2.1.2 Pojem konvergence a divergence číselné řady

Pokud existuje vlastní limita částečných součtů, tedy: $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, kde $s \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, pak řekneme, že řada konverguje a s je jejím součtem. Konvergentní řadu zapíšeme: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Pokud ovšem limita částečných součtů není vlastní, tedy: $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \pm\infty$ v případě reálných čísel či $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ v případě komplexních čísel, pak řekneme, že řada diverguje a nemá součet. Divergentní řadu zapíšeme: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, popř. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.

Pokud limita částečných součtů neexistuje vůbec, říkáme, že řada osciluje. [10, 29]

2.1.3 Aritmetická řada

Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme aritmetickou, jestliže posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická. [6] Aritmetická posloupnost je taková, kde je stálý rozdíl mezi sousedními členy. Tento rozdíl označujeme jako diferenci. Součet prvních n členů je pak dán vztahem: $S = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$.

2.1.4 Geometrická řada

Pro velké množství řad je velice těžké najít n -tý částečný součet. Jednou z výjimek je řada geometrická, která je řadou typu: $\sum aq^n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$. O čísle q mluvíme jako o kvocientu řady.

Je-li $q = 1$, pak nalezneme n -tý částečný součet řady velice snadno následujícím způsobem: $a + \dots + a = (n + 1)a$.

Je-li $q \neq 1$, budeme rozlišovat dva případy. Nejprve uvažme tuto rovnost:

$$(1 - q) \cdot (1 + q + \dots + q^n) = 1 - q^{n+1},$$

obě strany rovnice vydělíme členem $(1 - q)$ a vynásobíme nenulovým číslem a . Získáme tak rovnici v následujícím tvaru:

$$a + aq + \dots + aq^n = \frac{a}{1-q} \cdot (1 - q^{n+1}).$$

Z výše uvedené rovnice vidíme, že geometrická řada konverguje pro $|q| < 1$ a že diverguje pro $|q| > 1$. To lze ukázat velice snadno. Pro $|q| < 1$ „jde člen“ $(1 - q^{n+1})$ k jedné, zatímco pro $|q| > 1$ jde k plus nebo minus nekonečnu. Pro první případ pak dostáváme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}, \text{ kde } |q| < 1. [6]$$

2.1.5 Věta nutné podmínky konvergence

Nechť je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak platí, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Nutno říci, že se jedná o podmínku nutnou, nikoliv postačující. Neplatí tedy ani věta obrácená. [6]

Důkaz: Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, její součet je s , kde $s \in \mathbb{R}$, tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$.

Potom z posloupnosti částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, vybereme podposloupnost takovou: $\{s_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$. Podle věty o limitě vybrané posloupnosti⁴ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s$.

Následně podle základních aritmetických pravidel⁵ s limitami musí platit, že: $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0$. A vzhledem k tomu, že platí tvrzení: $a_n = s_n - s_{n-1}$, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. ■

2.1.6 Harmonická řada

Jednou z nejznámější řad, které splňují nutnou podmínku konvergence, a přesto nekonvergují, je řada harmonická. Ta má tvar: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. „V této řadě je každý člen

harmonickým průměrem dvou sousedních členů, tj. platí: $\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}}{2}$.“ [10]

⁴ Nechť $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jestliže platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s \in \mathbb{R}$, pak také $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = s$.

⁵ Nechť $\lim a_n = s \in \mathbb{R}$ a $\lim b_n = t \in \mathbb{R}$, potom platí: $\lim(a_n + b_n) = s + t$. [upraveno podle 3]

Tato řada byla také první, u které byla divergence prokázána, konkrétně francouzským matematikem jménem Nicole Oresme. [10] Důkaz toho, že harmonická řada diverguje, provedeme v kapitole 4.1. se znalostí integrálního kritéria. Je ovšem možné divergenci této řady dokázat i bez něj. Tento důkaz lze najít v [6].

2.1.7 Grandiho řada

Velkou polemiku mezi matematiky vyvolala řada, která je dnes nazývaná jako Grandiho řada. Pro nekonečné řady neplatí asociativní zákon. Nelze s nimi pracovat jako s konečnými součty. Řada vypadá takto:

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.$$

Jelikož limita částečných součtů neexistuje: $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1, \dots$, tak samotná řada osciluje a nemá tedy součet. [10]

2.1.8 Zbytek řady po k-tém členu

Mějme číslo k , kde $k \in \mathbb{N}$. Dále mějme řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$. „Potom řady buď obě konvergují, nebo obě divergují k $+\infty$, nebo obě divergují k $-\infty$, nebo obě oscilují. Mají-li obě uvažované řady součet, potom pro jejich součty platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \dots + a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n.$$

Řadu $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ nazýváme zbytkem řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ po k-tém členu. Větu zanecháme bez důkazu. [upraveno podle 6]

2.1.9 Řada s nezápornými členy

Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme řadou s nezápornými členy, pokud $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq 0$.

„Každá řada s nezápornými členy buď konverguje, nebo diverguje k $+\infty$.”

Důkaz: „Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ částečných součtů uvažované řady je neklesající posloupnost, a proto má limitu rovnou číslu: $s = \sup\{s_n \in \mathbb{R}: n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}^*$.” [s. 432, 6]

2.1.10 Řady s libovolnými členy

Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme řadu s libovolnými členy, pokud $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \in \mathbb{R}$. [6]

2.1.11 Cauchyovská posloupnost

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá cauchyovská, pokud pro ni platí následující formule: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n, m \geq n_0: |a_n - a_m| < \varepsilon$. [16]

2.2 Aritmetika číselných řad

Nechť jsou dány dvě řady: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se součtem s a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ se součtem t . Nechť je dáno $c \in \mathbb{R}$. Součty s a t smí být i nevlastní. Pak platí:

1. Pokud lze definovat číslo $(s + t) \in \mathbb{R}^*$, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ má součet $s + t$.
2. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a její součet je cs . Jestliže by $c = 0$ a $s = \pm\infty$, pak $cs = 0$. [6]
Důkazy lze najít v [6].

2.3 Kritéria konvergence

2.3.1 Srovnávací kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a platí: $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Pak platí, že pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz: Předpokládejme, že $n = 1, \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Je zřejmé, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí: $0 \leq s_n \leq t_n$, tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$. Limity určitě existují podle věty v sekci 2.1.9. Z toho plyne: $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$. Pro $n > 1$ bychom dokázali věty pro zbytky řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ po $(n - 1)$ -ním členu. Analogicky jako u první části důkazu. ■ [upraveno podle 6]

2.3.2 Podílové kritérium též d'Alembertovo

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy. Pokud platí pro $\forall n \in \mathbb{N}$ nerovnost $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pokud platí pro $\forall n \in \mathbb{N}$ nerovnost $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. [31]

Důkaz první implikace: $a_{n_0} \leq a_{n_0}, a_{n_0+1} \leq a_{n_0} \cdot q, a_{n_0+2} \leq a_{n_0+1} \cdot q \leq a_{n_0} \cdot q^2$. Z tohoto tvrzení je jasné, že od indexu n_0 je v řadě ukrytá geometrická řada s kvocientem: $q \in (0; 1)$, o které ze sekce 2.1.4. víme, že je konvergentní. ■

Druhou implikaci dokazovat nebudeme.

2.3.3 Odmocninové kritérium též Cauchyovo

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy. Pokud platí pro $\forall n \in \mathbb{N}$ nerovnost $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pokud platí nerovnost $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$, tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. [6]

Důkaz této věty provádět nebudeme. Je téměř identický s důkazem d'Alembertova kritéria.

2.3.4 Cauchyovo kondenzační kritérium

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Pokud konverguje řada: $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Navíc pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak platí, že součet zhuštěné řady není dvakrát větší oproti $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. [24]

Důkaz: Nechť $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ je posloupností částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Nechť $t_k = a_1 + 2a_2 + \dots + 2^k a_{2^k}$ je posloupností částečných součtů řady $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$. Potom pokud $n < 2^k$, platí:

$$s_n \leq a_1 + (a_2 + a_3) + \dots + (a_{2^k} + \dots + a_{2^{k+1}-1}) \leq a_1 + 2a_2 + \dots + 2^k a_{2^k} = t_k.$$

Z konvergence $\{t_k\}$ plyne konvergence $\{s_n\}$ a z divergence $\{s_n\}$ plyne divergence $\{t_k\}$. Pokud je $n > 2^k$, vyplyne analogický závěr – více v [4]. ■ [převzato z 4, s. 96]

2.3.5 Integrální kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy. Nechť existuje funkce f , která je nezáporná a nerostoucí a je definovaná na intervalu $\langle 1; +\infty \rangle$ taková, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ je $a_n = f(n)$. Pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní tehdy a jen tehdy, pokud konverguje nevlastní integrál: $\int_1^{\infty} f(x) dx$. [6] Provedeme i důkaz, protože integrální kritérium budeme dále využívat.

Důkaz: Z definice integrálního kritéria víme, že funkce f je na intervalu $\langle 1; +\infty \rangle$ monotónní. Díky tomuto faktu pak podle věty⁶ musí existovat Riemannův integrál $F(t) = \int_1^t f(x) dx$ pro $t \in \langle 1; +\infty \rangle$ a platí: $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Uvažme nyní řadu $\sum b_n$ takovou, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je $b_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$. Tato řada konverguje, když konverguje nevlastní integrál $\int_1^{\infty} f(x) dx$. Členy $b_1, b_2, \dots, b_n$ jsou jednotlivé plochy pod křivkou f .

Platí totiž rovnost $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \dots + \int_n^{n+1} f(x) dx \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_1^{n+1} f(x) dx \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n+1) = \int_1^{\infty} f(x) dx$.

Funkce je nerostoucí, a tak pro $\forall x \in \langle n, n+1 \rangle$: $f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$. Celou nerovnici můžeme integrovat: $\int_n^{n+1} f(n) dx \geq \int_n^{n+1} f(x) dx \geq \int_n^{n+1} f(n+1) dx$, potom: $f(n) \geq b_n \geq f(n+1)$ a tedy $a_n \geq b_n \geq a_{n+1}$.

Pokud je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak je podle srovnávacího kritéria a výše uvedené nerovnosti konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a konverguje i nevlastní integrál.

Pokud je konvergentní nevlastní integrál, pak je podle srovnávacího kritéria a výše uvedené nerovnosti konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a konverguje i řada

⁶ Tuto větu lze nalézt [s. 384, 6].

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$. Pokud konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$, pak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ■ [upraveno podle 6, s. 438]

2.3.6 Leibnizovo kritérium

Ještě, než zavedeme Leibnizovo kritérium, upustíme od požadavku, aby řada byla nezáporná, tedy podle 2.1.10. uvažujeme řadu s libovolnými členy. Zavedme pojem tzv. absolutní konvergence.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní, pokud konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Pokud je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, pak je i konvergentní.

Nyní předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ ⁷ splňuje dvě vlastnosti.

1. $\forall n \in \mathbb{N}: a_n > 0 \vee a_n < 0$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \geq |a_{n+1}| > 0$,
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ konverguje. [6] Důkaz dostupný v [10].

⁷ Tuto řadu nazýváme alternující, tedy že členy uvažované řady pravidelně střídají znaménko: $\forall n \in \mathbb{N}: \operatorname{sgn}((-1)^n a_n) = -\operatorname{sgn}((-1)^{n-1} a_{n-1})$.

3 Funkce komplexní proměnné

„Komplexní funkce je funkce, u které definiční obor i obor hodnot jsou podmnožiny komplexní roviny. Pro každou komplexní funkci lze nezávislou proměnnou i závislou proměnnou separovat na reálnou a imaginární část.“ [38]

Tedy: $z = x + iy$ a $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, kde $x, y \in \mathbb{R}$ a $u(x, y)$; $v(x, y)$ jsou funkce s reálnými hodnotami: $u = u(x, y)$; $v = v(x, y)$ a nazýváme je složky. [38]

3.1 Komplexní derivace a holomorfní funkce

Nechť je funkce $f(z)$ definovaná v nějakém okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Právě tehdy, když existuje limita: $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, má v bodě z_0 derivaci. Značíme: $f'(z_0)$.⁸ [s. 52, 28]

3.2 Holomorfní funkce

Nechť $f(z)$ je funkce komplexní proměnné. Řekneme, že funkce $f(z)$ je holomorfní v bodě, má-li v nějakém jeho okolí derivaci. [s. 52, 28] Tato derivace je opět holomorfní funkcí. Jestliže je definována podél určité křivky hladká funkce, existuje jednoznačný způsob, jak danou funkci rozšířit do zbytku komplexní roviny. Tento děj je označován jako analytické prodloužení, někdy také jako holomorfní prodloužení, vrátíme se k němu v kapitole 4 u Riemannovy zeta funkce. Jedním ze způsobů jeho provedení je pomocí Cauchyho-Riemannových podmínek. [20]

3.3 Cauchyovy-Riemannovy podmínky

Nechť je funkce $f(z)$ definovaná v nějaké oblasti $\mathcal{O} \in \mathbb{C}$, má v každém bodě této oblasti totální diferenciál⁹ jako funkce dvou reálných proměnných. Potom funkce $f(z)$ je holomorfní v oblasti $\mathcal{O}$ tehdy a jen tehdy, jestliže funkce u a v splňují v oblasti $\mathcal{O}$ tzv. Cauchyovy-Riemannovy podmínky:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y); \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \quad [\text{s. 49, 20}]$$

⁸ „Zdůrazněme, že uvedená limita musí existovat pro libovolnou cestu, po níž se bod z blíží k bodu z_0 . Proto diferencovatelnost funkce komplexní proměnné vymezuje mnohem užší třídu funkcí, než je tomu u reálných funkcí reálné proměnné. V důsledku toho i velice jednoduché funkce nemusí být diferencovatelné.“ [s. 52, 20]

⁹ „Definice totálního diferenciálu: Nechť D je otevřenou množinou v prostoru $\mathbb{R}^n$ a nechť $F: D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Řekneme, že zobrazení F je v bodě $a \in D$ diferencovatelné, existuje-li lineární zobrazení (Homomorfismus) $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tak, že platí: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h) - F(a) - L(h)}{\sqrt{\sum_i h_i^2}} = 0$.“ [4]

3.4 Harmonická funkce

Nechť je funkce $f(z)$ definovaná v nějaké oblasti $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ a má spojitě parciální derivace druhého řádu v oblasti $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$, pak ji nazveme harmonickou funkcí, jestliže splňuje Laplaceovu rovnici: $\Delta f(z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z) = 0$. [s. 49, 20]

3.5 Meromorfní funkce

Funkce, která je holomorfní na otevřené souvislé podmnožině komplexní roviny $\mathbb{C}$, až na body v množině izolovaných bodů, se nazývá meromorfní. [14] *Každá meromorfní funkce může být vyjádřena jako podíl dvou holomorfních funkcí, jmenovatel nesmí být 0, izolované body se pak vyskytují v nulách jmenovatele.* Tyto body někdy bývají označovány jako póly. [přeloženo z 26]

Příklady meromorfních funkcí jsou gama funkce nebo Riemannova zeta funkce.

3.6 Některé elementární funkce komplexní proměnné

3.6.1 Celočíselná mocninná funkce komplexní proměnné

„Funkci z^n definujeme podobně jako v reálném oboru pomocí opakovaného násobení (pro $n > 0$) a inverze (pro $n < 0$).“ [s. 5, 1] Pro komplexní číslo, které má tvar: $z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, je $z^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$.

Funkce z^n je holomorfní na daném definičním oboru a derivujeme ji podle pravidla o derivaci polynomu jako funkce reálné proměnné. [26]

3.6.2 Exponenciální funkce komplexní proměnné

Exponenciální funkci komplexní proměnné označujeme symbolem $\exp$ pro odlišení od exponenciály reálné proměnné a definujeme ji takto: $\exp(x + iy) = \exp(x) \cdot (\cos y + i \sin y)$, pro $x, y \in \mathbb{R}$. Tato formule je jediné holomorfní rozšíření exponenciály do komplexních čísel. [26] *„Funkce $\exp$ má periodu $2i\pi$ a nikde nenabývá hodnoty 0.“* [s. 6, 26]

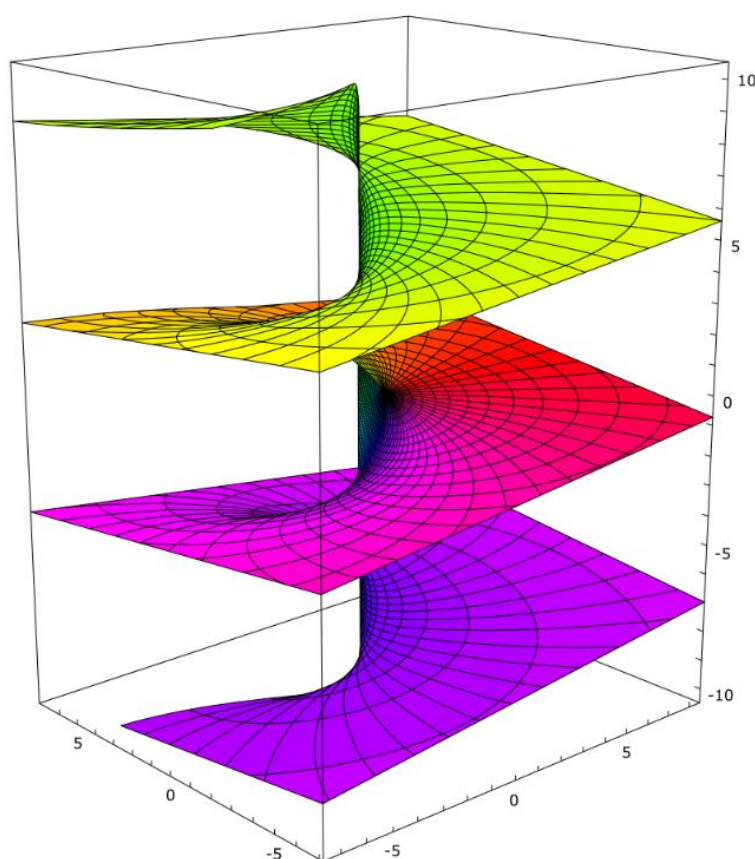
3.6.3 Logaritmická funkce komplexní proměnné

Logaritmickou funkci komplexní proměnné definujeme v komplexní rovině jako funkci inverzní k funkci exponenciální. Exponenciální funkce má v oboru reálných čísel obor hodnot všechna kladná čísla. V oboru komplexních čísel jsou to všechna čísla bez nuly. Logaritmická funkce je k této funkci inverzní, tedy její definiční obor musí být veškerá komplexní čísla bez nuly. [upraveno podle 5]

Mějme komplexní číslo $z = u + iv$. Najděme jeho komplexní logaritmus. Platí následující formule: $\ln(z) = \ln(u + iv) = \ln(re^{i\varphi}) = \ln(r) + i\varphi = \ln|z| + i\text{Arg}(z)$. Obecně bude pak dán takto $\ln(z) = \ln|z| + i(\text{Arg } z + 2\pi n)$.

Z výše uvedeného vztahu je vidět, že se hodnota mění v závislosti na n . Zaved'me tedy tzv. hlavní hodnotu logaritmu. Bude vypadat takto: $\text{Log } z = \ln|z| + i\text{Arg } z$, pro $\text{Arg } z \in (-\pi; \pi)$. Hlavní hodnota se zavádí proto, že komplexní logaritmus je více hodnotová funkce, která se mění právě v závislosti na $n \in \mathbb{Z}$. Takto ale získáme právě jednu hodnotu. Pro každé nenulové komplexní číslo z existuje hlavní hodnota logaritmu $\text{Log}(z)$. Je to logaritmus, jehož imaginární část leží v intervalu $(-\pi, \pi)$. Hlavní hodnota logaritmu není definována pro $\text{Log}(0)$, protože neexistuje komplexní číslo, pro které platí, že $e^z = 0$. „Pro komplexní čísla, která nejsou kladnými reálnými čísly, je hlavní hodnotou komplexního logaritmu analytické prodloužení přirozeného logaritmu. Pro záporná komplexní čísla se hlavní hodnota získá dalším prodloužením vyjádřeným zápornými reálnými čísly jako limity komplexních čísel s kladnými imaginárními částmi.“ [1, 14, 25]

Nechť $\ln(z) = \ln|z| + i(\text{Arg } z + 2\pi n)$, označme dvojčlen $\text{Arg } z + 2\pi n = \varphi$. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\varphi \in (\alpha; \alpha + 2\pi)$, pak $\ln(z) = \ln|z| + i\varphi$ značí tzv. větev logaritmu. [38, upraveno]



Obrázek 2 - Riemannova plocha logaritmu [37]

3.6.4 Goniometrické funkce

Goniometrické funkce komplexní proměnné definujeme v komplexní rovině následujícím způsobem:

$$\cos z = \frac{(e^{iz} + e^{-iz})}{2}$$
$$\sin z = \frac{(e^{iz} - e^{-iz})}{2i}$$

Tyto funkce splňují Cauchyovy-Riemannovy podmínky a jsou tedy holomorfní. Vzorec pro funkci kosinus využijeme v praktické části. [26]

4 Riemannova zeta funkce

4.1 Definice

Zeta funkce je definována jako součet nekonečné řady, tzv. Dirichletovy řady:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

4.2 Chování řady pro daná s podle klasické teorie řad

4.2.1 Chování na intervalu $(-\infty; -1)$

Riemannova zeta funkce diverguje pro $s \in (-\infty; -1)$.

Důkaz: Pro $s \in (-\infty; -1)$ ověříme chování řady nejlépe pomocí integrálního kritéria, tedy:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{-1} \frac{1}{n^s} dn = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{n^{1-s}}{1-s} \right]_t^{-1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{(-1)^{1-s}}{1-s} - \frac{t^{1-s}}{1-s} \right) = \frac{1}{1-s} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} [(-1)^{1-s} - t^{1-s}] = -\infty.$$

4.2.2 Chování pro $s = -1$

Riemannova zeta funkce diverguje pro $s = -1$. Řada bude vypadat takto:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^{-1}} + \frac{1}{3^{-1}} + \frac{1}{4^{-1}} + \dots = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots = \infty.$$

Dostáváme totiž aritmetickou řadu s diferencí 1.

4.2.3 Chování na intervalu $(-1; 1)$

Riemannova zeta funkce diverguje pro $s \in (-1; 1)$.

Důkaz: Pro $s \in (-1; 1)$ ověříme chování řady nejlépe pomocí integrálního kritéria,

$$\text{tedy: } \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{n^s} dn = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{n^{1-s}}{1-s} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^{1-s}}{1-s} - \frac{1^{1-s}}{1-s} \right) = \frac{1}{1-s} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} (t^{1-s} - 1) = +\infty.$$

4.2.4 Chování pro $s = 1$

Riemannova zeta funkce diverguje pro $s = 1$. Řada bude vypadat takto:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \infty. \text{ Dostáváme tak harmonickou řadu, která diverguje.}$$

4.2.5 Chování na intervalu $(1; \infty)$

Riemannova zeta funkce konverguje pro $s \in (1; \infty)$, konverguje dokonce absolutně.

Důkaz:

Pro $s \in (1; \infty)$ ověříme chování řady opět nejlépe pomocí integrálního kritéria,

tedy: $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \left| \frac{1}{n^s} \right| dn = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{|n|^{1-s}}{1-s} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{|t|^{1-s}}{1-s} - \frac{1^{1-s}}{1-s} \right) = \left(\frac{1}{1-s} \right) \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} (|t|^{1-s} - 1) = \frac{1}{s-1}$. Tím je absolutní konvergence dokázána.

4.3 Riemannova hypotéza

„Riemannova hypotéza je tvrzení o tom, jak jsou rozmístěny netriviální kořeny analytického prodloužení Riemannovy funkce ζ do komplexní roviny. Všechny netriviální nulové body Riemannovy zeta funkce mají reálnou část rovnu $\frac{1}{2}$.” [32]

Čísla, která mají reálnou část rovnou $\frac{1}{2}$, tvoří v komplexní rovině přímku, která se nazývá kritická přímka. Na celé rozložení zeta se podrobně můžeme podívat na obrázku 3 na konci této kapitoly. Riemannova hypotéza je také součástí takzvaných Problémů tisíciletí.

Riemannova zeta funkce je definovaná na celé komplexní polorovině s reálnou částí s od jedné až do nekonečna.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots, \text{ pro } s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(s) > 1$$

Funkce je na celé této polorovině analytická, tedy je to taková funkce, kterou lze na okolí každého bodu vyjádřit jako součet mocninné řady. Na základě těchto tvrzení můžeme uvažovat, že Riemannova zeta funkce jde prodloužit na opačné polorovině, tedy pro $s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(s) \leq 0$. [32, 35, 36]

4.4 Analytické prodloužení

Z kapitoly o holomorfní funkci víme, že její derivace je opět holomorfní funkcí, dále také víme, pokud tato její derivace existuje, pak existuje jednoznačný způsob, jak danou funkci rozšířit do komplexní roviny. Analytické prodloužení v komplexní rovině má oproti prodloužení na reálné ose velkou výhodu. Analytické prodloužení je v komplexní rovině jednoznačné, stačí, když pro danou funkci existuje právě ona konečná komplexní první derivace ve všech bodech. Na reálných číslech to ovšem neplatí i při shodě ve všech derivacích. [26, 32]

Pojďme tedy ukázat některá analytická prodloužení Riemannovy zeta funkce.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots, \text{ pro } s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(s) > 1$$

Riemannova zeta funkce jde prodloužit na opačné komplexní polorovině, tedy pro $s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(s) \leq 0$. Poslední nezmíněná část komplexní roviny je právě interval $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$. Tam se nachází takzvaný kritický pás.

S tímto vztahem přišel sám Riemann.¹⁰

$$\zeta(s) = 2^s \cdot \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s), \text{ pro } s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(s) < 0$$

Jeho důkaz lze najít například v [36].¹¹

4.4.1 Analytické prodloužení pro $s = -1$

Do výše uvedené rovnice dosadíme za s .¹²

$$\zeta(-1) = 2^{-1} \cdot \pi^{-1-1} \cdot \Gamma(2) \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \zeta(2)$$

$$\zeta(-1) = \frac{1}{2\pi^2} \cdot 1! \cdot (-1) \cdot \frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}$$

Jedna z možných interpretací výsledku je následující. Nejedná se ale o součet.

$$-\frac{1}{12} = \zeta(-1) \approx \frac{1}{1^{-1}} + \frac{1}{2^{-1}} + \frac{1}{3^{-1}} + \frac{1}{4^{-1}} + \dots = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

4.4.2 Nalezení triviálních kořenů pro $\operatorname{Re}(s) < 0$

Mějme znovu Riemannovu rovnici a položme ji rovnu nule.

$$2^s \cdot \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s) = 0 \rightarrow \sin \frac{\pi s}{2} = 0$$

Jedná se o rovnici v součinném tvaru, jediný člen, který může být roven nule je právě sinus. Najdeme konkrétní hodnotu s .

$$\frac{\pi s}{2} = n\pi \rightarrow s = 2n$$

Pohybujeme se ale v $\operatorname{Re}(s) < 0$, takže $s = -2n, n \in \mathbb{N}$.

4.4.3 Hodnota $\zeta(0)$

Pro naše výpočty v praktické části bude velmi důležité znát hodnotu $\zeta(0)$. Vyjděme opět z Riemannem sestavené rovnice a dosadíme $s = 0$.

¹⁰ Γ je označení tzv. gama funkce, která spojitě prokládá funkci faktoriál na reálných číslech. Je definováno jako $\Gamma(n) = (n-1)!$

¹¹ Rovnice vykazuje také symetrii v zeta vůči bodu $\frac{1}{2}$. Je to jeden z důvodů, proč se zrovna tam nachází osa kritického pásu. Rozložení kořenů má velký význam pro rozložení prvočísel.

¹² $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ je tzv. basilejský problém, jehož řešení našel Leonhard Euler.

$$\zeta(0) = 2^0 \cdot \pi^{0-1} \cdot \Gamma(1-0) \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-0)$$

Pro $\zeta(1)$ je nutné použít limitní přechod, neboť $\zeta(1) = \infty$.

$$\zeta(0) = \frac{1}{\pi} \cdot \Gamma(1) \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \frac{\pi s}{2}}{\frac{\pi s}{2}} \cdot \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1) \right] = \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi s}{2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{s} \right) = -\frac{1}{2}^{13}$$

4.4.4 Hodnota $\zeta'(0)$

K důkazu derivace Riemannovy zeta funkce vyjdeme z monografie [11].

Pro $\operatorname{Re}(s) > 1$ platí níže uvedené rovnice, díky analytickému prodloužení toto můžeme aplikovat pro všechna s , tedy:

$$\begin{aligned} \zeta(s) - \frac{1}{s-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \int_1^{\infty} x^{-s} dx = \sum_{n=1}^{N-1} n^{-s} + \sum_{n=N}^{\infty} n^{-s} - \int_1^N x^{-s} dx - \int_N^{\infty} x^{-s} dx \\ \zeta(s) - \frac{1}{s-1} &= \sum_{n=1}^{N-1} n^{-s} - \int_1^N x^{-s} dx + \frac{1}{2} \cdot N^{-s} - s \int_N^{\infty} \bar{B}_1(x) \cdot x^{-s-1} dx. \end{aligned}^{14}$$

Pro $s = 1$ bude pravá strana rovnice vypadat níže uvedeným způsobem, její hodnota se blíží Eulerově konstantě γ pro $N \rightarrow \infty$.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{N-1} - \ln N + \frac{1}{2N} - \int_N^{\infty} \bar{B}_1(x) \cdot x^{-2} dx$$

Taylorova řada pro $(s-1)\zeta(s)$ v okolí $s = 1$ má podobu: $(s-1)\zeta(s) = 1 + \gamma(s-1) + \dots$.¹⁵ Z výše uvedené kapitoly víme, že platí i následující funkcionální rovnice:

$$(s-1)\zeta(s) = -\Gamma(1-s) \cdot (2\pi)^{s-1} \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s).$$

Logaritmicky zderivujeme obě strany pro $s = 1$:

$$\gamma = -\frac{\Pi'(0)}{\Pi(0)} + \ln 2\pi + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \gamma + \ln 2\pi - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)},$$

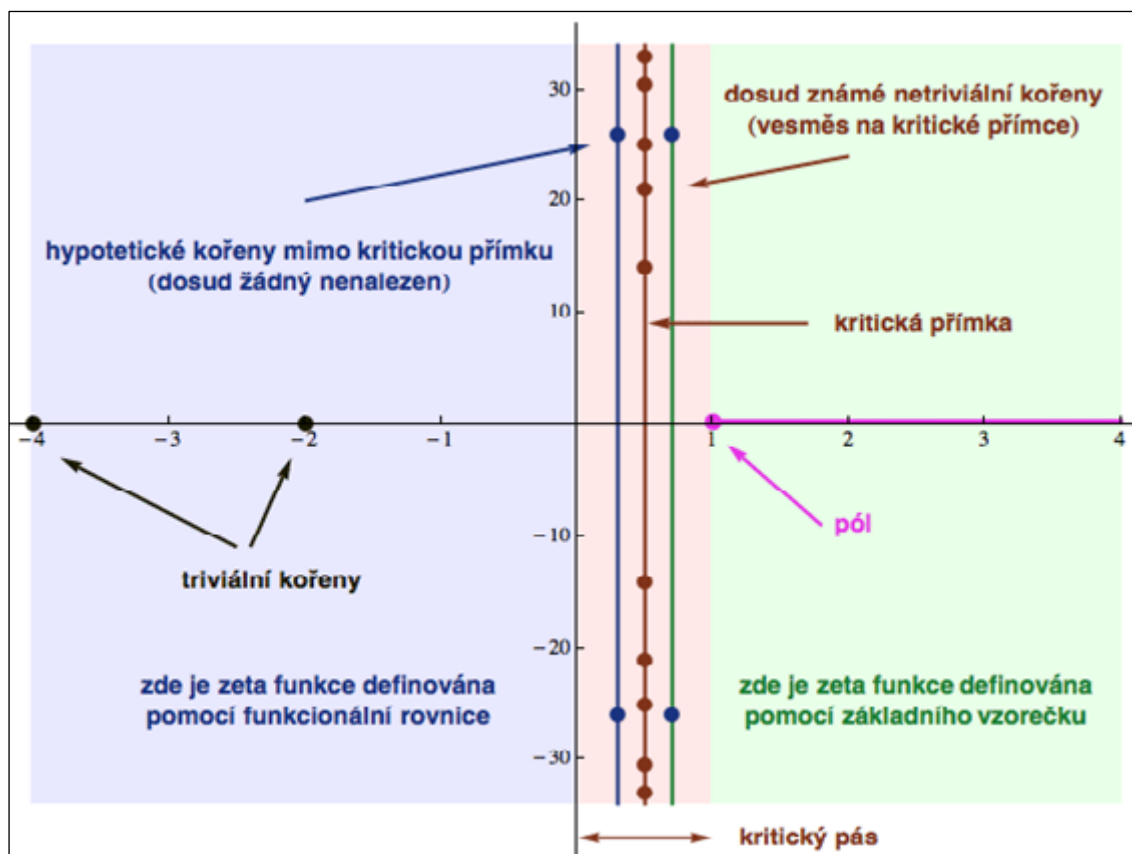
$$0 = \ln 2\pi - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} \rightarrow \ln 2\pi = \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} \rightarrow \zeta'(0) = \zeta(0) \cdot \ln 2\pi = -\frac{1}{2} \cdot \ln 2\pi.$$

[přeloženo ze s. 134-135, 11]

¹³ Funkci sinus jsme upravili podle pravidla: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, pro $\zeta(1) \sim \left(-\frac{1}{s}\right)$.

¹⁴ $\bar{B}_1(x) = \bar{B}_1(x - [x])$, kde $[x]$ je celá část čísla x a $\bar{B}_1$ je tzv. Bernoulliho polynom, konkrétně $B_1 = x - \frac{1}{2}$

¹⁵ γ je Eulerova-Mascheroniho konstanta, $\gamma \cong 0,57721$ a platí, že: $\Pi(1-s) = (1-s) \cdot \Gamma(1-s)$



Obrázek 3 - Mapa Riemannovy zeta funkce [35]

5 Vybrané základní pojmy z lineární algebry

5.1 Matice

„Nechť $(T, +, \cdot)$ je libovolné pole, nechť m, n jsou nenulová přirozená čísla. Pak obdélníkové schéma¹⁶ níže uvedeného tvaru, kde $a_{ij} \in T$ jsou prvky matice A pro všechna $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, n$, se nazývá matice typu $m \times n$ nad polem T .“ [22, s. 32]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

5.1.1 Čtvercová matice

Nechť je dána matice $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$ nad polem T . Matice se nazývá čtvercová, jestliže $m = n$, tedy počet řádků je roven počtu sloupců. [22]

5.1.2 Jednotková matice

Nechť je dána čtvercová matice A řádu n a platí, že $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$, kde $i, j = 1, 2, \dots, n$ a zároveň $a_{ii} = 1$ pro $i = 1, 2, \dots, n$, pak se tato matice nazývá jednotková řádu n a značíme ji E . [22]

5.1.3 Součet matic

Nechť jsou dány matice $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ typu $m \times n$ nad polem T . Pak součtem matic A, B máme na mysli matici $A + B = C = (c_{ij})$ typu $m \times n$ s prvky ve tvaru $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, pro všechna $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, n$. [22]

5.1.4 Násobení matice číslem

Nechť jsou dány matice $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ typu $m \times n$ nad polem T a $r \in T$. Potom r -násobek matice A je matice $rA = D = (d_{ij})$ typu $m \times n$ s prvky ve tvaru $d_{ij} = ra_{ij}$, pro všechna $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, n$. [22]

¹⁶ Obdélníkové schéma není příliš korektní pojem, ale je velmi názorný. Zcela přesně by se matice definovala jakožto zobrazení.

5.1.5 Součin matic

Nechť je dána matice $A = (a_{ij})$ $m \times p$ a matice $B = (b_{ij})$ typu $p \times n$ nad polem T . Pak součinem matic A, B v tomto pořadí máme na mysli matici $AB = F = (f_{ij})$, která je typu $m \times n$ a má prvky $f_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$, pro všechna $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, n$. [22]

5.1.6 Determinant matice

Nechť je dána čtvercová matice $A = (a_{ij})$ n -tého řádu nad polem T . Determinantem matice A je pak prvek tělesa T tvaru: $\det A = \sum_{\pi \in S_n} \text{zn}(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$, kde sčítáme přes všechny permutace π (pořadí) množiny $1, 2, \dots, n$. Množinou těchto permutací máme na mysli množinu S_n . [11, 22] Dá se také říci, že determinant je zobrazení, které přiřazuje matici A skalár z pole T .

Determinant také značíme $\det A = |A|$ nebo $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

5.1.7 Regulární a singulární matice

Nechť je dána čtvercová matice $A = (a_{ij})$ n -tého řádu nad polem T . Tato matice se nazývá regulární, jestliže $\det A \neq 0$, pakliže je $\det A = 0$, jedná se o matici singulární. [22]

5.1.8 Charakteristická matice a charakteristický polynom

Nechť je dána čtvercová matice A n -tého řádu nad polem T a nechť λ je proměnná. Charakteristickou maticí matice A je pak myšlena matice $A - \lambda E_n$.

Její determinant $\det(A - \lambda E_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$ se nazývá

charakteristickým polynomem. [22]

5.1.9 Vlastní čísla a jejich násobnost, spektrum matice

„Kořeny charakteristického polynomu matice A se nazývají vlastní čísla matice A . Násobností vlastního čísla budeme rozumět jeho násobnost jako kořene charakteristického polynomu. Spektrum matice A budeme nazývat soubor utvořený z vlastních čísel matice A ; každé vlastní číslo se v něm vyskytuje právě tolikrát, kolik činí jeho násobnost.“ [22, s. 115]

5.1.10 Vlastní vektor

„Nechť je dána čtvercová matice A n -tého řádu nad polem T a nechť λ je její vlastní číslo. Vlastním vektorem matice A , který přísluší vlastnímu číslu λ , budeme rozumět každý nenulový vektor $\vec{v} \in T^n$, pro který $A\vec{v}^T = \lambda\vec{v}^T$.“ [22, s. 117]

6 Operátory

6.1 Základní pojmy

6.1.1 Lineární (vektorový) prostor

Nechť existuje neprázdna množina V , množina prvků, které označujeme jako vektory, a číselné těleso (pole)¹⁷ T , jehož prvky nazýváme čísla. Nechť dále existuje zobrazení, které nazýváme sčítání vektorů $\oplus: V \times V \rightarrow V$ a nechť dále existuje zobrazení, které nazýváme násobení vektorů číslem $\otimes: T \times V \rightarrow V$. Potom řekneme, že V je lineární prostor nad tělesem T s operacemi $\oplus$ a $\otimes$, právě tehdy když platí:

1. V s operací $\oplus$ je komutativní grupa¹⁸,
2. $\forall a, b \in T$ a $x, y \in V$ platí:
 - a) $1 \otimes x = x$, (násobení jednotkovým prvkem)
 - b) $a \otimes (b \otimes x) = (ab) \otimes x$, (asociativnost)
 - c) $(a \oplus b) \otimes x = (a \otimes x) \oplus (b \otimes x)$, (distributivnost)
 - $a \otimes (x \oplus y) = (a \otimes x) \oplus (a \otimes y)$. (distributivnost). [upraveno podle 16]

Příkladem vektorového prostoru je množina komplexních čísel s operací sčítání nebo množina všech matic $m \times n$ s operací sčítání.

6.1.2 Podprostor lineárního prostoru

Nechť V je lineární prostor nad polem T . Nechť existuje množina W , která je podmnožina prostoru V nad polem T vzhledem k těmto sčítání vektorů a těmto násobení vektorů skaláry neboli můžeme na ní „zúžit“ operace $\oplus$ a $\otimes$, potom je množina W podprostorem lineárního prostoru V , zn. $W \subseteq V$.

Množina W je podprostor prostoru V , pokud:

- a) $W \neq \emptyset$,
- b) $(\forall x, y \in W): x \oplus y \in W$,
- c) $(\forall a \in T)(\forall x \in W): a \otimes x \in W$. [22]

6.1.3 Podprostor generovaný množinou

Nechť V je lineární prostor nad polem T . Nechť M je libovolná podmnožina množiny V . Průnik všech těch podprostorů lineárního prostoru V , které obsahují množinu M , se nazývá podprostor generovaný množinou M , zn. $[M]$. Množina M se

¹⁷ Pole = komutativní těleso.

¹⁸ Komutativní grupa je taková struktura s množinou a operací, která je asociativní, má neutrální prvek s inverzními prvky, a navíc je komutativní. V literatuře bývá někdy označována jako Abelova nebo abelovská grupa.

nazývá systém generátorů vektorového prostoru $[M]$ neboli lineární obal množiny M . [22]

6.1.4 Lineárně nezávislá množina na lineárním prostoru

Nechť V je lineární prostor nad polem T . Nechť M je neprázdná podmnožina množiny V . Množina M je lineárně nezávislá právě tehdy, když pro každou vlastní podmnožinu $N \subset M$ je $[N] \subset [M]$. [22]

6.1.5 Báze lineárního prostoru

Nechť V je lineární prostor nad polem T . Nechť B je podmnožina množiny V . Množina B se nazývá bází lineárního prostoru V , pokud:

- a) $V = [B]$,
- b) B je lineárně nezávislá množina. [22]

6.1.6 Dimenze lineárního prostoru

Nechť V je lineární prostor nad polem T . Jeho dimenzí máme na mysli počet prvků jeho libovolné báze, zn. $\dim V$. [22]

6.1.7 Lineární prostor se skalárním součinem neboli Pre-Hilbertův prostor a norma

Lineární prostor V se nazývá lineární prostor se skalárním součinem, jestliže každé uspořádané dvojici prvku $x, y \in V$ je přiřazeno číslo $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, které má tyto vlastnosti:

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \forall x, y \in V$,
2. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \forall \lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R}) \text{ a } \forall x, y \in V$,
3. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in V$,
4. $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in V$.

$\langle x, y \rangle$ se nazývá skalární součin x, y .

Norma vektoru x indukovaná skalárním součinem je číslo $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. [16]

6.1.8 Metrika indukovaná normou a úplnost

Metrika indukovaná normou je zobrazení d na lineárním prostoru V , kde $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definované takto: $d(x, y) = \|x - y\|$. Ke každé dvojici vektorů z V tedy přiřadíme reálné číslo $d(x, y)$, které se nazývá vzdáleností x, y v metrice d . Prostor s metrikou nazýváme metrický prostor.

Metrický prostor je úplný právě tehdy, když v něm každá cauchyovská posloupnost¹⁹ konverguje. [4, 16]

6.1.9 Banachův prostor

Úplný normovaný lineární prostor. Je možné jej značit např. $\mathcal{B}$. [16]

6.1.10 Hilbertův prostor

Úplný normovaný lineární prostor se skalárním součinem a normou indukovanou skalárním součinem. Je možné jej značit např. $\mathcal{H}$. [4, 16]

6.1.11 Operátor

Zobrazení $\hat{A}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ nazveme operátor $\hat{A}$ na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Působení operátoru $\hat{A}$ na prvek $x \in \mathcal{H}$ zapíšeme: $y = \hat{A}x$. [4, 16]

6.1.12 Definiční obor operátoru

Množina všech vektorů z $\mathcal{H}$, pro které je definováno zobrazení $\hat{A}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ se nazývá definiční obor operátoru. Označujeme $D(\hat{A})$. [4]

6.1.13 Vlastní čísla a vlastní vektor operátoru

Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$ a necht' $\hat{A} \in \mathcal{L}(X)$ je operátor. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo operátoru $\hat{A} \in \mathcal{L}(X)$ právě tehdy, pokud existuje $x \in X$, kde $x \neq 0$, takové, že $\hat{A}x = \lambda x$. Vektor x je pak vlastním vektorem operátoru $\hat{A}$ patřící vlastnímu číslu λ . [9]

6.2 Druhy operátorů

6.2.1 Lineární operátory

Operátor $\hat{A}$ na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ nazveme lineární, jestliže pro $\forall x, y \in \mathcal{H}$ a pro $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ platí: $\hat{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \hat{A}x + \beta \hat{A}y$. [4, 16]

¹⁹ viz kapitola 2.1.11.

6.2.2 Operátor identity

Operátor $\hat{I}$ na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ nazveme operátorem identity, jestliže pro $\forall x \in \mathcal{H}$ platí $\hat{I}x = x$. [12]

6.2.3 Symetrický operátor

Operátor $\hat{A}$ na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ nazveme symetrický, jestliže platí: $\langle f, \hat{A}g \rangle = \langle \hat{A}f, g \rangle$ pro $\forall f, g \in D(\hat{A})$. [12]

6.2.4 Sdružený neboli adjungovaný operátor

Operátor $\hat{A}^*$ na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ nazveme adjungovaný k operátoru $\hat{A}$ na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$, jestliže $\hat{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ a $\hat{A}^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ a zároveň platí, že $\langle \hat{A}x, y \rangle = \langle x, \hat{A}^*y \rangle$, kde $\forall x \in D(\hat{A})$. Taková y , pro která existuje $\hat{A}^*y$ splňující předchozí rovnici, tvoří $D(\hat{A}^*)$. [4, 16]

6.2.5 Samosdružený neboli samoadjungovaný operátor

Operátor $\hat{A}$ na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ nazveme samoadjungovaný, jestliže je roven své adjunkci, tedy takový operátor $\hat{A}$, pro který platí: $\hat{A} = \hat{A}^*$ a $D(\hat{A}) = D(\hat{A}^*)$, to znamená, že operátor má se svým adjungovaným operátorem stejný definiční obor. Opakem je operátor nesamosdružený. [18]

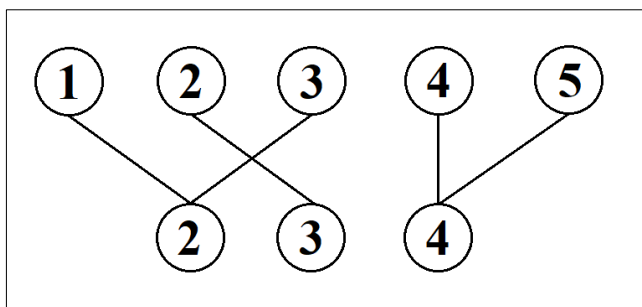
6.2.6 Invertibilní operátor

Nechť $\hat{A}$ je lineární operátor na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Operátor se nazývá invertibilní, existuje-li inverzní zobrazení $S \in \mathcal{H}$ takové, že: $S = \hat{A}^{-1} \Leftrightarrow S \circ \hat{A} = \hat{A} \circ S = \hat{I}$. [18]

6.3 Typy zobrazení podle pokrytí výchozí a cílové množiny

6.3.1 Surjektivní zobrazení neboli surjekce

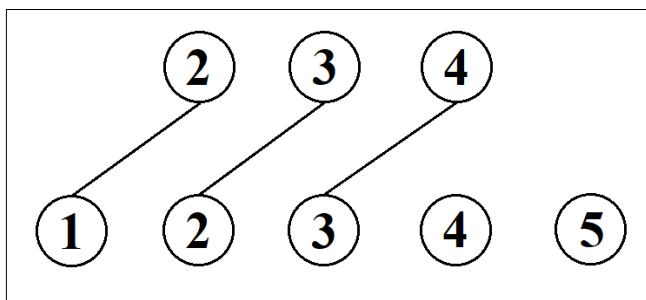
Zobrazení $f: A \rightarrow B$ se nazývá surjektivní nebo také zobrazení A na B , pokud k libovolnému $b \in B$ existuje $a \in A$ takové, že $f(a) = b$.



Obrázek 4 – Ukázka surjekce, zobrazení je shora dolů [17]

6.3.2 Injektivní zobrazení neboli injekce

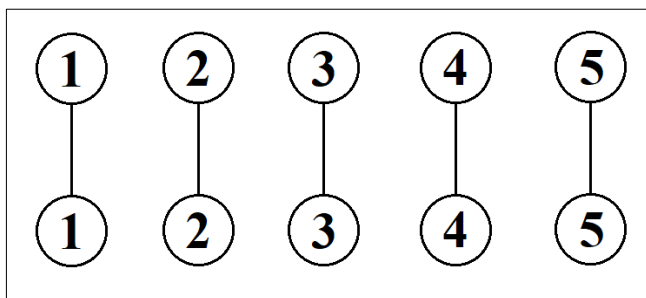
Zobrazení $f: A \rightarrow B$ se nazývá injektivní nebo také prosté zobrazení A do B , pokud pro $\forall a, b \in A$, kde $a \neq b$ platí, že $f(a) \neq f(b)$.



Obrázek 5 - Ukázka injekce, zobrazení je shora dolů [17]

6.3.3 Bijektivní zobrazení neboli bijekce

Zobrazení $f: A \rightarrow B$ se nazývá bijektivní nebo také prosté zobrazení A na B , pokud f je surjektivní i injektivní.



Obrázek 6 - Ukázka bijekce, zobrazení je shora dolů [17]

6.4 Základní pojmy spektrální analýzy

Zkoumejme operátorovou rovnici neznámé $x \in X$. Smyslem jejího řešení bude ukázat, co znamená spektrum operátoru.

$$(T - \lambda I)x = u, \text{ kde } \lambda \in \mathbb{C}, T \in \mathcal{L}(X), u \in X^{20}$$

Označme $T_\lambda := T - \lambda I$. Pak platí následující implikace $T_\lambda \in \mathcal{L}(X) \Leftrightarrow T \in \mathcal{L}(X)$. Ptáme se, zda existuje řešení pro libovolnou pravou stranu rovnice $u \in X$, a pokud ano, je jednoznačné, a je $\forall u \in \mathcal{R}(T_\lambda), \exists! x \in X; T_\lambda(x) = u^{21}$ toto řešení stabilní²²?

Mějme tedy $T \in \mathcal{L}(X)$, kde X je Banachův, $\lambda \in \mathbb{C}, T_\lambda := T - \lambda I \in \mathcal{L}(X)$. Parametr λ nám říká, jaké vlastnosti může mít operátor T_λ z hlediska velikosti oboru hodnot, spojitosti, inverze či prostoty. Níže uvedená tabulka definuje různé kategorie, kam může parametr $\lambda \in \mathbb{C}$ patřit. Dvě vynechaná okénka tabulky označují možnosti, které nemohou nastat. [33] Důvod a důkaz, proč tomu tak je, je vysvětlen ve [33].

Tabulka 1: Spektrální tabulka pro lineární omezené operátory v nekonečné dimenzi [převzato z 33]

	T_λ je surjektivní $\mathcal{R}(T_\lambda) = X$	T_λ není surjektivní $\mathcal{R}(T_\lambda) \neq X, \overline{\mathcal{R}(T_\lambda)} = X$	T_λ není surjektivní $\overline{\mathcal{R}(T_\lambda)} \neq X$
T_λ injektivní $\exists(T_\lambda^{-1})$ a je spojitý	λ je regulární bod operátoru T		$\lambda \in \sigma_R(T)$
T_λ injektivní $\exists(T_\lambda^{-1})$ a není spojitý		$\lambda \in \sigma_C(T)$	$\lambda \in \sigma_R(T)$
T_λ není injektivní	$\lambda \in \sigma_P(T)$	$\lambda \in \sigma_P(T)$	$\lambda \in \sigma_P(T)$

6.4.1 Bodové spektrum operátoru

Když T_λ není injektivní, pak platí, že: $\exists x_1 \neq x_2, T_\lambda x_1 = T_\lambda x_2$. Definujme x jako rozdíl $x_1 - x_2$, tedy $\exists x \neq 0$ takové, že: $T_\lambda x = 0 \rightarrow (T - \lambda I)x = 0 \rightarrow Tx = \lambda x$. Pak množina všech vlastních čísel se nazývá bodové spektrum σ_P operátoru T , jinými slovy $\lambda \in \sigma_P(T) \Leftrightarrow \exists x \neq 0: Tx = \lambda x$, kde λ je vlastní číslo operátoru T a $x \neq 0$ je odpovídající vlastní vektor. [30, 33]

²⁰ $\mathcal{L}(X, Y) := \{T: X \rightarrow Y, X, Y \text{ jsou normované lineární prostory, } T \text{ lineární omezený operátor}\}$.

Jedná se o speciální prostor operátorů a je vždy Banachův.

²¹ $\mathcal{R}(T_\lambda) := \{y \in X, \exists x \in X, T_\lambda x = y\}$ je obor hodnot neboli range operátoru.

²² „Pod pojmem stabilní řešení míníme (zjednodušeně) situaci, kdy v rovnici $T_\lambda x = u$, která má jednoznačně určené řešení pro $\forall u \in U(u_0)$ platí, že „malé změny $u \in U(u_0)$ “ mají za následek „malé změny řešení“. To přesně odpovídá situaci, kdy je inverzní zobrazení $T^{-1}\lambda$ spojitě na $U(u_0)$. Tato vlastnost je velmi důležitá při hledání přibližného řešení. Při něm často aproximujeme pravou stranu u nějakou „jí blízkou pravou stranou“ a doufáme, že i řešení x , které odpovídá pravé straně u , bude blízké řešení x , odpovídajícímu pravé straně u . Pro nestabilní operátory to však nemusí být pravda.“ [33, s.14]

6.4.2 Reziduální spektrum operátoru

Když T_λ je injektivní, ale obor hodnot $\overline{\mathcal{R}(T_\lambda)} \neq X$ není tak hustý v $\mathcal{L}$ neboli nejsou k dispozici řešení pro velkou část $u \in X$, pak λ do spektra, které se nazývá reziduální spektrum σ_p operátoru T . [30, 33]

6.4.3 Spojité spektrum operátoru

Když T_λ je injektivní a není surjektivní a obor hodnot $\overline{\mathcal{R}(T_\lambda)} = X$ je hustý v $\mathcal{L}$. Spojité spektrum se tedy skládá z přibližných vlastních hodnot, které nejsou vlastními hodnotami a neleží v reziduálním spektru. [30, 33]

6.4.3.1 Dodatek o spojitém spektru operátoru

„Pokud $\lambda \in \sigma_c$, tak rovnice $T_\lambda y = u$ nemá řešení pro každou pravou $u \in X$, nicméně ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $u_\varepsilon \in X$, $\|u_\varepsilon - u\|_X < \varepsilon$ a přitom existuje řešení rovnice $T_\lambda y = u_\varepsilon \in X$ (to je důsledek toho, že $\overline{\mathcal{R}(T_\lambda)} = X$). Někdy se jim říká „skorořešení“. Zároveň však T_λ je nestabilní (T_λ^{-1} je nespojitý), takže nedává dobrý smysl se bavit o tom, co se děje s řešeními, když trochu měníme pravé strany u_ε .“ [33, s. 16]

6.5 Věta o spektru operátoru

Nechť X je Banachův a $T \in \mathcal{L}(X)$. Množina $\sigma(T) := \sigma_p(T) \cup \sigma_R(T) \cup \sigma_c(T)$ se nazývá spektrum operátoru T . Zjevným důsledkem může být to, že ne každý prvek spektra $\sigma(T)$ je vlastním číslem. [33]

Praktická část

7 Motivace

Praktická část navazuje na článek [13], ve kterém je popsán velmi zajímavý a netriviální problém. V něm je uvažován jednoduchý matematický model šíření vlny na tlumené struně upevněné na obou koncích. Je popsán vlnovou rovnicí proměnné x na intervalu $\langle 0, T \rangle$: $\frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2} + 2a(x) \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2}$, pro okrajové podmínky $v(t, 0) = v(t, T) = 0$ a $a(x) \in \mathbb{C}([0, T])$.

Ve výše uvedené rovnici operátor není samoadjungovaný. Jeho umístění vlastních čísel je asymptotické a ukázalo se, že jeho vlastní čísla λ konvergují k přímce $Re(\lambda) = -\langle a \rangle^{23}$, když jejich imaginární část jde k $\pm\infty$.

Na základě toho, že je pojem determinant matice zobecněn i pro operátory, chceme získat součin vlastních hodnot daného operátoru. Uvažujme, že operátor $\mathcal{S}$ má vlastní čísla dána takto²⁴: $\zeta(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-s} = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-s \ln \lambda_j}$, kde $s \in \mathbb{C}$ v takové polorovině, kde tato Dirichletova řada konverguje. Uvažujme, že vlastních čísel je konečně mnoho a zderivujme. Po provedení derivace získáváme následující formuli $\zeta'(s) = \sum_{j=1}^n -\ln \lambda_j e^{-s \ln \lambda_j}$. Po dosazení $s = 0$ platí, že $\zeta'(s) = \sum_{j=1}^n -\ln \lambda_j$. Spektrální determinant pak můžeme definovat pomocí vzorce: $\det \mathcal{S} = e^{-\zeta'_s(0)}$, protože platí $e^{-\zeta'_s(0)} = e^{\sum_{j=1}^n -\ln \lambda_j} = \prod_{j=1}^n \lambda_j$. Pro tento součin vlastních hodnot operátoru s bodovým spektrem, který má nekonečně mnoho vlastních hodnot, hledáme jejich součin, který není nekonečno (uvažujeme, že žádné vlastní číslo není nula). Jenže jak to udělat, když diverguje? [13, 25]

Jak již víme z teoretické části, řada definující zeta funkci obecně nebude konvergovat pro $s = 0$. Použijeme tedy definici zeta funkce pro dostatečně velkou reálnou část, tu pak lze chápat jako její analytické prodloužení do komplexní roviny. Pro zavedení spektrálního determinantu je nejprve nutné správně zadefinovat komplexní přirozený logaritmus.²⁵ Komplexní přirozený logaritmus je vícehodnotová funkce, závisí u ní na výběru větve, proto se může jeho imaginární část lišit násobky 2π . To souvisí s výběrem řezu pro spektrální determinant. [25]

V dalších oddílech zkoumám tři směry. Změny hodnot spektrálního determinantu nesamoadjugovaného operátoru v závislosti na rozložení vlastních hodnot, když vlastní hodnoty leží na imaginární ose. Změny hodnot spektrálního determinantu nesamoadjugovaného operátoru v závislosti na různých řezech, vlastní hodnoty leží na různých polopřímkách. Změny hodnot spektrálního determinantu nesamoadjugovaného operátoru, pokud se vlastní hodnoty dané polopřímce pouze přibližují. Cílem je potom najít co nejobecnější řešení.

²³ $\langle a \rangle$ označuje průměr funkce tlumení na intervalu $\langle 0, T \rangle$.

²⁴ Jedná se o zobecněnou zeta funkci, což je v [13] dále vysvětleno.

²⁵ V teoretické části je o něm psáno v části 3.6.4.

8 Vlastní hodnoty spektrálního determinantu jsou na imaginární ose

8.1 Příklad 1 – řez na záporné reálné ose

Tento příklad vychází z ukázkového příkladu v článku [25]. Řez logaritmu volíme na záporné reálné ose. Argumenty komplexních čísel budou tedy z intervalu $(-\pi; \pi)$. Vlastní čísla operátoru H_0 v horní polorovině, respektive dolní polorovině, jsou dány níže uvedenými předpisy.

$$\lambda_{j+} = i \cdot C \cdot j = C \cdot j \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}, j \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{R}^+$$

$$\lambda_{j-} = -i \cdot C \cdot j = C \cdot j \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}, j \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{R}^+$$

Dosadíme do zobecněné zeta funkce pro tento operátor. Vytkneme $(C \cdot j)^{-s}$ z obou členů a pro zbývající členy platí, že $e^{-s\frac{i\pi}{2}} + e^{s\frac{i\pi}{2}} = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)$.

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(C \cdot j \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} \right)^{-s} + \left(C \cdot j \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}} \right)^{-s} \right]$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} 2 \cdot e^{s \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(s), \text{ kde } \zeta_R(s) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-s}$$

Následně zderivujeme podle s pravidlem pro derivaci součinu. Tento vzorec budeme používat ve všech dalších příkladech:

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$, kde u, v jsou libovolné funkce.

$$\zeta_{H_0}'(s) = \left[2 \cdot e^{s \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right)} \right]' \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(s) + 2 \cdot e^{s \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right)} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(s) \right]'$$

$$\begin{aligned} \zeta_{H_0}'(s) &= \left[2 \cdot e^{s \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right)} \right]' \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(s) + 2 \cdot e^{s \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right)} \\ &\quad \cdot \left[\left(\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \right)' \cdot \zeta_R(s) + \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R'(s) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{H_0}'(s) &= 2 \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right) \cdot e^{s \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(s) - 2 \cdot e^{s \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right)} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(s) + 2 \\ &\quad \cdot e^{s \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R'(s) \end{aligned}$$

Do derivace dosadíme $s = 0$. Pro výpočty využíváme v teoretické části odvozené hodnoty zeta funkce: $\zeta_R(0) = -\frac{1}{2}$ a $\zeta_R'(0) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$. Pro tuto část také potřebujeme znát pravidla pro práci s logaritmy:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+: \ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b);$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+: \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right);$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^+; k \in \mathbb{R}: \ln(a)^k = k \cdot \ln(a);$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^+: e^{\ln(a)} = a.$$

$$\begin{aligned} \zeta_{H_0}'(0) &= 2 \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right) \cdot e^{0 \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{2}\right) \cdot \zeta_R(0) - 2 \cdot e^{0 \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right)} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot 0}{2}\right) \cdot \zeta_R(0) \\ &\quad + 2 \cdot e^{0 \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{2}\right) \cdot \zeta_R'(0) \end{aligned}$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = -\ln\frac{1}{C} - \ln 2\pi = -\ln\left(\frac{2\pi}{C}\right)$$

Spektrální determinant operátoru H_0 je dán takto:

$$\det H_0 = e^{-\zeta_{H_0}'(0)} = e^{\ln\left(\frac{2\pi}{C}\right)} = \frac{2\pi}{C}$$

8.2 Příklad 1 – řez na kladné reálné ose

Analogicky budeme postupovat pro řez logaritmu na kladné reálné ose. Argumenty komplexních čísel budou tedy z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Vlastní čísla operátoru H_0 v horní polorovině, respektive dolní polorovině, jsou dána níže uvedenými předpisy.

$$\lambda_{j+} = i \cdot C \cdot j = C \cdot j \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}, j \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{R}^+$$

$$\lambda_{j-} = -i \cdot C \cdot j = C \cdot j \cdot e^{\frac{3i\pi}{2}}, j \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{R}^+$$

Dosadíme do zobecněné zeta funkce pro tento operátor. Vytkneme $(C \cdot j)^{-s}$ z obou členů a dále platí, že $e^{-s\frac{i\pi}{2}} + e^{s\frac{i\pi}{2}} = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)$. Pro tento řez navíc získáme člen $e^{-i\pi s}$.

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(C \cdot j \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} \right)^{-s} + \left(C \cdot j \cdot e^{\frac{3i\pi}{2}} \right)^{-s} \right]$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} (C \cdot j)^{-s} \cdot e^{-i\pi s} \cdot \left(e^{\frac{i\pi}{2}s} + e^{-\frac{i\pi}{2}s} \right)$$

$$\zeta_{H_0}(s) = 2 \cdot e^{-i\pi s} \cdot e^{s \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(s), \text{ kde } \zeta_R(s) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-s}$$

Následně zderivujeme podle s pravidlem pro derivaci součinu.

$$\begin{aligned} \zeta_{H_0}'(s) &= \left[2 \cdot e^{-i\pi s} \cdot e^{s \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right)} \right]' \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(s) + 2 \cdot e^{-i\pi s} \\ &\quad \cdot e^{s \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right)} \left[\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(s) \right]' \end{aligned}$$

$${}^{26}\zeta_{H_{01}}'(s) = \left[2 \cdot e^{-i\pi s} \cdot (-i\pi) \cdot \left(\frac{1}{C}\right)^s + 2 \cdot e^{-i\pi s} \cdot \left(\frac{1}{C}\right)^s \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right) \right] \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(s)$$

$$\zeta_{H_{02}}'(s) = 2 \cdot e^{-i\pi s} \cdot e^{s \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right)} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R'(s) - \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \zeta_R(s) \right]$$

Do derivace dosadíme $s = 0$. Pro výpočty využíváme v teoretické části odvozené hodnoty zeta funkce: $\zeta_R(0) = -\frac{1}{2}$ a $\zeta_R'(0) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)$.

²⁶ $\zeta_{H_{0n}}$ je n -tý sčítanec

$$\begin{aligned}\zeta_{H_{0_1}}'(0) &= \left[2 \cdot e^0 \cdot (-i\pi) \cdot \left(\frac{1}{C}\right)^0 + 2 \cdot e^0 \cdot \left(\frac{1}{C}\right)^0 \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right) \right] \cdot \cos(0) \cdot \zeta_R(0) \\ &= i\pi - \ln\left(\frac{1}{C}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{H_{0_2}}'(0) &= 2 \cdot e^0 \cdot e^0 \cdot \left[\cos(0) \cdot \zeta_R'(0) - \sin(0) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \zeta_R(0) \right] = 2 \cdot \left[-\frac{1}{2} \ln(2\pi) \right] \\ &= -\ln(2\pi)\end{aligned}$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \zeta_{H_{0_1}}'(0) + \zeta_{H_{0_2}}'(0) = i\pi - \ln\left(\frac{1}{C}\right) - \ln(2\pi) = i\pi - \ln\left(\frac{2\pi}{C}\right)$$

Spektrální determinant operátoru H_0 je dán takto.

$$\det H_0 = e^{-\zeta_{H_0}'(0)} = e^{-(i\pi - \ln(\frac{2\pi}{C}))} = -\frac{2\pi}{C}$$

Hodnota spektrálního determinantu se pro oba řezy v příkladu 1 liší pouze znaménkem.

8.3 Příklad 2 – řez na záporné reálné ose

Příklad 2 je velmi podobný příkladu 1. Změnu jsme provedli na rozmístění vlastních hodnot, které nyní rostou s druhou mocninou j . Řez logaritmu volíme na záporné reálné ose. Argumenty komplexních čísel budou tedy z intervalu $(-\pi; \pi)$. Vlastní čísla operátoru H_0 v horní polorovině, respektive dolní polorovině, jsou dány níže uvedenými předpisy.

$$\lambda_{j+} = C \cdot j^2 \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}, j \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{R}^+$$

$$\lambda_{j-} = C \cdot j^2 \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}, j \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{R}^+$$

Dosadíme do zobecněné zeta funkce pro tento operátor. Vytkneme $(C \cdot j^2)^{-s}$ z obou členů a pro zbývající členy platí, že $e^{-s\frac{i\pi}{2}} + e^{s\frac{i\pi}{2}} = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \zeta_{H_0}(s) &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(C \cdot j^2 \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} \right)^{-s} + \left(C \cdot j^2 \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}} \right)^{-s} \right] \\ \zeta_{H_0}(s) &= \sum_{j=1}^{\infty} (C \cdot j^2)^{-s} \cdot \left(e^{-\frac{i\pi}{2}s} + e^{\frac{i\pi}{2}s} \right) = 2 \cdot e^{s \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(2s), \text{ kde } \zeta_R(2s) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2s} \end{aligned}$$

Následně zderivujeme podle s pravidlem pro derivaci součinu.

$$\begin{aligned} \zeta_{H_0}'(s) &= \left[2 \cdot e^{s \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right)} \right]' \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(2s) + 2 \cdot e^{s \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right)} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(2s) \right]' \\ \zeta_{H_{01}}'(s) &= \left[2 \cdot \left(\frac{1}{C}\right)^s \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right) \right] \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(2s) \\ \zeta_{H_{02}}'(s) &= 2 \cdot e^{s \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right)} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot 2 \cdot \zeta_R'(2s) - \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \zeta_R(2s) \right] \end{aligned}$$

Do derivace dosadíme $s = 0$. Pro výpočty využíváme v teoretické části odvozené hodnoty zeta funkce: $\zeta_R(0) = -\frac{1}{2}$ a $\zeta_R'(0) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)$.

$$\zeta_{H_{01}}'(0) = 2 \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right) \cdot \cos(0) \cdot \zeta_R(0) = -\ln\left(\frac{1}{C}\right)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{H_{02}}'(0) &= 2 \cdot \left[\cos(0) \cdot \zeta_R'(0) \cdot 2 - \sin(0) \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \zeta_R(0) \right] = 4 \cdot \left[-\frac{1}{2} \ln(2\pi) \right] \\ &= -2 \cdot \ln(2\pi) \end{aligned}$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \zeta_{H_{0_1}}'(0) + \zeta_{H_{0_2}}'(0) = -\ln\left(\frac{1}{C}\right) - 2 \cdot \ln(2\pi) = -\ln\left(\frac{4\pi^2}{C}\right)$$

Spektrální determinant operátoru H_0 je dán takto.

$$\det H_0 = e^{-\zeta_{H_0}'(0)} = e^{\ln\left(\frac{4\pi^2}{C}\right)} = \frac{4\pi^2}{C}$$

8.4 Příklad 2 – řez na kladné reálné ose

Analogicky budeme postupovat pro řez logaritmu na kladné reálné ose. Argumenty komplexních čísel budou tedy z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Vlastní čísla operátoru H_0 v horní polorovině, respektive dolní polorovině, jsou dána níže uvedenými předpisy.

$$\lambda_{j+} = C \cdot j^2 \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}, j \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{R}^+$$

$$\lambda_{j-} = C \cdot j^2 \cdot e^{\frac{3i\pi}{2}}, j \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{R}^+$$

Dosadíme do zobecněné zeta funkce pro tento operátor. Vytkneme $(C \cdot j^2)^{-s}$ z obou členů a dále platí, že $e^{-s\frac{i\pi}{2}} + e^{s\frac{i\pi}{2}} = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)$. Pro tento řez navíc získáme člen $e^{-i\pi s}$.

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(C \cdot j^2 \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} \right)^{-s} + \left(C \cdot j^2 \cdot e^{\frac{3i\pi}{2}} \right)^{-s} \right]$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} (C \cdot j^2)^{-s} \cdot e^{-i\pi s} \cdot \left(e^{\frac{i\pi}{2}s} + e^{-\frac{i\pi}{2}s} \right)$$

$$\zeta_{H_0}(s) = 2 \cdot e^{-i\pi s} \cdot e^{s \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(2s), \text{ kde } \zeta_R(2s) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2s}$$

Následně zderivujeme podle s pravidlem pro derivaci součinu.

$$\zeta_{H_0}'(s) = \left[2 \cdot e^{-i\pi s} \cdot e^{s \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right)} \right]' \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(2s) + 2 \cdot e^{-i\pi s} \cdot e^{s \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right)} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(2s) \right]'$$

$$\zeta_{H_{01}}'(s) = \left[2 \cdot e^{-i\pi s} \cdot (-i\pi) \cdot e^{s \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right)} + 2 \cdot e^{-i\pi s} \cdot \left(\frac{1}{C}\right)^s \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right) \right] \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(2s)$$

$$\zeta_{H_{02}}'(s) = 2 \cdot e^{-i\pi s} \cdot e^{s \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right)} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot 2 \cdot \zeta_R'(2s) - \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \zeta_R(2s) \right]$$

Do derivace dosadíme $s = 0$. Pro výpočty využíváme v teoretické části odvozené hodnoty zeta funkce: $\zeta_R(0) = -\frac{1}{2}$ a $\zeta_R'(0) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)$.

$$\zeta_{H_{01}}'(0) = \left[2 \cdot (-i\pi) + 2 \cdot \ln\left(\frac{1}{C}\right) \right] \cdot \zeta_R(0) = i\pi - \ln\left(\frac{1}{C}\right)$$

$$\zeta_{H_{02}}'(0) = 2 \cdot \left[\cos(0) \cdot 2 \cdot \zeta_R'(0) - \sin(0) \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \zeta_R(0) \right] = -2 \cdot \ln(2\pi)$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \zeta_{H_{0_1}}'(0) + \zeta_{H_{0_2}}'(0) = i\pi - \ln\left(\frac{1}{C}\right) - 2 \cdot \ln(2\pi) = i\pi - \ln\left(\frac{4\pi^2}{C}\right)$$

Spektrální determinant operátoru H_0 je dán takto.

$$\det H_0 = e^{-\zeta_{H_0}'(0)} = e^{-i\pi + \ln\left(\frac{4\pi^2}{C}\right)} = -\frac{4\pi^2}{C}$$

Hodnota spektrálního determinantu se liší pro oba řezy v příkladu 2 znaménkem. V čitateli je pak druhá mocnina členu, který vyšel v příkladu 1.

8.5 Příklad 3 – řez na záporné reálné ose

Příklad 3 zobecňuje příklady 1 a 2. Změnu jsme provedli na rozmístění vlastních hodnot, které nyní rostou s obecnou kladnou mocninou čísla j , tu jsme označili c_2 . Číslo j^{c_2} ale ještě vynásobíme kladným reálným číslem c_1 . Tuto skutečnost jsme opsali níže uvedenou sumou. Vlastní hodnoty jsou podle ní rozmístěny. Řez logaritmu volíme na záporné reálné ose. Argumenty komplexních čísel budou tedy z intervalu $(-\pi; \pi)$. Vlastní čísla operátoru H_0 v horní polorovině, respektive dolní polorovině, jsou dány níže uvedenými předpisy.

$$\lambda_{j+} = i \cdot \omega_j = i \cdot c_1 \cdot j^{c_2}, j \in \mathbb{N}$$

$$\lambda_{j-} = -i \cdot \omega_j = -i \cdot c_1 \cdot j^{c_2}, j \in \mathbb{N}, \text{ kde } \{\omega_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ je posloupnost, kde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$$

Dosadíme do zobecněné zeta funkce pro tento operátor. Vytkneme $(c_1 \cdot j^{c_2})^{-s}$ z obou členů a dále platí, že $e^{-s \frac{i\pi}{2}} + e^{s \frac{i\pi}{2}} = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \zeta_{H_0}(s) &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(c_1 \cdot j^{c_2} \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} \right)^{-s} + \left(c_1 \cdot j^{c_2} \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}} \right)^{-s} \right] \\ \zeta_{H_0}(s) &= \sum_{j=1}^{\infty} (c_1)^{-s} \cdot j^{-c_2 s} \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot (c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s) \end{aligned}$$

Následně zderivujeme podle s pravidlem pro derivaci součinu.

$$\begin{aligned} \zeta_{H_0}'(s) &= \left[2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot (c_1)^{-s} \right]' \cdot \zeta_R(c_2 s) + 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot (c_1)^{-s} \cdot c_2 \cdot \zeta_R'(c_2 s) \\ \zeta_{H_{01}}'(s) &= \left[-2 \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (c_1)^{-s} - 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot (-c_1)^{-s} \cdot \ln c_1 \right] \cdot \zeta_R(c_2 s) \\ \zeta_{H_{02}}'(s) &= 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot (c_1)^{-s} \cdot c_2 \cdot \zeta_R'(c_2 s) \end{aligned}$$

Do derivace dosadíme $s = 0$. Pro výpočty využíváme v teoretické části odvozené hodnoty zeta funkce: $\zeta_R(0) = -\frac{1}{2}$ a $\zeta_R'(0) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)$.

$$\begin{aligned} \zeta_{H_{01}}'(0) &= \left[-2 \sin(0) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (c_1)^{-0} - 2 \cos(0) \cdot (-c_1)^0 \cdot \ln c_1 \right] \cdot \zeta_R(0) = \ln c_1 \\ \zeta_{H_{02}}'(0) &= 2 \cos(0) \cdot (c_1)^0 \cdot c_2 \cdot \zeta_R'(0) = -\ln(2\pi)^{c_2} \\ \zeta_{H_0}'(0) &= \ln c_1 - \ln(2\pi)^{c_2} = \ln \left[\frac{c_1}{(2\pi)^{c_2}} \right] \end{aligned}$$

Spektrální determinant operátoru H_0 je dán takto.

$$\det H_0 = e^{-\zeta_{H_0}'(0)} = e^{-\ln\left[\frac{c_1}{(2\pi)^{c_2}}\right]} = \frac{(2\pi)^{c_2}}{c_1}$$

8.6 Příklad 3 – řez na kladné reálné ose

Analogicky budeme postupovat pro řez logaritmu na kladné reálné ose. Argumenty komplexních čísel budou tedy z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Vlastní čísla operátoru H_0 v horní polorovině, respektive dolní polorovině, jsou dána níže uvedenými předpisy.

$$\lambda_{j+} = i \cdot \omega_j = i \cdot c_1 \cdot j^{c_2}, j \in \mathbb{N}$$

$$\lambda_{j-} = -i \cdot \omega_j = -i \cdot c_1 \cdot j^{c_2}, j \in \mathbb{N}, \text{ kde } \{\omega_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ je posloupnost, kde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$$

Dosadíme do zobecněné zeta funkce pro tento operátor. Vytkneme $(c_1 \cdot j^{c_2})^{-s}$ z obou členů a dále platí, že $e^{-s \frac{i\pi}{2}} + e^{s \frac{i\pi}{2}} = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)$. Pro tento řez navíc získáme člen $e^{-i\pi s}$.

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(c_1 \cdot j^{c_2} \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} \right)^{-s} + \left(c_1 \cdot j^{c_2} \cdot e^{\frac{3i\pi}{2}} \right)^{-s} \right]$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} (c_1 e^{i\pi})^{-s} \cdot j^{c_2} \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot (c_1 e^{i\pi})^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s)$$

Následně zderivujeme podle s pravidlem pro derivaci součinu.

$$\zeta_{H_0}'(s) = \left[2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot (c_1 e^{i\pi})^{-s} \right]' \cdot \zeta_R(c_2 s) + 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot (c_1 e^{i\pi})^{-s} \cdot c_2 \cdot \zeta_R'(c_2 s)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{H_{01}}'(s) = & \left\{ -2 \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (c_1 e^{i\pi})^{-s} \right. \\ & + \left[2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot c_1^{-s} e^{-i\pi s} \cdot [-\ln(c_1)] + 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot c_1^{-s} e^{-i\pi s} \cdot (-i\pi) \right] \\ & \left. \cdot \zeta_R(c_2 s) \right\} \end{aligned}$$

$$\zeta_{H_{02}}'(s) = 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot (c_1 e^{i\pi})^{-s} \cdot c_2 \cdot \zeta_R'(c_2 s)$$

Do derivace dosadíme $s = 0$. Pro výpočty využíváme v teoretické části odvozené hodnoty zeta funkce: $\zeta_R(0) = -\frac{1}{2}$ a $\zeta_R'(0) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)$.

$$\zeta_{H_{01}}'(0) = \left[-2 \sin(0) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (c_1)^{-0} - 2 \cos(0) \cdot (c_1)^0 \cdot \ln c_1 - 2i\pi \right] \cdot \zeta_R(0) = \ln c_1 - i\pi$$

$$\zeta_{H_{02}}'(0) = 2 \cos(0) \cdot (c_1 e^{i\pi})^0 \cdot c_2 \cdot \zeta_R'(0) = -\ln(2\pi)^{c_2}$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \ln c_1 + i\pi - \ln(2\pi)^{c_2} = \ln \left[\frac{c_1}{(2\pi)^{c_2}} \right] - i\pi$$

Spektrální determinant operátoru H_0 je dán takto.

$$\det H_0 = e^{-\zeta_{H_0}'(0)} = e^{-\ln\left(\frac{c_1}{(2\pi)^{c_2}}\right)} \cdot e^{i\pi} = -\frac{(2\pi)^{c_2}}{c_1}$$

V příkladu 3 se determinanty v rámci řezů opět liší znaménkem. Vidíme, že čítec determinantu je stejný jako v předchozích příkladech, změna je pouze v mocnině a ve jmenovateli. Ve jmenovateli je pak zvolené reálné číslo c_1 .

8.7 Příklad 4 – řez na záporné reálné ose

Příklad 4 mění rozmístění vlastních hodnot zcela zásadně. Nyní posloupnost volíme tak, aby odpovídala obecné exponenciální funkci, oproti předchozím případům, kde se vždy jednalo o polynomy. Řez logaritmu volíme na záporné reálné ose. Argumenty komplexních čísel budou tedy z intervalu $(-\pi; \pi)$. Vlastní čísla operátoru H_0 v horní polorovině, respektive dolní polorovině, jsou dány níže uvedenými předpisy.

$$\lambda_{j+} = i \cdot \omega_j = i \cdot c_1 \cdot e^{c_2 j}, j \in \mathbb{N}$$

$$\lambda_{j-} = -i \cdot \omega_j = -i \cdot c_1 \cdot e^{c_2 j}, j \in \mathbb{N}, \text{ kde } \{\omega_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ je posloupnost, kde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$$

Dosadíme do zobecněné zeta funkce pro tento operátor. Vytkneme $(c_1)^{-s}$ z obou členů a dále platí, že $e^{-s \frac{i\pi}{2}} + e^{s \frac{i\pi}{2}} = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)$. Řada $\sum_{j=1}^{\infty} (e^{c_2 j})^{-s}$ je geometrická a tu umíme sečíst.

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(c_1 \cdot e^{c_2 j} \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} \right)^{-s} + \left(c_1 \cdot e^{c_2 j} \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}} \right)^{-s} \right]$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} (c_1 \cdot e^{c_2 j})^{-s} 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)$$

$$\zeta_{H_0}(s) = (c_1)^{-s} \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \frac{1}{e^{c_2 s} - 1}, \text{ kde } \frac{1}{e^{c_2 s} - 1} \text{ je } \sum_{j=1}^{\infty} (e^{-c_2 s})^j \text{ pro } s > 0$$

Následně zderivujeme podle s pravidlem pro derivaci součinu.

$$\zeta_{H_0}'(s) = \frac{[(c_1)^{-s} \cdot 2 \cos(\frac{\pi s}{2})]'}{e^{c_2 s} - 1} + (c_1)^{-s} \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{e^{c_2 s} - 1}\right)'$$

$$\zeta_{H_0}'(s) = \left[-c_1^{-s} \ln(c_1) \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (c_1)^{-s} \right] \cdot \frac{1}{e^{c_2 s} - 1}$$

$$\zeta_{H_0}'(s) = -(c_1)^{-s} \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \frac{c_2 \cdot e^{c_2 s}}{(e^{c_2 s} - 1)^2}$$

Do derivace dosadíme $s = 0$, avšak výraz označíme jako limitu, protože pokud by $s = 0$, získali bychom jmenovatel roven nule. Pro výpočty využíváme v teoretické části odvozené hodnoty zeta funkce: $\zeta_R(0) = -\frac{1}{2}$ a $\zeta_R'(0) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)$.

$$\lim_{s \rightarrow 0} \zeta_{H_0}'(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\left(-c_1^{-s} \ln(c_1) \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (c_1)^{-s} \right) \cdot \frac{1}{e^{c_2 s} - 1} - (c_1)^{-s} \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \frac{c_2 \cdot e^{c_2 s}}{(e^{c_2 s} - 1)^2} \right]$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \zeta_{H_0}'(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{\left(-c_1^{-s} \ln(c_1) \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (c_1)^{-s} \right) \cdot (e^{c_2 s} - 1) - (c_1)^{-s} c_2 \cdot e^{c_2 s} \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{(e^{c_2 s} - 1)^2} \right] =$$

$-\infty$ pro $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$

Spektrální determinant operátoru H_0 je dán takto.

$$\det H_0 = e^{-\lim_{s \rightarrow 0} \zeta_{H_0}'(s)} = e^{-(-\infty)} = +\infty$$

Spektrální zeta funkce diverguje v nule, proto spektrální determinant diverguje.

8.8 Příklad 4 – řez na kladné reálné ose

Analogicky budeme postupovat pro řez logaritmu na kladné reálné ose. Argumenty komplexních čísel budou tedy z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Vlastní čísla operátoru H_0 v horní polorovině, respektive dolní polorovině, jsou dány níže uvedenými předpisy.

$$\lambda_{j+} = i \cdot \omega_j = i \cdot c_1 \cdot e^{c_2 j}, j \in \mathbb{N}$$

$$\lambda_{j-} = -i \cdot \omega_j = -i \cdot c_1 \cdot e^{c_2 j}, j \in \mathbb{N}, \text{ kde } \{\omega_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ je posloupnost, kde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$$

Dosadíme do zobecněné zeta funkce pro tento operátor. Vytkneme $(c_1)^{-s}$ z obou členů a dále platí, že $e^{-s \frac{i\pi}{2}} + e^{s \frac{i\pi}{2}} = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)$. Řada $\sum_{j=1}^{\infty} (e^{c_2 j})^{-s}$ je geometrická a tu umíme sečíst.

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(c_1 \cdot e^{c_2 j} \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} \right)^{-s} + \left(c_1 \cdot e^{c_2 j} \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}} \right)^{-s} \right]$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} (c_1 \cdot e^{c_2 j})^{-s} \cdot e^{-i\pi s} \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)$$

$$\zeta_{H_0}(s) = (c_1)^{-s} \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot e^{-i\pi s} \cdot \frac{1}{e^{c_2 s} - 1}, \text{ kde } \frac{1}{e^{c_2 s} - 1} \text{ je } \sum_{j=1}^{\infty} (e^{-c_2 s})^j \text{ pro } s > 0$$

Následně zderivujeme podle s pravidlem pro derivaci součinu.

$$\zeta_{H_0}'(s) = \frac{[(c_1)^{-s} \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)]'}{e^{c_2 s} - 1} \cdot e^{-i\pi s} + (c_1)^{-s} \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \left(\frac{e^{-i\pi s}}{e^{c_2 s} - 1}\right)'$$

$$\zeta_{H_0}'(s) = \left[-c_1^{-s} \ln(c_1) \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (c_1)^{-s} \right] \cdot \frac{e^{-i\pi s}}{e^{c_2 s} - 1}$$

$$\zeta_{H_0}'(s) = (c_1)^{-s} \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \left[\frac{-i\pi e^{-i\pi s} \cdot (e^{c_2 s} - 1) - e^{-i\pi s} \cdot c_2 e^{c_2 s}}{(e^{c_2 s} - 1)^2} \right]$$

Do derivace dosadíme $s = 0$, avšak výraz označíme jako limitu, protože pokud by $s = 0$, získali bychom jmenovatel roven nule. Pro výpočty využíváme v teoretické části odvozené hodnoty zeta funkce: $\zeta_R(0) = -\frac{1}{2}$ a $\zeta_R'(0) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)$.

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \zeta_{H_0}'(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\left(-c_1^{-s} \ln(c_1) \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (c_1)^{-s} \right) \cdot \frac{e^{-i\pi s}}{e^{c_2 s} - 1} \right. \\ &\quad \left. + (c_1)^{-s} \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \left[\frac{-i\pi e^{-i\pi s} \cdot (e^{c_2 s} - 1) - e^{-i\pi s} \cdot c_2 e^{c_2 s}}{(e^{c_2 s} - 1)^2} \right] \right] = \end{aligned}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \zeta_{H_0}'(s) =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{\left(-c_1^{-s} \ln(c_1) \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \frac{\pi}{2} (c_1)^{-s} \right) \cdot (e^{c_2 s} - 1) - (c_1)^{-s} \cdot (-i\pi e^{-i\pi s} \cdot (e^{c_2 s} - 1) - e^{-i\pi s} \cdot c_2 e^{c_2 s}) \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{(e^{c_2 s} - 1)^2} \right] =$$

$$-\infty \text{ pro } c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$$

Spektrální determinant operátoru H_0 je dán takto.

$$\det H_0 = e^{-\zeta_{H_0}'(0)} = e^{-(-\infty)} = \infty$$

V příkladu 4 se determinanty v rámci řezů neliší ani znaménkem. Spektrální zeta funkce diverguje v nule do $-\infty$, proto nemá smysl uvažovat determinant, který diverguje do $+\infty$.

8.9 Příklad 5 – řez na záporné reálné ose

Příklad 5 mění rozmístění vlastních hodnot opět zásadně. Nyní posloupnost volíme tak, aby odpovídala libovolné logaritmické funkci, oproti předchozím případům, kde se jednalo polynomy a v příkladě 4 o exponenciálu. Řez logaritmu volíme na záporné reálné ose. Argumenty komplexních čísel budou tedy z intervalu $(-\pi; \pi)$. Vlastní čísla operátoru H_0 v horní polorovině, respektive dolní polorovině, jsou dány níže uvedenými předpisy.

$$\lambda_{j+} = i \cdot \omega_j = i \cdot c_2 \cdot \ln(c_1 j), j \in \mathbb{N}$$

$$\lambda_{j-} = -i \cdot \omega_j = -i \cdot c_2 \cdot \ln(c_1 j), j \in \mathbb{N}, \text{ kde } \{\omega_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ je posloupnost, kde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ \wedge c_1 > 1$$

Dosadíme do zobecněné zeta funkce pro tento operátor. Vytkneme $(c_1)^{-s}$ z obou členů a dále platí, že $e^{-s\frac{i\pi}{2}} + e^{s\frac{i\pi}{2}} = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)$.

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(c_2 \cdot \ln(c_1 j) \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} \right)^{-s} + \left(c_2 \cdot \ln(c_1 j) \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}} \right)^{-s} \right]$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} (c_2 \cdot e^{i\pi})^{-s} \cdot [\ln(c_1 j)]^{-s} \cdot e^{-i\pi s} \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right), \text{ kde } \sum_{j=1}^{\infty} [\ln(c_1 j)]^{-s} = \infty$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \infty$$

8.10 Příklad 5 – řez na kladné reálné ose

Analogicky budeme postupovat pro řez logaritmu na kladné reálné ose. Argumenty komplexních čísel budou tedy z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Vlastní čísla operátoru H_0 v horní polorovině, respektive dolní polorovině, jsou dány níže uvedenými předpisy.

$$\lambda_{j+} = i \cdot \omega_j = i \cdot c_2 \cdot \ln(c_1 j), j \in \mathbb{N}$$

$$\lambda_{j-} = -i \cdot \omega_j = -i \cdot c_2 \cdot \ln(c_1 j), j \in \mathbb{N}, \text{ kde } \{\omega_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ je posloupnost, kde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ \wedge c_1 > 1$$

Dosadíme do zobecněné zeta funkce pro tento operátor. Vytkneme $(c_1)^{-s}$ z obou členů a dále platí, že $e^{-s\frac{i\pi}{2}} + e^{s\frac{i\pi}{2}} = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)$.

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(c_2 \cdot \ln(c_1 j) \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} \right)^{-s} + \left(c_2 \cdot \ln(c_1 j) \cdot e^{\frac{3i\pi}{2}} \right)^{-s} \right]$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} (c_2)^{-s} \cdot [\ln(c_1 j)]^{-s} \cdot e^{-i\pi s} \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right), \text{ kde } \sum_{j=1}^{\infty} [\ln(c_1 j)]^{-s} = \infty$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \infty$$

Spektrální zeta funkce není definovaná pro žádná s . Nemá proto vůbec smysl uvažovat determinant. Dále ukažme pomocí srovnávacího kritéria, že pro libovolnou posloupnost $\widetilde{\omega}_j > 0$ s pomalejším růstem, než je růst logaritmický, dosáhneme stejného výsledku, tedy suma bude také divergovat.

$$\widetilde{\omega}_j \leq \ln(c_1 j) \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} (\widetilde{\omega}_j)^{-s} \geq \sum_{j=1}^{\infty} [\ln(c_1 j)]^{-s} = +\infty, \text{ pro } s > 0$$

9 Vlastní hodnoty spektrálního determinantu jsou na několika polopřímkách

9.1 Příklad 1 – první řez

V této části zobecníme polohu vlastních hodnot na obecně dané polopřímky. Argumenty komplexních čísel jsou z intervalu $\langle \beta_1, \beta_1 + 2\pi \rangle$. Vlastní čísla operátoru H_0 jsou dány níže uvedeným předpisem, kde řez volíme jako polopřímku pod úhlem β_1 a zároveň platí: $0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < 2\pi$.

$$\lambda_{j+} = j \cdot e^{i\alpha_1}, j \in \mathbb{N}, \alpha_1 \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$\lambda_{j-} = j \cdot e^{i\alpha_2}, j \in \mathbb{N}, \alpha_2 \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

Dosadíme do zobecněné zeta funkce pro tento operátor. Vytkneme $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-s} = \zeta_R(s)$ z obou členů a použijeme tuto formuli:

$$e^{-ias} + e^{-i\beta s} = (-i \cdot \sin \alpha s - i \cdot \sin \beta s) + \cos \alpha s + \cos \beta s, \text{ kde } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} [(j \cdot e^{i\alpha_1})^{-s} + (j \cdot e^{i\alpha_2})^{-s}] = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-s} \cdot (e^{-i\alpha_1 s} + e^{-i\alpha_2 s})$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \zeta_R(s) \cdot [-i \cdot \sin(\alpha_1 s) - i \cdot \sin(\alpha_2 s) + \cos(\alpha_1 s) + \cos(\alpha_2 s)]$$

Následně zderivujeme podle s pravidlem pro derivaci součinu.

$$\zeta_{H_{01}}'(s) = [-i \cdot \zeta_R(s) \cdot \sin(\alpha_1 s)]' = -i \cdot [\zeta_R'(s) \cdot \sin(\alpha_1 s) + \zeta_R(s) \cdot \cos(\alpha_1 s) \cdot \alpha_1]$$

$$\zeta_{H_{02}}'(s) = [-i \cdot \zeta_R(s) \cdot \sin(\alpha_2 s)]' = -i \cdot [\zeta_R'(s) \cdot \sin(\alpha_2 s) + \zeta_R(s) \cdot \cos(\alpha_2 s) \cdot \alpha_2]$$

$$\zeta_{H_{03}}'(s) = [\zeta_R(s) \cdot \cos(\alpha_1 s)]' = [\zeta_R'(s) \cdot \cos(\alpha_1 s) - \zeta_R(s) \cdot \sin(\alpha_1 s) \cdot \alpha_1]$$

$$\zeta_{H_{04}}'(s) = [\zeta_R(s) \cdot \cos(\alpha_2 s)]' = [\zeta_R'(s) \cdot \cos(\alpha_2 s) - \zeta_R(s) \cdot \sin(\alpha_2 s) \cdot \alpha_2]$$

Do derivace dosadíme $s = 0$. Pro výpočty využíváme v teoretické části odvozené hodnoty zeta funkce: $\zeta_R(0) = -\frac{1}{2}$ a $\zeta_R'(0) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)$.

$$\zeta_{H_{01}}'(0) = -i \cdot [\zeta_R'(0) \cdot \sin(0) + \zeta_R(0) \cdot \cos(0) \cdot \alpha_1] = \frac{1}{2} i \alpha_1$$

$$\zeta_{H_{02}}'(0) = -i \cdot [\zeta_R'(0) \cdot \sin(0) + \zeta_R(0) \cdot \cos(0) \cdot \alpha_2] = \frac{1}{2} i \alpha_2$$

$$\zeta_{H_{03}}'(0) = [\zeta_R'(0) \cdot \cos(0) - \zeta_R(0) \cdot \sin(0) \cdot \alpha_1] = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)$$

$$\zeta_{H_{04}}'(0) = [\zeta_R'(0) \cdot \cos(0) - \zeta_R(0) \cdot \sin(0) \cdot \alpha_2] = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \zeta_{H_{0_1}}'(0) + \zeta_{H_{0_2}}'(0) + \zeta_{H_{0_3}}'(0) + \zeta_{H_{0_4}}'(0)$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \frac{1}{2}i\alpha_1 + \frac{1}{2}i\alpha_2 - \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(2\pi) = \frac{1}{2}i \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) - \ln(2\pi)$$

Spektrální determinant operátoru H_0 je dán takto.

$$\det H_0 = e^{-\zeta_{H_0}'(0)} = e^{-\frac{1}{2}(i\alpha_1 + i\alpha_2) + \ln(2\pi)} = e^{-\frac{1}{2}i(\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot 2\pi$$

9.2 Příklad 1 – druhý řez

Analogicky budeme postupovat pro druhý řez. Argumenty komplexních čísel jsou z intervalu $\langle \beta_2, \beta_2 + 2\pi \rangle$. Vlastní čísla operátoru H_0 jsou dány níže uvedeným předpisem, kde řez volíme jako polopřímku pod úhlem β_2 a zároveň platí: $0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < 2\pi$.

$$\lambda_{j+} = j \cdot e^{i(\alpha_1 + 2\pi)}, j \in \mathbb{N}, \alpha_1 \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$\lambda_{j-} = j \cdot e^{i\alpha_2}, j \in \mathbb{N}, \alpha_2 \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

Dosadíme do zobecněné zeta funkce pro tento operátor. Vytkneme $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-s} = \zeta_R(s)$ z obou členů a použijeme tuto formuli:

$$e^{-i\alpha s} + e^{-i\beta s} = (-i \cdot \sin \alpha s - i \cdot \sin \beta s) + \cos \alpha s + \cos \beta s, \text{ kde } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[(j \cdot e^{i(\alpha_1 + 2\pi)})^{-s} + (j \cdot e^{i\alpha_2})^{-s} \right]$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-s} \cdot (e^{-i\alpha_1 s} \cdot e^{-2i\pi s} + e^{-i\alpha_2 s})$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \zeta_R(s) \{ -i \cdot \sin[(\alpha_1 + 2\pi)s] - i \cdot \sin(\alpha_2 s) + \cos[(\alpha_1 + 2\pi)s] + \cos(\alpha_2 s) \}$$

Následně zderivujeme podle s pravidlem pro derivaci součinu.

$$\zeta_{H_{01}}'(s) = \{ -i \cdot \zeta_R(s) \cdot \sin[(\alpha_1 + 2\pi)s] \}'$$

$$\zeta_{H_{01}}'(s) = -i \cdot \{ \zeta_R'(s) \cdot \sin[(\alpha_1 + 2\pi)s] + \zeta_R(s) \cdot \cos[(\alpha_1 + 2\pi)s] \cdot (\alpha_1 + 2\pi) \}$$

$$\zeta_{H_{02}}'(s) = (-i \cdot \zeta_R(s) \cdot \sin(\alpha_2 s))' = -i \cdot (\zeta_R'(s) \cdot \sin(\alpha_2 s) + \zeta_R(s) \cdot \cos(\alpha_2 s) \cdot \alpha_2)$$

$$\zeta_{H_{03}}'(s) = (\zeta_R(s) \cdot \cos[(\alpha_1 + 2\pi)s])'$$

$$\zeta_{H_{03}}'(s) = \{ \zeta_R'(s) \cdot \cos[(\alpha_1 + 2\pi)s] - \zeta_R(s) \cdot \sin[(\alpha_1 + 2\pi)s] \cdot (\alpha_1 + 2\pi) \}$$

$$\zeta_{H_{04}}'(s) = (\zeta_R(s) \cdot \cos(\alpha_2 s))' = (\zeta_R'(s) \cdot \cos(\alpha_2 s) - \zeta_R(s) \cdot \sin(\alpha_2 s) \cdot \alpha_2)$$

Do derivace dosadíme $s = 0$. Pro výpočty využíváme v teoretické části odvozené hodnoty zeta funkce: $\zeta_R(0) = -\frac{1}{2}$ a $\zeta_R'(0) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)$.

$$\zeta_{H_{01}}'(0) = -i \cdot [\zeta_R'(0) \cdot \sin(0) + \zeta_R(0) \cdot \cos(0) \cdot (\alpha_1 + 2\pi)] = \frac{1}{2} i(\alpha_1 + 2\pi)$$

$$\zeta_{H_{02}}'(0) = -i \cdot [\zeta_R'(0) \cdot \sin(0) + \zeta_R(0) \cdot \cos(0) \cdot \alpha_2] = \frac{1}{2} i\alpha_2$$

$$\zeta_{H_{03}}'(0) = [\zeta_R'(0) \cdot \cos(0) - \zeta_R(0) \cdot \sin(0) \cdot (\alpha_1 + 2\pi)] = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)$$

$$\zeta_{H_{0_4}}'(0) = (\zeta_R'(0) \cdot \cos(0) - \zeta_R(0) \cdot \sin(0) \cdot \alpha_2) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \zeta_{H_{0_1}}'(0) + \zeta_{H_{0_2}}'(0) + \zeta_{H_{0_3}}'(0) + \zeta_{H_{0_4}}'(0)$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \frac{1}{2}i(\alpha_1 + 2\pi) + \frac{1}{2}i\alpha_2 - \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \frac{1}{2}(i\alpha_1 + 2i\pi + i\alpha_2) - \ln(2\pi)$$

Spektrální determinant operátoru H_0 je dán takto.

$$\det H_0 = e^{-\zeta_{H_0}'(0)} = e^{-\frac{1}{2}(i\alpha_1 + 2i\pi + i\alpha_2) + \ln(2\pi)} = -e^{-\frac{1}{2}i \cdot (\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot 2\pi$$

Porovnáme-li oba řezy v příkladu 1, opět se nám liší pouze znaménkem.

9.3 Příklad 2 – první řez

Tento příklad je kombinací úlohy z prvního pohledu na praktickou část a příkladu předešlého. Vlastní hodnoty jsou rozmístěny podle posloupností, a zároveň leží na obecných polopřímkách. Argumenty komplexních čísel jsou z intervalu $\langle \beta_1, \beta_1 + 2\pi \rangle$. Řez volíme jako polopřímku pod úhlem β_1 a zároveň platí: $0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < 2\pi$.

$$\lambda_{j+} = \omega_j \cdot e^{i\alpha_1} = c_1 \cdot j^{c_2} \cdot e^{i\alpha_1}, j \in \mathbb{N}, \alpha_1 \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$\lambda_{j-} = \omega_j \cdot e^{i\alpha_2} = c_1 \cdot j^{c_2} \cdot e^{i\alpha_2}, j \in \mathbb{N}, \alpha_2 \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

Dosadíme do zobecněné zeta funkce pro tento operátor. Vytkneme $(c_1)^{-s}$ a $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-c_2 s} = \zeta_R(c_2 s)$ z obou členů a použijeme formuli, kterou jsme zavedli v předchozí úloze.

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} [(c_1 \cdot j^{c_2} \cdot e^{i\alpha_1})^{-s} + (c_1 \cdot j^{c_2} \cdot e^{i\alpha_2})^{-s}]$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} (c_1)^{-s} \cdot j^{-c_2 s} \cdot (e^{-i\alpha_1 s} + e^{-i\alpha_2 s})$$

$$\zeta_{H_0}(s) = (c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s) \cdot [-i \cdot \sin(\alpha_1 s) - i \cdot \sin(\alpha_2 s) + \cos(\alpha_1 s) + \cos(\alpha_2 s)]$$

Následně zderivujeme podle s pravidlem pro derivaci součinu a do každého zderivovaného výrazu dosadíme $s = 0$. Toto opakujeme pro každý sčítanec.

$$\zeta_{H_{01}}'(s) = [(c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s) \cdot (-i \cdot \sin(\alpha_1 s))]'$$

$$\zeta_{H_{01}}'(s) = -i[(c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s) \cdot \sin(\alpha_1 s)]'$$

$$\begin{aligned} \zeta_{H_{01}}'(s) = -i \cdot [(c_1)^{-s} \cdot (-\ln c_1) \cdot \zeta_R(c_2 s) + (c_1)^{-s} c_2 \cdot \zeta_R'(c_2 s)] \\ \cdot \sin(\alpha_1 s) - i [(c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s) \cdot \cos(\alpha_1 s) \cdot \alpha_1] \end{aligned}$$

$$\zeta_{H_{01}}'(0) = \frac{1}{2} i \alpha_1$$

$$\zeta_{H_{02}}'(s) = \{(c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s) \cdot [-i \cdot \sin(\alpha_2 s)]\}'$$

$$\zeta_{H_{02}}'(s) = -i[(c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s) \cdot \sin(\alpha_2 s)]'$$

$$\begin{aligned} \zeta_{H_{02}}'(s) = -i \cdot [(c_1)^{-s} \cdot (-\ln c_1) \cdot \zeta_R(c_2 s) + (c_1)^{-s} c_2 \cdot \zeta_R'(c_2 s)] \\ \cdot \sin(\alpha_2 s) - i [(c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s) \cdot \cos(\alpha_2 s) \cdot \alpha_2] \end{aligned}$$

$$\zeta_{H_{02}}'(0) = \frac{1}{2} i \alpha_2$$

$$\zeta_{H_{03}}'(s) = [(c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s)]' \cdot \cos(\alpha_1 s) + (c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s) \cdot [\cos(\alpha_1 s)]'$$

$$\begin{aligned} \zeta_{H_{03}}'(s) = & [(c_1)^{-s} \cdot (-\ln c_1) \cdot \zeta_R(c_2 s) + (c_1)^{-s} c_2 \cdot \zeta_R'(c_2 s)] \\ & \cdot \cos(\alpha_1 s) - (c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s) \cdot \sin(\alpha_1 s) \cdot \alpha_1 \end{aligned}$$

$$\zeta_{H_{03}}'(0) = \frac{1}{2} \ln(c_1) - \frac{1}{2} \cdot c_2 \ln(2\pi) = -\frac{1}{2} \ln \left[\frac{(2\pi)^{c_2}}{c_1} \right]$$

$$\zeta_{H_{04}}'(s) = [(c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s)]' \cdot \cos(\alpha_2 s) + (c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s) \cdot (\cos(\alpha_2 s))'$$

$$\begin{aligned} \zeta_{H_{04}}'(s) = & [(c_1)^{-s} \cdot (-\ln c_1) \cdot \zeta_R(c_2 s) + (c_1)^{-s} c_2 \cdot \zeta_R'(c_2 s)] \\ & \cdot \cos(\alpha_2 s) - (c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s) \cdot \sin(\alpha_2 s) \cdot \alpha_2 \end{aligned}$$

$$\zeta_{H_{04}}'(0) = \frac{1}{2} \ln(c_1) - \frac{1}{2} \cdot c_2 \ln(2\pi) = -\frac{1}{2} \ln \left[\frac{(2\pi)^{c_2}}{c_1} \right]$$

Sečteme.

$$\zeta_{H_0}'(0) = \frac{1}{2} i \alpha_1 + \frac{1}{2} i \alpha_2 - \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(2\pi)^{c_2}}{c_1} \right] - \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(2\pi)^{c_2}}{c_1} \right]$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \frac{1}{2} i (\alpha_1 + \alpha_2) - \ln \left[\frac{(2\pi)^{c_2}}{c_1} \right]$$

Spektrální determinant operátoru H_0 je dán takto. Je to součin determinantů z příkladu 4 (kapitola 8.7.) a příkladu 1 (kapitola 9.1.).

$$\det H_0 = e^{-\zeta_{H_0}'(0)} = e^{-\frac{1}{2} i (\alpha_1 + \alpha_2) - \ln \left[\frac{(2\pi)^{c_2}}{c_1} \right]} = e^{-\frac{1}{2} i (\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot \left[\frac{(2\pi)^{c_2}}{c_1} \right]$$

9.4 Příklad 2 – druhý řez

Analogicky budeme postupovat pro druhý řez. Argumenty komplexních čísel jsou z intervalu $\langle \beta_2, \beta_2 + 2\pi \rangle$. Vlastní čísla operátoru H_0 jsou dány níže uvedeným předpisem, kde řez volíme jako polopřímku pod úhlem β_2 a zároveň platí: $0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < 2\pi$.

$$\lambda_{j+} = \omega_j \cdot e^{i(\alpha_1 + 2\pi)} = c_1 \cdot j^{c_2} \cdot e^{i(\alpha_1 + 2\pi)}, j \in \mathbb{N}, \alpha_1 \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$\lambda_{j-} = \omega_j \cdot e^{i\alpha_2} = c_1 \cdot j^{c_2} \cdot e^{i\alpha_2}, j \in \mathbb{N}, \alpha_2 \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

Dosadíme do zobecněné zeta funkce pro tento operátor. Vytkneme $(c_1)^{-s}$ a $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-c_2 s} = \zeta_R(c_2 s)$ z obou členů a použijeme formuli, kterou jsme zavedli v předchozí úloze.

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[(c_1 \cdot j^{c_2} \cdot e^{i(\alpha_1 + 2\pi)})^{-s} + (c_1 \cdot j^{c_2} \cdot e^{i\alpha_2})^{-s} \right]$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} (c_1)^{-s} \cdot j^{-c_2 s} \cdot (e^{-i(\alpha_1 + 2\pi)s} + e^{-i\alpha_2 s})$$

$$\zeta_{H_0}(s) = (c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s) \cdot \{-i \cdot \sin[(\alpha_1 + 2\pi)s] - i \cdot \sin(\alpha_2 s) + \cos[(\alpha_1 + 2\pi)s] + \cos[\alpha_2 s]\}$$

Následně zderivujeme podle s pravidlem pro derivaci součinu a do každého zderivovaného výrazu dosadíme $s = 0$. Toto opakujeme pro každý sčítanec.

$$\zeta_{H_{01}}'(s) = \{(c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s) \cdot [-i \cdot \sin(\alpha_1 s)]\}'$$

$$\zeta_{H_{01}}'(s) = -i[(c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s) \cdot \sin(\alpha_1 s)]'$$

$$\zeta_{H_{01}}'(s) = -i \cdot [-(c_1)^{-s} \cdot \ln(c_1) \cdot \zeta_R(c_2 s) + (c_1)^{-s} c_2 \cdot \zeta_R'(c_2 s)] \cdot \sin[(\alpha_1 + 2\pi)s] - i \{(c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s) \cdot \cos[(\alpha_1 + 2\pi)s] \cdot (\alpha_1 + 2\pi)\}$$

$$\zeta_{H_{01}}'(0) = \frac{1}{2} i(\alpha_1 + 2\pi) = \frac{1}{2} i\alpha_1 + i\pi$$

$$\zeta_{H_{02}}'(s) = \{(c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s) \cdot [-i \cdot \sin(\alpha_2 s)]\}'$$

$$\zeta_{H_{02}}'(s) = -i[(c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s) \cdot \sin(\alpha_2 s)]'$$

$$\zeta_{H_{02}}'(s) = -i \cdot [-(c_1)^{-s} \cdot \ln(c_1) \cdot \zeta_R(c_2 s) + (c_1)^{-s} c_2 \cdot \zeta_R'(c_2 s)] \cdot \sin(\alpha_2 s) - i \{(c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s) \cdot \cos(\alpha_2 s) \cdot \alpha_2\}$$

$$\zeta_{H_{02}}'(0) = \frac{1}{2} i\alpha_2$$

$$\begin{aligned}
\zeta_{H_{0_3}}'(s) &= [(c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s)]' \\
&\quad \cdot \cos[(\alpha_1 + 2\pi)s] + (c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s) \cdot \{\cos[(\alpha_1 + 2\pi)s]\}' \\
\zeta_{H_{0_3}}'(s) &= [-(c_1)^{-s} \cdot \ln(c_1) \cdot \zeta_R(c_2 s) + (c_1)^{-s} c_2 \cdot \zeta_R'(c_2 s)] \\
&\quad \cdot \cos[(\alpha_1 + 2\pi)s] - (c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s) \cdot \sin[(\alpha_1 + 2\pi)s] \cdot (\alpha_1 + 2\pi) \\
\zeta_{H_{0_3}}'(0) &= \frac{1}{2} \ln(c_1) - \frac{1}{2} \cdot c_2 \ln(2\pi) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{c_1}{(2\pi)^{c_2}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_{H_{0_4}}'(s) &= \{[(c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s)]' \cdot \cos(\alpha_2 s) + (c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s) \cdot [\cos(\alpha_2 s)]'\} \\
\zeta_{H_{0_4}}'(s) &= [-(c_1)^{-s} \cdot \ln(c_1) \cdot \zeta_R(c_2 s) + (c_1)^{-s} c_2 \cdot \zeta_R'(c_2 s)] \\
&\quad \cdot \cos(\alpha_2 s) - (c_1)^{-s} \cdot \zeta_R(c_2 s) \cdot [\sin(\alpha_2 s)] \cdot \alpha_2 \\
\zeta_{H_{0_4}}'(0) &= \frac{1}{2} \ln(c_1) - \frac{1}{2} \cdot c_2 \ln(2\pi) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{c_1}{(2\pi)^{c_2}} \right]
\end{aligned}$$

Sečteme.

$$\zeta_{H_0}'(0) = \frac{1}{2} i\alpha_1 + i\pi + \frac{1}{2} i\alpha_2 + \ln \left[\frac{c_1}{(2\pi)^{c_2}} \right]$$

Spektrální determinant operátoru H_0 je dán takto. Je to součin determinantů z příkladu 4 (kapitola 8.8.) a příkladu 1 (kapitola 9.2.).

$$\det H_0 = e^{-\zeta_{H_0}'(0)} = e^{-\frac{1}{2}i(\alpha_1 + \alpha_2) - i\pi - \ln \left[\frac{c_1}{(2\pi)^{c_2}} \right]} = -e^{-\frac{1}{2}i(\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot \left[\frac{(2\pi)^{c_2}}{c_1} \right]$$

Spektrální determinanty se vůči sobě liší pouze znaménkem.

9.5 Příklad 3 – první řez

Nyní budeme postupovat jako v příkladu 1 (kapitola 9.1. a 9.2.). Rozdíl bude ale v tom, že vlastní hodnoty budou ležet na třech přímkách. Argumenty komplexních čísel jsou z intervalu $\langle \beta_1, \beta_1 + 2\pi \rangle$. Řez volíme jako polopřímku pod úhlem β_1 a zároveň platí: $0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \beta_3 < \alpha_3 < 2\pi$.

$$\lambda_{j_1} = j \cdot e^{i\alpha_1}, j \in \mathbb{N}, \alpha_1 \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$\lambda_{j_2} = j \cdot e^{i\alpha_2}, j \in \mathbb{N}, \alpha_2 \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$\lambda_{j_3} = j \cdot e^{i\alpha_3}, j \in \mathbb{N}, \alpha_3 \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

Dosadíme do zobecněné zeta funkce pro tento operátor. Vytkneme $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-s} = \zeta_R(s)$ z obou členů a použijeme tuto formuli:

$$\begin{aligned} e^{-i\alpha s} + e^{-i\beta s} + e^{-i\gamma s} &= \\ &= (-i \cdot \sin \alpha s - i \cdot \sin \beta s - i \cdot \sin \gamma s) + \cos \alpha s + \cos \beta s + \cos \gamma s, \text{ kde } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} [(j \cdot e^{i\alpha_1})^{-s} + (j \cdot e^{i\alpha_2})^{-s} + (j \cdot e^{i\alpha_3})^{-s}]$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-s} \cdot (e^{-i\alpha_1 s} + e^{-i\alpha_2 s} + e^{-i\alpha_3 s})$$

$$\begin{aligned} \zeta_{H_0}(s) &= \zeta_R(s) [-i \cdot \sin(\alpha_1 s) - i \cdot \sin(\alpha_2 s) - i \cdot \sin(\alpha_3 s) + \cos(\alpha_1 s) \\ &\quad + \cos(\alpha_2 s) + \cos(\alpha_3 s)] \end{aligned}$$

Následně zderivujeme podle s pravidlem pro derivaci součinu každý sčítanec.

$$\zeta_{H_{01}}'(s) = (-i \cdot \zeta_R(s) \cdot \sin(\alpha_1 s))' = -i \cdot (\zeta_R'(s) \cdot \sin(\alpha_1 s) + \zeta_R(s) \cdot \cos(\alpha_1 s) \cdot \alpha_1)$$

$$\zeta_{H_{02}}'(s) = (-i \cdot \zeta_R(s) \cdot \sin(\alpha_2 s))' = -i \cdot (\zeta_R'(s) \cdot \sin(\alpha_2 s) + \zeta_R(s) \cdot \cos(\alpha_2 s) \cdot \alpha_2)$$

$$\zeta_{H_{03}}'(s) = (-i \cdot \zeta_R(s) \cdot \sin(\alpha_3 s))' = -i \cdot (\zeta_R'(s) \cdot \sin(\alpha_3 s) + \zeta_R(s) \cdot \cos(\alpha_3 s) \cdot \alpha_3)$$

$$\zeta_{H_{04}}'(s) = (\zeta_R(s) \cdot \cos(\alpha_1 s))' = (\zeta_R'(s) \cdot \cos(\alpha_1 s) - \zeta_R(s) \cdot \sin(\alpha_1 s) \cdot \alpha_1)$$

$$\zeta_{H_{05}}'(s) = (\zeta_R(s) \cdot \cos(\alpha_2 s))' = (\zeta_R'(s) \cdot \cos(\alpha_2 s) - \zeta_R(s) \cdot \sin(\alpha_2 s) \cdot \alpha_2)$$

$$\zeta_{H_{06}}'(s) = (\zeta_R(s) \cdot \cos(\alpha_3 s))' = (\zeta_R'(s) \cdot \cos(\alpha_3 s) - \zeta_R(s) \cdot \sin(\alpha_3 s) \cdot \alpha_3)$$

Do derivace dosadíme $s = 0$. Pro výpočty využíváme v teoretické části odvozené hodnoty zeta funkce: $\zeta_R(0) = -\frac{1}{2}$ a $\zeta_R'(0) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)$.

$$\zeta_{H_{01}}'(0) = -i \cdot (\zeta_R'(0) \cdot \sin(0) + \zeta_R(0) \cdot \cos(0) \cdot \alpha_1) = \frac{1}{2}i\alpha_1$$

$$\zeta_{H_{02}}'(0) = -i \cdot (\zeta_R'(0) \cdot \sin(0) + \zeta_R(0) \cdot \cos(0) \cdot \alpha_2) = \frac{1}{2}i\alpha_2$$

$$\zeta_{H_{03}}'(0) = -i \cdot (\zeta_R'(0) \cdot \sin(0) + \zeta_R(0) \cdot \cos(0) \cdot \alpha_3) = \frac{1}{2}i\alpha_3$$

$$\zeta_{H_{04}}'(0) = (\zeta_R'(0) \cdot \cos(0) - \zeta_R(0) \cdot \sin(0) \cdot \alpha_1) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

$$\zeta_{H_{05}}'(s) = (\zeta_R'(0) \cdot \cos(0) - \zeta_R(0) \cdot \sin(0) \cdot \alpha_2) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

$$\zeta_{H_{06}}'(s) = (\zeta_R'(0) \cdot \cos(0) - \zeta_R(0) \cdot \sin(0) \cdot \alpha_2) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \zeta_{H_{01}}'(0) + \zeta_{H_{02}}'(0) + \zeta_{H_{03}}'(0) + \zeta_{H_{04}}'(0) + \zeta_{H_{05}}'(0) + \zeta_{H_{06}}'(0)$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \frac{1}{2}i\alpha_1 + \frac{1}{2}i\alpha_2 + \frac{1}{2}i\alpha_3 - \frac{3}{2}\ln(2\pi) = \frac{1}{2}i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \frac{3}{2}\ln(2\pi)$$

Spektrální determinant operátoru H_0 je dán takto.

$$\det H_0 = e^{-\zeta_{H_0}'(0)} = e^{-\frac{1}{2}(i\alpha_1 + i\alpha_2 + i\alpha_3) + \frac{3}{2}\ln(2\pi)} = e^{-\frac{1}{2}i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} \cdot (2\pi)^{\frac{3}{2}}$$

9.6 Příklad 3 – druhý řez

Postupujeme analogicky pro další řez. Argumenty komplexních čísel jsou z intervalu $\langle \beta_2, \beta_2 + 2\pi \rangle$. Řez volme jako polopřímku pod úhlem β_2 , a aby zároveň platilo: $0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \beta_3 < \alpha_3 < 2\pi$.

$$\lambda_{j_1} = j \cdot e^{i(\alpha_1 + 2\pi)}, j \in \mathbb{N}, \alpha_1 \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$\lambda_{j_2} = j \cdot e^{i\alpha_2}, j \in \mathbb{N}, \alpha_2 \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$\lambda_{j_3} = j \cdot e^{i\alpha_3}, j \in \mathbb{N}, \alpha_3 \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

Dosadíme do zobecněné zeta funkce pro tento operátor. Vytkneme $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-s} = \zeta_R(s)$ z obou členů a použijeme tuto formuli:

$$e^{-ias} + e^{-i\beta s} + e^{-i\gamma s} =$$

$$= (-i \cdot \sin \alpha s - i \cdot \sin \beta s - i \cdot \sin \gamma s) + \cos \alpha s + \cos \beta s + \cos \gamma s, \text{ kde } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[(j \cdot e^{i(\alpha_1 + 2\pi)})^{-s} + (j \cdot e^{i\alpha_2})^{-s} + (j \cdot e^{i\alpha_3})^{-s} \right]$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-s} \cdot (e^{-i(\alpha_1 + 2\pi)s} + e^{-i\alpha_2 s} + e^{-i\alpha_3 s})$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \zeta_R(s) \{ -i \cdot \sin[(\alpha_1 + 2\pi)s] - i \cdot \sin(\alpha_2 s) - i \cdot \sin(\alpha_3 s) + \cos[(\alpha_1 + 2\pi)s] + \cos(\alpha_2 s) + \cos(\alpha_3 s) \}$$

Následně zderivujeme podle s pravidlem pro derivaci součinu každý sčítanec.

$$\begin{aligned} \zeta_{H_{0_1}}'(s) &= \{ -i \cdot \zeta_R(s) \cdot \sin[(\alpha_1 + 2\pi)s] \}' \\ &= -i \cdot [\zeta_R'(s) \cdot \sin[(\alpha_1 + 2\pi)s] + \zeta_R(s) \cdot \cos[(\alpha_1 + 2\pi)s] \cdot (\alpha_1 + 2\pi)] \end{aligned}$$

$$\zeta_{H_{0_2}}'(s) = [-i \cdot \zeta_R(s) \cdot \sin(\alpha_2 s)]'$$

$$\zeta_{H_{0_2}}'(s) = -i \cdot \{ \zeta_R'(s) \cdot \sin(\alpha_2 s) + \zeta_R(s) \cdot \cos(\alpha_2 s) \cdot \alpha_2 \}$$

$$\zeta_{H_{0_3}}'(s) = \{ -i \cdot \zeta_R(s) \cdot \sin(\alpha_3 s) \}'$$

$$\zeta_{H_{0_3}}'(s) = -i \cdot \{ \zeta_R'(s) \cdot \sin(\alpha_3 s) + \zeta_R(s) \cdot \cos(\alpha_3 s) \cdot \alpha_3 \}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{H_{0_4}}'(s) &= \{ \zeta_R(s) \cdot \cos[(\alpha_1 + 2\pi)s] \}' \\ &= \{ \zeta_R'(s) \cdot \cos[(\alpha_1 + 2\pi)s] - \zeta_R(s) \cdot \sin[(\alpha_1 + 2\pi)s] \cdot (\alpha_1 + 2\pi) \} \end{aligned}$$

$$\zeta_{H_{0_5}}'(s) = \{ \zeta_R(s) \cdot \cos(\alpha_2 s) \}' = [\zeta_R'(s) \cdot \cos(\alpha_2 s) - \zeta_R(s) \cdot \sin(\alpha_2 s) \cdot \alpha_2]$$

$$\zeta_{H_{0_6}}'(s) = \{ \zeta_R(s) \cdot \cos(\alpha_3 s) \}' = [\zeta_R'(s) \cdot \cos(\alpha_3 s) - \zeta_R(s) \cdot \sin(\alpha_3 s) \cdot \alpha_3]$$

Do derivace dosadíme $s = 0$. Pro výpočty využíváme z teoretické části odvozené hodnoty zeta funkce: $\zeta_R(0) = -\frac{1}{2}$ a $\zeta_R'(0) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$.

$$\zeta_{H_{01}}'(0) = -i \cdot (\zeta_R'(0) \cdot \sin(0) + \zeta_R(0) \cdot \cos(0) \cdot (\alpha_1 + 2\pi)) = \frac{1}{2}i(\alpha_1 + 2\pi)$$

$$\zeta_{H_{02}}'(0) = -i \cdot (\zeta_R'(0) \cdot \sin(0) + \zeta_R(0) \cdot \cos(0) \cdot \alpha_2) = \frac{1}{2}i\alpha_2$$

$$\zeta_{H_{03}}'(0) = -i \cdot (\zeta_R'(0) \cdot \sin(0) + \zeta_R(0) \cdot \cos(0) \cdot \alpha_3) = \frac{1}{2}i\alpha_3$$

$$\zeta_{H_{04}}'(0) = (\zeta_R'(0) \cdot \cos(0) - \zeta_R(0) \cdot \sin(0) \cdot (\alpha_1 + 2\pi)) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

$$\zeta_{H_{05}}'(s) = (\zeta_R'(0) \cdot \cos(0) - \zeta_R(0) \cdot \sin(0) \cdot \alpha_2) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

$$\zeta_{H_{06}}'(s) = (\zeta_R'(0) \cdot \cos(0) - \zeta_R(0) \cdot \sin(0) \cdot \alpha_3) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \zeta_{H_{01}}'(0) + \zeta_{H_{02}}'(0) + \zeta_{H_{03}}'(0) + \zeta_{H_{04}}'(0) + \zeta_{H_{05}}'(0) + \zeta_{H_{06}}'(0)$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \frac{1}{2}i(\alpha_1 + 2\pi) + \frac{1}{2}i\alpha_2 + \frac{1}{2}i\alpha_3 - \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \frac{1}{2}(i\alpha_1 + 2i\pi + i\alpha_2 + i\alpha_3) - \frac{3}{2}\ln(2\pi)$$

Spektrální determinant operátoru H_0 je dán takto.

$$\det H_0 = e^{-\zeta_{H_0}'(0)} = e^{-\frac{1}{2}(i\alpha_1 + 2i\pi + i\alpha_2 + i\alpha_3) + \frac{3}{2}\ln(2\pi)} = e^{-\frac{1}{2}i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} \cdot (2\pi)^{\frac{3}{2}}$$

9.7 Příklad 3 – třetí řez

Postupujeme analogicky pro další řez. Argumenty komplexních čísel jsou z intervalu $\langle \beta_3, \beta_3 + 2\pi \rangle$. Řez volme jako polopřímku pod úhlem β_3 , a aby zároveň platilo: $0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \beta_3 < \alpha_3 < 2\pi$.

$$\lambda_{j_1} = j \cdot e^{i(\alpha_1 + 2\pi)}, j \in \mathbb{N}, \alpha_1 \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$\lambda_{j_2} = j \cdot e^{i(\alpha_2 + 2\pi)}, j \in \mathbb{N}, \alpha_2 \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$\lambda_{j_3} = j \cdot e^{i\alpha_3}, j \in \mathbb{N}, \alpha_3 \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

Dosadíme do zobecněné zeta funkce pro tento operátor. Vytkneme $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-s} = \zeta_R(s)$ z obou členů a použijeme tuto formuli:

$$e^{-ias} + e^{-i\beta s} + e^{-i\gamma s} =$$

$$= (-i \cdot \sin \alpha s - i \cdot \sin \beta s - i \cdot \sin \gamma s) + \cos \alpha s + \cos \beta s + \cos \gamma s, \text{ kde } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[(j \cdot e^{i(\alpha_1 + 2\pi)})^{-s} + (j \cdot e^{i(\alpha_2 + 2\pi)})^{-s} + (j \cdot e^{i\alpha_3})^{-s} \right]$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-s} \cdot (e^{-i(\alpha_1 + 2\pi)s} + e^{-i(\alpha_2 + 2\pi)s} + e^{-i\alpha_3 s})$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \zeta_R(s) \{ -i \cdot \sin[(\alpha_1 + 2\pi)s] - i \cdot \sin[(\alpha_2 + 2\pi)s] - i \cdot \sin(\alpha_3 s) \\ + \cos[(\alpha_1 + 2\pi)s] + \cos[(\alpha_2 + 2\pi)s] + \cos(\alpha_3 s) \}$$

Následně zderivujeme podle s pravidlem pro derivaci součinu každý sčítanec.

$$\zeta_{H_{01}}'(s) = \{ -i \cdot \zeta_R(s) \cdot \sin[(\alpha_1 + 2\pi)s] \}' \\ = -i \cdot \{ \zeta_R'(s) \cdot \sin[(\alpha_1 + 2\pi)s] + \zeta_R(s) \cdot \cos[(\alpha_1 + 2\pi)s] \cdot (\alpha_1 + 2\pi) \}$$

$$\zeta_{H_{02}}'(s) = \{ -i \cdot \zeta_R(s) \cdot \sin[(\alpha_2 + 2\pi)s] \}' \\ = -i \cdot \{ \zeta_R'(s) \cdot \sin[(\alpha_2 + 2\pi)s] + \zeta_R(s) \cdot \cos[(\alpha_2 + 2\pi)s] \cdot (\alpha_2 + 2\pi) \}$$

$$\zeta_{H_{03}}'(s) = \{ -i \cdot \zeta_R(s) \cdot \sin(\alpha_3 s) \}' = -i \cdot \{ \zeta_R'(s) \cdot \sin(\alpha_3 s) + \zeta_R(s) \cdot \cos(\alpha_3 s) \cdot \alpha_3 \}$$

$$\zeta_{H_{04}}'(s) = [\zeta_R(s) \cdot \cos[(\alpha_1 + 2\pi)s]]' \\ = [\zeta_R'(s) \cdot \cos[(\alpha_1 + 2\pi)s] - \zeta_R(s) \cdot \sin[(\alpha_1 + 2\pi)s] \cdot (\alpha_1 + 2\pi)]$$

$$\zeta_{H_{05}}'(s) = [\zeta_R(s) \cdot \cos[(\alpha_2 + 2\pi)s]]' \\ = [\zeta_R'(s) \cdot \cos[(\alpha_2 + 2\pi)s] - \zeta_R(s) \cdot \sin[(\alpha_2 + 2\pi)s] \cdot (\alpha_2 + 2\pi)]$$

$$\zeta_{H_{06}}'(s) = \{ \zeta_R(s) \cdot \cos(\alpha_3 s) \}' = [\zeta_R'(s) \cdot \cos(\alpha_3 s) - \zeta_R(s) \cdot \sin(\alpha_3 s) \cdot \alpha_3]$$

Do derivace dosadíme $s = 0$. Pro výpočty využíváme z teoretické části odvozené hodnoty zeta funkce: $\zeta_R(0) = -\frac{1}{2}$ a $\zeta_R'(0) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$.

$$\zeta_{H_{01}}'(0) = -i \cdot [\zeta_R'(0) \cdot \sin(0) + \zeta_R(0) \cdot \cos(0) \cdot (\alpha_1 + 2\pi)] = \frac{1}{2}i(\alpha_1 + 2\pi)$$

$$\zeta_{H_{02}}'(0) = -i \cdot [\zeta_R'(0) \cdot \sin(0) + \zeta_R(0) \cdot \cos(0) \cdot (\alpha_2 + 2\pi)] = \frac{1}{2}i(\alpha_2 + 2\pi)$$

$$\zeta_{H_{03}}'(0) = -i \cdot [\zeta_R'(0) \cdot \sin(0) + \zeta_R(0) \cdot \cos(0) \cdot \alpha_3] = \frac{1}{2}i\alpha_3$$

$$\zeta_{H_{04}}'(0) = [\zeta_R'(0) \cdot \cos(0) - \zeta_R(0) \cdot \sin(0) \cdot (\alpha_1 + 2\pi)] = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

$$\zeta_{H_{05}}'(0) = [\zeta_R'(0) \cdot \cos(0) - \zeta_R(0) \cdot \sin(0) \cdot (\alpha_2 + 2\pi)] = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

$$\zeta_{H_{06}}'(0) = [\zeta_R'(0) \cdot \cos(0) - \zeta_R(0) \cdot \sin(0) \cdot \alpha_3] = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \zeta_{H_{01}}'(0) + \zeta_{H_{02}}'(0) + \zeta_{H_{03}}'(0) + \zeta_{H_{04}}'(0) + \zeta_{H_{05}}'(0) + \zeta_{H_{06}}'(0)$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \frac{1}{2}i\alpha_1 + 2i\pi + \frac{1}{2}i\alpha_2 + 2i\pi + \frac{1}{2}i\alpha_3 - \frac{3}{2}\ln(2\pi)$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \frac{1}{2}(i\alpha_1 + i\alpha_2 + i\alpha_3 + 4i\pi) - \frac{3}{2}\ln(2\pi)$$

Spektrální determinant operátoru H_0 je dán takto.

$$\det H_0 = e^{-\zeta_{H_0}'(0)} = e^{-\frac{1}{2}(i\alpha_1 + i\alpha_2 + i\alpha_3 + 4i\pi) + \frac{3}{2}\ln(2\pi)} = e^{-\frac{1}{2}i \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} \cdot (2\pi)^{\frac{3}{2}}$$

9.8 Příklad 3 – čtvrtý řez

Postupujeme analogicky pro další řez. Argumenty komplexních čísel jsou z intervalu $\langle \beta_1 + 2\pi, \beta_1 + 4\pi \rangle$. Řez volme jako polopřímku pod úhlem β_1 , a aby zároveň platilo: $0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \beta_3 < \alpha_3 < 2\pi$.

$$\lambda_{j_1} = j \cdot e^{i(\alpha_1 + 2\pi)}, j \in \mathbb{N}, \alpha_1 \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$\lambda_{j_2} = j \cdot e^{i(\alpha_2 + 2\pi)}, j \in \mathbb{N}, \alpha_2 \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$\lambda_{j_3} = j \cdot e^{i(\alpha_3 + 2\pi)}, j \in \mathbb{N}, \alpha_3 \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

Dosadíme do zobecněné zeta funkce pro tento operátor. Vytkneme $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-s} = \zeta_R(s)$ z obou členů a použijeme tuto formuli:

$$\begin{aligned} e^{-i\alpha s} + e^{-i\beta s} + e^{-i\gamma s} &= \\ &= (-i \cdot \sin \alpha s - i \cdot \sin \beta s - i \cdot \sin \gamma s) + \cos \alpha s + \cos \beta s + \cos \gamma s, \text{ kde } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[(j \cdot e^{i(\alpha_1 + 2\pi)})^{-s} + (j \cdot e^{i(\alpha_2 + 2\pi)})^{-s} + (j \cdot e^{i(\alpha_3 + 2\pi)})^{-s} \right]$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-s} \cdot (e^{-i(\alpha_1 + 2\pi)s} + e^{-i(\alpha_2 + 2\pi)s} + e^{-i(\alpha_3 + 2\pi)s})$$

$$\begin{aligned} \zeta_{H_0}(s) &= \zeta_R(s) \{ -i \cdot \sin[(\alpha_1 + 2\pi)s] - i \cdot \sin[(\alpha_2 + 2\pi)s] - i \cdot \sin[(\alpha_3 + 2\pi)s] \\ &\quad + \cos[(\alpha_1 + 2\pi)s] + \cos[(\alpha_2 + 2\pi)s] + \cos[(\alpha_3 + 2\pi)s] \} \end{aligned}$$

Následně zderivujeme podle s pravidlem pro derivaci součinu každý sčítanec.

$$\zeta_{H_{01}}'(s) = \{-i \cdot \zeta_R(s) \cdot \sin[(\alpha_1 + 2\pi)s]\}'$$

$$\zeta_{H_{01}}'(s) = -i \cdot \{\zeta_R'(s) \cdot \sin[(\alpha_1 + 2\pi)s] + \zeta_R(s) \cdot \cos[(\alpha_1 + 2\pi)s] \cdot (\alpha_1 + 2\pi)\}$$

$$\zeta_{H_{02}}'(s) = \{-i \cdot \zeta_R(s) \cdot \sin[(\alpha_2 + 2\pi)s]\}'$$

$$\zeta_{H_{02}}'(s) = -i \cdot \{\zeta_R'(s) \cdot \sin[(\alpha_2 + 2\pi)s] + \zeta_R(s) \cdot \cos[(\alpha_2 + 2\pi)s] \cdot (\alpha_2 + 2\pi)\}$$

$$\zeta_{H_{03}}'(s) = \{-i \cdot \zeta_R(s) \cdot \sin[(\alpha_3 + 2\pi)s]\}'$$

$$\zeta_{H_{03}}'(s) = -i \cdot \{\zeta_R'(s) \cdot \sin[(\alpha_3 + 2\pi)s] + \zeta_R(s) \cdot \cos[(\alpha_3 + 2\pi)s] \cdot (\alpha_3 + 2\pi)\}$$

$$\zeta_{H_{04}}'(s) = \{\zeta_R(s) \cdot \cos[(\alpha_1 + 2\pi)s]\}'$$

$$\zeta_{H_{04}}'(s) = \{\zeta_R'(s) \cdot \cos[(\alpha_1 + 2\pi)s] - \zeta_R(s) \cdot \sin[(\alpha_1 + 2\pi)s] \cdot (\alpha_1 + 2\pi)\}$$

$$\zeta_{H_{05}}'(s) = \{\zeta_R(s) \cdot \cos[(\alpha_2 + 2\pi)s]\}'$$

$$\zeta_{H_{0_5}}'(s) = \{\zeta_R'(s) \cdot \cos[(\alpha_2 + 2\pi)s] - \zeta_R(s) \cdot \sin[(\alpha_2 + 2\pi)s] \cdot (\alpha_2 + 2\pi)\}$$

$$\zeta_{H_{0_6}}'(s) = \{\zeta_R(s) \cdot \cos[(\alpha_3 + 2\pi)s]\}'$$

$$\zeta_{H_{0_6}}'(s) = \{\zeta_R'(s) \cdot \cos[(\alpha_3 + 2\pi)s] - \zeta_R(s) \cdot \sin[(\alpha_3 + 2\pi)s] \cdot (\alpha_3 + 2\pi)\}$$

Do derivace dosadíme $s = 0$. Pro výpočty využíváme z teoretické části odvozené hodnoty zeta funkce: $\zeta_R(0) = -\frac{1}{2}$ a $\zeta_R'(0) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$.

$$\zeta_{H_{0_1}}'(0) = -i \cdot [\zeta_R'(0) \cdot \sin(0) + \zeta_R(0) \cdot \cos(0) \cdot (\alpha_1 + 2\pi)] = \frac{1}{2}i(\alpha_1 + 2\pi)$$

$$\zeta_{H_{0_2}}'(0) = -i \cdot [\zeta_R'(0) \cdot \sin(0) + \zeta_R(0) \cdot \cos(0) \cdot (\alpha_2 + 2\pi)] = \frac{1}{2}i(\alpha_2 + 2\pi)$$

$$\zeta_{H_{0_3}}'(0) = -i \cdot [\zeta_R'(0) \cdot \sin(0) + \zeta_R(0) \cdot \cos(0) \cdot (\alpha_3 + 2\pi)] = \frac{1}{2}i(\alpha_3 + 2\pi)$$

$$\zeta_{H_{0_4}}'(0) = [\zeta_R'(0) \cdot \cos(0) - \zeta_R(0) \cdot \sin(0) \cdot (\alpha_1 + 2\pi)] = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

$$\zeta_{H_{0_5}}'(0) = [\zeta_R'(0) \cdot \cos(0) - \zeta_R(0) \cdot \sin(0) \cdot (\alpha_2 + 2\pi)] = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

$$\zeta_{H_{0_6}}'(0) = [\zeta_R'(0) \cdot \cos(0) - \zeta_R(0) \cdot \sin(0) \cdot (\alpha_3 + 2\pi)] = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \zeta_{H_{0_1}}'(0) + \zeta_{H_{0_2}}'(0) + \zeta_{H_{0_3}}'(0) + \zeta_{H_{0_4}}'(0) + \zeta_{H_{0_5}}'(0) + \zeta_{H_{0_6}}'(0)$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \frac{1}{2}i(\alpha_1 + 2\pi) + \frac{1}{2}i(\alpha_2 + 2\pi) + \frac{1}{2}i(\alpha_3 + 2\pi) - \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \frac{1}{2}(i\alpha_1 + 2i\pi + i\alpha_2 + 2i\pi + i\alpha_3 + 2i\pi) - \frac{3}{2}\ln(2\pi)$$

Spektrální determinant operátoru H_0 je dán takto.

$$\det H_0 = e^{-\zeta_{H_0}'(0)} = e^{-\frac{1}{2}(i\alpha_1 + i\alpha_2 + i\alpha_3 + 6i\pi) + \frac{3}{2}\ln(2\pi)} = -e^{-\frac{1}{2}i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} \cdot (2\pi)^{\frac{3}{2}}$$

Přejdeme-li polopřímku s vlastními hodnotami, znaménka se střídají.

10 Vlastní hodnoty spektrálního determinantu se blíží daným polopřímám

10.1 Příklad 1 – řez na záporné reálné ose

V této části budeme zkoumat, jak se změní spektrální determinant, pokud se vlastní hodnoty budou pouze přibližovat daným polopřímám. Řez logaritmu volíme na záporné reálné ose. Vlastní čísla operátoru H_0 v horní polorovině, respektive dolní polorovině, se přibližují podle níže uvedených předpisů.

$$\lambda_{j+} = i \cdot C \cdot j + \frac{1}{j} = C \cdot j \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} + \frac{1}{j}, j \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{R}^+$$

$$\lambda_{j-} = -i \cdot C \cdot j + \frac{1}{j} = C \cdot j \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}} + \frac{1}{j}, j \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{R}^+$$

Dosadíme do zobecněné zeta funkce pro tento operátor, kde $K = \frac{1}{C}$.

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(C \cdot j \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} + \frac{1}{j} \right)^{-s} + \left(C \cdot j \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}} + \frac{1}{j} \right)^{-s} \right]$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{C \cdot j^2 \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} + 1}{j} \right)^{-s} + \left(\frac{C \cdot j^2 \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}} + 1}{j} \right)^{-s} \right]$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} (C \cdot j)^{-s} \left[\left(e^{\frac{i\pi}{2}} + \frac{K}{j^2} \right)^{-s} + \left(e^{-\frac{i\pi}{2}} + \frac{K}{j^2} \right)^{-s} \right]$$

Vezmeme první sčítanec závorky a upravme. Následně rozvedme pomocí Taylorova rozvoje pro $s \approx 0$.²⁷ Rozvoj je pro nás zajímavý jen v prvních dvou členech. Další členy budou po derivaci pro $s \approx 0$ nulové.

$$\left(e^{-\frac{i\pi}{2}} + \frac{K}{j^2} \right)^{-s} = e^{\frac{i\pi}{2}s} \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right)^{-s} = e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot e^{-s \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right)} =$$

²⁷ „Taylorův rozvoj je velmi užitečný matematický postup, při kterém nahradíme funkci nekonečnou mocninnou řadou. V praxi se vždy omezíme na polynom do určitého stupně. Pokud se omezíme na polynom prvního stupně, hovoříme o lineární aproximaci, danou funkci nahrazujeme ve zvoleném bodě tečnou. Pokud se omezíme na polynom druhého stupně, nahrazujeme danou funkci ve zvoleném bodě parabolou. Vyšší stupeň polynomu znamená lepší přiblížení zvolené funkce. Metodu polynomiálního rozvoje zformuloval anglický matematik sir Brook Taylor (1685–1731). Obecný vztah pro Taylorův rozvoj je: $f(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + a_3(x - c)^3 + \dots$, kde $a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}$. Bod, ve kterém provádíme rozvoj, je označen c , koeficienty rozvoje a_k jsou dány podílem k -té derivace zvolené funkce v bodě c a faktoriálu k . Základní podmínkou, aby rozvoj konvergoval ke zvolené funkci na určitém intervalu je, aby tato funkce měla na celém intervalu všechny své derivace.“ [23]

$$= e^{+\frac{i\pi}{2}s} \cdot \left[1 - \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) \cdot s + \dots \right]$$

Analogicky pro druhý sčítanec.

$$\begin{aligned} \left(e^{\frac{i\pi}{2}} + \frac{K}{j^2} \right)^{-s} &= e^{-\frac{i\pi}{2}s} \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right)^{-s} = e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot e^{-s \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right)} = \\ &= e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot \left[1 - \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) \cdot s + \dots \right] \end{aligned}$$

Vraťme členy do původního výpočtu. Tečky značí následující členy, ty jsou řádu j^2 .

$$\begin{aligned} \zeta_{H_0}(s) &= \sum_{j=1}^{\infty} (C \cdot j)^{-s} \left\{ e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot \left[1 - \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) \cdot s + \dots \right] + e^{-\frac{i\pi}{2}s} \right. \\ &\quad \cdot \left. \left[1 - \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) \cdot s + \dots \right] \right\} \end{aligned}$$

Roznásobíme. První členy obou závorek po roznásobení sečteme a obdržíme následující vztah: $\sum_{j=1}^{\infty} (C \cdot j)^{-s} \cdot \left(e^{\frac{i\pi}{2}s} + e^{-\frac{i\pi}{2}s} \right)$. To je $\zeta_{H_0}(s)$ z příkladu 1 v kapitole 8.1. Tuto část si označíme $\zeta_1(s)$. Po součtu druhých členů závorek a vytknutí s dostáváme:

$$\zeta_{H_0}(s) = \zeta_1(s) - \sum_{j=1}^{\infty} s \cdot (C \cdot j)^{-s} \left[e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + \dots \right]$$

Nyní uvažujme velmi vysoké přirozené číslo n . Rozdělme náš druhý sčítanec na dvě sumy následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \zeta_{H_0}(s) &= \zeta_1(s) - \sum_{j=1}^n s \cdot (C \cdot j)^{-s} \left[e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + \dots \right] \\ &\quad - \sum_{j=n+1}^{\infty} s \cdot (C \cdot j)^{-s} \left[e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

Provedeme další Taylorův rozvoj tentokrát po logaritmus. Obecně platí, že pro $\varepsilon \approx 0$ je $\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon$. Je ale nutné zdůraznit, že abychom mohli užít této aproximace, musí být j velmi vysoké číslo, aby se celý zlomek blížil nule.

$$\zeta_{H_0}(s) = \zeta_1(s) - \sum_{j=n+1}^{\infty} s \cdot (C \cdot j)^{-s} \left[e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} + e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} + \dots \right] \\ - \sum_{j=1}^n s \cdot (C \cdot j)^{-s} \left[e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + \dots \right]$$

Vytknutím výrazu $\frac{K}{j^2}$ zůstane v závorce: $e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}} = -2 \sin \left(\frac{\pi s}{2} \right)$.

$$\zeta_{H_0}(s) = \zeta_1(s) - \sum_{j=n+1}^{\infty} s \cdot (C \cdot j)^{-s} \cdot \frac{K}{j^2} \cdot 2 \sin \left(\frac{\pi s}{2} \right) \\ - \sum_{j=1}^n s \cdot (C \cdot j)^{-s} \left[e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + \dots \right] \\ \zeta_{H_0}(s) = \zeta_1(s) - \sum_{j=n+1}^{\infty} s \cdot C^{-s} \cdot j^{-(s+2)} \cdot K \cdot 2 \sin \left(\frac{\pi s}{2} \right) \\ - \sum_{j=1}^n s \cdot (C \cdot j)^{-s} \left[e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + \dots \right]$$

Upravme výraz tak, abychom získali: $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-(s+2)} = \zeta_R(s+2)$, protože v našem výše uvedeném výrazu sčítáme až od $j = n+1$.

$$\zeta_{H_0}(s) = \zeta_1(s) + 2Ks \cdot C^{-s} \sin \left(\frac{\pi s}{2} \right) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} j^{-(s+2)} - 2Ks \cdot C^{-s} \sin \left(\frac{\pi s}{2} \right) \sum_{j=1}^n j^{-(s+2)} \\ - \sum_{j=1}^n s \cdot (C \cdot j)^{-s} \left[e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + \dots \right]$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \zeta_1(s) + 2Ks \cdot C^{-s} \sin \left(\frac{\pi s}{2} \right) \cdot \zeta_R(s+2) - 2Ks \cdot C^{-s} \sin \left(\frac{\pi s}{2} \right) \sum_{j=1}^n j^{-(s+2)} \\ - \sum_{j=1}^n s \cdot (C \cdot j)^{-s} \left[e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + \dots \right]$$

Zderivujeme podle pravidla o derivaci součtu a součinu pro $s = 0$. Nejprve se ale podíváme na poslední dva členy. Zavedme níže uvedený rozdíl. Ten lze upravit tak, že bude roven součinu $s \cdot f_n(s)$, kde $f_n(s)$ je funkce, která závisí na s .

$$-\sum_{j=1}^n s \cdot (C \cdot j)^{-s} \left[e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + \dots \right] \\ - 2Ks \cdot C^{-s} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \sum_{j=1}^n j^{-(s+2)} = s \cdot f_n(s)$$

Je jasné, že pokud budeme derivovat tento součin pro $s = 0$, obdržíme pouze $f_n(s)$. Pak platí, že:

$$\lim_{s \rightarrow 0} f_n(s) = M, \text{ kde } M \text{ je konstanta.}$$

Původní výraz bude po derivaci v $s = 0$ vypadat takto. Nejprve závorku zderivujeme, poté dosadíme do výrazu nulu. Po derivaci závorky je ale jasné, že její hodnota bude nulová, protože první člen vynuluje sinus, druhý člen je násobený nulou taktéž.

$$\zeta_{H_0}'(0) = \zeta_1'(0) + 2K \left[s \cdot C^{-s} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(s+2) \right]' + M$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \zeta_1'(0) + 2K \left\{ (s \cdot C^{-s})' \cdot \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(s+2) + s \cdot C^{-s} \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(s+2) \right]' \right\} \\ + M$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \zeta_1'(0) + 2K \left\{ (s \cdot C^{-s})' \cdot \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(s+2) + s \cdot C^{-s} \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(s+2) \right]' \right\} \\ + M$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \zeta_1'(0) + 2K \left\{ [-s \cdot C^{-s} \cdot \ln C + C^{-s}] \cdot \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(s+2) + s \cdot C^{-s} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \zeta_R(s+2) + \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R'(s+2) \right] \right\} + M$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \zeta_1'(0) + 2K \left\{ [-0 \cdot C^{-0} \cdot \ln C + C^{-0}] \cdot \sin(0) \cdot \zeta_R(2) + 0 \cdot C^{-0} \cdot \left[\cos(0) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \zeta_R(2) + \sin(0) \cdot \zeta_R'(2) \right] \right\} + M$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = -\ln\left(\frac{2\pi}{C}\right) + M$$

Spektrální determinant operátoru H_0 je dán takto:

$$\det H_0 = e^{-\zeta_{H_0}'(0)} = e^{\ln\left(\frac{2\pi}{C}\right) - M} = \frac{2\pi}{C} \cdot e^{-M}$$

10.2 Příklad 1 – řez na kladné reálné ose

Postupujeme analogicky pro další řez. Řez logaritmu volíme na záporné reálné ose. Vlastní čísla operátoru H_0 v horní polorovině, respektive dolní polorovině, se přibližují podle níže uvedených předpisů.

$$\lambda_{j+} = i \cdot C \cdot j + \frac{1}{j} = C \cdot j \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} + \frac{1}{j}, j \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{R}^+$$

$$\lambda_{j-} = -i \cdot C \cdot j + \frac{1}{j} = C \cdot j \cdot e^{\frac{3i\pi}{2}} + \frac{1}{j}, j \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{R}^+$$

Dosadíme do zobecněné zeta funkce pro tento operátor, kde $K = \frac{1}{C}$.

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(C \cdot j \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} + \frac{1}{j} \right)^{-s} + \left(C \cdot j \cdot e^{\frac{3i\pi}{2}} + \frac{1}{j} \right)^{-s} \right]$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{C \cdot j^2 \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} + 1}{j} \right)^{-s} + \left(\frac{C \cdot j^2 \cdot e^{\frac{3i\pi}{2}} + 1}{j} \right)^{-s} \right]$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} (C \cdot j)^{-s} \cdot e^{-i\pi s} \left[\left(e^{\frac{i\pi}{2}} + \frac{K}{j^2} \right)^{-s} + \left(e^{-\frac{i\pi}{2}} + \frac{K}{j^2} \right)^{-s} \right]$$

Vezměme první sčítanec závorky a upravme. Následně rozvedme pomocí Taylorova rozvoje pro $s \approx 0$. Rozvoj je pro nás zajímavý jen v prvních dvou členech. Další členy budou po derivaci pro $s \approx 0$ nulové.

$$\begin{aligned} \left(e^{-\frac{i\pi}{2}} + \frac{K}{j^2} \right)^{-s} &= e^{\frac{i\pi}{2}s} \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right)^{-s} = e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot e^{-s \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right)} = \\ &= e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot \left[1 - \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) \cdot s + \dots \right] \end{aligned}$$

Analogicky pro druhý sčítanec.

$$\left(e^{\frac{i\pi}{2}} + \frac{K}{j^2} \right)^{-s} = e^{-\frac{i\pi}{2}s} \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right)^{-s} = e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot e^{-s \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right)} =$$

$$= e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot \left[1 - \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) \cdot s + \dots \right]$$

Vraťme členy do původního výpočtu.

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} (C \cdot j)^{-s} \cdot e^{-i\pi s} \cdot \left\{ e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot \left[1 - \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) \cdot s \right] + e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot \left[1 - \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) \cdot s \right] + \dots \right\}$$

Roznásobíme. První členy obou závorek po roznásobení sečteme a obdržíme následující vztah: $\sum_{j=1}^{\infty} (C \cdot j)^{-s} \cdot e^{-i\pi s} \cdot \left(e^{\frac{i\pi}{2}s} + e^{-\frac{i\pi}{2}s} \right)$. To je $\zeta_{H_0}(s)$ z příkladu 1 v kapitole 8.2. Tuto část si označíme $\zeta_2(s)$. Po součtu druhých členů závorek a vytknutí s dostáváme:

$$\zeta_{H_0}(s) = \zeta_2(s) - \sum_{j=1}^{\infty} s \cdot (C \cdot j)^{-s} \cdot e^{-i\pi s} \cdot \left[e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) \right]$$

Nyní uvažujme velmi vysoké přirozené číslo n . Rozdělme náš druhý sčítanec na dvě sumy následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \zeta_{H_0}(s) = \zeta_2(s) - \sum_{j=1}^n s \cdot (C \cdot j)^{-s} \cdot e^{-i\pi s} & \cdot \left[e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + \dots \right] + \\ & - \sum_{j=n+1}^{\infty} s \cdot (C \cdot j)^{-s} \cdot e^{-i\pi s} \cdot \left[e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

Provedeme další Taylorův rozvoj tentokrát po logaritmus. Obecně platí, že pro $\varepsilon \approx 0$ je $\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon$. Je ale nutné zdůraznit, že abychom mohli užít této aproximace, musí být j velmi vysoké číslo, aby se celý zlomek blížil nule.

$$\zeta_{H_0}(s) = \zeta_2(s) - \sum_{j=n+1}^{\infty} s \cdot (C \cdot j)^{-s} \cdot e^{-i\pi s} \cdot \left[e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} + e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right] -$$

$$- \sum_{j=n+1}^{\infty} s \cdot (C \cdot j)^{-s} \cdot e^{-i\pi s} \cdot \left[e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + \dots \right]$$

Vytknutím výrazu $\frac{K}{j^2}$ zůstane v závorce: $e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}} = -2 \sin \left(\frac{\pi s}{2} \right)$.

$$\zeta_{H_0}(s) = \zeta_2(s) + \sum_{j=n+1}^{\infty} s \cdot (C \cdot j)^{-s} \cdot e^{-i\pi s} \cdot \frac{K}{j^2} \cdot 2 \sin \left(\frac{\pi s}{2} \right)$$

$$- \sum_{j=n+1}^{\infty} s \cdot (C \cdot j)^{-s} \cdot e^{-i\pi s} \cdot \left[e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + \dots \right]$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \zeta_2(s) + \sum_{j=n+1}^{\infty} s \cdot C^{-s} \cdot j^{-(s+2)} \cdot e^{-i\pi s} \cdot K \cdot 2 \sin \left(\frac{\pi s}{2} \right)$$

$$- \sum_{j=n+1}^{\infty} s \cdot (C \cdot j)^{-s} \cdot e^{-i\pi s} \cdot \left[e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + \dots \right]$$

Upravme výraz tak, abychom získali: $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-(s+2)} = \zeta_R(s+2)$, protože v našem výše uvedeném výrazu sčítáme až od $j = n+1$.

$$\zeta_{H_0}(s) = \zeta_2(s) + 2Ks \cdot C^{-s} \sin \left(\frac{\pi s}{2} \right) \cdot e^{-i\pi s} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} j^{-(s+2)} - 2Ks \cdot C^{-s} \sin \left(\frac{\pi s}{2} \right) \sum_{j=1}^n j^{-(s+2)} +$$

$$- \sum_{j=1}^n s \cdot (C \cdot j)^{-s} \cdot \left[e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + \dots \right]$$

$$\zeta_{H_0}(s) = \zeta_2(s) + 2Ks \cdot C^{-s} \sin \left(\frac{\pi s}{2} \right) \cdot e^{-i\pi s} \cdot \zeta_R(s+2) - 2Ks \cdot C^{-s} \sin \left(\frac{\pi s}{2} \right) \sum_{j=1}^n j^{-(s+2)} +$$

$$- \sum_{j=1}^n s \cdot (C \cdot j)^{-s} \cdot \left[e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + \dots \right]$$

Zderivujeme podle pravidla o derivaci součtu a součinu pro $s = 0$. Nejprve se ale podíváme na poslední dva členy. Zavedme níže uvedený rozdíl. Ten lze upravit tak, že bude roven součinu $s \cdot \tilde{f}_n(s)$, kde $\tilde{f}_n(s)$ je funkce, která závisí na s .

$$\sum_{j=1}^n s \cdot (C \cdot j)^{-s} \cdot e^{-i\pi s} \left[e^{-\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + e^{\frac{i\pi}{2}s} \cdot \ln \left(1 + \frac{K \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}}{j^2} \right) + \dots \right] \\ - 2Ks \cdot C^{-s} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \sum_{j=1}^n j^{-(s+2)} = s \cdot \tilde{f}_n(s)$$

Je jasné, že pokud budeme derivovat tento součin pro $s = 0$, obdržíme pouze $\tilde{f}_n(s)$. Pak platí, že: $\lim_{s \rightarrow 0} \tilde{f}_n(s) = M$, kde M je konstanta a kde $\tilde{f}_n(s)$ je rozdílné od $f_n(s)$, liší se pouze o $e^{-i\pi s}$.

Původní výraz bude po derivaci v $s = 0$ vypadat takto. Nejprve závorku zderivujeme, poté dosadím do výrazu nulu. Po derivaci závorky je ale jasné, že její hodnota bude nulová, protože první člen vynuluje sinus a druhý člen je násobený nulou taktéž.

$$\zeta_{H_0}'(0) = \zeta_2'(0) + 2K \left[s \cdot C^{-s} \cdot e^{-i\pi s} \cdot \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(s+2) \right]' + M$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \zeta_2'(0) + 2K \left\{ (s \cdot C^{-s} \cdot e^{-i\pi s})' \cdot \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(s+2) + s \cdot C^{-s} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R(s+2) \right]' \right\} + M$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \zeta_2'(0) + 2K \left\{ [(-s \cdot C^{-s} \cdot \ln C + C^{-s}) \cdot e^{-i\pi s} + s \cdot C^{-s} \cdot e^{-i\pi s} \cdot (-i\pi)] \cdot \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \right. \\ \left. \zeta_R(s+2) + s \cdot C^{-s} \cdot e^{-i\pi s} \left[\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \zeta_R(s+2) + \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta_R'(s+2) \right]' \right\} + M$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = \zeta_2'(0) + 2K \left\{ [(0 \cdot C^{-0} \cdot \ln C + C^{-0}) \cdot e^{-0} + 0 \cdot C^{-0} \cdot e^0 \cdot (-i\pi)] \cdot \sin(0) \cdot \zeta_R(2) + \right. \\ \left. 0 \cdot C^{-0} \cdot e^0 \left[\cos(0) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \zeta_R(2) + \sin(0) \cdot \zeta_R'(2) \right]' \right\} + M$$

$$\zeta_{H_0}'(0) = i\pi - \ln\left(\frac{2\pi}{C}\right) + M$$

Spektrální determinant operátoru H_0 je dán takto:

$$\det H_0 = e^{-\zeta_{H_0}'(0)} = e^{-i\pi + \ln\left(\frac{2\pi}{C}\right) - M} = -\frac{2\pi}{C} \cdot e^{-M}$$

Hodnoty spektrálního determinantu se liší pouze znaménkem.

11 Zobecnění předchozích výsledků

Věta 1: *Necht' jsou dána rozložení vlastních čísel těmito předpisy:*

$$\lambda_{j+} = \omega_j \cdot e^{i\alpha_1} + \frac{1}{j}$$

$$\lambda_{j-} = \omega_j \cdot e^{i\alpha_2} + \frac{1}{j},$$

kde $\alpha_2 > \alpha_1$ a kde $\omega_j \in \mathbb{R}$ s polynomiálním růstem v j . Pokud změníme řez tak, že projde přes polopřímku pod úhlem α_j , znaménko determinantu se změní na opačné.²⁸

- i. Podobné tvrzení platí i pro více polopřímek.
- ii. Tvrzení neplatí pro růst, který je logaritmický a nižší, tam totiž nemá smysl spektrální determinant uvažovat.
- iii. Tvrzení neplatí pro růst, který je exponenciální, tam derivace zeta funkce v nule diverguje.

²⁸ Důkaz této věty vychází z předchozích příkladů vypočtených v kapitolách 8, 9 a 10.

Závěr

Více než rok strávený nad touto prací mi ukázal, kam matematika vlastně sahá, co se v ní dá studovat, jak zajímavá je a jaká nevídaná využití má. Nastudování pokročilých témat z komplexní, spektrální či matematické analýzy jsou velmi důležitá pro pochopení problematiky, o které je psáno v této diplomové práci. Vybrané části těchto sekcí matematiky jsou zařazeny v teoretické části a přibližují tak čtenáři pojmy aplikované v části praktické.

První příkladový celek praktické části, a tedy i prvním cílem, bylo zjistit, jak se chová spektrální determinant v závislosti na tom, jak daleko od sebe vlastní hodnoty máme. Ze závěrečné věty se dozvídáme, že pro polynomiální růst jsou výsledky ideální. Pokud je růst menší než logaritmický, nemá smysl spektrální determinant uvažovat. Cíl lze tak považovat za splněný. Je ale zřejmé, že se dá dosáhnout dalších výsledků. Existuje nějaký ideální růst mezi polynomiálním a logaritmickým, pro který bude hodnota determinantu vlastní? Je opravdu předpokládaný exponenciální růst horní mezí? To všechno jsou otázky, k jejichž odpovědím se bude možné dobrat časem.

V druhém oddílu praktické části jsme směřovali k tomu, jaký vliv má na hodnotu determinantu měnící se úhel, který svírají polopřímky s reálnou osou. Zde jsme obdrželi celkem očekávané výsledky, které nás utvrdily v tom, že spektrální determinant má stále stejnou hodnotu a v důsledku řezu se mění jeho znaménko.

Ve třetím směru byly výpočty poměrně obtížné a bylo nutné užití dalších matematických aparátů, jako je například Taylorův rozvoj. Jedna jediná úloha, kterou jsem v této části stihnul, pak ukázala, že pro dané přibližování platí to, co v předchozích částech, tedy změnu znaménka a stále stejnou hodnotu spektrálního determinantu. I zde bude možné pokračovat a bádání rozšířit. Příkladem může být přibližování vlastních hodnot podle jiného předpisu, než byl zvolen.

Cílů v zobecnění dané problematiky bylo sice dosaženo, ale nutno říci, že na dané tematice je stále co studovat a rozšiřovat tak získané informace pomocí dalšího a dalšího zobecňování. Obsah této práce a další v budoucnu získané poznatky by se tak mohly stát předmětem článku, který bude vydán v pokračující spolupráci s panem doktorem Jiřím Lipovským. Ten byl pro mě největším zdrojem informací i přes velké množství kvalitní literatury a internetových zdrojů. Tato tematika je pro mě nesmírně zajímavá a chystám se jí zabývat i po odevzdání diplomové práce a ukončení studia.

Zdroje

- [1] AHLFORS, L. V. *Complex Analysis 2nd ed.* McGraw-Hill.1966.
- [2] BÁRTA, Č., KOLÁŘ, M. *Přehled historie komplexních čísel.* Hradec Králové, 2013. 38 s.
- [3] BÁRTA, T., *Mat1_Kapitola 3.* Univerzita Karlova, katedra matematické analýzy. Praha 8. [online]. [cit.2021-10-23]
Dostupné z:
https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~barta/FSV/mat1_zs14/Mat1_Kapitola3.pdf
- [4] BEDNAŘÍK, D., *Úvod do teorie Hilbertových prostorů, Matematická analýza 3.* Hradec Králové. Univerzita Hradec Králové. 2021. [online]. [cit.2021-11-14]
Dostupné z: <https://dusanbednarik.cz/>
- [5] BOUCHALA, J., *Funkce komplexní proměnné.* Plzeň. Západočeská univerzita. 2012. [online]. [cit.2021-10-23]
Dostupné z: <https://homel.vsb.cz/~bou10/archiv/fkp.pdf>
- [6] BUDÍNSKÝ B. a J. CHARVÁT. *Matematika I.* Praha, 1987. SNTL – Nakladatelství technické literatury. KÓD: 04-011-087.
- [7] CALDA, E. *Matematika pro gymnázia.* Vydání 4. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-364-6. 134 s.
- [8] ČECHOVÁ, P. *Základní věta algebry a její důkazy.* Diplomová práce. Brno, 2013. 71 s.
- [9] DOMBEK, D., L. KLEPRLÍK a K. KLOUDA. *Lineární algebra: Vlastní čísla.* ČVUT, katedra aplikované matematiky. Fakulta informačních technologií. Praha. 2021
Dostupné z:
<https://kam.fit.cvut.cz/deploy/bi-lin/lin-prednaska-8.pdf>
- [10] DOŠLÁ, Z. A V. NOVÁK. *Nekonečné řady.* Masarykova univerzita. Brno, 2002. ISBN 80-210-1949-2
- [11] EDWARDS, H. M. *Riemann's Zeta Function.* New York: Dover, 2001.
- [12] FORMÁNEK, J. *Úvod do kvantové teorie.* 1. vyd. Praha: Academia, 1983. 903 s. s. 722-753.

- [13] FREITAS, P. a J. LIPOVSKÝ. *Spectral Determinant for the Damped Wave Equation on an Interval*. *Acta Physica Polonica A*. 2019, **136**(5), 817-823. ISSN 1898-794X. Dostupné z:
doi:10.12693/APhysPolA.136.817
- [14] HABER, E., *The complex logarithm*. *Physics 116 A*. Winter 2011. [online]. [cit.2021-11-14]
Dostupné z:
http://scipp.ucsc.edu/~haber/ph116A/clog_11.pdf
- [15] HAŠEK, R. *Determinant matice*. Jihočeská univerzita. Katedra matematiky. Dostupné z:
http://home.pf.jcu.cz/~hasek/lalgebra/Pr6/LA_Determinant_definice.pdf
- [16] HEŘMAN, P., *Matematika k teoretické fyzice*. Hradec Králové. Univerzita Hradec Králové.
- [17] HOVORKOVÁ, A. *Vlastní tvorba obrázku*. 2021.
- [18] KALENDA, O., *Texty k přednáškám z Úvodu do funkcionální analýzy*. Praha. Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy. Praha. 2015. [online]. [cit.2021-12-19]
Dostupné z:
<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/pages/ufa1516.php?ufatype=texty>
- [19] KNOPP, K., *Meromorphic Functions*. Ch. 2 in *Theory of Functions Parts I and II, Two Volumes Bound as One, Part II*. New York: Dover, pp. 34-57, 1996. [online]. [cit.2021-10-23]
Dostupné z:
<https://mathworld.wolfram.com/MeromorphicFunction.html>
- [20] KOPÁČEK, J. *Matematická analýza nejen pro fyziky (IV)*. 3., opr. vyd. Praha: Matfyzpress, 2010. ISBN 978-80-7378-120-0.
- [21] KREJČÍ, J. *Komplexní čísla*. Matematický korespondenční seriál. Praha. 5 s.
- [22] KÜHNOVÁ, J. *Algebra 1*. Skripta k výuce. Hradec Králové.
- [23] KULHÁNEK, P. *Aldebaran* [online]. Praha [cit. 2022-04-11].
Dostupné z: https://www.aldebaran.cz/studium/f1/applets/math/a_taylor.html
- [24] LIFLYAND, E., TIKHONOV S., ZELTSER, M., *Extending tests for convergence of number series*. September 2012. [online]. [cit.2021-10-23]

Dostupné z:

<https://people.brandeis.edu/~joyner/everytopic/LiflyandCauchyTalk.pdf>

[25] LIPOVSKÝ, J. *Spectral determinants*. Univerzita Hradec Králové. Přírodovědecká fakulta. Katedra fyziky. 2022.

Dostupné z:

https://lide.uhk.cz/prf/ucitel/lipovji1/talks/talk_hradec22.pdf

[26] MALÝ, J., *Matematika IV – zápisky z přednášek*. Ústí nad Labem. Katedra matematiky UJEP. [online]. [cit.2021-10-23]

Dostupné z: <http://physics.ujep.cz/~jmaly/lis.pdf>

[27] Matematický korespondenční seminář. *Komplexní čísla I*. [online]. [cit.2020-08-24].

Dostupné z: <https://prase.cz/archive/30/9.pdf>

[28] MELKES, F., ŘEZÁČ M., *Matematika 2*. Brno. Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií VUT. [online]. [cit.2021-10-23]

Dostupné z:

<https://www.umat.fekt.vut.cz/~bastinec/bma2>

[29] POŠTA, P., Kapitola 1, *Číselné řady*. Univerzita Karlova, katedra matematické analýzy. Praha 8. [online]. [cit.2021-10-23]

Dostupné z: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pposta/priklady/rady.pdf>

[30] REED, M., SIMON, B. *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I: Functional Analysis*. Academic Press, 1972, 400 pp. ISBN 0125850506.

[31] ROKYTA, M., *Číselné řady*. Univerzita Karlova, katedra matematické analýzy. Praha 8. [online]. [cit.2021-10-23]

Dostupné z:

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/0809/zs/ma/MA1a_Kap_3_pro_tisk.pdf

[32] ROKYTA, M., *Riemannova hypotéza – 160 let boje bez vítěze*. Univerzita Karlova, katedra matematické analýzy. Praha 8. [online]. [cit.2021-02-07]

Dostupné z:

http://am-nas.vsb.cz/vod03/osma/pdf/prednasky/2019/Mirko_Rokyta.pdf

[33] ROKYTA, M. *Funkcionální analýza z rychlíku*. Univerzita Karlova, katedra matematické analýzy. Praha 8. [online]. [cit.2021-02-07]

Dostupné z:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/2021/lis/tex/main.pdf>

- [34] RUDIN, W. *Real and komplex analysis*. Vydání 3. Singapore. 433 s.
- [35] ŘEHÁČEK J., *Chcete vyhrát milion dolarů?* 2019.
Dostupné z:
<https://www.matfyz.cz/clanky/matykani-xxvi-chcete-vyhrat-milion-dolaru>
- [36] TITCHMARSH, E., *The Theory of the Riemann Zeta-function*. Vydání 2. Oxford: Oxford Science Publications. 1986, 21-22 pp. ISBN 0-19-853369-1.
- [37] UNIONPEDIA, *Matematická fyzika*. [online]. [cit.2022-03-10]
Dostupné z: https://cs.unionpedia.org/Matematick%C3%A1_fyzika
- [38] VESELÝ, J. *Komplexní analýza pro učitele*. Praha: Karolinum, 2000. ISBN 80-246-0202-4.