VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY
INSTITUTE OF MATHEMATICS

SYSTÉMY DIFERENČNÍCH ROVNIC APLIKOVÁNY NA MARKOVOVY ŘETĚZCE
SYSTEMS OF DIFFERENCE EQUATIONS APPLIED ON MARKOV CHAINS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE — **ALENA ESTERLOVÁ**
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE — **Mgr. VIERA ŠTOUDKOVÁ RŮŽIČKOVÁ, Ph.D.**
SUPERVISOR

BRNO 2021

Zadaní bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Studentka: **Alena Esterlová**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **Mgr. Viera Štoudková Růžičková, Ph.D.**
Akademický rok: 2020/21

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Systémy diferenčních rovnic aplikovány na Markovovy řetězce

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Markovovy řetězce můžou být reprezentovány systémy lineárních diferenčních rovnic. K jejich studiu se využívají poznatky z teorie matic.

Cíle bakalářské práce:

1. Obeznámení se se základy teorie systémů diferenčních rovnic a Markovovými řetězci.
2. Ukázka jejich využití na konkrétním příkladě v genetice.

Seznam doporučené literatury:

ELAYDI, Saber. An Introduction to Difference Equation: Undergraduate Texts in Mathematics. 3. New York: Springer, 2005. ISBN 978-0-387-27602-1

PRÁGEROVÁ, Alena. Diferenční rovnice. Praha: SNTL – státní nakladatelství technické literatury, 1971.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2020/21

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc. ředitel ústavu	doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D. děkan fakulty

Abstrakt
Tato práce se zabývá zkoumáním Markovových řetězců a jejich aplikací v genetice. Konkrétněji je zkoumána konvergence řetězců, a to především pro řetězce o třech stavech. Úvodní kapitola je věnována teorii matic, která se ke studiu Markovových řetezců využívá. Následuje samotný popis Markovových řetězců a jejich teorie. Závěrečná kapitola je věnována příkladům a zkoumání konkrétních řetězců o třech stavech, u kterých nedojde ke konvergenci.

Summary
This thesis is focused on Markov chains and their application in genetics. Special focus is on convergence of chains with three states. The opening chapter covers matrix theory which is used in Markov chains. The next part examines Markov chains and its theory. The final chapter looks into examples and examination of specific Markov chains with three states that does not converge.

Klíčová slova
Diferenční rovnice, systém diferenčních rovnic, Markovovův řetězec, Markovova matice, genetika, teorie matic

Keywords
Difference equation, system of difference equations, Markov chain, Markov matrix, genetics, matrix theory

ESTERLOVÁ, A.*Systémy diferenčních rovnic aplikovány na Markovovy řetězce.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2021. ?? s. Vedoucí Mgr. Viera Štoudková Růžičková, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Systémy diferenčních rovnic aplikovány na Markovovy řetězce* vypracovala samostatně pod vedením Mgr. Viery Štoudkové Růžičkové, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Alena Esterlová

Děkuji své vedoucí Mgr. Viere Štoudkové Růžičkové za odborné vedení, cenné rady a trpělivost. Děkuji také svojí rodině a přátelům za podporu během studia.

Alena Esterlová

Obsah

Úvod

Přestože genetika je na první pohled problematikou biologických věd, na jejím pozadí probíhá mnoho matematických procesů. Jedním z těchto procesů jsou i Markovovy řetězce, které nám slouží k popisu výskytu jednotlivých alel v populaci a jeho změn. Lze jimi také popsat genetické struktury, ke kterým populace směřuje. Taková zjištění jsou velmi užitečná, ať už k samotné predikci, či snaze o změnu směřování.

Tato práce je zaměřena na zkoumání chování Markovových řetězců pro tři možné varianty jedné vlastnosti, a to především na situace, kdy populace nesměřuje k jednomu rozdělení dané vlastnosti v populaci. Genetika však není jediným využitím Markovových řetězců a vlastnosti z této práce lze využít i pro jiná odvětví.

Úvodní kapitola je věnována teorii matic, která se využívá ke studiu systémů lineárních diferenčních rovnic. Následuje seznámení s Markovovými řetězci, Markovovými maticemi a jejich vlastnostmi. Závěrečná kapitola je věnována samotnému zkoumání Markovových řetězců. Obsahuje jak konkrétní příklady pro pochopení problematiky, tak příklady obecné. Obecné příklady jsou využity k popsání vlastností řetězce, které určují směřování daného řetězce.

1. Základní poznatky z algebry

V této kapitole jsou uvedeny poznatky z oblasti algebry, jež jsou později využity v teorii Markovových řetězců. Jedná se o základní definice a věty, proto jsou také vynechány důkazy. Ty lze najít v [4],[5] nebo [6].

1.1. Vlastní čísla, vlastní vektory, Jordanův kanonický tvar

Definice 1.1.1. Nechť A je čtvercová matice řádu k a existuje číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ a nenulový vektor $\xi \in \mathbb{C}^k$, pro které platí $A\xi = \lambda\xi$. Pak λ nazýváme vlastní číslo matice A a ξ vlastní vektor matice A příslušný vlastnímu číslu λ.

Definice 1.1.2. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice A. Pak číslo

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

nazveme spektrální poloměr matice A.

Poznámka 1.1.3. Vlastní čísla získáme vyřešením rovnice $\det(A - \lambda E) = 0$. Vlastní vektor ξ příslušný číslu λ, které je jednoduché, získáme vyřešením rovnice $(A - \lambda E)\xi = 0$, kde E je jednotková matice. Vlastní čísla a vlastní vektory obecně mohou být z oboru komplexních čísel. V případě čísel komplexních je jejich velikost definována vztahem $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$, kde z je komplexní číslo a $\bar{z}$ je číslo komplexně sdružené číslu z.

Definice 1.1.4. Řekneme, že matice A je podobná matici B, jestliže existuje matice Q, jejíž řádky jsou lineárně nezávislé, taková, že $A = QBQ^{-1}$.

Definice 1.1.5. Čtvercová matice

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

dimenze $s_i \times s_i$ se nazývá Jordanovou buňkou. Diagonální bloková matice J, jejíž bloky na diagonále jsou Jordanovymi buňkami, se nazývá Jordanova matice.

Věta 1.1.6. *Ke každé matici A dimenze $k \times k$ existuje podobná matice J z Definice 1.1.5, kde J_i jsou matice $s_i \times s_i$ a $\sum_{i=1}^{r} s_i = k$. Matice J je tvaru*

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}.$$

Dále platí, že $A^n = (QJQ^{-1})^n = QJ^nQ^{-1}$, *kde*

$$J^n = \begin{pmatrix} J_1^n & & & \\ & J_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k^n \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Viz [4]. □

Důsledek 1.1.7. *Jelikož* $A = QJQ^{-1}$, *pak* $AQ = QJ$. *Nechť* $Q = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$, *kde* $\xi_i = (\xi_{1i}, \xi_{2i}, \ldots, \xi_{ki})^T$. *Porovnáme-li první sloupec, dostáváme*

$$A\xi_1 = \lambda_1 \xi_1.$$

Z Definice 1.1.1 je zřejmé, že ξ_1 *je vlastní vektor matice* A *příslušný vlastnímu číslu* λ_1.

Věta 1.1.8. *Je-li* A *matice dimenze* $k \times k$, *potom* $\lim_{n\to\infty} A^n = O$ *právě tehdy, když platí* $|\lambda| < 1$ *pro všechny vlastní hodnoty* λ *matice* A.

Důsledek 1.1.9. *Jestliže pro Jordanovy buňky* J_i, *kde* $i = m, \ldots, k$, *matice* J *platí* $|\lambda| < 1$, *pak z Vět 1.1.6 a 1.1.8 vyplývá, že* $\lim_{n\to\infty} J_i^n = O$, *kde* $i = m, \ldots, k$.

Věta 1.1.10. *Nechť* A *je matice dimenze* $k \times k$ *s vlastními čísly* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. *Pak vlastní čísla matice* A^n, *kde* $n \in \mathbb{N}$, *jsou* $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n$.

1.2. Perronova věta

Nyní uvedeme pro tuto práci významnou větu. Perronova věta nám dává informace o vlastních číslech matic, které budeme později uvažovat.

Věta 1.2.1. (Perronova věta). *Nechť* A *je matice velikosti* $k \times k$, *jejíž všechny prvky jsou kladné. Pak existuje jednoduché vlastní číslo* $\rho(A) \in \mathbb{R}$ *matice* A. *Pro vlastní čísla* $\lambda \neq \rho(A)$ *navíc platí, že* $|\lambda| < \rho(A)$. *Vlastní vektor příslušný* $\rho(A)$ *má všechny prvky reálné a kladné.*

Poznámka 1.2.2. Jedná se pouze o část Perronovy-Frobenoiovy věty, jejíž plné znění není pro tuto práci podstatné a je tedy vynecháno. Věta je převzata z knihy *An Introduction to Difference Equation* Saubera Elaydiho [5]. Její plné znění i s důkazem lze najít v [9, strany 4-13].

2. Markovovy řetězce

2.1. Úvod do Markovových řetězců

Definice 2.1.1. Posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá Markovův řetězec, jestliže

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i_n) \tag{2.1}$$

pro každé $n \geq 0$ a $i_0, \ldots, i_n \in S$ takové, že $P(X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0) > 0$.

Poznámka 2.1.2. Množina S je množinou stavů, které mohou nastat. Tato množina může být konečná nebo spočetná. V případě genetiky a také příkladů, které zde budeme uvažovat, se jedná o množinu konečnou. Mohutnost množiny S budeme uvažovat $|S| = k$.

Hodnoty n interpretujeme jako časové okamžiky a hodnoty, kterých nabývá řetězec X_n, nazýváme stavy a označujeme s_i. Z definice vyplývá, že stav s_i v čase *n+1* je závislý pouze na stavu s_j v čase n, kde $i, j \in \mathbb{N}$.

Mějme množinu všech možných výsledků náhodného pokusu $S = \{s_1, s_2, ..., s_k\}$. Pravděpodobnost, že v čase *n+1* nastane stav s_i za předpokladu, že v čase n nastal stav s_j, označme $p_{ij} = p(s_i|s_j)$. Nastal-li při posledním opakování stav s_j, v následujícím opakování musí opět nastat některý ze stavů množiny S, tedy

$$p_{1j} + p_{2j} + p_{3j} + ... + p_{kj} = 1, \qquad 1 \leq i \leq k. \tag{2.2}$$

Dále označme $p_i(n)$ pravděpodobnost, že stav s_i nastane v čase n, kde $1 \leq i \leq k$. Jelikož vždy musí nastat nějaký ze stavů $s_1, s_2, ..., s_k$, platí

$$p_1(n) + p_2(n) + p_3(n) + ... + p_k(n) = 1. \tag{2.3}$$

Dalším krokem je určení pravděpodobnosti, že nastane jev s_i v $(n+1)$. opakování, tj. $p_i(n+1)$. Tomuto může předcházet k jevů, jejichž pravděpodobnost je $p_j(n)$, $1 \leq j \leq k$. Pravděpodobnost, že v čase *n+1* nastane jev s_i a současně nastal v čase n jev s_j, vyjádříme součinem pravděpodobností $p_{ij}p_j(n)$. Jelikož v čase n nastal některý ze stavů $s_1, s_2, ..., s_k$, pravděpodobnost, že stav s_i nastane v čase *n+1* vyjádříme jako součet pravděpodobností $p_{ij}p_j(n)$ pro $j = 1, \ldots, k$, tedy $p_i(n+1) = \sum_{j=1}^{k} p_{ij}p_j(n)$, kde $i = 1, \ldots, k$. Tímto získáme soustavu diferenčních rovnic

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix} (n+1) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix} (n).$$

Zkráceně můžeme také psát

$$p(n+1) = Mp(n), \tag{2.4}$$

kde $M = \{p_{ij}\}$, $i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, k$. Matici M také nazýváme maticí přechodu.

Poznámka 2.1.3. Více informací k diferenčním rovnicím a soustavám diferenčních rovnic lze nalézt v [1],[5] nebo [8].

2.2. Vlastnosti Markovových matic

Definice 2.2.1. Matice $A = \{a_{ij}\}$ se nazývá Markovova (stochastická nebo sloupcově stochatická), je-li splněno

(a) $a_{ij} \geq 0$ pro $i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, k$,

(b) $\sum_{i=1}^{k} a_{ij} = 1$ pro $j = 1, 2, ..., k$.

Z nezápornosti pravděpodobností a vlastnosti (2.2) je zřejmé, že matice M z rovnice (2.4) je Markovova.

Tvrzení 2.2.2. *Nechť M je Markovova matice. Pak M^n je taktéž Markovovou maticí a to pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. Ukažme nejprve, že součin dvou libovolných Markovových matic A,B stejného rozměru $k \times k$ je opět Markovou maticí.

Nechť $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$, kde $i, j = 1, 2, \dots, k$. Platí $(A \cdot B)_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj}$. Každý z prvků matice $A \cdot B$ je zřejmě nezáporné číslo. Podmínka (a) je splněna. Součet j-tého sloupce je

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} (A \cdot B)_{ij} &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj} \\ &= a_{11} b_{1j} + \dots + a_{1k} b_{kj} + \dots + a_{kk} b_{kj} \\ &= b_{1j}(a_{11} + \dots + a_{k1}) + \dots + b_{kj}(a_{1k} + \dots + a_{kk}) \\ &= b_{1j} + \dots + b_{kj} = 1.\end{aligned}$$

Ukázali jsme, že součet j-tého sloupce matice $A \cdot B$ je roven 1 pro libovolné $j \in \{1, \dots, k\}$. Je tedy splněna podmínka (b). Tím je dle Definice 2.2.1 dokázáno, že součin dvou libovolných Markovových matic stejného rozměru je maticí Markovou.

Nyní využijme matematickou indukci k důkazu, že M^n je Markovova matice. Jelikož součin dvou libovolných Markovových matic je opět maticí Markovovou, zřejmě platí, že M^2 je Markovova matice. Přepokládejme nyní, že matice M^{n-1}, kde $n \in \mathbb{N}$, je Markovova. Matice M^n je Markovovou maticí, neboť $M^n = M^{n-1}M$, kde M^{n-1} a M jsou Markovovy matice. □

Věta 2.2.3. *Pro všechna vlastní čísla Markovovy matice M platí $|\lambda| \leq 1$. Navíc $\lambda = 1$ je vlastní číslo Markovovy matice.*

Důkaz. Nejprve ukažme, že $\lambda = 1$ je vlastním číslem matice M, jejíž dimenze je $k \times k$. Uvažujme matici M^T a vektor $e = (1, \dots, 1)^T$. Pro matici M^T platí $\sum_{j=1}^{k} m_{ij} = 1$ *pro i=1,2,...,k.* Tato vlastnost lze také zapsat $M^T e = e$. Z Definice 1.1.1 plyne, že $\lambda = 1$ je vlastní číslo a e je vlastní vektor matice M^T. Matice M a M^T mají stejný determinant, zároveň matice $(M - \lambda E)$ a $(M^T - \lambda E)$ mají stejný determinant. Vlastní čísla matic M a M^T jsou tedy shodná a $\lambda = 1$ je vlastní číslo matice M.

Nyní ukážeme, že pro všechna λ platí $|\lambda| \leq 1$. Označme ξ vlastní vektor matice $M^T = \{m_{ij}\}$

příslušný vlastnímu číslu λ. Nechť $|\xi_j| = \max_{1 \le i \le k} |\xi_i|$. Pro všechna $i = 1, \dots, k$ platí $m_{i1}\xi_1 + \cdots + m_{ik}\xi_k = \lambda\xi_i$. Potom pro i=j

$$\begin{aligned} |\lambda| \cdot |\xi_j| &= |m_{j1}\xi_1 + \cdots + m_{jk}\xi_k| \\ &\le m_{j1}|\xi_1| + \cdots + m_{jk}|\xi_k| \\ &\le m_{j1}|\xi_j| + \cdots + m_{jk}|\xi_j| \\ &= (m_{j1} + \cdots + m_{jk})|\xi_j| \\ &= 1 \cdot |\xi_j|. \end{aligned}$$

Jelikož ξ je nenulový vektor, dostáváme, že pro všechna vlastní čísla matice M^T platí $|\lambda| \le 1$. Stejnou argumentací jako v předešlé části důkazu zjistíme, že $|\lambda| \le 1$ platí pro všechna vlastní čísla matice M. □

Poznámka 2.2.4. Z předchozí věty vyplývá, že spektrální poloměr libovolné Markovovy matice je vždy roven 1. Jsou-li navíc splněny předpoklady Perronovy věty 1.2.1, je toto vlastní číslo navíc jednoduché.

Definice 2.2.5. Markovova matice se nazývá regulární, jestliže existuje kladné přirozené číslo m, pro které má matice M^m všechny prvky kladné.

Tvrzení 2.2.6. *Nechť M je regulární Markovova matice dimenze $k \times k$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. Potom $\lambda = 1$ je jednoduché vlastní číslo matice M a pro ostatní vlastní čísla platí $|\lambda| < 1$.*

Důkaz. Nechť má matice M vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Dle Věty 1.1.10 má matice M^m vlastní čísla $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \dots, \lambda_k^m$. Z Věty 2.2.3 víme, že matice M má vlastní číslo $\lambda = 1$ a pro všechna vlastní čísla platí $|\lambda| \le 1$. Proto také matice M^m má vlastní číslo $\lambda = 1$ a všechna vlastní čísla splňují $|\lambda| \le 1$. Z předpokladu regulárnosti má matice M^m všechny prvky kladné. Můžeme proto využít Perronovu větu 1.2.1, která říká, že vlastní číslo $\lambda = 1$ matice M^m je jednoduché a pro ostatní vlastní čísla platí $|\lambda| < 1$. Jelikož $\lambda = 1$ je jednoduché vlastní číslo matice M^m a zároveň matice M má vlastní číslo $\lambda = 1$, platí, že vlastní číslo $\lambda = 1$ matice M je jednoduché a navíc číslo -1 není vlastním číslem matice M. Pro zbylá vlastní čísla matice M platí $|\lambda| < 1$. □

Markovova matice M je nezávislá na n. Z teorie diferenčních rovnic tedy vyplývá, že $p(n) = M^n p(0)$. Podle Věty 1.1.6 lze matici M^n zapsat $M^n = QJ^nQ^{-1}$. Z Důsledku 1.1.9 a Tvrzení 2.2.6 plyne, že je-li matice M regulární. Pak pro $n \to \infty$ platí $J^n \to \operatorname{diag}(1, 0, \dots, 0)$. Proto, využijeme-li Důsledek 1.1.7, platí

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \lim_{n\to\infty} M^n p(0) = \lim_{n\to\infty} QJ^nQ^{-1}p(0) = (\xi_1, 0, \dots, 0)Q^{-1}p(0) = a\xi_1, \tag{2.5}$$

kde $\xi_1 = (\xi_{11}, \xi_{21}, \dots, \xi_{k1})^T$ je vlastní vektor M příslušný $\lambda = 1$ a a je první složka $Q^{-1}p(0)$. Místo obtížného hledání matice Q zvolíme jednodušší způsob výpočtu konstanty a. Pro $p(n) = (p_1(n), p_2(n), \dots, p_k(n))^T$ platí vztah (2.3). Jelikož $\lim_{n\to\infty} p(n) = a\xi_1$, dostáváme

$$a\xi_{11} + a\xi_{21} + \cdots + a\xi_{k1} = 1.$$

Odtud

$$a = \frac{1}{\xi_{11} + \xi_{21} + \cdots + \xi_{k1}}. \tag{2.6}$$

Ze vztahu (2.5) vidíme, že konvergence bude záviset na vlastních číslech Markovovy matice M. Konkétně jestliže $\lambda = -1$ je vlastním číslem matice M nebo $\lambda \in \mathbb{C}$ s nenulovou imaginární částí takové, že $|\lambda| = 1$, je vlastním číslem matice M, pak řetězec nebude konvergovat.

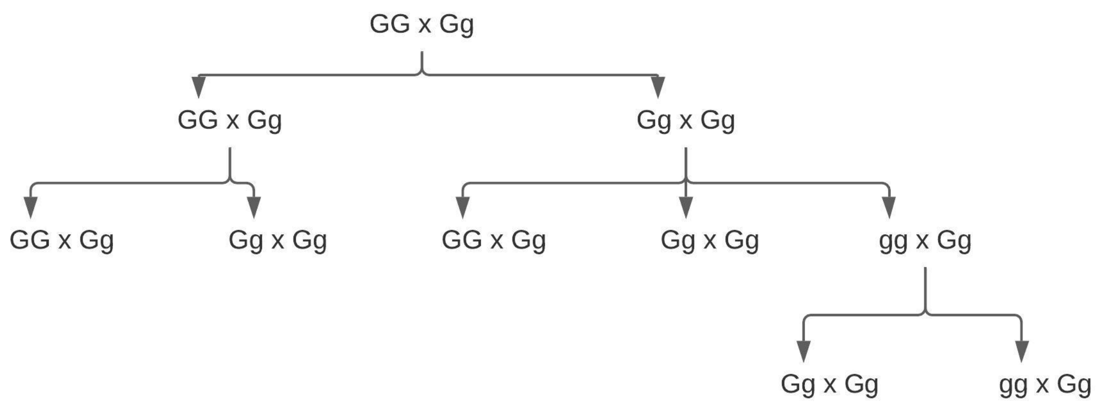
Poznámka 2.2.7. Markovovými řetězi a Markovovými maticemi se zabývá také [2], [5], [7] a [10].

3. Příklady

3.1. Úvodní příklady

Příklad 3.1.1. Uvažujme zvíře, jehož genetická informace je složena ze dvou alel, které mohou být dvojího druhu (G a g). Jedinec tedy může mít kombinaci GG tzv. dominantní, gg neboli recesivní, nebo Gg (shodné s gG), kdy je nazýván hybridem. Potomek dědí vždy jednu alelu od každého z rodičů. Základním přepokladem genetiky je, že výběr tohoto genu je náhodný. Původním rodičem bude jedinec s genetickou informací GG. Předpokládejme, že páření bude vždy probíhat s hybridním jedincem, viz Obr. 3.1.

Množina možných výsledků, tedy různých genetických kombinací, obsahuje $s_1 = GG$, $s_2 = Gg, s_3 = gg$. Označme p_{ij} pravděpodobnost, že stav s_i nastane v $(n+1)$. generaci za předpokladu, že v *n-té* generaci nastal stav s_j. Zkříží-li se jedinec s alelami GG s jedincem s alelami Gg, tj. alela G je rodičem GG poskytnuta s pravděpodobností 1, zatímco rodičem Gg s pravděpodobností $\frac{1}{2}$, potom pravděpodobnost $p_{11} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Stejným způsobem zjistíme i další pravděpodobnosti. Například $p_{31} = 0$ je zjevně jev nemožný.



Obrázek 3.1: Ukázka množení k příkladu 3.1.1

Matice M bude nabývat hodnot

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ M^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla této matice jsou $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = 0$. Matice je také regulární, například pro M^2. Použijme tedy vztah (2.5)

$$\lim_{n \to \infty} p(n) = a\xi_1.$$

Pro $\lambda = 1$ získáváme soustavu rovnic

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \xi_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud

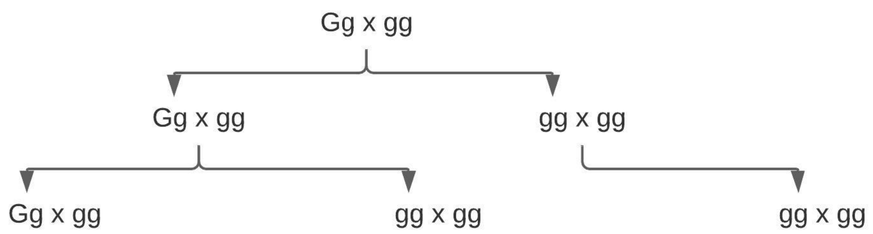
$$\begin{aligned}\xi_{21} &= 2\xi_{31},\\ \xi_{11} &= \tfrac{1}{2}\xi_{21} = \xi_{31}.\end{aligned}$$

Vlastní vektor je tedy roven $\xi_1 = (1,2,1)^T$ a odtud dle vztahu (2.6) $a = \frac{1}{4}$.
Dosazením získáváme

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\right)^T.$$

Pro počet generací blížící se nekonečnu je pravděpodobnost čistě dominantního stejně jako čistě recesivního jedince 0,25, zatímco pravděpodobnost hybridního jedince je 0,5.

Příklad 3.1.2. Uvažujme nyní situaci podobnou předchozímu příkladu. Původním rodičem bude ovšem jedinec hybridní s genetickou informací Gg a páření bude vždy probíhat s jedincem recesivním (tj. gg). Situace je přiblížena na Obr. 3.2.



Obrázek 3.2: Ukázka množení k příkladu 3.1.2

Množina možných výsledků bude v tomto případě obsahovat pouze $s_1 = Gg, s_2 = gg$. Označme-li opět p_{ij} pravděpodobnost, že stav s_i nastane v $(n+1)$. generaci za předpokladu, že v *n-té* generaci nastal stav s_j, matice M bude vypadat následovně:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Tento příklad je velmi jednoduchý, lze proto okamžitě vidět, že recesivních jedinců bude rychle přibývat, zatímco jedinec hybridní se v každé generaci objeví jen jeden.

Vlastní čísla této matice jsou $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Matice M ovšem není regulární pro žádné $m \in \mathbb{N}$ a pro výpočet pomocí vztahu

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = a\xi_1$$

nemáme splněny předpoklady. Ukažme si přesto výsledek, kterého jím dosáhneme:

Pro $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se soustava rovnic zjednoduší na

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}\xi_{11} &= 0, \\ \tfrac{1}{2}\xi_{11} &= 0. \end{aligned}$$

Odtud je zřejmé, že $\xi_{11} = 0$ a $\xi_{21} = 1$ volíme, aby platila rovnost (2.3). Dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \big(0, 1\big)^T .$$

Pro počet generací blížící se nekonečnu tedy dojde k vymizení dominantního genu.

Vidíme, že podmínka regulárnosti matice M nemusí být splněna i pro velmi jednoduché příklady. Zkusme tedy výsledek zjistit pomocí přímého výpočtu matice Q. Matice Q se skládá z vlastních vektorů matice M. Vlastní vektor ξ_1 jsme již spočítali, je roven $(0, 1)^T$. Vlastní vektor příslušný $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ je $(1, -1)^T$. Dostáváme

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matici M proto vyjádříme

$$M = QJQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

V n-té generaci tedy platí

$$M^n = QJ^nQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Můžeme proto vyjádřit $m_{11} = \frac{1}{2}^n$, $m_{12} = 0$, $m_{21} = 1 - \frac{1}{2}^n$ a $m_{22} = 1$. Pro $n \to \infty$ dostáváme matici

$$\lim_{n\to\infty} M^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dosadíme nyní do rovnice $\lim_{n\to\infty} p(n) = M^n p(0)$ a dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \lim_{n\to\infty} M^n p(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_1(0) + p_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

V obou případech jsme získali stejné řešení, tedy že dominantní gen vymizí.

Poznámka 3.1.3. Proč fungovalo řešení pomocí vztahu (2.5), přestože nebyla splněna podmínka regulárnosti? Regulárnost matice nám zajišťuje, že číslo -1 není vlastním číslem matice M a vlastní číslo $\lambda = 1$ je jednoduché, bez nutnosti samotného výpočtu vlastních čísel. Tento výpočet může být totiž někdy velmi náročný oproti potvrzení regulárnosti pro jakékoliv číslo $m \in \mathbb{N}$. V našem případě jsme výpočtem vlastních čísel potvrdili, číslo -1 není vlastním číslem zadané Markovovy matice a vlastní číslo $\lambda = 1$ je jednoduché. Tím jsme také měli zajištěnou konvergenci $\lim_{n\to\infty} J^n$, a výpočet proto byl korektní.

3.2. Obecně zadaná matice přechodu

Podívejme se nyní na více teoretický příklad. Uvažujme Markovovův řetězec se třemi stavy, jehož matice přechodu je tvaru

$$M = \begin{pmatrix} 1-a-b & c & e \\ a & 1-c-d & f \\ b & d & 1-e-f \end{pmatrix}, \text{kde } a,b,c,d,e,f,a+b,c+d,e+f \in \langle 0,1 \rangle,$$

a sledujme jeho chování.

Poznámka 3.2.1. Ve skutečnosti nemusíme zkoumat všechny možnosti, neboť existuje několik ekvivalentních situací. Pořadí složek vektoru $p(0)$ můžeme libovolně zaměňovat. Aby však situace zůstala stejná s pouze vyměněným pořadím, musíme upravit také matici M, a to následovně. Vyměníme-li i-tou složku vektoru $p(0)$ za složku j, kde $i,j = 1,2,3$ a $i \neq j$, musíme taktéž vyměnit i-tý a j-tý řádek a stejně tak i-tý a j-tý sloupec matice M.

Poznámka 3.2.2. Vzhledem k náročnosti některých výpočtů v následujícím příkladu byl využit software Matlab. Skript pro výpočet je přiložen v příloze na straně 27 a důkladněji ukazuje jednotlivé případy. Samotný výpočet byl náročný pouze z technického hlediska při hledání vlastních čísel a vlastních vektorů matice M, využit byl však analogický postup jako v předchozích příkladech s využitím symbolického toolboxu Matlabu.

Příklad 3.2.3. Vezměme nejdříve zjednodušenou situaci, kde $d = b$. Matice přechodu je pak tvaru

$$M = \begin{pmatrix} 1-a-b & c & e \\ a & 1-c-b & f \\ b & b & 1-e-f \end{pmatrix},$$

kde

$$a,b,c,e,f,a+b,b+c,e+f \in \langle 0,1 \rangle. \tag{3.1}$$

Vlastní čísla této matice jsou $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1-a-b-c, \lambda_3 = 1-b-e-f$. Rozepíšeme-li opět matici $M^n = QJ^nQ^{-1}$, vidíme, že konvergence bude záviset na n-tých mocninách vlastních čísel. Pro každé z čísel λ_2 a λ_3 mohou nastat tři případy, a to $\lambda_i = -1, |\lambda_i| < 1$ a $\lambda_i = 1$, kde $i = 2,3$. Rozeberme si postupně jednotlivé možnosti.

1. $\lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1$
   Pro $\lambda_2 = 1-a-b-c = -1$ musí platit, že $a+b = 1 \ \wedge \ c = 1$, a pro $\lambda_3 = 1-b-e-f = -1$ musí platit, že $e+f = 1 \ \wedge \ b = 1$. Zde se ovšem dostáváme do sporu, neboť není splněna podmínka z (3.1), že $b+c \in \langle 0,1 \rangle$. Tato situace tedy nemůže nastat.

2. $\lambda_2 = -1, |\lambda_3| < 1$
   Pro λ_2 máme stejnou podmínku jako v předchozím případě, tedy $a+b = 1 \ \wedge \ c = 1$. Pro $|\lambda_3| < 1$ nelze určit přesné hodnoty parametrů b,e,f. Z podmínky pro λ_2 víme, že $c = 1$. Z omezení (3.1) matice M zjistíme, že $b = 0$. Stále však musí platit rovnost

$a+b=1$ z podmínky pro λ_2, platí tedy $a=1$. Aby byla zachována podmínka $|\lambda_3|<1$, musí platit $e+f\neq 0$. Matice M je proto tvaru

$$M=\begin{pmatrix}0 & 1 & e\\ 1 & 0 & f\\ 0 & 0 & 1-e-f\end{pmatrix},\ \text{kde}\ \ e,f\in\langle 0,1\rangle\,,e+f\in(0,1\rangle\,. \tag{3.2}$$

Pro n-tou mocninu této matice bude platit

$$M^{2n}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dfrac{1}{2}+\dfrac{e-f}{2(e+f-2)}-\dfrac{(e-1)(1-e-f)^{2n}}{e+f-2}\\ 0 & 1 & \dfrac{1}{2}-\dfrac{e-f}{2(e+f-2)}-\dfrac{(f-1)(1-e-f)^{2n}}{e+f-2}\\ 0 & 0 & (1-e-f)^{2n}\end{pmatrix}$$

a

$$M^{2n+1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & \dfrac{1}{2}-\dfrac{e-f}{2(e+f-2)}-\dfrac{(e-1)(1-e-f)^{2n+1}}{e+f-2}\\ 1 & 0 & \dfrac{1}{2}-\dfrac{e-f}{2(e+f-2)}+\dfrac{(f-1)(1-e-f)^{2n+1}}{e+f-2}\\ 0 & 0 & (1-e-f)^{2n+1}\end{pmatrix}.$$

Limita posloupnosti $\{M^n\}_{n=1}^{\infty}$ obecně neexistuje, neboť -1 je vlastním číslem matice M. Lze však vybrat konvergentní podposloupnosti, a to

$$\lim_{n\to\infty}M^{2n}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dfrac{1}{2}+\dfrac{e-f}{2(e+f-2)}\\ 0 & 1 & \dfrac{1}{2}-\dfrac{e-f}{2(e+f-2)}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

a

$$\lim_{n\to\infty}M^{2n+1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & \dfrac{1}{2}-\dfrac{e-f}{2(e+f-2)}\\ 1 & 0 & \dfrac{1}{2}+\dfrac{e-f}{2(e+f-2)}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Pokud bychom nyní vynásobili tyto dvě matice vektorem počátečních pravděpodobností $p(0)$, zjistili bychom, že $\lim_{n\to\infty}p_3(n)=0$, neboť v limitním případě je poslední řádek matic M^{2n} a M^{2n+1} tvořen nulami. Obecný tvar limity lze najít v příloze pod názvem *p_n2*.

- Jak již bylo zmíněno, pro takto zvolenou matici limita posloupnosti $\{M^n\}_{n=1}^{\infty}$ obecně neexistuje. Lze však uvažovat speciální případ, kdy $e=f$ nebo $p_3(0)=0$, a zároveň $p_1(0)=p_2(0)$. V takovém případě posloupnost bude konvergovat ke stavu

$$\lim_{n\to\infty}p(n)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}.$$

3. $\lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$
   Rovnost $\lambda_2 = -1$ platí, jestliže $a + b = 1 \ \wedge \ c = 1$. Dále rovnost $\lambda_3 = 1$ platí pro $e + f = 0 \ \wedge \ b = 0$. Je tedy zřejmé, že $a = 1$. Dostáváme matici

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

   Limita posloupnosti $p(n)$ obecně neexistuje, neboť n-tá mocnina matice M nabývá hodnot

$$M^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \text{a} \ M^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

   Navíc zde platí rovnost $p_3(0) = p_3(n)$ pro libovolné n.

   - I v tomto případě můžeme najít speciální případ, kdy limita $p(n)$ bude existovat. Platí-li, že $p_1(0) = p_2(0)$, a označíme-li toto číslo jako p, dostáváme, že

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \begin{pmatrix} p \\ p \\ 1 - 2p \end{pmatrix}, \ \text{kde } p \leq \frac{1}{2}.$$

4. $|\lambda_2| < 1, \lambda_3 = -1$
   Aby byla splněna podmínka $\lambda_3 = -1$, musí platit, že $b = 1 \ \wedge \ e + f = 1$. Jelikož $b = 1$, dostáváme z podmínek (3.1), že $a = c = 0$. Odtud také dostáváme $\lambda_2 = 1 - a - b - c = 0$. Markovova matice je pak tvaru

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 1-e \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \text{kde } \ e \in \langle 0, 1 \rangle. \tag{3.4}$$

   Posloupnost n-té mocniny této matice osciluje mezi

$$M^{2n} = \begin{pmatrix} e & e & 0 \\ 1-e & 1-e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad M^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 1-e \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

   a limita obecně neexistuje.

   - Pro speciální případ $p_3(n) = \frac{1}{2}$ limita posloupnosti $p(n)$ existuje a je rovna

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \begin{pmatrix} \frac{e}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{e}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

5. $|\lambda_2| < 1, |\lambda_3| < 1$
   Z těchto podmínek nejsme schopni přesně určit žádný z parametrů *a,b,c,e,f*. Matice M je tvaru

$$M = \begin{pmatrix} 1-a-b & c & e \\ a & 1-c-b & f \\ b & b & 1-e-f \end{pmatrix},$$

kde

$$a, b, c, e, f, a+b, b+c, e+f \in \langle 0,1\rangle,\ |1-a-b-c| < 1,\ |1-b-e-f| < 1.$$

Podmínky $|\lambda_2| < 1, |\lambda_3| < 1$ však zaručují konvergenci matice J^n pro $n \to \infty$ a tím i existenci řešení. Limita posloupnosti $\{M^n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovna

$$\lim_{n\to\infty} M^n = \begin{pmatrix} \dfrac{be+c(e+f)}{(a+b+c)(b+e+f)} & \dfrac{be+c(e+f)}{(a+b+c)(b+e+f)} & \dfrac{be+c(e+f)}{(a+b+c)(b+e+f)} \\ \dfrac{(e+f)a+fb}{(a+b+c)(b+e+f)} & \dfrac{(e+f)a+fb}{(a+b+c)(b+e+f)} & \dfrac{(e+f)a+fb}{(a+b+c)(b+e+f)} \\ \dfrac{b}{b+e+f} & \dfrac{b}{b+e+f} & \dfrac{b}{b+e+f} \end{pmatrix}.$$

Využijeme-li vlastnosti (2.3), že $p_1(n) + p_2(n) + p_3(n) = 1$, dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \begin{pmatrix} \dfrac{be+c(e+f)}{(a+b+c)(b+e+f)} \\ \dfrac{(e+f)a+fb}{(a+b+c)(b+e+f)} \\ \dfrac{b}{b+e+f} \end{pmatrix}.$$

Povšimněme si, že výsledek nezávisí na počátečním stavu, ale pouze na jednotlivých pravděpodobnostech přechodu.

6. $|\lambda_2| < 1, \lambda_3 = 1$
Z podmínky $\lambda_3 = 1$ zjistíme, že $e + f = 0 \ \wedge \ b = 0$. Aby byla splněna podmínka, $|\lambda_2| < 1$ musí platit, že $a + c \neq 0$ a $a + c \neq 2$. Matice přechodu je pak tvaru

$$M = \begin{pmatrix} 1-a & c & 0 \\ a & 1-c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ kde } a, c \in \langle 0,1\rangle, a+c \neq 0 \text{ a } a+c \neq 2.$$

Z konvergence vlastních čísel $\lambda_2^n \to 0$ a $\lambda_3^n \to 1$ pro $n \to \infty$ dostáváme, že

$$\lim_{n\to\infty} M^n = \begin{pmatrix} \dfrac{c}{a+c} & \dfrac{c}{a+c} & 0 \\ \dfrac{a}{a+c} & \dfrac{a}{a+c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \begin{pmatrix} \dfrac{c}{a+c}[p_1(0)+p_2(0)] \\ \dfrac{a}{a+c}[p_1(0)+p_2(0)] \\ p_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{c}{a+c}[1-p_3(0)] \\ \dfrac{a}{a+c}[1-p_3(0)] \\ p_3(0) \end{pmatrix}.$$

7. $\lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$
   Tato kombinace vlastních čísel nastat opět nemůže. Podmínka $\lambda_2 = 1$ je totiž splněna pro $a + b = 0 \ \wedge \ c = 0$ a podmínka $\lambda_3 = -1$ pro $b = 1 \ \wedge \ e + f = 1$. Parametr b však nemůže nabývat různých hodnot.

8. $\lambda_2 = 1, |\lambda_3| < 1$
   Podmínka $\lambda_2 = 1$ platí, jestliže $a + b = 0 \ \wedge \ c = 0$. Podmínka $|\lambda_3| < 1$ je splněna pro $e + f \neq 0$. Matice M je tvaru

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 - e - f \end{pmatrix}, \text{ kde } e, f \in \langle 0, 1 \rangle, e + f \in (0, 1\rangle. \tag{3.5}$$

   Využijeme-li vlastnosti $\lambda_3^n \to 0$ pro $n \to \infty$, získáme, že

$$\lim_{n \to \infty} M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{e}{e+f} \\ 0 & 1 & \dfrac{f}{e+f} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Vynásobením vektorem $p(0)$ získáváme

$$\lim_{n \to \infty} p(n) = \begin{pmatrix} p_1(0) + \dfrac{e}{e+f} p_3(0) \\ p_2(0) + \dfrac{f}{e+f} p_3(0) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

9. $\lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$
   Jestliže jsou všechna vlastní čísla rovna 1, platí $a+b = 0 \wedge c = 0$ a $e+f = 0 \wedge b = 0$. Odtud vyplývá, že

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

   Matice M^n je opět jednotkovou maticí pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a řešení se ustálí na výchozím stavu $p(0)$.

Výsledek je pro přehlednost zanesen do tabulky 3.1.

Poznámka 3.2.4. Pokud bychom chtěli příklad zjednodušit na pouze dva stavy, řešení by odpovídalo poslednímu řádku tabulky 3.1, kde $p_3(0) = 0$. Tento příklad lze nalézt také v [2].

Tabulka 3.1: Výsledky zjednodušeného případu obecného Markovova řetězce se třemi stavy z příkladu 3.2.3 v závislosti na vlastních číslech jeho matice přechodu.

	$\lambda_2 = -1$	$\lvert\lambda_2\rvert < 1$	$\lambda_2 = 1$
$\lambda_3 = -1$		oscilace	
$\lvert\lambda_3\rvert < 1$	oscilace	$\begin{pmatrix} \frac{be+ce+cf}{(a+b+c)(b+e+f)} \\ \frac{ea+fa+fb}{(a+b+c)(b+e+f)} \\ \frac{b}{b+e+f} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} p_1(0) + \frac{e}{e+f} p_3(0) \\ p_2(0) + \frac{f}{e+f} p_3(0) \\ 0 \end{pmatrix}$
$\lambda_3 = 1$	oscilace	$\begin{pmatrix} \frac{c}{a+c}(1 - p_3(0)) \\ \frac{a}{a+c}(1 - p_3(0)) \\ p_3(0) \end{pmatrix}$	$p(0)$

V případě limitního chování Markovových řetězců rozlišujeme pouze kovergenci a oscilaci. K divergenci nemůže dojít díky vlastnostem Markovovy matice. Vraťme se nyní k původní matici bez zjednodušení $d = b$ a podívejme se, kdy dojde k oscilaci. Oscilace nastane v případě, že číslo -1 je vlastním číslem matice M nebo pro vlastní číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ s nenulovou imaginární částí, pro které platí $|\lambda| = 1$. Pro matici M dimenze 3×3 existují pouze dva případy, kdy $\lambda \in \mathbb{C}$ s nenulovou imaginární částí, pro které platí $|\lambda| = 1$, je vlastním číslem matice M. Tyto matice získáme následovně.

Příklad 3.2.5. Uvažujme matici tvaru

$$M = \begin{pmatrix} 1-a-b & c & e \\ a & 1-c-d & f \\ b & d & 1-e-f \end{pmatrix},$$

kde

$$a, b, c, d, e, f, a+b, c+d, e+f \in \langle 0, 1 \rangle, \tag{3.7}$$

a podívejme se, kdy bude číslo $\lambda \in \mathbb{C}$, pro které platí $|\lambda| = 1$, vlastním číslem matice M.

Z rovnice pro výpočet vlastních čísel $\det(M - \lambda E) = 0$ získáme

$$\begin{aligned}
&-ace - acf - ac\lambda + ac - ade - adf - ad\lambda + ad - ae\lambda + ae - af\lambda + af - a\lambda^2 + 2a\lambda - a \\
&-bce - bcf - bc\lambda + bc - bde - bdf - bd\lambda + bd - be\lambda + be - bf\lambda + bf - b\lambda^2 + 2b\lambda - b \\
&-ce\lambda + ce - cf\lambda + cf - c\lambda^2 + 2c\lambda - c - de\lambda + de - df\lambda + df - d\lambda^2 + 2d\lambda - d - e\lambda^2 \\
&+2e\lambda - e - f\lambda^2 + 2f\lambda - f - \lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 + ace + acf + ac\lambda - ac + ade + adf \\
&+bce + bcf + bde + bdf + be\lambda - be + df\lambda - df \\
&= -\lambda^3 + \lambda^2(3 - a - b - c - d - e - f) \\
&+\lambda\left[-3 + 2(a + b + c + d + e + f) - ad - ae - af - bc - bd - bf - ce - cf - de\right] \\
&+ad + ae + af + bc + bd + bf + ce + cf + de + 1 - a - b - c - d - e - f = 0.
\end{aligned}$$

Jelikož $\lambda = 1$ je vždy vlastním číslem matice M, můžeme tuto rovnici upravit na tvar

$$\begin{aligned}(1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda(2-a-b-c-d-e-f) + 1 - a - b - c - d - e - f + ad + ae + af \\ + bc + bd + bf + ce + cf + de) = 0.\end{aligned}$$

Má-li rovnice kořen $\lambda \in \mathbb{C}$, pak číslo komplexně sdružené $\bar{\lambda}$ je také kořenem této rovnice. Pro součin kořenů x_1, x_2 polynomu druhého stupně $Ax^2 + Bx + C$ platí, že $x_1 x_2 = C$. V našem případě tedy $\lambda\bar{\lambda} = |\lambda|^2 = 1$. Dostáváme

$$\begin{aligned}1 - a - b - c - d - e - f + ad + ae + af + bc + bd + bf + ce + cf + de = 1, \\ bc + bd + bf + ce + cf + de - b - c - d - e - f = a(1-d-e-f).\end{aligned} \tag{3.8}$$

Jestliže $1 - d - e - f = 0$, můžeme výraz (3.8) upravit na tvar

$$\begin{aligned}&bc + b(1-e) + c(1-d) + de - b - c - 1 = 0, \\ &b(c-e) - d(c-e) = 1, \\ &(c-e)(b-d) = 1.\end{aligned}$$

Rovnosti je dosaženo, jestliže $c - e = 1 \wedge b - d = 1$ nebo $c - e = -1 \wedge b - d = -1$.

Rovnosti $c - e = 1$ a $b - d = 1$ jsou splněny, jestliže $c = 1, e = 0, b = 1$ a $d = 0$. Parametr f je pak roven $f = 1 - d - e = 1$ a parametr a z podmínky $a + b \leq 1$ je $a = 0$. Matice M je tvaru

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Rovnosti $c - e = -1$ a $b - d = -1$ jsou splněny, jestliže $c = 0, e = 1, b = 0$ a $d = 1$. Odtud $f = 1 - d - e = -1$. To však nesplňuje podmínky (3.7). Tato situace tedy nemůže nastat.

Jestliže $1 - d - e - f \neq 0$ z rovnice (3.8) dostáváme

$$a = \frac{bc + bd + bf + ce + cf + de - b - c - d - e - f}{1 - d - e - f}. \tag{3.10}$$

Platí, že $0 \leq a + b$, tedy

$$\begin{aligned}0 &\leq \frac{bc + bd + bf + ce + cf + de - b - c - d - e - f}{1 - d - e - f} + b \\ &= \frac{bc + ce + cf + de - be - c - d - e - f}{1 - d - e - f} \\ &= \frac{c(b-1) + (c-1)(e+f) + d(e-1) - be}{1 - d - e - f}.\end{aligned}$$

Čitatel tohoto zlomku je nekladné číslo, neboť platí omezení (3.7).

Pro $a \neq 0$ je nerovnost splněna pro $1 - d - e - f < 0$. Využijme vlastnosti $a + b \leq 1$ z (3.7). Platí

$$\begin{aligned}&a + b = \frac{bc + bd + bf + ce + cf + de - b - c - d - e - f}{1 - d - e - f} + b \leq 1, \\ &bc + bd + bf + ce + cf + de - b - c - d - e - f + b - bd - be - bf \geq 1 - d - e - f, \\ &0 \geq c(1-e-f) + (1-b)(1-e) + b(1-c) + e(1-d).\end{aligned}$$

Výraz na pravé straně je vždy nezáporný, musí tedy platit rovnost

$$c(1-e-f)+(1-b)(1-e)+b(1-c)+e(1-d)=0. \tag{3.11}$$

Té je dosaženo, jestliže

$$\begin{align} 1-e-f=0 \ \vee \ c=0, \tag{3.12a}\\ b=1 \ \vee \ e=1, \tag{3.12b}\\ b=0 \ \vee \ c=1, \tag{3.12c}\\ e=0 \ \vee \ d=1. \tag{3.12d} \end{align}$$

Vyjděme nyní z možnosti (3.12b) a zvolme $b=1$. Z omezení (3.7) vyplývá, že $a=0$. Aby byla splněna podmínka (3.12c), musí platit, že $c=1$, z čehož vyplývá, že $d=0$. Podmínka (3.12d) je splněna pro $e=0$ a podmínka (3.12a) dává $f=1$. V tomto případě není splněna podmínka $1-d-e-f\neq 0$.

Podobně, zvolíme-li v podmínce (3.12b) $e=1$, dostáváme $f=0$. Z podmínky (3.12d) vyplývá, že $d=1$, odtud z omezení (3.7) dostáváme $c=0$, což splňuje také podmínku (3.12a). Podmínka (3.12c) je splněna pro $b=0$. Nyní můžeme dopočítat a ze vztahu (3.10). Dostáváme

$$a=\frac{bc+bd+bf+ce+cf+de-b-c-d-e-f}{1-d-e-f}=\frac{1-1-1}{1-1-1}=1.$$

Matice M je tedy tvaru

$$M_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Jestliže platí $a=0$ z rovnice (3.8) dostáváme

$$\begin{aligned} bc+bd+bf+ce+cf+de-b-c-d-e-f=0,\\ (b+e)(c-1)+(d+f)(b-1)+c(f-1)+de=0. \end{aligned}$$

Tato rovnice je zřejmě splněna pro $a=b=c=d=e=f=0$. Matice M je pak maticí jednotkovou, pro jejíž vlastní čísla platí $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$. Je tedy splněna podmínka $\lambda_2\lambda_3=1$, ale nejedná se o matici, jejíž vlastní čísla jsou z množiny čísel komplexních s nenulovou imaginární částí.

Obdobným rozborem jako pro rovnici (3.11) bychom také získali, že rovnost je splněna pro $a=d=e=0$ a $b=c=f=1$, a získali bychom opět matici M_1.

Mezi maticemi M_1, M_2 navíc platí vztah $M_1^2=M_2$ a $M_1M_2=E$. Markovovův řetězec by tedy osciloval mezi třemi rozděleními populace

$$p^{(1)}=\begin{pmatrix}p_3\\p_1\\p_2\end{pmatrix}(0),\quad p^{(2)}=\begin{pmatrix}p_2\\p_3\\p_1\end{pmatrix}(0) \text{ a } p^{(3)}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}(0). \tag{3.14}$$

V následujícím příkladu se podívejme, kdy dojde k oscilaci, je-li alespoň jedno vlastní číslo matice M rovno -1.

Příklad 3.2.6. Uvažujme matici tvaru

$$M = \begin{pmatrix} 1-a-b & c & e \\ a & 1-c-d & f \\ b & d & 1-e-f \end{pmatrix},$$

kde

$$a, b, c, d, e, f, a+b, c+d, e+f \in \langle 0, 1\rangle, \tag{3.15}$$

a zvolme pevně vlastní číslo $\lambda = -1$. Toho dosáhneme, platí-li rovnost $\det[M-(-1)E] = 0$. Jejím řešením dostáváme

$$\begin{aligned} \det(M+E) &= (2-a-b)(2-c-d)(2-e-f) + ade + bcf \\ &\quad - be(2-c-d) - df(2-a-b) - ac(2-e-f) = 0, \\ 8 - 4(a+b&+c+d+e+f) + 2(ad+ae+af+bc+bd+bf+ce+cf+de) = 0. \end{aligned}$$

Odtud

$$a(2-d-e-f) = 4 - 2(b+c+d+e+f) + bc + bd + ce + de + cf + bf. \tag{3.16}$$

Je-li $2-d-e-f \neq 0$, dostáváme

$$a = \frac{4-2(b+c+d+e+f)+bc+bd+ce+de+cf+bf}{2-d-e-f}. \tag{3.17}$$

Z podmínek (3.15) musí platit, že $a+b \leq 1$. Dosadíme-li do této nerovnice a z (3.17), dostáváme

$$\begin{aligned} a+b &= \frac{4-2(b+c+d+e+f)+bc+bd+ce+de+cf+bf}{2-d-e-f} + b \\ &= \frac{4-2(b+c+d+e+f)+bc+bd+ce+de+cf+bf+2b-bd-be-bf}{2-d-e-f} \\ &= \frac{4-2(c+d+e+f)+bc+ce+de+cf-be}{2-d-e-f} \leq 1, \end{aligned}$$

a odtud dále

$$\begin{aligned} 4-2(c+d+e+f)+bc+ce+de+cf-be &\leq 2-d-e-f, \\ 2-2c-d-e-f+bc+ce+de+cf-be &\leq 0. \end{aligned}$$

Nyní vyjádříme

$$b(e-c) \geq 2-2c-d-e-f+ce+de+cf. \tag{3.18}$$

Podívejme se nejdříve, jak bude vypadat řešení pro $e-c > 0$. Využijeme-li podmínku $b \leq 1$, platí

$$\begin{aligned} 1 \geq b &\geq \frac{2-2c-d-e-f+ce+de+cf}{e-c}, \\ e-c &\geq 2-2c-d-e-f+ce+de+cf, \\ c-ce-cf &\geq 2-d-2e-f+de, \\ c(1-e-f) &\geq (1-e)(1-d)+1-e-f, \\ c &\geq \frac{(1-e)(1-d)+1-e-f}{1-e-f}, \\ c &\geq 1 + \frac{(1-e)(1-d)}{1-e-f}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Jelikož dle (3.15) platí, že $d, e, f \in \langle 0, 1\rangle$, z nerovnice (3.19) vyplývá, že $c \geq 1$. Parametr c je ovšem z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, jediná přípustná hodnota by proto byla $c = 1$. Toto řešení je ovšem vyloučeno podmínkou $e - c > 0$.
Pro $e - c \leq 0$ platí

$$\begin{aligned}
b(e-c) &\geq 2 - 2c - d - e - f + ce + de + cf,\\
b(e-c) &\geq (1-e-f) + (1-c-d) - c(1-e-f) + de,\\
b(e-c) &\geq (1-e-f)(1-c) + (1-c-d) + de \geq 0.
\end{aligned}$$

Z takto upravené nerovnice vidíme, že její levá strana bude vždy menší nebo rovna 0. Výraz na pravé straně bude z podmínek (3.15) vždy nezáporný. Tato nerovnice tedy bude platit, jestliže $b = 0$ nebo $e - c = 0$. Potom musí být nulový také výraz

$$(1-e-f)(1-c) + (1-c-d) + de.$$

To platí, jestliže

$$1 - e - f = 0 \ \vee \ 1 - c = 0, \tag{3.20a}$$
$$1 - c - d = 0, \tag{3.20b}$$
$$de = 0. \tag{3.20c}$$

Rozeberme nyní jednotlivé případy, které mohou nastat.

Uvažujme nejprve situaci, kdy $b = 0$ a $e - c \leq 0$. Vyjdeme z podmínky (3.20c), která je splněna, jestliže $d = 0 \ \vee \ e = 0$.

1. Zvolme nejprve případ $d = 0$. Z podmínky (3.20b) vyplývá, že $c = 1$. Pro $c = 1$ je splněna také podmínka (3.20a). Nyní můžeme dopočítat hodnotu a z rovnice (3.17)

$$\begin{aligned}
a &= \frac{4 - 2(b+c+d+e+f) + bc + bd + ce + de + cf + bf}{2 - d - e - f}\\
&= \frac{4 - 2(1+e+f) + e + f}{2 - e - f} = 1.
\end{aligned}$$

   Matice M pak bude tvaru

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & e \\ 1 & 0 & f \\ 0 & 0 & 1-e-f \end{pmatrix}, \text{ kde } e, f, e+f \in \langle 0, 1\rangle\,. \tag{3.21}$$

   Při bližším pohledu na tuto matici přechodu zjistíme, že $b = d$, což je zjednodušení z předchozího příkladu 3.2.3. Chování této matice bude dále záviset na volbě parametrů e,f, jejichž veškeré možnosti byli důkladně popsány v předchozím příkladu. Jedná se o spojení případů (3.2) a (3.3).

2. Položme tentokrát v podmínce (3.20c) $e = 0$. Z podmínky (3.20a) vyplývá, že $f = 1$. Podmínka (3.20b) je splněna pro $c + d = 1$. Potom pro $d \neq 1$ platí

$$a = \frac{4 - 2(1+1) + c}{2 - d - 1} = \frac{c}{1-d} = \frac{1-d}{1-d} = 1$$

a

$$M = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-c & 0 \end{pmatrix}, \text{ kde } c \in (0,1\rangle\,. \tag{3.22}$$

Podíváme-li se na tuto matici, zjistíme, že jde o stejný případ jako (3.4) v Příkladu 3.2.3 se zaměněnými řádky a sloupci dle Poznámky 3.2.1.

Další variantou je speciální případ vyplývající z rovnice (3.16), je-li výraz $2-d-e-f=0$. To platí pro $d=1 \ \wedge \ e+f=1$. Odtud $c=0$. Poté musí být roven nule také výraz

$$\begin{aligned} 4-2(b+c+d+e+f)+bc+bd+ce+de+cf+bf &= 4-2(b+1+1)+b+e+bf \\ &= -b+e+bf = b(f-1)+e \\ &= -be+e \\ &= e(1-b). \end{aligned}$$

Platí tedy $e=0 \ \vee \ b=1$, které určují další možnosti matice M s vlastním číslem rovným -1.

3. Pro $e=0$, víme-li, že $d=1,\ c=0$ a $e+f=1$, dostáváme matici

$$M = \begin{pmatrix} 1-a-b & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ kde } a, b, a+b \in \langle 0,1\rangle\,. \tag{3.23}$$

Zde může opět nastat několik případů podle volby parametrů *a,b*. Při bližším pohledu na matici však zjistíme, že se jedná o analogický případ jako v případě (3.21) tohoto příkladu se zaměněnými řádky a sloupci matice M dle Poznámky 3.2.1. Výsledky tedy budou taktéž analogické případu (3.2) z Příkladu 3.2.3.

4. Pro $b=1$ dostáváme, že $a=0$. Stále navíc platí, že $d=1,\ c=0$ a $e+f=1$. Matice M je rovna

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 1-e \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ kde } e \in \langle 0,1\rangle\,. \tag{3.24}$$

I zde můžeme vidět, že se jedná o stejnou matici jako v případě (3.4) z příkladu 3.2.3. Zároveň vidíme, že jde o matici ekvivalentní dle Poznámky 3.2.1 matici v případě (3.22) z tohoto příkladu.

Na základě zjištění z předchozích příkladů můžeme zformulovat následující tvrzení.

Tvrzení 3.2.7. *Mějme Markovovův řetězec, jehož matice přechodu je tvaru*

$$M = \begin{pmatrix} 1-a-b & c & e \\ a & 1-c-d & f \\ b & d & 1-e-f \end{pmatrix}, \textit{kde } a,b,c,d,e,f,a+b,c+d,e+f \in \langle 0,1\rangle.$$

Jestliže v takto definovaném řetězci platí $b \neq d \wedge c \neq e \wedge a \neq f$ a zároveň se nejedná o speciální matice (3.9), (3.13) z Příkladu 3.2.5, řetězec pro $n \to \infty$ konverguje.

Důkaz. Viz Příklad 3.2.5 a 3.2.6. □

Poznámka 3.2.8. Oproti Tvrzení 2.2.6 pro $k = 3$ není požadováno, aby matice M nebo její n-tá mocnina měly všechny prvky kladné. Tvrzení 3.2.7 zaručuje, že pro všechna vlastní čísla λ matice M platí $|\lambda| < 1$ nebo $\lambda = 1$. Oproti Tvrzení 2.2.6 také vlastní číslo $\lambda = 1$ nemusí být jednoduché.

Poznámka 3.2.9. Příklady 3.2.3 a 3.2.6 jsou pouze teoretické. Stejně tak intervaly, do kterých parametry matice M náleží. V případě genetiky nemusí nastat všechny výše zmíněné kombinace nebo nastanou jen za velmi specifických podmínek.

Závěr

Cílem této práce bylo studium Markovových řetězců a jejich ukázka na příkladech z genetiky. Přesto lze obsah této práce využít i v jiných odvětvích. Hlavním předmětem zkoumání této práce byla konvergence Markovových řetězců, především pak řetězů o třech stavech.

Úvodní kapitola byla věnována teorii matic, která se ke studiu Markovových řetězců využívá. V následující kapitole byly zavedeny Markovovy řetězce a popsány vlastnosti Markovových matic. Byl také zaveden obecný postup, který lze využít ke zjištění, kam daný řetězec konverguje. Závěrečná kapitola popisovala jak konkrétní případy, tak příklady obecně zadané. Obecné příklady byly zaměřeny na určení vlastností Markovových matic dimenze 3×3, které zaručují oscilaci Markovova řetězce. Na základě těchto příkladů bylo zformulováno tvrzení o konvergenci řetězců o třech stavech.

Markovovy řetězce mají široké využití od biologie až po ekonomii. Velké zastoupení mají v pravděpodobnosti, kde se využívají například k předpovědi chování. Ve většině takových případů je však Markovova matice závislá na čase. Tato varianta by mohla být předmětem dalšího zkoumání.

Literatura

[1] BUSÍNSKÝ, Jan. *Matematické modely v demografii* [online]. Brno, 2015 [cit. 2021-05-13]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/w6j2q/. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce Zdeněk POSPÍŠIL.

[2] DUCHOŇ, Miloslav. *O Markovových reťazcoch*. Bratislava.

[3] DVOŘÁK, Jiří. *Markovovy řetězce*. In: Základy matematického modelování [online]. Praha, 2014, 2014, s. 6 [cit. 2021-5-13]. Dostupné z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~dvorak/teaching/2014_2015/teaching_2014_2015.html

[4] DVOŘÁK, Zdeněk. *Eigenvalues, diagonalization, and Jordan normal form* [online]. In: . April 20, 2016, s. 9 [cit. 2021-5-15]. Dostupné z: https://iuuk.mff.cuni.cz/ rakdver/index.php?which=uceni&subject=lin2

[5] ELAYDI, Saber. *An Introduction to Difference Equation: Undergraduate Texts in Mathematics*. 3. New York: Springer, 2005. ISBN 978-0-387-27602-1

[6] HANKO, Michal. *Kanonické tvary matic* [online]. Brno, 2006 [cit. 2021-05-13]. Dostupné z: https://theses.cz/id/08xjcd/. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce doc. RNDr. Vítězslav Veselý, CSc.

[7] NORDSTROM, Ben. Finite Markov chains. In: *University of Chicago VIGRE REU* [online]. Chicago, 2008, AUGUST 22, 2008., s. 7 [cit. 2021-5-13]. Dostupné z: http://www.math.uchicago.edu/ may/VIGRE/VIGREREU2008.html

[8] PRÁGEROVÁ, Alena. *Diferenční rovnice*. Praha: SNTL – státní nakladatelství technické literatury, 1971.

[9] SEVERA, Vlastimil. *Matematické modely v demografii* [online]. Brno, 2010 [cit. 2021-05-15]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/d5kfu/. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce Zdeněk POSPÍŠIL.

[10] STUCHLÍKOVÁ, Radka. *Stochastické matice* [online]. Brno, 2007 [cit. 2021-05-13]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/vt2o6/. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce Jan KOLÁČEK.

Seznam použitých zkratek a symbolů

O	nulová matice
E	jednotková matice
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\sum$	sumační znak
$\lvert \cdot \rvert$	velikost komplexního čísla

Příloha

Výpočet Příkladu 3.2.3 s využitím softwaru Matlab.

Uvažujme zjednodušený případ matice *M*, kdy *d*=*b*. Matice *M* je tvaru

$$M = \begin{pmatrix} 1-a-b & c & e \\ a & 1-b-c & f \\ b & b & 1-e-f \end{pmatrix},$$

kde $a, b, c, e, f, a+b, b+c, e+f \in \langle 0, 1 \rangle$.

Řešení:

Nejdříve využijeme podobnost matic a matici M^n zapíšeme pomocí matice vlastních vektorů a Jordanovy matice.

```
syms a b c e f n p1 p2 p3
M = [1-a-b c e;a 1-c-b f; b b 1-e-f] %symbolický zápis matice M
```

M =

$$\begin{pmatrix} 1-b-a & c & e \\ a & 1-c-b & f \\ b & b & 1-f-e \end{pmatrix}$$

```
%výpočet vlastních vektorů zapsaných do matice Q a vlastních čísel v matici J
[Q,J]=eig(M)
```

Q =

$$\begin{pmatrix} \frac{b\,e+c\,e+c\,f}{b\,(a+b+c)} & -1 & -\frac{c-e}{a+c-e-f} \\ \frac{a\,e+a\,f+b\,f}{b\,(a+b+c)} & 1 & -\frac{a-f}{a+c-e-f} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

J =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-b-c-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-e-f-b \end{pmatrix}$$

```
J_n=J^n %n-tá mocnina Jordanovy matice J
```

J_n =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-b-c-a)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1-e-f-b)^n \end{pmatrix}$$

```
M_n=Q*J_n*inv(Q); %n-tá mocnina matice M vyjádřena přes podobnost matic
p_0=[p1;p2;p3] %vektor p(0) původních pravděpodobností
```

p_0 =

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Konvergence $\lim_{n\to\infty} p(n)$ bude záviset na vlastních číslech matice *M*. Pro každé z čísel λ_2, λ_3 mohou nastat 3 případy: $\lambda_i = -1, |\lambda_i| < 1 \text{ a } \lambda_i = 1, \text{kde } i = 2, 3$.

- $\lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1$

$\lambda_2 = -1 \iff a + b = 1, c = 1$, $\lambda_3 = -1 \iff e + f = 1, b = 1$. Není splněna podmínka $b + c \leq 1$, situace nemůže nastat.

- $\lambda_2 = -1, |\lambda_3| < 1$

$\lambda_2 = -1 \iff a + b = 1, c = 1$, z podmínky $|\lambda_3| < 1$ nelze jednoznačně určit hodnotu parametrů *b,e,f*. Jelikož musí platit $b + c \leq 1$ a víme, že $c = 1$, musí platit $b = 0$ a podobně také $a = 1$.

```
M2=subs(M,[a b c],[1 0 1]) %dosazení zjištěných hodnot do matice M
```

M2 =

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & e \\ 1 & 0 & f \\ 0 & 0 & 1 - f - e \end{pmatrix}$$

```
M_n2=subs(M_n,[(1-a-b-c) a b c],[-1 1 0 1])%dosazení zjištěných hodnot do
matice M^n
```

M_n2 =

$$\begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{2} & \sigma_1 - \frac{(e-1)\,\sigma_2}{e+f-2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{2} & \frac{(-1)^n}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{(f-1)\,\sigma_2}{e+f-2} - \sigma_1 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \frac{(-1)^n\,(e-f)}{2\,(e+f-2)}$$

$$\sigma_2 = (1 - f - e)^n$$

```
%dosazení zjištěných hodnot do matice M^n v limitním případě
lim_M_n2=subs(M_n,[(1-a-b-c) (1-b-e-f)^n a b c],[-1 0 1 0 1])
```

lim_M_n2 =

$$\begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{(-1)^n}{2} & \sigma_1+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{(-1)^n}{2} & \frac{(-1)^n}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\sigma_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \frac{(-1)^n\,(e-f)}{2\,(e+f-2)}$$

```
p_n2=lim_M_n2*p_0 %limita p(n) pro n jdoucí do nekonečna
```

p_n2 =

$$\begin{pmatrix} p_1\left(\frac{(-1)^n}{2}+\frac{1}{2}\right)-p_2\left(\frac{(-1)^n}{2}-\frac{1}{2}\right)+p_3\left(\sigma_1+\frac{1}{2}\right) \\ p_2\left(\frac{(-1)^n}{2}+\frac{1}{2}\right)-p_1\left(\frac{(-1)^n}{2}-\frac{1}{2}\right)-p_3\left(\sigma_1-\frac{1}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \frac{(-1)^n\,(e-f)}{2\,(e+f-2)}$$

Limita obecně neexistuje.

- $\lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$

$\lambda_2 = -1 \iff a+b=1, c=1$, $\lambda_3 = -1 \iff e+f=0, b=0$. Jelikož $b=0$, musí platit, že $a=1$.

```
M3=subs(M, [a b c e f],[1 0 1 0 0])  %dosazení zjištěných hodnot do matice M
```

M3 =

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
%dosazení zjištěných hodnot do matice M^n
M_n3= subs(M_n, [(1-a-b-c) (1-b-e-f) a b c e f],[-1 1 1 0 1 0 0])
```

M_n3 =

$$\begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{(-1)^n}{2} & 0 \\ \frac{1}{2}-\frac{(-1)^n}{2} & \frac{(-1)^n}{2}+\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
%dosazení zjištěných hodnot do matice M^n v limitním případě
lim_M_n3= M_n3
```

lim_M_n3 =

$$\begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{(-1)^n}{2} & 0 \\ \frac{1}{2}-\frac{(-1)^n}{2} & \frac{(-1)^n}{2}+\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
p_n3=lim_M_n3*p_0 %limita p(n) pro n jdoucí do nekonečna
```

p_n3 =

$$\begin{pmatrix} p_1\left(\frac{(-1)^n}{2}+\frac{1}{2}\right)-p_2\left(\frac{(-1)^n}{2}-\frac{1}{2}\right) \\ p_2\left(\frac{(-1)^n}{2}+\frac{1}{2}\right)-p_1\left(\frac{(-1)^n}{2}-\frac{1}{2}\right) \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Limita obecně neexistuje.

- $|\lambda_2| < 1, \lambda_3 = -1$

Parametry *a,b,c* nelze z podmínky $|\lambda_2| < 1$ přesně určit, $\lambda_3 = -1 \iff e+f=1, b=1$. Jelikož $b=1$, platí $a=0, c=0$. Odtud ale $\lambda_2 = 1-a-b-c=0$.

```
M4=subs(M, [a b c e+f f],[0 1 0 1 1-e]) %dosazení zjištěných hodnot do matice M
```

M4 =

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 1-e \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
%dosazení zjištěných hodnot do matice M^n
M_n4=subs(M_n, [(1-b-e-f) (1-a-b-c)^n a b c e+f ],[-1 0 0 1 0 1])
```

M_n4 =

$$\begin{pmatrix} \sigma_2 & \sigma_2 & \frac{e}{2}-\frac{(-1)^n e}{2} \\ \sigma_1 & \sigma_1 & \frac{f}{2}-\frac{(-1)^n f}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{(-1)^n}{2} & \frac{1}{2}-\frac{(-1)^n}{2} & \frac{(-1)^n}{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \frac{f}{2}+\frac{(-1)^n f}{2}$$

$$\sigma_2 = \frac{e}{2}+\frac{(-1)^n e}{2}$$

```
%dosazení zjištěných hodnot do matice M^n v limitním případě
lim_M_n4=subs(M_n, [(1-a-b-c)^n (1-b-e-f) a b c e+f f],[0 -1 0 1 0 1 1-e])
```

```
lim_M_n4 =
```

$$\begin{pmatrix} \sigma_2 & \sigma_2 & \frac{e}{2}-\frac{(-1)^n e}{2} \\ \sigma_1 & \sigma_1 & \frac{(-1)^n (e-1)}{2}-\frac{e}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{(-1)^n}{2} & \frac{1}{2}-\frac{(-1)^n}{2} & \frac{(-1)^n}{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}-\frac{(-1)^n (e-1)}{2}-\frac{e}{2}$$

$$\sigma_2 = \frac{e}{2}+\frac{(-1)^n e}{2}$$

```
p_n4=lim_M_n4*p_0 %limita p(n) pro n jdoucí do nekonečna
```

```
p_n4 =
```

$$\begin{pmatrix} p_1\,\sigma_1 + p_2\,\sigma_1 + p_3\left(\frac{e}{2}-\frac{(-1)^n e}{2}\right) \\ p_3\left(\sigma_4-\frac{e}{2}+\frac{1}{2}\right) - p_2\,\sigma_3 - p_1\,\sigma_3 \\ p_3\left(\frac{(-1)^n}{2}+\frac{1}{2}\right) - p_2\,\sigma_2 - p_1\,\sigma_2 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \frac{e}{2}+\frac{(-1)^n e}{2}$$

$$\sigma_2 = \frac{(-1)^n}{2}-\frac{1}{2}$$

$$\sigma_3 = \frac{e}{2}+\sigma_4-\frac{1}{2}$$

$$\sigma_4 = \frac{(-1)^n (e-1)}{2}$$

Limita obecně neexistuje.

- $|\lambda_2| < 1, |\lambda_3| < 1$

  Žádný z parametrů nelze jednoznačně určit. Využívá se pouze konvergence matice J^n.

```
M5=M %dosazení zjištěných hodnot do matice M
```

```
M5 =
```

$$\begin{pmatrix} 1-b-a & c & e \\ a & 1-c-b & f \\ b & b & 1-f-e \end{pmatrix}$$

```
M_n5=M_n; %dosazení zjištěných hodnot do matice M^n
```

```
%dosazení zjištěných hodnot do matice M^n v limitním případě
M_n5=subs(M_n, [(1-a-b-c)^n (1-b-e-f)^n],[0 0])
```

M_n5 =

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_1 & \sigma_1 \\ \sigma_2 & \sigma_2 & \sigma_2 \\ \frac{b}{b+e+f} & \frac{b}{b+e+f} & \frac{b}{b+e+f} \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \frac{b\,e + c\,e + c\,f}{(a+b+c)\,(b+e+f)}$$

$$\sigma_2 = \frac{a\,e + a\,f + b\,f}{(a+b+c)\,(b+e+f)}$$

Využijeme-li skutečnosti, že $p_1(n) + p_2(n) + p_3(n) = 1$, dostáváme

```
%limita p(n) pro n jdoucí do nekonečna
p_n5=[(b*e + c*e + c*f)/((a + b + c)*(b + e + f));
    (a*e + a*f + b*f)/((a + b + c)*(b + e + f)); b/(b + e + f)]
```

p_n5 =

$$\begin{pmatrix} \frac{b\,e + c\,e + c\,f}{(a+b+c)\,(b+e+f)} \\ \frac{a\,e + a\,f + b\,f}{(a+b+c)\,(b+e+f)} \\ \frac{b}{b+e+f} \end{pmatrix}$$

Výsledek nezávisí na původním stavu $p(0)$.

- $|\lambda_2| < 1, \lambda_3 = 1$

  Parametry *a,b,c* nelze z podmínky $|\lambda_2| < 1$ přesně určit, $\lambda_3 = 1 \iff e + f = 0, b = 0$.

```
M6=subs(M,[b e f],[0 0 0])%dosazení zjištěných hodnot do matice M
```

M6 =

$$\begin{pmatrix} 1-a & c & 0 \\ a & 1-c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
M_n6=limit(subs(M_n,[b e],[0 0]),f,0) %dosazení zjištěných hodnot do matice M^n
```

M_n6 =

$$\begin{pmatrix} \frac{c}{a+c}+\sigma_2 & \frac{c}{a+c}-\sigma_1 & 0 \\ \frac{a}{a+c}-\sigma_2 & \frac{a}{a+c}+\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \frac{(c^2+a\,c)\,(1-c-a)^n}{(a+c)^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{(a^2+c\,a)\,(1-c-a)^n}{(a+c)^2}$$

```
%dosazení zjištěných hodnot do matice M^n v limitním případě
lim_M_n6=subs(M_n,[(1-a-b-c)^n b e f],[0 0 0 0])
```

lim_M_n6 =

$$\begin{pmatrix} \frac{c}{a+c} & \frac{c}{a+c} & 0 \\ \frac{a}{a+c} & \frac{a}{a+c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
p_n6=lim_M_n6*p_0  %limita p(n) pro n jdoucí do nekonečna
```

p_n6 =

$$\begin{pmatrix} \frac{c\,p_1}{a+c}+\frac{c\,p_2}{a+c} \\ \frac{a\,p_1}{a+c}+\frac{a\,p_2}{a+c} \\ p_3 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$

$\lambda_2 = 1 \iff a+b=0, c=0, \lambda_3 = -1 \iff e+f=1, b=1$. Parametr *b* nemůže nabývat dvou různých hodnot, situace tedy nenastane.

- $\lambda_2 = 1, |\lambda_3| < 1$

$\lambda_2 = 1 \iff a+b=0, c=0$, parametry *b,e,f* nelze z podmínky $|\lambda_3| < 1$ jednoznačně určit.

```
M8=subs(M,[a b c],[0 0 0])%dosazení zjištěných hodnot do matice M
```

M8 =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1-f-e \end{pmatrix}$$

```
%dosazení zjištěných hodnot do matice M^n
M_n8=limit(subs(M_n,[(1-a-b-c) a b],[1 0 0]),c,0);
```

```
%dosazení zjištěných hodnot do matice M^n v limitním případě
lim_M_n8=limit(subs(M_n,[(1-b-e-f)^n (1-a-b-c)^n  a b],[0 1 0 0]),c,0)
```

lim_M_n8 =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\frac{f}{e+f} \\ 0 & 1 & \frac{f}{e+f} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
p_n8=lim_M_n8*p_0 %limita p(n) pro n jdoucí do nekonečna
```

p_n8 =

$$\begin{pmatrix} p_1 - p_3\left(\frac{f}{e+f}-1\right) \\ p_2 + \frac{f\,p_3}{e+f} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$

  $\lambda_2 = 1 \iff a+b=0, c=0, \lambda_3 = 1 \iff e+f=0, b=0$.

```
M9=subs(M,[a b c e f],[0 0 0 0 0]) %dosazení zjištěných hodnot do matice M
```

M9 =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
M_n9=M9^n %dosazení zjištěných hodnot do matice M^n
```

M_n9 =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
lim_M_n9=M_n9 %dosazení zjištěných hodnot do matice M^n v limitním případě
```

lim_M_n9 =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
p_n9=lim_M_n9*p_0 %limita p(n) pro n jdoucí do nekonečna
```

p_n9 =

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Výsledek se ustálí na původním stavu $p(0)$.