

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA  
KATEDRA EXPERIMENTÁLNÍ FYZIKY



**Sbírka doplňujících úloh ze  
středoškolské fyziky: Optika,  
Termodynamika a Molekulová  
fyzika**

DIPLOMOVÁ PRÁCE

**Vypracovala:**  
**Studijní program:**  
**Studijní obor:**  
**Forma studia:**  
**Vedoucí diplomové práce:**  
**Termín odevzdání práce:**

Bc. Tereza Chasáková  
Učitelství fyziky pro střední školy  
F major - BI minor  
prezenční  
Mgr. Jan Říha, Ph. D.  
srpen 2023

## **PROHLÁŠENÍ**

Čestně prohlašuji, že jsem závěrečnou práci na téma "Sbírka doplňujících úloh ze středoškolské fyziky: Optika, Termodynamika a Molekulová fyzika" zpracovala samostatně pod vedením Mgr. Jana Říhy, Ph. D. a s použitím informačních zdrojů a literatury, které dále cituji v seznamu zdrojů.

V Olomouci dne 9. srpna 2023

.....  
Bc. Tereza Chasáková

## PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych ráda poděkovala zejména vedoucímu diplomové práce Mgr. Janu Říhovi, Ph. D. za poskytnuté rady během tvorby práce, za jeho čas a ochotu pomoci. Dále bych chtěla poděkovat také Mgr. Lukášovi Richterovi, Ph. D. z Univerzity Palackého v Olomouci, doc. RNDr. Janu Křížovi, Ph. D. z Univerzity Hradec Králové, RNDr. Pavlu Křížovi, Ph. D. z Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích, Štěpánce Macháčkové ze Střediska volného času v Ostravě, Mgr. Jindřichu Pulíčkovi z Gymnázia Dr. Antona Randy v Jablonci nad Nisou, RNDr. Jirímu Králíkovi, Ph. D. z Univerzity J. E. Purkyně v Ústí nad Labem, PaedDr. Lubomíru Konrádovi z Gymnázia Velká okružná 22 v Žilině a doc. Anssi Lindellovi, Ph. D. z Univerzity v Jyväskylä za čas, který mi věnovali při shánění výsledkových listin, za poskytnuté listiny a pomoc při tvorbě práce. Mimo to bych také ráda poděkovala své rodině a svému manželovi za podporu a trpělivost během studia.

## BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Jméno a příjmení autora	Bc. Tereza Chasáková
Název práce	Sbírka doplňujících úloh ze středoškolské fyziky: Optika, Termodynamika a Molekulová fyzika
Typ práce	diplomová
Pracoviště	Katedra experimentální fyziky
Vedoucí práce	Mgr. Jan Říha, Ph. D.
Rok obhajoby práce	2023
Abstrakt	Předložená diplomová práce je sbírkou úloh fyzikální olympiády kategorií A a B pro oblasti optiky, molekulové fyziky a termodynamiky od 39. ročníku po současnost. Úlohy jsou roztrženy do podkapitol dle témat a seřazeny dle obtížnosti. Součástí práce je také statistická analýza jednotlivých úloh a jejich porovnání mezi sebou, ale také porovnání Fyzikální olympiády České republiky se systémem Slovenska a Finska.
Klíčová slova	fyzikální olympiáda, sbírka úloh, fyzikální úloha, optika, molekulová fyzika, termodynamika, obtížnost úlohy ...
Počet stran	181
Počet příloh	1
Jazyk	český

## BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Autor's first name and surname	Bc. Tereza Chasáková
Title	Collection of complementary tasks in high school physics: Optics, Thermodynamics and Molecular Physics
Type of thesis	Master
Department	Department of Experimental Physics
Supervisor	Mgr. Jan Říha, Ph. D.
The year of presentation	2023
Abstract	The presented master thesis is a collection of tasks of the Physics Olympiad, categories A and B (the field of optics, molecular physics and thermodynamics), from the 39th Physics Olympiad to the present. The tasks are divided into sections according to the topics and sorted by difficulty. The thesis also contains statistical analysis where the individuals tasks are analyzed and compared to each other, as well as a comparison of the Physics Olympiad of the Czech Republic with the system of Slovakia and Finland.
Keywords	Physics Olympiad, collection of tasks, physics task, optics, molecular physics, thermodynamics, difficulty index ...
Number of pages	181
Number of appendices	1
Language	czech

# Obsah

Úvod	7
<b>I OBEČNÁ ČÁST</b>	<b>8</b>
<b>1 Analýza úloh Fyzikální olympiády České republiky</b>	<b>9</b>
1.1 Rozbor zastoupení příkladů	9
1.1.1 Rozbor zastoupení příkladů z molekulové fyziky a termodynamiky	11
1.1.2 Rozbor zastoupení příkladů z optiky	13
1.2 Rozbor vlastností příkladů	16
1.2.1 Obecná charakteristika vlastností testových úloh	16
1.2.2 Data ke zpracování vlastností testových úloh	17
1.2.3 Konkrétní analýza úloh z oblasti molekulové fyziky a termodynamiky	19
1.2.4 Konkrétní analýza úloh z oblasti optiky	24
1.2.5 Rozbor úspěšnosti jednotlivých krajů	27
<b>2 Analýza úloh Fyzikální olympiády v dalších zemích</b>	<b>34</b>
2.1 Slovensko	35
2.1.1 Srovnání průběhu olympiády v Česku a na Slovensku	35
2.1.2 Srovnání příkladů zadávaných v olympiádě v Česku a na Slovensku	36
2.2 Finsko	40
2.2.1 Trenérské dopisy (Valmennuskirjeet)	40
2.2.2 Seversko-Baltská olympiáda	42
2.2.3 Srovnání příkladů zadávaných v olympiádě v České republice a v Seversko-Baltské olympiádě	44
<b>II PŘÍKLADOVÁ ČÁST</b>	<b>46</b>
<b>3 Molekulová fyzika a termodynamika</b>	<b>48</b>
3.1 Teplo a teplota	50
3.1.1 Základní pojmy a vztahy	50
3.1.2 Řešené příklady	51
3.1.3 Statistická úspěšnost příkladů	60
3.2 Plyny	62
3.2.1 Základní pojmy a vztahy	62
3.2.2 Řešené příklady	64
3.2.3 Statistická úspěšnost příkladů	71
3.3 Práce plynu, kruhový děj	73
3.3.1 Základní pojmy a vztahy	73
3.3.2 Řešené příklady	73
3.3.3 Statistická úspěšnost příkladů	87

3.4	Pevné látky . . . . .	90
3.4.1	Základní pojmy a vztahy . . . . .	90
3.4.2	Řešené příklady . . . . .	90
3.4.3	Statistická úspěšnost příkladů . . . . .	92
3.5	Kapaliny . . . . .	93
3.5.1	Základní pojmy a vztahy . . . . .	93
3.5.2	Řešené příklady . . . . .	93
3.5.3	Statistická úspěšnost příkladů . . . . .	99
3.6	Změny skupenství . . . . .	101
3.6.1	Základní pojmy a vztahy . . . . .	101
3.6.2	Řešené příklady . . . . .	102
3.6.3	Statistická úspěšnost příkladů . . . . .	106
<b>4</b>	<b>Optika</b>	<b>108</b>
4.1	Odraz a lom světla . . . . .	110
4.1.1	Základní pojmy a vztahy . . . . .	110
4.1.2	Řešené příklady . . . . .	111
4.1.3	Statistická úspěšnost příkladů . . . . .	118
4.2	Zobrazování optickými soustavami . . . . .	120
4.2.1	Základní pojmy a vztahy . . . . .	120
4.2.2	Řešené příklady . . . . .	123
4.2.3	Statistická úspěšnost příkladů . . . . .	150
4.3	Energie světelného záření . . . . .	153
4.3.1	Základní pojmy a vztahy . . . . .	153
4.3.2	Řešené příklady . . . . .	154
4.3.3	Statistická úspěšnost příkladů . . . . .	159
4.4	Kvantová optika . . . . .	161
4.4.1	Základní pojmy a vztahy . . . . .	161
4.4.2	Řešené příklady . . . . .	161
4.4.3	Statistická úspěšnost příkladů . . . . .	162
4.5	Vlnová optika . . . . .	164
4.5.1	Základní pojmy a vztahy . . . . .	164
4.5.2	Řešené příklady . . . . .	165
4.5.3	Statistická úspěšnost příkladů . . . . .	174
	<b>Závěr</b>	<b>176</b>
	<b>Literatura</b>	<b>180</b>

# Úvod

Cílem předložené diplomové práce bylo vytvořit tematicky členěnou sbírku fyzikálních úloh z různých ročníků Fyzikální olympiády odpovídající úrovni středních škol, a to z oblastí optiky, termodynamiky a molekulové fyziky. Tyto úlohy měly být dále statisticky analyzovány a porovnány mezi sebou na základě dostupných výsledkových listin z krajských a celostátních kol. Jedním z hlavních cílů bylo i porovnání procentuálního zastoupení úloh jednotlivých oblastí fyziky s daty minimálně dvou cizích zemí.

Diplomová práce je rozdělena na dvě části – obecnou a příkladovou. Obecná část je dále členěna do dvou kapitol. První kapitola je zaměřena na analýzu úloh z Fyzikální olympiády (v práci někdy zkracováno na FO) České republiky. V rámci analýzy jsou nejprve srovnávány počty úloh jednotlivých oblastí fyziky v rámci ročníků, kategorií a kol, k čemuž jsou využívána data z ročníků 39 až 64 kategorií A a B. Následně jsou popisovány tabulky a grafy související s analýzou jednotlivých úloh, u kterých byl proveden rozbor indexů obtížnosti, rozbor citlivosti úloh a analýza nenormovaných odpovědí. Úlohy jsou z hlediska obtížnosti opět porovnávány v rámci kategorií a kol, úlohy krajských kol jsou navíc srovnávány v rámci krajů. Druhá kapitola porovnává systém Fyzikální olympiády České republiky se systémy Slovenské a Finské republiky. V rámci analýzy slovenské soutěže jsou využívána data od 39. ročníku, konkrétně jsou porovnána procentuální zastoupení jednotlivých oblastí v rámci úloh jednotlivých kategorií a ročníků. Naopak rozbor finské FO se zaměřuje spíše na organizační rozdíly, ale je zmíněno i procentuální zastoupení úloh, alespoň v rámci posledního stupně před Mezinárodní fyzikální olympiádou.

Příkladová část je sbírkou úloh, zvláště je oddělena molekulová fyzika a termodynamika a zvláště optika. Každá oblast je dále členěna na podkapitoly, které jsou seřazeny podle klasických středoškolských sbírek příkladů. Podkapitoly obsahují vždy tři části – základní teoretické informace, konstanty a veličiny, dále řešené příklady, které jsou seřazeny od nejjednodušších po nejnáročnější dle vypočítaného indexu obtížnosti, a nakonec statistický přehled dané kapitoly, který zahrnuje srovnání počtu příkladů v jednotlivých ročnících a porovnání úspěšnosti mezi příklady kapitoly a mezi kraji. Všechny řešené příklady je možné dohledat na oficiálních stránkách FO v archivu [1]. V rámci práce nejsou uvedeni autoři úloh ani duplicitní řešení – pokud některý z příkladů měl uvedený větší počet oficiálních řešení, bylo vybráno pouze jedno a byla přidána poznámka psaná kurzívou, že je možné dohledat alternativní řešení. Každý příklad má svoje specifické číslo, které obsahuje v tomto pořadí: ročník, kategorii, kolo, číslo příkladu. Pomocí tohoto specifického čísla je možné se snadno zorientovat v archivu oficiálních stránek. Zadání a řešení příkladů byla převzata v doslovném znění, všechny příklady ale byly zkontrolovány, a pokud byla nalezena chyba, byla opravena.

Přílohou diplomové práce je soubor, který byl vytvořen v programu MICROSOFT EXCEL, jehož součástí je kompletní analýza, která je v této práci popsána. Předložená práce navazuje na bakalářskou práci s názvem Doplnující úlohy ze středoškolské fyziky [2], jejímž cílem bylo zpracování úloh zaměřených na oblast elektřiny a magnetismu.



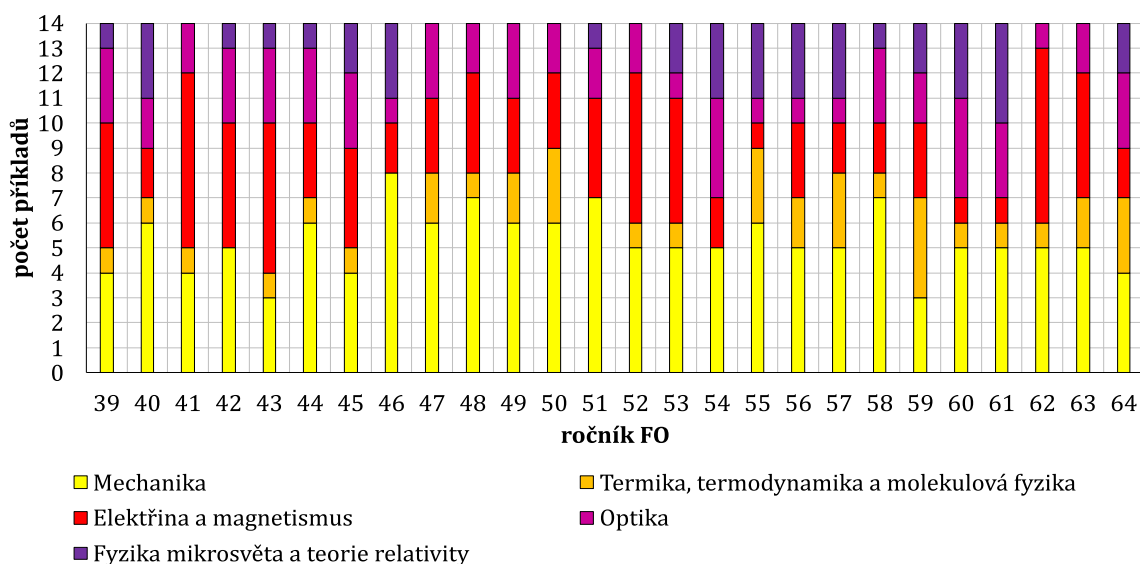
Část I  
**OBEČNÁ ČÁST**

# Kapitola 1

## Analýza úloh Fyzikální olympiády České republiky

### 1.1 Rozbor zastoupení příkladů

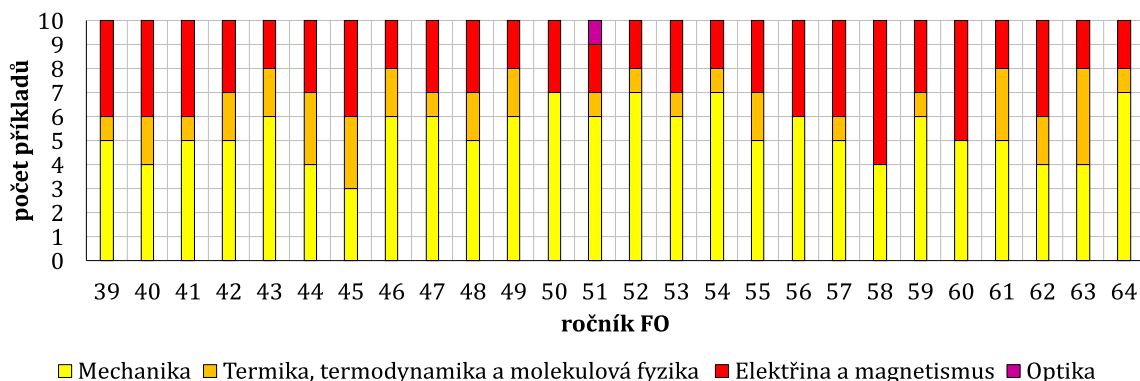
Ve školním roce 2022/2023 proběhl 64. ročník olympiády z fyziky. Protože pro tuto práci bylo využito všech dostupných výsledkových listin, které bylo možné sehnat, byla provedena analýza dvaceti šesti ročníků všech kol kategorií A a B. V kategorii A je v domácím kole šest teoretických příkladů (praktický není analyzován), čtyři příklady v krajském kole a čtyři příklady v ústředním kole, což dohromady za dvacet šest let dává 364 příkladů k analýze. V kategorii B není organizováno celostátní kolo, proto je zde příkladů pouze 260. Dohromady bylo pro následující analýzu použito 624 úloh z obou kategorií posledních dvaceti šesti ročníků. V grafech na obrázcích 1 a 2 je zobrazeno zastoupení úloh z různých oblastí fyziky v daných ročnících FO, zvláště pro kategorii A a pro kategorii B.



**Obrázek 1:** Zastoupení jednotlivých oblastí fyziky v jednotlivých ročnících Fyzikální olympiády v kategorii A.

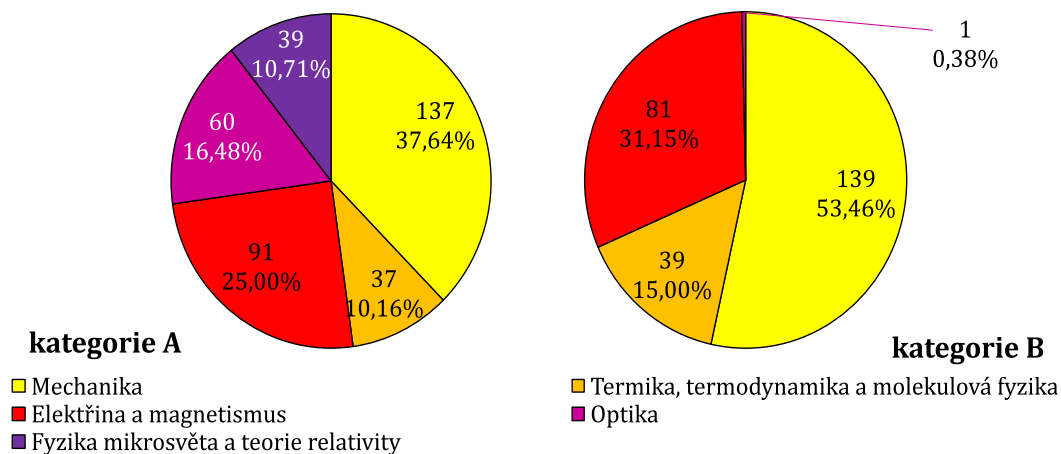
Dle těchto grafů vidíme, že v kategorii A je oproti kategorii B navíc oblast fyziky mikrosvěta a teorie relativity, a kromě jediného příkladu v 51. ročníku v kategorii B není zahrnuta ani oblast optiky. O tématu tohoto příkladu je více řečeno ve sbírkové části. Kromě již zmíněného je z grafů také možné zjistit, že oblast termodynamiky je kromě ročníků 42, 46, 51 a 54

v kategorii A a ročníků 50, 56, 58 a 60 v kategorii B zastoupena alespoň jedním příkladem v každém ročníku, oblast optiky je poté v kategorii A zastoupena každým rokem.



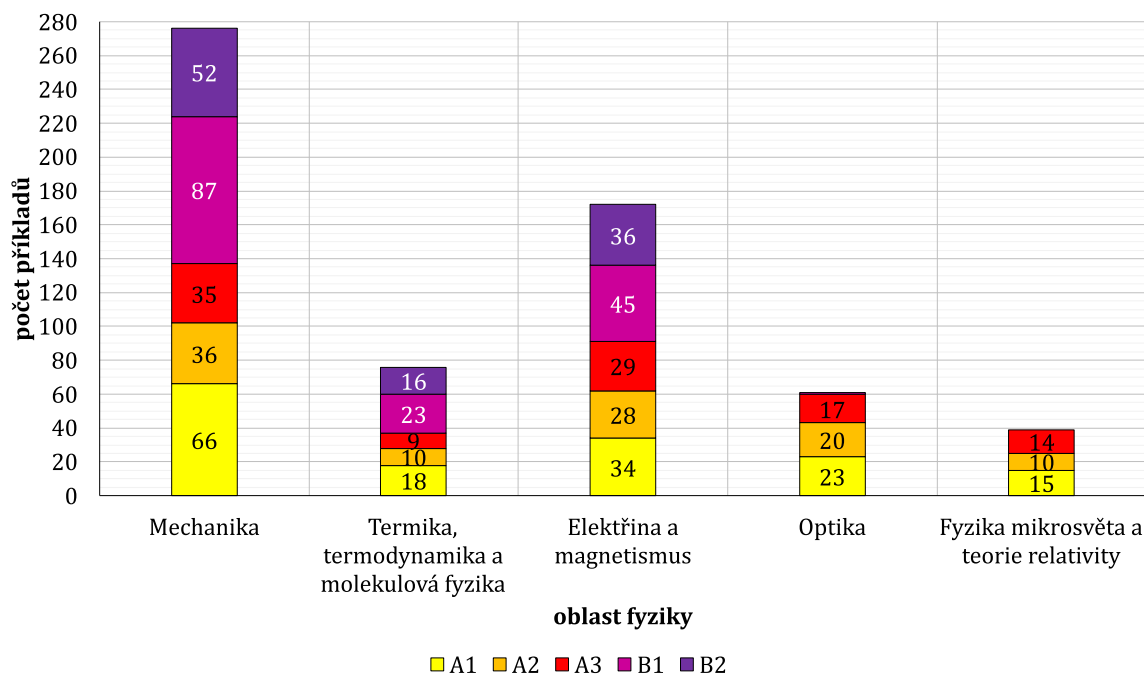
**Obrázek 2:** Zastoupení jednotlivých oblastí fyziky v jednotlivých ročnících Fyzikální olympiády v kategorii B.

Podívejme se dále na procentuální zastoupení jednotlivých oblastí v rámci jednotlivých kategorií – grafické znázornění situace je ukázáno na obrázku 3. Pokud porovnáme počet příkladů z mechaniky a termodynamiky a molekulové fyziky v rámci kategorií, zjistíme, že v obou kategoriích je z těchto oblastí zhruba stejný počet příkladů. V oblasti elektřiny a magnetismu se čísla lidí pouze o 11 %, a příklady z optiky a fyziky mikrosvěta a teorie relativity jsou početně v kategorii A navíc, což zhruba odpovídá počtu příkladů v celostátních kolech. Procentuální zastoupení těchto oblastí v rámci jednotlivých kategorií se ale díky tomu liší – vyšší procentuální zastoupení mechaniky, molekulové fyziky a termodynamiky a elektřiny a magnetismu má kategorie B. V obou kategoriích je nejvíce zastoupenou oblastí mechanika, naopak nejméně zastoupenou oblastí molekulová fyzika a termodynamika.



**Obrázek 3:** Zastoupení jednotlivých oblastí fyziky v jednotlivých kategoriích FO.

Protože v rámci sbírkové části nejsou kategorie zvláště separovány a pracuje se s nimi dohromady, bylo by dobré zhodnotit zastoupení příkladů v celém zkoumaném souboru příkladů. Nejvíce zastoupenou oblastí je jednoznačně mechanika, ze které se v ročnících 39 až 64 vyskytlo dohromady 276 příkladů. Druhou nejzastoupenější částí fyziky v rámci olympiády je elektřina a magnetismus, která byla zpracovávána v rámci mé bakalářské práce [2], naopak nejméně vymyšlené (v rámci olympiády) jsou příklady z fyziky mikrosvěta a teorie relativity. Příspěvky příkladů jednotlivých kol obou kategorií jsou vykresleny v grafu na obrázku 4.

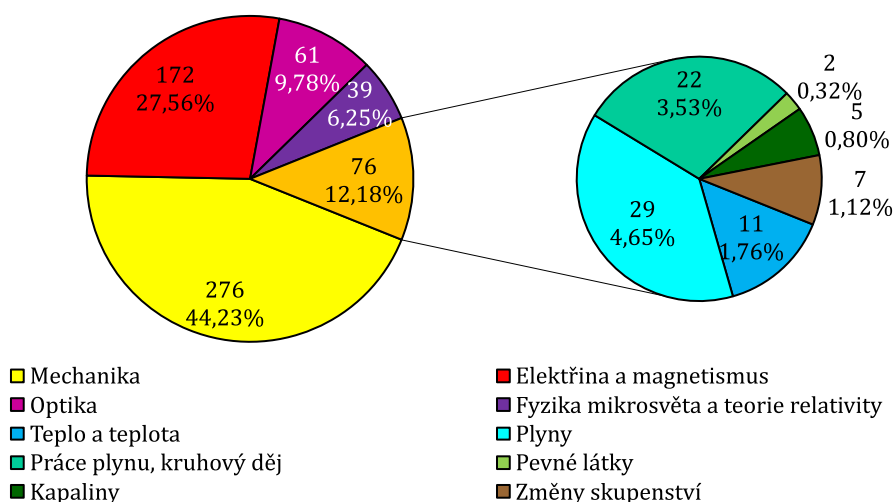


**Obrázek 4:** Počty příkladů jednotlivých částí fyziky v jednotlivých kolech kategorií A a B.

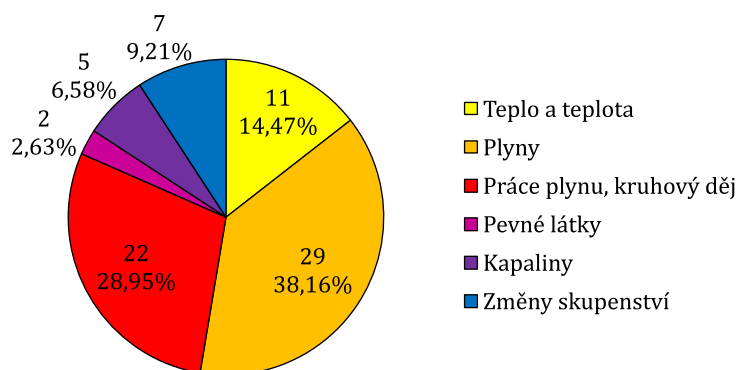
V této části práce si neodpustím poznámku, že oproti statistické části bakalářské práce můžeme v grafech diplomové práce pozorovat drobné odchylky, které jsou způsobeny jednak obohacením o další dva ročníky, jednak změnou umístění příkladů v rámci oblastí. Jedná se zejména o příklady, které jsou na hranici dvou oblastí. Pro tuto práci jsem všechny příklady rozřazovala znovu, a při zjištění odchylek od bakalářské práce jsem vyhodnotila, do které oblasti se daný příklad hodí více, popř. jsem opravila původně chybné zařazení příkladu.

### 1.1.1 Rozbor zastoupení příkladů z molekulové fyziky a termodynamiky

Úlohy z molekulové fyziky a termodynamiky jsou třetí nejvíce zastoupenou částí fyziky, dohromady za posledních 26 ročníků čítá 76 příkladů, což odpovídá 12,18 % všech úloh.



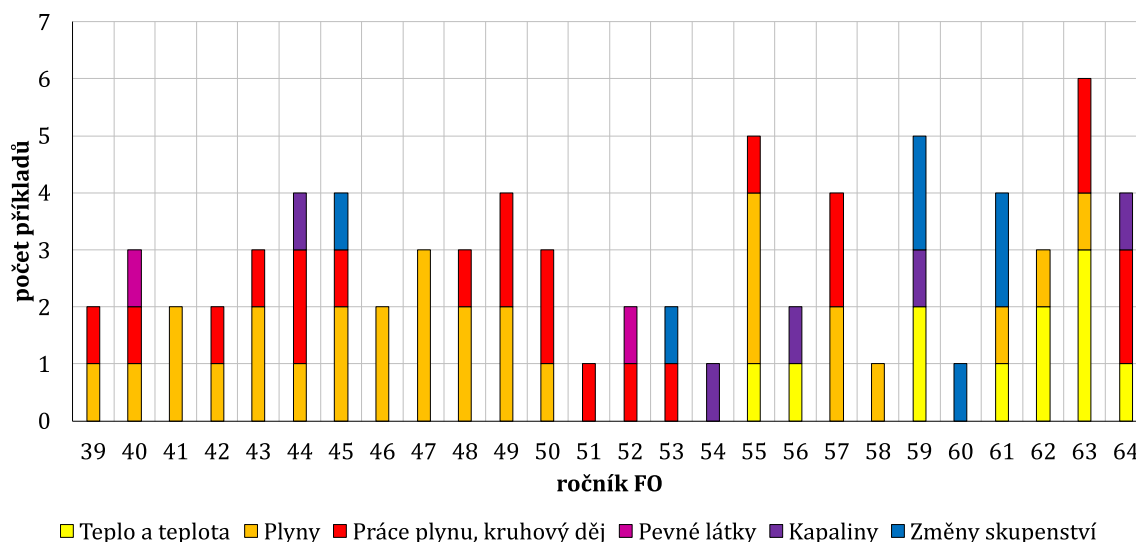
**Obrázek 5:** Zastoupení jednotlivých oblastí fyziky a jednotlivých podkapitol molekulové fyziky a termodynamiky v obou kategoriích ročníků 39-64 ve Fyzikální olympiádě.



**Obrázek 6:** Zastoupení jednotlivých podkapitol tvořených z úloh Fyzikální olympiády spadajících do oblasti molekulové fyziky a termodynamiky.

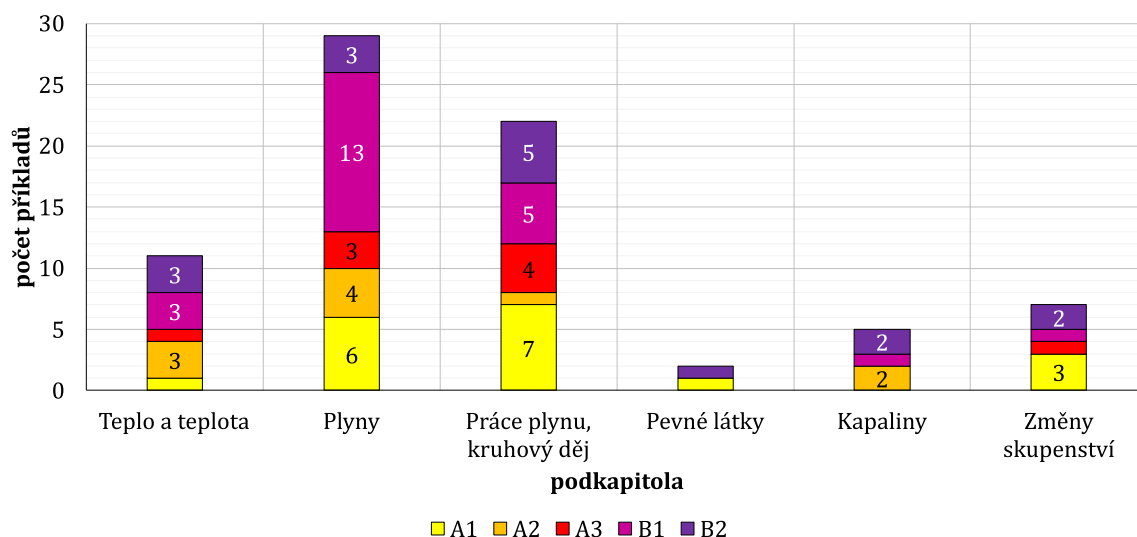
V koláčovém grafu na obrázku 5 jsou zobrazeny odpovídající procentuální podíly podkapitol, které byly vytvořeny v rámci příkladové části v kapitole Molekulová fyzika a termodynamika. V legendě tohoto grafu není označena oranžová oblast, která odpovídá Termice, termodynamice a molekulové fyzice. Dle grafů na obrázcích 5 a 6 je největší podkapitola věnována plynům a tvoří 38,16 % příkladů kapitoly, naopak nejmenší je podkapitola Pevné látky obsahující pouze dva příklady.

Již v úvodu analytické části bylo řečeno a v obrázku 1 a 2 ukázáno, že úlohy z této oblasti se vyskytují ve všech ročnících Fyzikální olympiády, i když ne vždy v obou kategoriích. Z grafu na obrázku 7 můžeme vyčíst výskyt příkladů jednotlivých podkapitol v jednotlivých ročnících za posledních dvacet šest let. V největším počtu ročníků se objevují příklady z podkapitoly Plyny (18 ročníků) těsně doprovázené příklady z podkapitoly Práce plynu, kruhový děj (16 ročníků), naopak pouze ve dvou ročnících můžeme najít příklady věnované Pevným látkám. Tento graf můžeme najít upravený v úvodu kapitoly Molekulová fyzika a termodynamika ve sbírkové části, kde už jsou zahrnuty pouze příklady druhých kol obou kategorií a třetího kola kategorie A.



**Obrázek 7:** Zastoupení jednotlivých podkapitol molekulové fyziky a termodynamiky v jednotlivých ročnících Fyzikální olympiády.

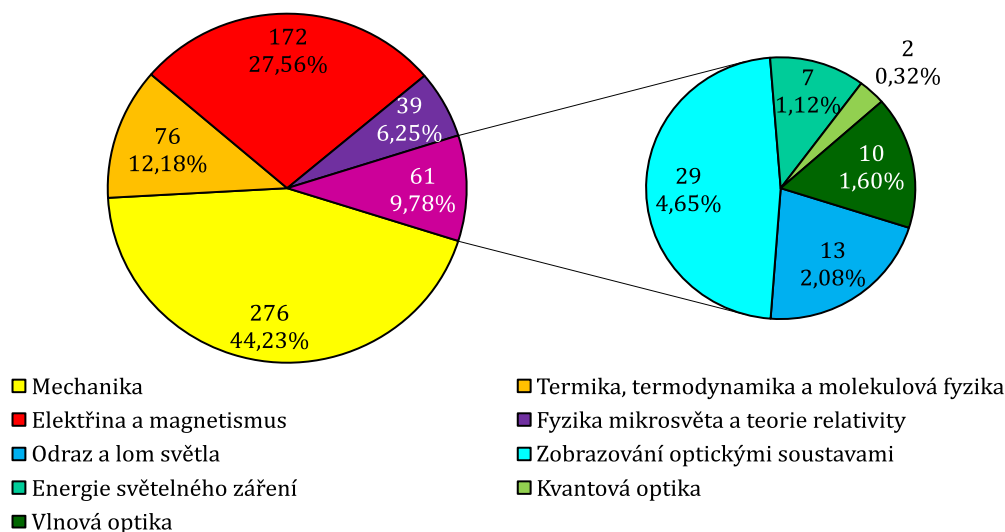
Rozložení příkladů v podkapitolách z hlediska kol kategorií A a B sledujeme na obrázku 8. Nejvíce příkladů v jedné podkapitole v rámci jednoho kola je v podkapitole Plyny z prvního kola kategorie B. Některá kola za celých dvacet šest let neobsahovala ani jeden příklad z některé podkapitoly – toto se týká především druhé poloviny podkapitol. Pevné látky se vyskytly pouze dvě dvou kolech, kapaliny ve třech, a změny skupenství ve čtyřech. Mimo těchto informací je z grafu patrné, že z postupových kol je dohromady 35 úloh, 10 z krajského kola kategorie A, 9 z celostátních kol kategorie A a 16 z krajských kol kategorie B. Podrobnější analýzou zastoupení těchto úloh se zabývá sbírková část.



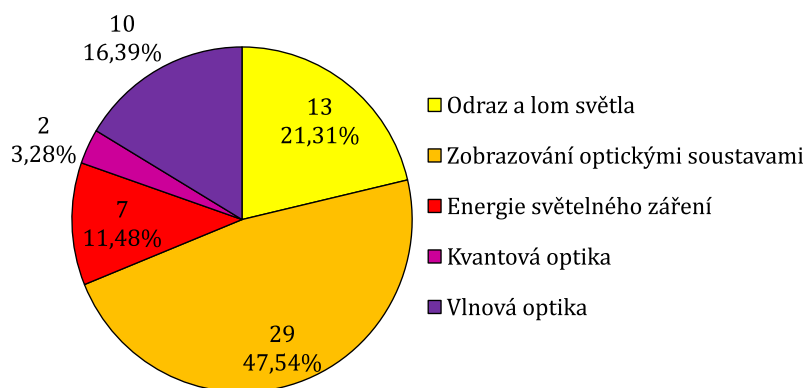
**Obrázek 8:** Zastoupení úloh z jednotlivých kol Fyzikální olympiády v podkapitolách molekulové fyziky a termodynamiky.

### 1.1.2 Rozbor zastoupení příkladů z optiky

Příklady z optiky se vyskytují až na jedinou výjimku pouze v kategorii A, přesto je jich v celkovém součtu 9,78 % všech příkladů, tedy 61.

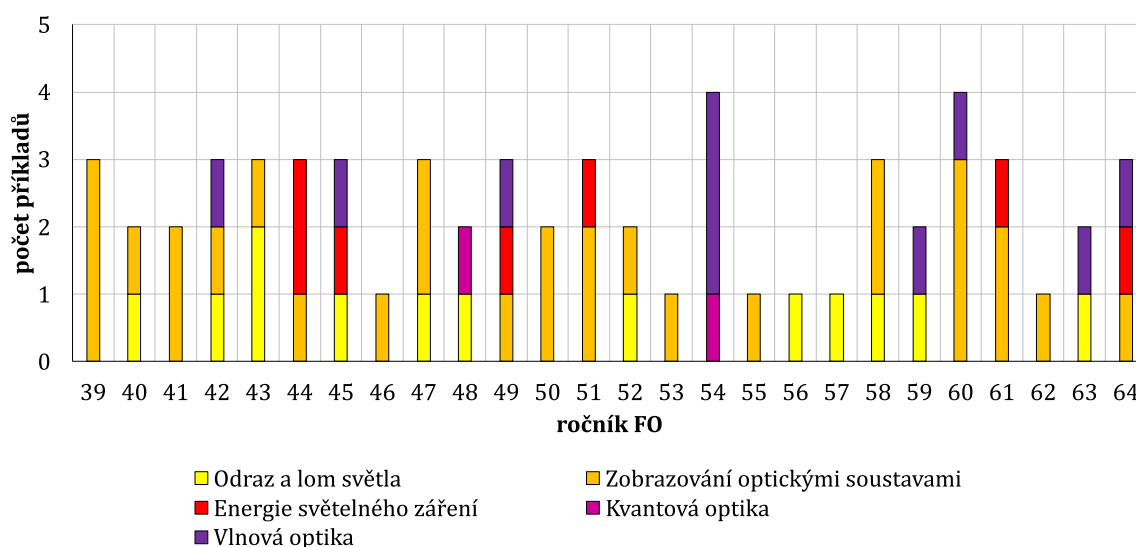


**Obrázek 9:** Zastoupení jednotlivých oblastí fyziky a jednotlivých podkapitol optiky v obou kategoriích ročníků 39-64 ve Fyzikální olympiádě.



**Obrázek 10:** Zastoupení jednotlivých podkapitol tvořených z úloh Fyzikální olympiády spadajících do oblasti optiky.

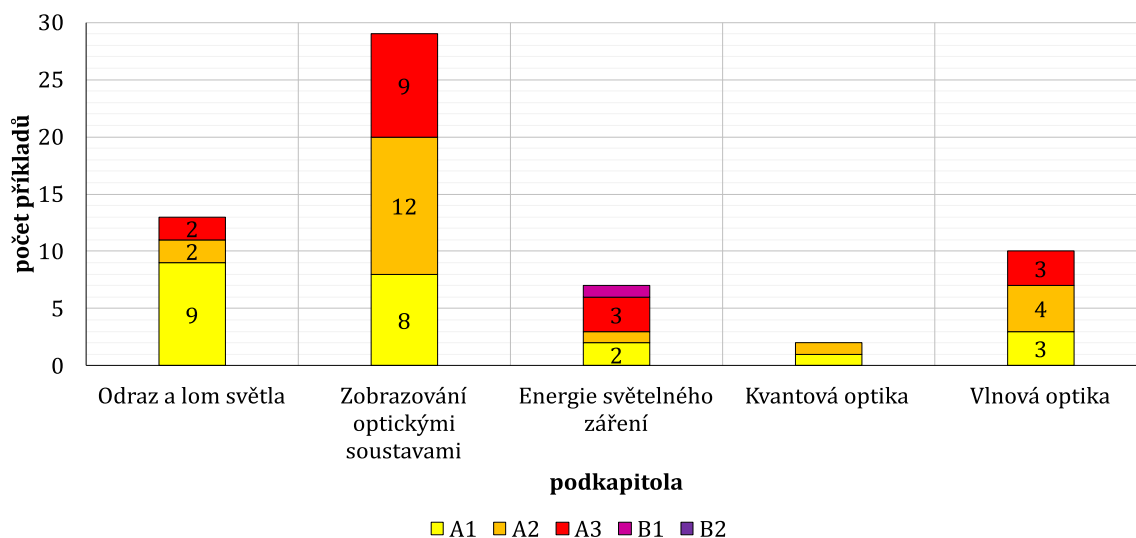
Porovnáme-li toto číslo s počtem příkladů např. v oblasti molekulové fyziky a termodynamiky, která se vyskytuje navíc i v kategorii B, liší se pouze o 2, 40 %. V grafech na obrázcích 9 a 10 je zobrazeno procentuální rozložení příkladů do jednotlivých podkapitol. V legendě obrázku 9 není označena světle fialová oblast odpovídající oblasti optiky. Největší podkapitola Zobrazování optickými soustavami obsahuje dvacet devět příkladů, naopak nejmenší Kvantová optika pouze dva, což je stejné jako v případě molekulové fyziky a termodynamiky. Jediný příklad kategorie B je zařazený do podkapitoly Energie světelného záření, ale protože se jedná o úlohu prvního kola, není uveden v řešených úlohách.



**Obrázek 11:** Zastoupení jednotlivých podkapitol optiky v jednotlivých ročnících Fyzikální olympiády.

V grafu na obrázku 11 jsou ukázány počty příkladů jednotlivých podkapitol v rámci ročníků Fyzikální olympiády. Je patrné, že v každém ročníku se objevil alespoň jeden příklad z optiky, co je ale překvapivé (vzhledem k tomu, že se jedná prakticky pouze o kategorii A) je počet příkladů z optiky na jeden ročník. V ročníku 54 a 60 dokonce příklady z optiky tvořily 28, 57 %, což je více než čtvrtina všech zadaných příkladů kategorie A. Zajímavé jsou navíc i ročníky, kde na sebe příklady v rámci kol „navazovaly“, tedy všechny spadají do jedné podkapitoly. V některých případech, kdy se jedná o menší podkapitolu, jako je např. Energie

světelného záření v případě ročníku 44, nebo Kvantová optika v případě ročníku 54, může daný ročník tvořit významnou část podkapitoly. Z celkového počtu příkladů je pouze třicet sedm postupových, do sbírky jich bylo vybráno třicet. Upravený graf z obrázku 11, který zahrnuje pouze příklady z postupových kol, je přiložen v úvodu sbírkové části optiky.



**Obrázek 12:** Zastoupení úloh z jednotlivých kol Fyzikální olympiády v podkapitolách optiky.

Graf na obrázku 12 zobrazuje to, co už bylo několikrát řečeno – optika se až na jedinou výjimku vyskytuje pouze v kategorii A, jediný příklad kategorie B, z prvního kola, je ve třetí podkapitole sbírky z optiky. Příklady na obraz a lom se nejčastěji vyskytují v rámci prvního kola, druhé kolo má nejvíce příkladů věnujících se zobrazování optickými soustavami, a to stejné platí i pro ústřední kola. Naopak žádný příklad celostátního kola neměl úlohu zaměřenou na kvantovou optiku. Všechny ostatní kapitoly zahrnují příklady ze všech tří kol kategorie A, i když v různém počtu. Více o rozboru počtu příkladů je uvedeno u jednotlivých podkapitol ve sbírkové části.



## 1.2 Rozbor vlastností příkladů

### 1.2.1 Obecná charakteristika vlastností testových úloh

Pro vyhodnocení kvality a náročnosti jednotlivých ročníků a kol Fyzikální olympiády jako celků bychom museli kromě samostatné analýzy úloh také zjistit vlastnosti celých zadání [3]. Protože tato práce má jako svůj cíl vytvoření sbírky úloh pouze ze dvou oblastí, nikoli z celého zadání konkrétních kol a ročníků Fyzikální olympiády, jsou úlohy analyzovány jednotlivě. Abychom mohli porovnávat soutěžní úlohy, musíme určit tři základní vlastnosti – obtížnost úlohy, kterou hodnotíme na základě výpočtu indexu obtížnosti, citlivost úloh posuzovanou dle hodnoty Pearsonova korelačního koeficientu a procento nenormovaných odpovědí, které nám umožní zhodnotit správnost a jasnost zadání [4].

Obtížnost úlohy můžeme posuzovat buď pomocí hodnoty obtížnosti  $Q$ , nebo hodnoty indexu obtížnosti  $P$  [3]. Vzhledem k tomu, že u úloh soutěže není pevně stanovená hranice správně-nesprávně vyřešená úloha, je při položkové analýze využíváno obecného vztahu indexu obtížnosti

$$P_0 = \frac{\bar{x}}{x_m},$$

kde  $\bar{x}$  je aritmetický průměr získaných bodů všech žáků za danou úlohu a  $x_m$  je maximální počet bodů, který je možné získat za danou úlohu [5]. Maximální počet bodů za jednu teoretickou úlohu Fyzikální olympiády je 10. Všechny hodnoty indexu obtížnosti v této práci jsou uváděny v procentech – snazší úlohy, které jsou v rámci sbírky řazeny dříve, mají vyšší hodnotu  $P_0$ , naopak náročnější úlohy nižší. Úlohy velmi snadné s indexem odpovídajícím úspěšnosti vyšší než 80 % se v kategoriích A a B vyskytují pouze zřídka, naopak úlohy s indexem obtížnosti nižším než 20 %, který je považován za hranici velmi náročných úloh, jsou častější.

Citlivost úloh rozlišuje řešitele na řešitele s lepšími vědomostmi a s horšími vědomostmi [4]. Citlivost se posuzuje na základě různých typů koeficientů, stejně jako v bakalářské práci věnující se oblasti elektřiny a magnetismu budou i v diplomové práci úlohy posuzovány z hlediska Pearsonova korelačního koeficientu daného vztahem

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(h_i - \bar{h})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (h_i - \bar{h})^2}},$$

kde  $x_i$  je bodový zisk v dané úloze spočítaný  $i$ -tým žákem,  $\bar{x}$  je bodový průměr příkladu,  $h_i$  je bodový zisk  $i$ -tého žáka v rámci celého testu a  $\bar{h}$  je bodový průměr celého testu. V rámci této práce je Pearsonův korelační koeficient počítán pomocí funkce CORREL v programu Microsoft Excel. Protože do zpracování analytické části práce nejsou zahrnuty experimentální úlohy, které se navíc vyskytují pouze u některých kol, nejsou zahrnuty experimentální úlohy ani do celkového bodového součtu. Vyloučení experimentálních úloh z celkového bodového hodnocení v rámci této práce také nahrává fakt, že jsou analyzovány také ročníky 39 až 45, ve kterých experimentální úlohy v rámci celostátního kola nebyly zadávány. Hodnoty Pearsonova koeficientu se pohybují v intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$ , přičemž kladné hodnoty zvýhodňují žáky s lepšími znalostmi, naopak záporné hodnoty by znamenaly zvýhodnění žáků z horšími znalostmi, což je nežádoucí.

V rámci hodnocení úloh se také analyzuje množství nesprávně řešených (hodnoceny 0) a vynechaných (nehodnoceny) úloh. Ve Fyzikální olympiádě se vyskytují pouze otevřené otázky, proto chybné řešení může být dle [5] způsobeno vlivem vnějších chyb, jakými jsou neznalost nebo nepochopení tématu, nebo vedlejších chyb způsobenými špatným zaokrouhlením, nesprávným zadáním do kalkulačky, nesprávným přepsáním z kalkulačky do řešení apod. Vynechání odpovědi je nejčastěji způsobeno neznalostí, nepochopením nebo časovou

tísní. V rámci této práce je rozbor nenormovaných odpovědí proveden dle vztahu

$$N_o = \frac{n_0}{n},$$

kde  $n_0$  je počet žáků, kteří na otázku neodpověděli, nebo měli nulový bodový zisk,  $n$  je celkový počet žáků, kteří v daném soutěžním kole soutěžili, a  $N_o$  uváděné v procentech vyjadřuje míru vynechaných nebo špatně řešených úloh.

Vyhovující hodnoty vlastností úloh stejně jako v případě bakalářské práce převzeme z [6] – shrnutí vlastností je v tabulce 1.

**Tabulka 1:** Vyhovující hodnoty vlastností úloh, převzato z [6], upraveno.

<b>VLASTNOSTI ÚLOHY</b>	<b>VYHOVUJÍCÍ PARAMETRY</b>
index obtížnosti	30 – 90 %
Pearsonův korelační koeficient	> 0,4
analýza nenormovaných odpovědí	< 30 %

### 1.2.2 Data ke zpracování vlastností testových úloh

Diplomová práce se zabývá analýzou úloh z ročníků 39 až 64 kategorií A a B. U většiny ročníků není vůbec možné dohledat výsledkové listiny domácích kol, kterých by navíc bylo obrovské množství. Zejména u starších ročníků se ale nedochovaly ani výsledkové listiny krajských kol či celostátního kola kategorie A. Pro získání co největšího množství výsledkových listin bylo využito oficiální webové stránky Fyzikální olympiády využívající systém OSMO [7], ale také výsledkových listin zaslaných původními i současnými členy komisí Fyzikální olympiády a archiváři. Všichni tyto lidé jsou uvedeni v části Poděkování. Některé z těchto listin je také případně možné dohledat na webových stránkách jednotlivých krajů. Listiny, ať už získané z webových stránek, nebo od konkrétních osob, jsou přepsané do excelovského souboru, ve kterém byla zpracovávána analytická část práce, a který tvoří přílohu diplomové práce. Pro analýzu bylo využito přepsaných listin z excelovského souboru práce [2], které nebyly ani zaslány, ani není možné je zpětně dohledat na internetu, protože během posledních dvou let přestaly být funkční jejich webové stránky.

V tabulce 2 jsou zaznamenány dostupné výsledkové listiny pro úlohy Fyzikální olympiády kategorie A od 39. ročníku po letošní. Zatímco v bakalářské práci bylo pro analýzu dostupných 170 výsledkových listin krajských kol, pro diplomovou práci je jich 213. Jelikož za poslední dva ročníky bylo možné získat pouze dvacet osm výsledkových listin z druhých kol, je patrné, že patnáct výsledkových listin starších kol je oproti bakalářské práci navíc. Jedná se o výsledkové listiny Libereckého, Ústeckého a Moravskoslezského kraje. Ty poskytli Mgr. Jindřich Pulíček (LBK), RNDr. Jiří Králík, Ph. D. (ÚLK) a Štěpánka Macháčková (MSK), u kterých je možné si je vyžádat. Díky těmto listinám je pro všechny příklady od ročníku 44 možné zpracovat analýzu minimálně pro čtyři kraje, což bylo původně možné až od 47. ročníku (výjimkou byl 45. ročník). Z celostátních kol jsou listiny kompletní od 43. ročníku.

**Tabulka 2:** Dostupné výsledkové listiny kategorie A.

KRAJ ROČNÍK	KRAJSKÉ KOLO													CELOSTÁTNÍ KOLO	
	PHA	JHC	JHM	KVK	VYS	HKK	LBK	MSK	OLK	PAK	PLK	STČ	ULK		ZLK
39	x	✓	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
40	x	✓	x	x	x	x	x	x	✓	x	x	x	x	x	x
41	x	✓	x	x	x	x	x	x	✓	x	x	x	x	x	✓
42	x	✓	x	x	x	x	x	x	✓	x	x	x	x	x	x
43	x	✓	x	x	x	x	x	x	✓	x	x	x	x	x	✓
44	x	✓	x	x	x	x	✓	x	✓	x	x	✓	x	x	✓
45	✓	✓	x	x	x	x	✓	x	✓	x	x	✓	x	x	✓
46	x	✓	x	x	x	x	✓	x	✓	x	x	✓	x	x	✓
47	x	✓	x	x	x	x	✓	x	✓	✓	✓	✓	x	x	✓
48	x	✓	x	x	x	x	✓	x	✓	x	✓	✓	x	x	✓
49	x	✓	x	x	x	x	✓	x	✓	x	✓	✓	x	x	✓
50	x	✓	x	x	x	x	✓	x	✓	✓	✓	✓	x	x	✓
51	x	✓	x	x	x	x	✓	x	✓	✓	✓	✓	✓	x	✓
52	x	✓	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x	x	✓
53	x	✓	x	x	x	x	✓	x	✓	✓	✓	✓	✓	x	✓
54	✓	✓	x	x	x	x	✓	x	✓	✓	✓	✓	✓	x	✓
55	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
56	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
57	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
58	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
59	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
60	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
61	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
62	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
63	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
64	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

V tabulce 3 můžeme sledovat dostupnost výsledkových listin kategorie B. Vidíme zde dostupnost 219 výsledkových listin druhých kol. V bakalářské práci bylo dostupných pouze 163 výsledkových listin, zde je ale třeba vzít v potaz fakt, že na rozdíl od kategorie A nebyl zahrnut 62. ročník, protože v době tvorby práce ještě neproběhlo krajské kolo. V posledních třech ročnících bylo vyvěšeno celkem třicet šest krajských výsledkových listin. Rozdíl je zde čtrnáct nově nabytých výsledkových listin. Jedná se především o listiny Libereckého kraje (deset), tři z Moravskoslezského a jedna z Ústeckého kraje. I zde je díky tomu možné provést analýzu alespoň pro čtyři kraje od 44. ročníku.

Tyto tabulky uvádíme z jednoho prostého důvodu – při analýze úloh a vykreslování grafů je u některých krajů může zdát, že pro něj neexistují žádná data. Během let se ale stalo hned několikrát, že výsledková listina je dostupná, ale v kraji buď nikdo nesoutěžil, nebo byl celkový bodový zisk za příklad nulový. Na tyto výjimky je však v práci vždy upozorněno.

**Tabulka 3:** Dostupné výsledkové listiny kategorie B.

KRAJ ROČNÍK	KRAJSKÉ KOLO													CELOSTÁTNÍ KOLO	
	PHA	JHC	JHM	KVK	VYS	HKK	LBK	MSK	OLK	PAK	PLK	STČ	ULK		ZLK
39	x	✓	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	není pořádáno
40	x	✓	x	x	x	x	x	x	✓	x	x	x	x	x	není pořádáno
41	x	✓	x	x	x	x	x	x	✓	x	x	x	x	x	není pořádáno
42	x	✓	x	x	x	x	✓	x	✓	x	x	x	x	x	není pořádáno
43	x	✓	x	x	x	x	x	x	✓	x	x	x	x	x	není pořádáno
44	x	✓	x	x	x	x	✓	x	✓	x	x	✓	x	x	není pořádáno
45	✓	✓	x	x	x	x	✓	x	✓	x	x	✓	x	x	není pořádáno
46	x	✓	x	x	x	x	✓	x	✓	x	x	✓	x	x	není pořádáno
47	x	✓	x	x	x	x	✓	x	✓	✓	✓	✓	x	x	není pořádáno
48	x	✓	x	x	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	x	x	není pořádáno
49	x	✓	x	x	x	x	✓	x	✓	✓	✓	✓	x	x	není pořádáno
50	x	✓	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x	x	není pořádáno
51	x	✓	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x	x	není pořádáno
52	x	✓	x	x	x	x	✓	x	✓	✓	✓	✓	x	x	není pořádáno
53	x	✓	x	x	x	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x	není pořádáno
54	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	není pořádáno
55	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	není pořádáno
56	✓	✓	✓	✓	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	není pořádáno
57	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	není pořádáno
58	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	není pořádáno
59	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	není pořádáno
60	✓	✓	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	není pořádáno
61	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	není pořádáno
62	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	není pořádáno
63	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	není pořádáno
64	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	není pořádáno

### 1.2.3 Konkrétní analýza úloh z oblasti molekulové fyziky a termodynamiky

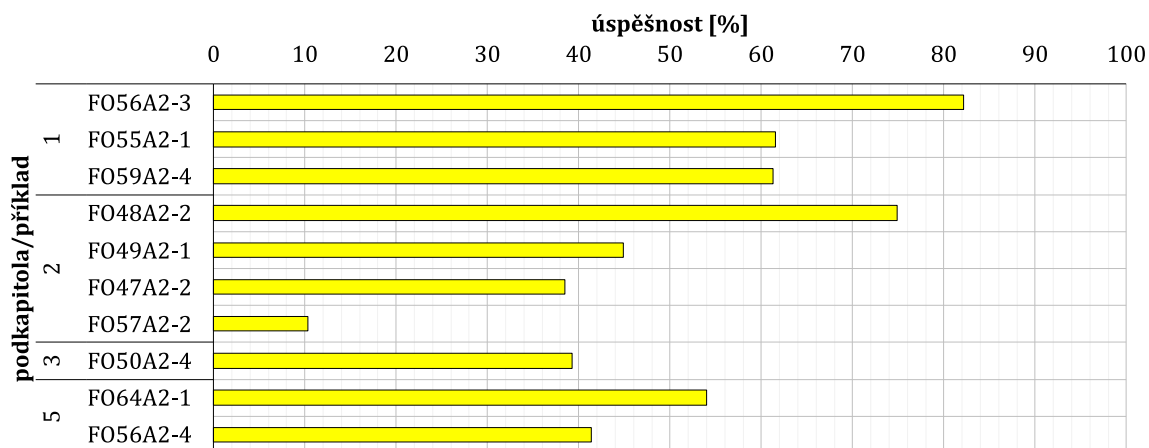
Oblast molekulové fyziky a termodynamiky je ve 39. až 64. ročníku Fyzikální olympiády zastoupena dohromady sedmdesáti šesti příklady, příkladů z postupových kol je třicet pět. Ke všem postupovým kolům jsou dle tabulek 2 a 3 dostupné výsledkové listiny, tudíž je možné provést analýzu úloh.

V tabulce 4 jsou zapsány vypočítané hodnoty vlastností jednotlivých úloh krajského kola kategorie A. Napříč ročníky je deset příkladů z oblasti termodynamiky a molekulové fyziky. Dle této tabulky jeden příklad nevyhovuje v jedné podmínce a jeden příklad ve dvou, tedy 80 % příkladů vyhovuje všem stanoveným podmínkám. Jeden z příkladů nevyhovuje předem stanovenému intervalu indexu obtížnosti – příklad FO57A2-2 z podkapitoly Plyny, který má úspěšnost pouhých 10,36 %, což je také vůbec nejnižší hodnota úspěšnosti (pokud se zaměříme na oblast termodynamiky a molekulové fyziky). Index obtížnosti úloh se pohybuje od zmíněných 10,36 % do 82,18 %, což je naopak nejvyšší hodnota indexu obtížnosti

**Tabulka 4:** Vypočítané hodnoty vlastností jednotlivých úloh druhého kola kategorie A, oblast termodynamiky a molekulové fyziky.

ÚLOHA	INDEX OBTÍŽNOSTI [%]	PEARSONŮV KOEFIČIENT KORELACE	NENORMOVANÉ ODPOVĚDI [%]	VÝSLEDEK
FO47A2-2	38,52 ✓	0,781 ✓	31,25 ×	×
FO48A2-2	74,90 ✓	0,750 ✓	7,69 ✓	✓
FO49A2-1	44,90 ✓	0,616 ✓	15,69 ✓	✓
FO50A2-4	39,30 ✓	0,865 ✓	22,03 ✓	✓
FO55A2-1	61,54 ✓	0,697 ✓	10,40 ✓	✓
FO56A2-3	82,18 ✓	0,542 ✓	2,11 ✓	✓
FO56A2-4	41,40 ✓	0,722 ✓	21,13 ✓	✓
FO57A2-2	10,36 ×	0,605 ✓	41,43 ×	×
FO59A2-4	61,31 ✓	0,664 ✓	4,48 ✓	✓
FO64A2-1	53,97 ✓	0,718 ✓	10,78 ✓	✓

ze všech příkladů této oblasti. V grafu na obrázku 13 jsou jednotlivé procentuální úspěšnosti porovnány v rámci podkapitol. Nejvyšší průměrné úspěšnosti 68,34 % dosahuje první podkapitola Teplo a teplota, naopak nejnižší třetí podkapitola Práce plynu, kruhový děj. Příklady podkapitoly Pevné látky a Změny skupenství ve druhém kole kategorie A nebyly zadávány vůbec.



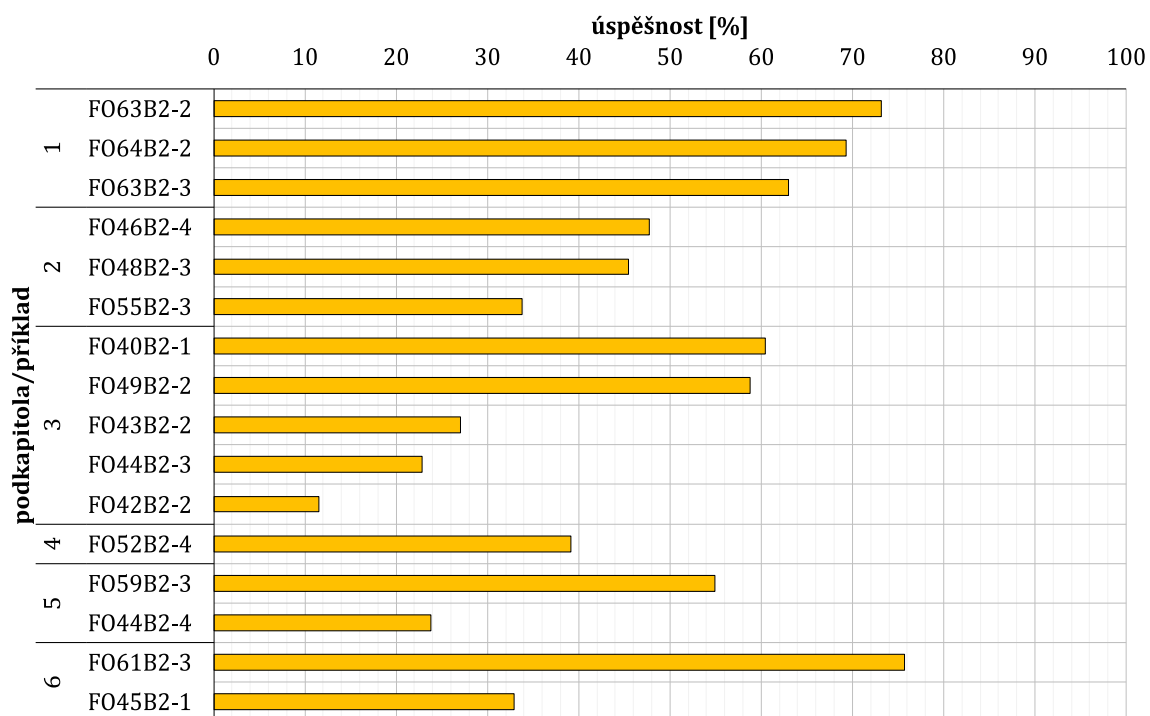
**Obrázek 13:** Procentuální úspěšnost příkladů druhého kola kategorie A, oblast termodynamiky a molekulové fyziky (1 – Teplo a teplota, 2 – Plyny, 3 – Práce plynu, kruhový děj, 5 – Kapaliny).

Dle výpočtů všech deset příkladů splňuje podmínku Pearsonova korelačního koeficientu vyššího než 0,4. Nejvyšší hodnotu má úloha FO50A2-4, naopak nejnižší FO56A2-3. Pouze dvě úlohy z deseti nesplňují podmínku méně než 30 % nenormovaných odpovědí, a to úloha FO47A2-2 a FO57A2-2, obě tyto úlohy mají ale pod 50 % nenormovaných odpovědí.

V tabulce 5 jsou uvedeny hodnoty pro příklady druhého kola kategorie B, kterých je dohromady šestnáct. Z tohoto počtu pouze devět splňuje všechny předem vytyčené intervaly parametrů – pět příkladů nesplňuje jednu podmínku a dva příklady nesplňují dvě. Všechny tyto příklady spadají do doporučeného intervalu hodnot Pearsonova koeficientu.

**Tabulka 5:** Vypočítané hodnoty vlastností jednotlivých úloh druhého kola kategorie B, oblast termodynamiky a molekulové fyziky.

ÚLOHA	INDEX OBTÍŽNOSTI [%]	PEARSONŮV KOEFIČIENT KORELACE	NENORMOVANÉ ODPOVĚDI [%]	VÝSLEDEK
FO40B2-1	60,48 ✓	0,679 ✓	4,76 ✓	✓
FO42B2-2	11,55 ×	0,634 ✓	58,33 ×	×
FO43B2-2	27,05 ×	0,658 ✓	12,82 ✓	×
FO44B2-3	22,85 ×	0,573 ✓	12,20 ✓	×
FO44B2-4	23,82 ×	0,719 ✓	39,02 ×	×
FO45B2-1	32,96 ✓	0,682 ✓	31,13 ×	×
FO46B2-4	47,76 ✓	0,796 ✓	5,97 ✓	✓
FO48B2-3	45,50 ✓	0,783 ✓	22,97 ✓	✓
FO49B2-2	58,76 ✓	0,746 ✓	5,26 ✓	✓
FO52B2-4	39,16 ✓	0,671 ✓	30,00 ×	×
FO55B2-3	33,81 ✓	0,813 ✓	44,44 ×	×
FO59B2-3	54,93 ✓	0,767 ✓	17,24 ✓	✓
FO61B2-3	75,68 ✓	0,647 ✓	0,84 ✓	✓
FO63B2-2	73,19 ✓	0,631 ✓	9,80 ✓	✓
FO63B2-3	62,95 ✓	0,752 ✓	3,92 ✓	✓
FO64B2-2	69,30 ✓	0,776 ✓	11,48 ✓	✓



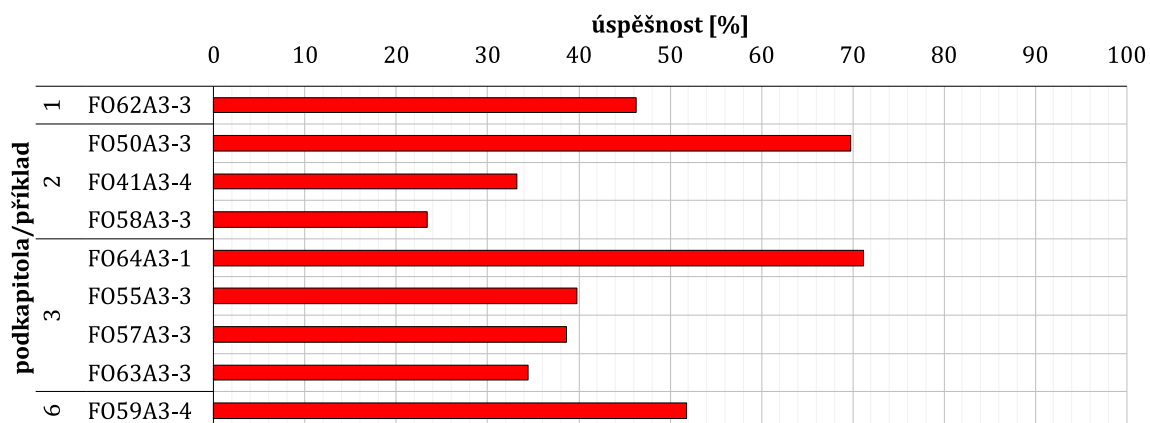
**Obrázek 14:** Procentuální úspěšnost příkladů druhého kola kategorie B, oblast termodynamiky a molekulové fyziky (1 – Teplo a teplota, 2 – Plyny, 3 – Práce plynu, kruhový děj, 4 – Pevné látky, 5 – Kapaliny, 6 – Změny skupenství).

Pět příkladů je nevyhovujících v počtu nenormovaných odpovědí, příklad FO52B2-4 je ovšem na úplné hranici intervalu. Příklad FO42B2-2 dosahuje procentuálního zastoupení nenormovaných odpovědí 58,33 %, což je téměř dvojnásobek hranice vyhovujícího intervalu. U tohoto příkladu je zároveň nejnižší úspěšnost v této kategorii pro oblast termodynamiky a molekulové fyziky. Naopak u příkladu FO61B2-3 je 0,84 % nenormovaných odpovědí, tedy nastalo pouze minimální vynechání úlohy nebo nulové hodnocení. Index obtížnosti se u těchto úloh pohybuje mezi 11,55 % a 75,68 %. Dle obrázku 14 a výpočtů dosahují nejvyšší průměrné úspěšnosti příklady první podkapitoly Teplo a teplota (68,48 %), naopak nejnižší hodnoty příklad třetí podkapitoly Práce plynu, kruhový děj (36,14 %).

**Tabulka 6:** Vypočítané hodnoty vlastností jednotlivých úloh třetího kola kategorie A, oblast termodynamiky a molekulové fyziky.

ÚLOHA	INDEX OBTÍŽNOSTI [%]	PEARSONŮV KOEFIČIENT KORELACE	NENORMOVANÉ ODPOVĚDI [%]	VÝSLEDEK
FO41A3-4	33,20 ✓	0,595 ✓	8,00 ✓	✓
FO50A3-3	69,78 ✓	0,626 ✓	2,17 ✓	✓
FO55A3-3	39,78 ✓	0,603 ✓	0,00 ✓	✓
FO57A3-3	38,65 ✓	0,759 ✓	31,25 ×	×
FO58A3-3	23,37 ×	0,743 ✓	32,65 ×	×
FO59A3-4	51,81 ✓	0,744 ✓	6,38 ✓	✓
FO62A3-3	46,28 ✓	0,385 ×	2,13 ✓	×
FO63A3-3	34,43 ✓	0,680 ✓	54,29 ×	×
FO64A3-1	71,14 ✓	0,590 ✓	2,27 ✓	✓

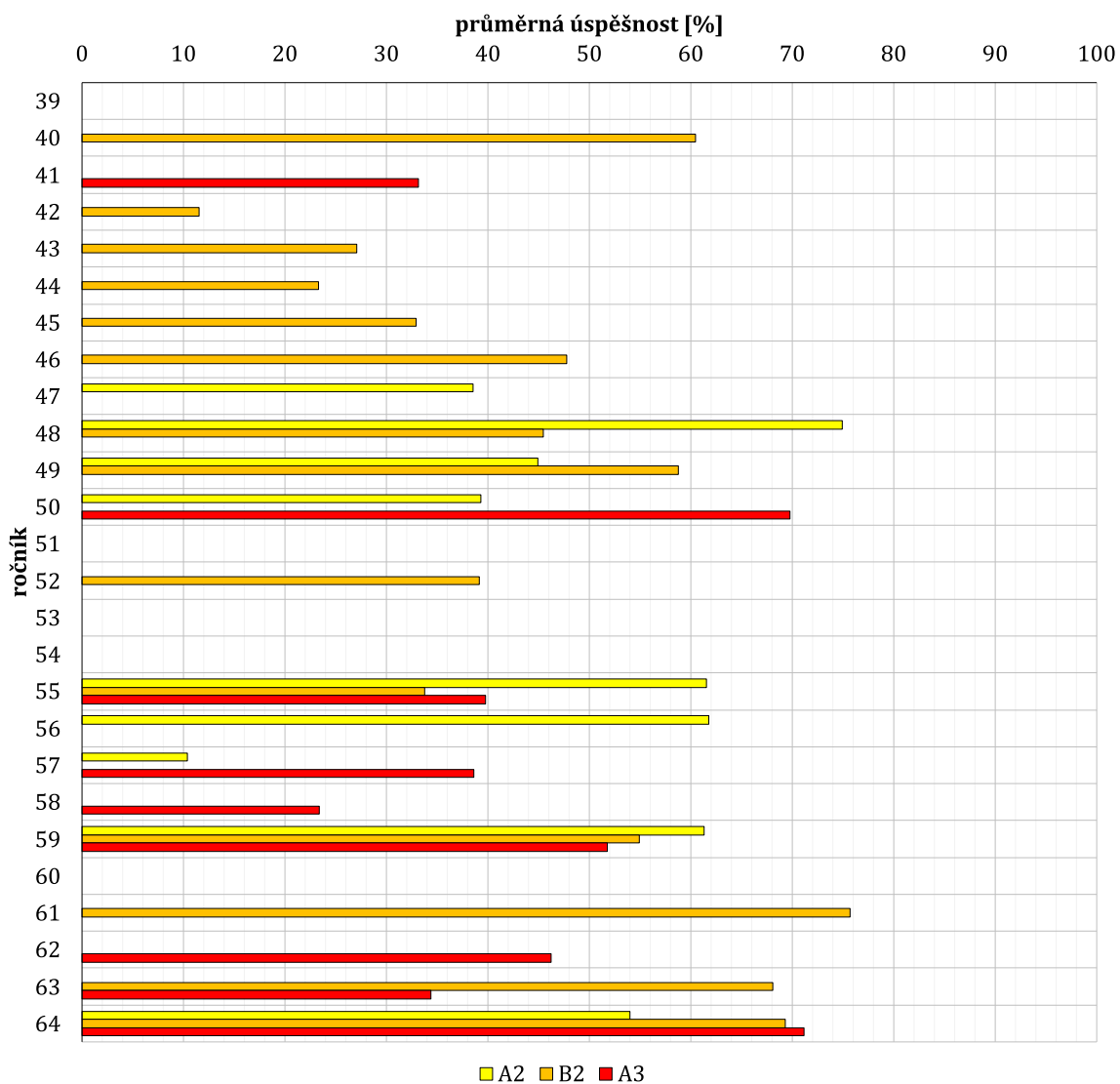
Tabulka 6 obsahuje vypočítané hodnoty pro příklady celostátního kola. Úloh celostátního kola oblasti termodynamiky a molekulové fyziky je devět, přičemž pouze pět jich vyhovuje všem třem kritériím – tři úlohy nesplňují jednu podmínku, jedna úloha nesplňuje dvě. Příklady třetího kola kategorie A dopadly v rozboru nejhůře z celé oblasti molekulové fyziky a termodynamiky.



**Obrázek 15:** Procentuální úspěšnost příkladů třetího kola kategorie A, oblast termodynamiky a molekulové fyziky (1 – Teplo a teplota, 2 – Plyny, 3 – Práce plynu, kruhový děj, 6 – Změny skupenství).

Obtížnost úloh se dle tabulky 6 a obrázku 15 pohybuje mezi 23,37 % a 71,14 %, nejvyšší průměrné úspěšnosti dosahuje podkapitola Změny skupenství (54,32 %), naopak nejnižší podkapitola Plyny (42,12 %). Velmi překvapivá je analýza nenormovaných odpovědí úlohy FO55A3-3, kde měl každý řešitel vždy za tento příklad alespoň půl bodu a počet nenormovaných odpovědí je tedy nula. Naopak u příkladu FO63A3-3 více než polovina řešitelů úlohu přeskočila, nebo nevyřešila ani část úlohy. Příklad FO62A3-3 je jediným ze třiceti pěti příkladů oblasti termodynamiky a molekulové fyziky, který nezapadá do stanoveného intervalu hodnot Pearsonova korelačního koeficientu. Tato hodnota by kritérium nesplnila ani v případě, že bychom započítali do celkového součtu nejen hodnocení z teoretických úloh, ale také z experimentální úlohy.

V grafu na obrázku 16 je znázorněn souhrn průměrných úspěšností v jednotlivých ročnících Fyzikální olympiády, přičemž jsou rozlišeny jednotlivé kategorie a kola. V některých ročnících se neobjevil z této oblasti žádný příklad, v jiných naopak více než jeden, a proto je v daném ročníku vypočítána průměrná hodnota. Vůbec nejvyšší průměrné úspěšnosti oblasti termodynamiky a molekulové fyziky bylo dosaženo v 61. ročníku druhého kola kategorie B (75,68 %), naopak nejnižší v 57. ročníku druhého kola kategorie A (10,36 %).



**Obrázek 16:** Průměrná procentuální úspěšnost příkladů z oblasti molekulové fyziky a termodynamiky ze všech zkoumaných kategorií a kol v jednotlivých ročnících Fyzikální olympiády.



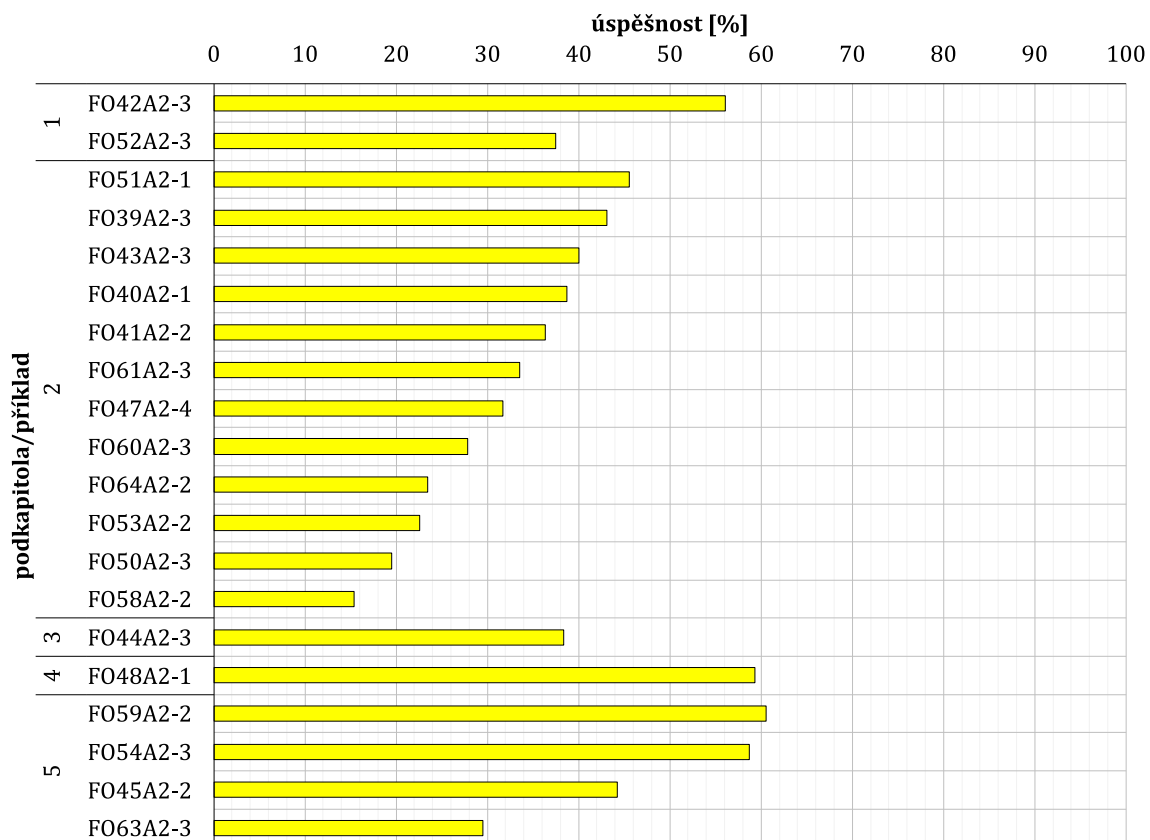
### 1.2.4 Konkrétní analýza úloh z oblasti optiky

Optika byla za posledních dvacet šest let v úlohách Fyzikální olympiády zadána v šedesáti jedna příkladech, přičemž postupových je z toho třicet sedm. Všechny příklady až na jedinou výjimku jsou z kategorie A, příklad z kategorie B je z domácího kola, tudíž nebyl více analyzován. V tabulce 2 vidíme, že pro příklady FO39A3-2 a FO42A3-3 není možné dohledat data pro analýzu, a tudíž tyto příklady nejsou více rozebírány a nejsou uvedeny ani ve sbírce.

**Tabulka 7:** Vypočítané hodnoty vlastností jednotlivých úloh druhého kola kategorie A, oblast optiky.

ÚLOHA	INDEX OBTÍŽNOSTI [%]	PEARSONŮV KOEFIČIENT KORELACE	NENORMOVANÉ ODPOVĚDI [%]	VÝSLEDEK
FO39A2-3	43,13 ✓	0,637 ✓	18,75 ✓	✓
FO40A2-1	38,70 ✓	0,797 ✓	8,33 ✓	✓
FO41A2-2	36,36 ✓	0,799 ✓	4,55 ✓	✓
FO42A2-3	56,09 ✓	0,774 ✓	13,89 ✓	✓
FO43A2-3	40,00 ✓	0,445 ✓	6,25 ✓	✓
FO44A2-3	38,37 ✓	0,634 ✓	28,07 ✓	✓
FO45A2-2	44,24 ✓	0,618 ✓	14,52 ✓	✓
FO47A2-4	31,67 ✓	0,620 ✓	34,38 ×	×
FO48A2-1	59,29 ✓	0,766 ✓	13,46 ✓	✓
FO50A2-3	19,53 ×	0,759 ✓	52,54 ×	×
FO51A2-1	45,57 ✓	0,652 ✓	25,40 ✓	✓
FO52A2-3	37,50 ✓	0,692 ✓	32,14 ×	×
FO53A2-2	22,54 ×	0,521 ✓	52,86 ×	×
FO54A2-3	58,68 ✓	0,549 ✓	23,33 ✓	✓
FO58A2-2	15,35 ×	0,472 ✓	48,46 ×	×
FO59A2-2	60,54 ✓	0,628 ✓	11,94 ✓	✓
FO60A2-3	27,88 ×	0,703 ✓	25,19 ✓	×
FO61A2-3	33,51 ✓	0,819 ✓	37,19 ×	×
FO63A2-3	29,51 ×	0,736 ✓	51,95 ×	×
FO64A2-2	23,43 ×	0,506 ✓	30,39 ×	×

V tabulce 7 jsou vypočítané hodnoty indexu obtížnosti, Pearsonova koeficientu a procentuální zastoupení nenormovaných odpovědí pro úlohy druhého kola kategorie A. Pouze jedenáct příkladů (55 %) z dvaceti příkladů je vyhovujících – čtyři nevyhovují v jedné podmínce a pět ve dvou podmínkách. Pearsonův koeficient korelace je optimální u všech dvaceti příkladů a pohybuje se v rozmezí 0,445 až 0,819. Osm příkladů má nevyhovující množství nenormovaných odpovědí, které u tří příkladů dokonce přesahuje 50 %. Tyto příklady mají u často index obtížnost těsně nad hranicí nebo pod ní, což znamená, že přibližně polovina žáků úlohu vynechala, nebo ji vyřešila zcela špatně. Samotná obtížnost úloh (index obtížnosti) se pohybuje mezi 15,35 % a 60,54 %. Nejnáročnějšími se jeví příklady druhé podkapitoly Zobrazování optickými soustavami (průměrná úspěšnost 31,47 %), naopak mezi jednodušší podkapitoly krajského kola patří Kvantová optika s průměrnou úspěšností 59,29 %, která ale obsahuje pouze jeden příklad. Graf procentuální úspěšnosti příkladů z druhého kola v oblasti optiky a jejích podkapitol je zobrazen na obrázku 17.



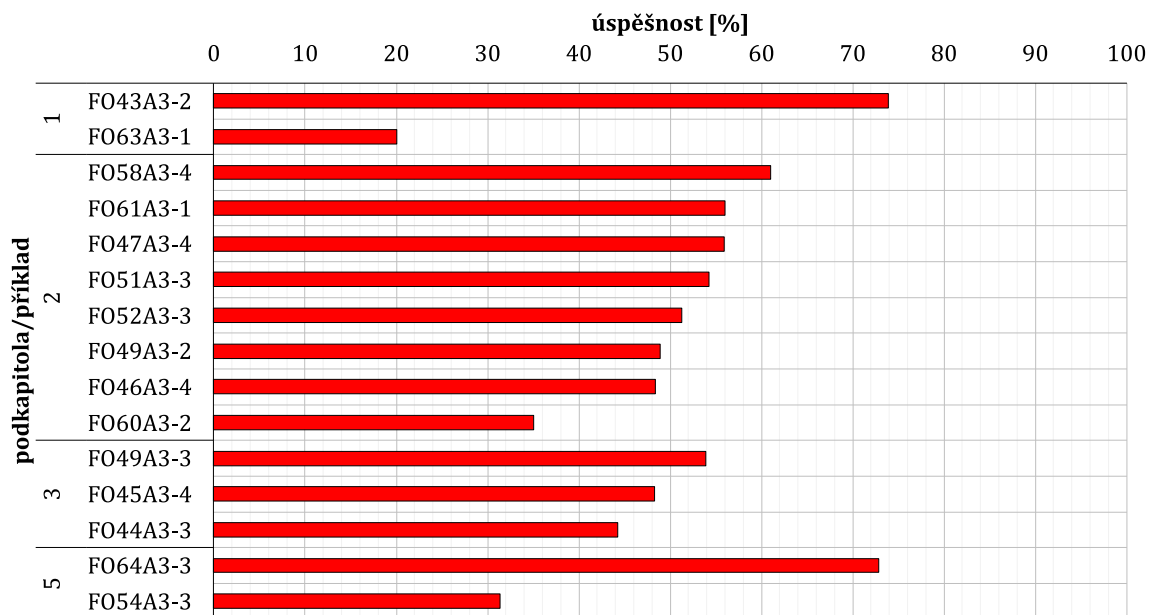
**Obrázek 17:** Procentuální úspěšnost příkladů druhého kola kategorie A, oblast optiky (1 – Odraz a lom světla, 2 – Zobrazování optickými soustavami, 3 – Energie světelného záření, 4 – Kvantová optika, 5 – Vlnová optika).

Tabulka 8 zhodnocuje výsledky analýzy úloh třetího kola kategorie A z oblasti optiky. Celkově je těchto úloh sedmáct, dvě ale nejsou analyzovány z důvodu nedostatku výsledkových listin – rozbor byl tedy proveden pouze u patnácti úloh. Z těch je třináct úloh vyhovujících, dvě nevyhovují. I tyto příklady splňují stanovené kritérium Pearsonova koeficientu korelace. Obě nevyhovující úlohy mají velké množství nenormovaných odpovědí, jedna z nich má navíc i nízký index obtížnosti (20 %). Index obtížnosti 20 % je nejnižším indexem, nejvyšší úspěšnost má naopak příklad FO43A3-2 (73,94 %). Nejnáročnější podkapitolou z hlediska třetího kola kategorie A je v tomto případě Odraz a lom světla (průměrná procentuální úspěšnost 46,97 %), naopak nejjednodušší je podkapitola Vlnová optika s průměrnou úspěšností 52,12 %. Srovnání procentuální úspěšnosti jednotlivých příkladů třetího kola kategorie A v oblasti optiky je v grafu na obrázku 18. Dle tohoto obrázku se ve třetím kole nevyskytl žádný příklad spadající do podkapitoly Kvantová optika.

Vrátíme se ještě k rozboru nenormovaných odpovědí u úloh celostátního kola. Třetina z těchto úloh má dle tabulky 8 množství nenormovaných odpovědí pod 10 %, jeden z příkladů dokonce 0 %. Tento příklad má také nejvyšší úspěšnost. Zajímavé jsou příklady FO44A3-3 a FO49A3-3, které ačkoli mají jen malé množství vynechaných nebo nesprávných odpovědí, mají relativně nižší úspěšnost než ostatní příklady s nízkým množstvím nenormovaných odpovědí. I tyto příklady ale mají kladný a vysoký Pearsonův koeficient, což znamená, že úlohu sice zkusila spočítat většina řešitelů, část zvládla vyřešit správně, ale pro správný postup celé úlohy byli zvýhodněni soutěžící s lepšími znalostmi.

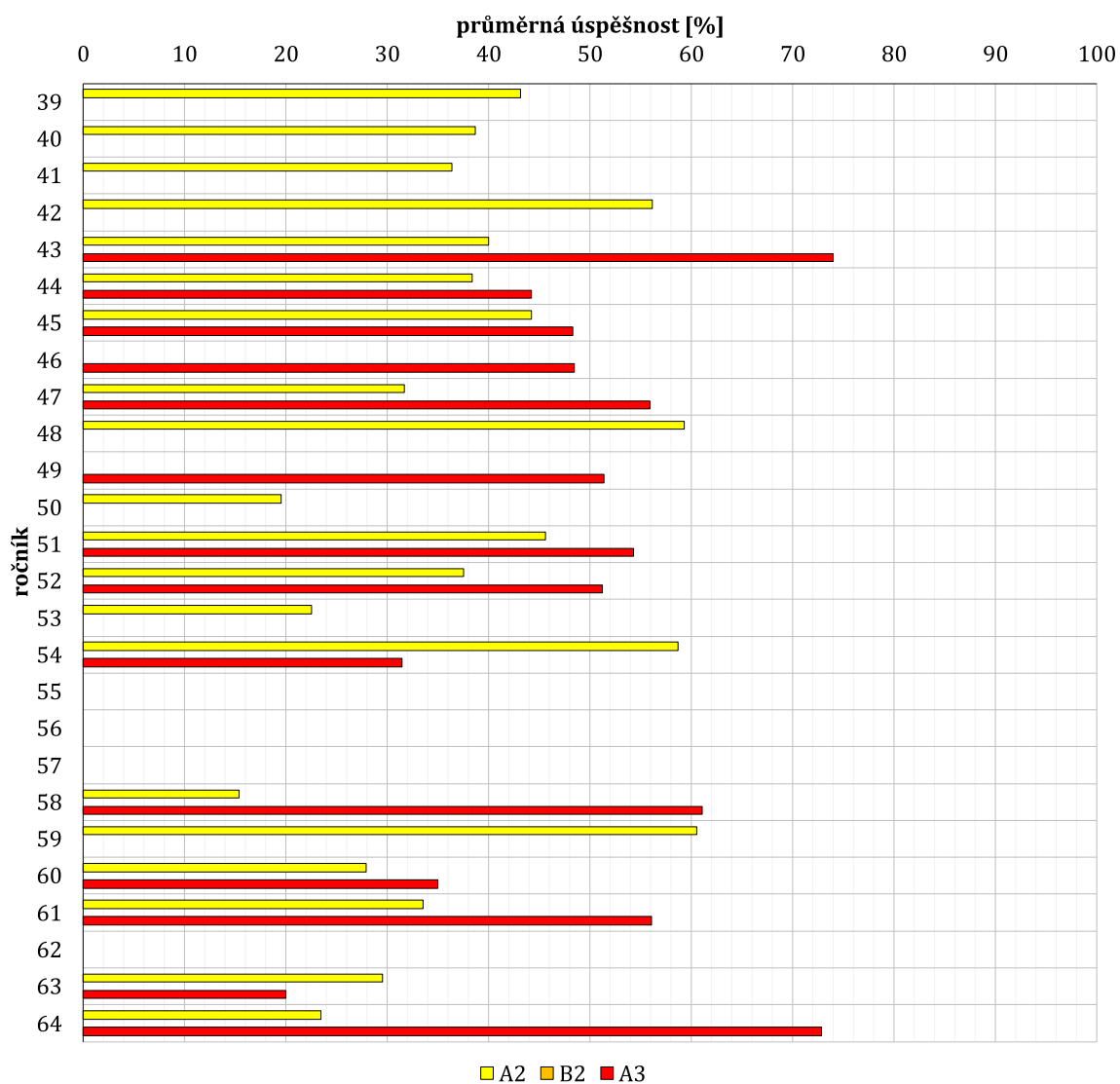
**Tabulka 8:** Vypočítané hodnoty vlastností jednotlivých úloh třetího kola kategorie A, oblast optiky.

ÚLOHA	INDEX OBTÍŽNOSTI [%]	PEARSONŮV KOEFIČIENT KORELACE	NENORMOVANÉ ODPOVĚDI [%]	VÝSLEDEK
FO43A3-2	73,94 ✓	0,636 ✓	0,00 ✓	✓
FO44A3-3	44,22 ✓	0,671 ✓	1,96 ✓	✓
FO45A3-4	48,30 ✓	0,712 ✓	12,00 ✓	✓
FO46A3-4	48,39 ✓	0,785 ✓	7,14 ✓	✓
FO47A3-4	55,92 ✓	0,664 ✓	22,45 ✓	✓
FO49A3-2	48,86 ✓	0,694 ✓	27,27 ✓	✓
FO49A3-3	53,86 ✓	0,736 ✓	2,27 ✓	✓
FO51A3-3	54,27 ✓	0,724 ✓	12,50 ✓	✓
FO52A3-3	51,22 ✓	0,761 ✓	10,20 ✓	✓
FO54A3-3	31,40 ✓	0,645 ✓	42,00 ×	×
FO58A3-4	61,02 ✓	0,618 ✓	2,04 ✓	✓
FO60A3-2	35,00 ✓	0,804 ✓	24,00 ✓	✓
FO61A3-1	56,03 ✓	0,843 ✓	20,51 ✓	✓
FO63A3-1	20,00 ×	0,688 ✓	37,14 ×	×
FO64A3-3	72,84 ✓	0,632 ✓	2,27 ✓	✓



**Obrázek 18:** Procentuální úspěšnost příkladů třetího kola kategorie A, oblast optiky (1 – Odraz a lom světla, 2 – Zobrazování optickými soustavami, 3 – Energie světelného záření, 5 – Vlnová optika).

V grafu na obrázku 19 sledujeme souhrn průměrných úspěšností úloh z optiky v jednotlivých ročnících. Jsou zde rozlišeny kategorie, přičemž je patrné, že se zde nevyskytují úlohy druhého kola kategorie B. V ročnících 55 až 57 a v 62. ročníku se neobjevil žádný příklad z optiky. Nejvyšší procentuální úspěšnost má příklad z celostátního kola kategorie A – FO43A3-2 (73,94 %), v těsném závěsu je příklad FO64A3-3 s procentuální úspěšností 72,84 %, naopak nejnižší procentuální úspěšnosti dosahuje příklad FO58A2-2 z druhého kola kategorie A s úspěšností 15,35 %. Ve 49. ročníku v celostátním kole byly dva příklady z optiky, do grafu je použit průměr jejich indexů obtížnosti.

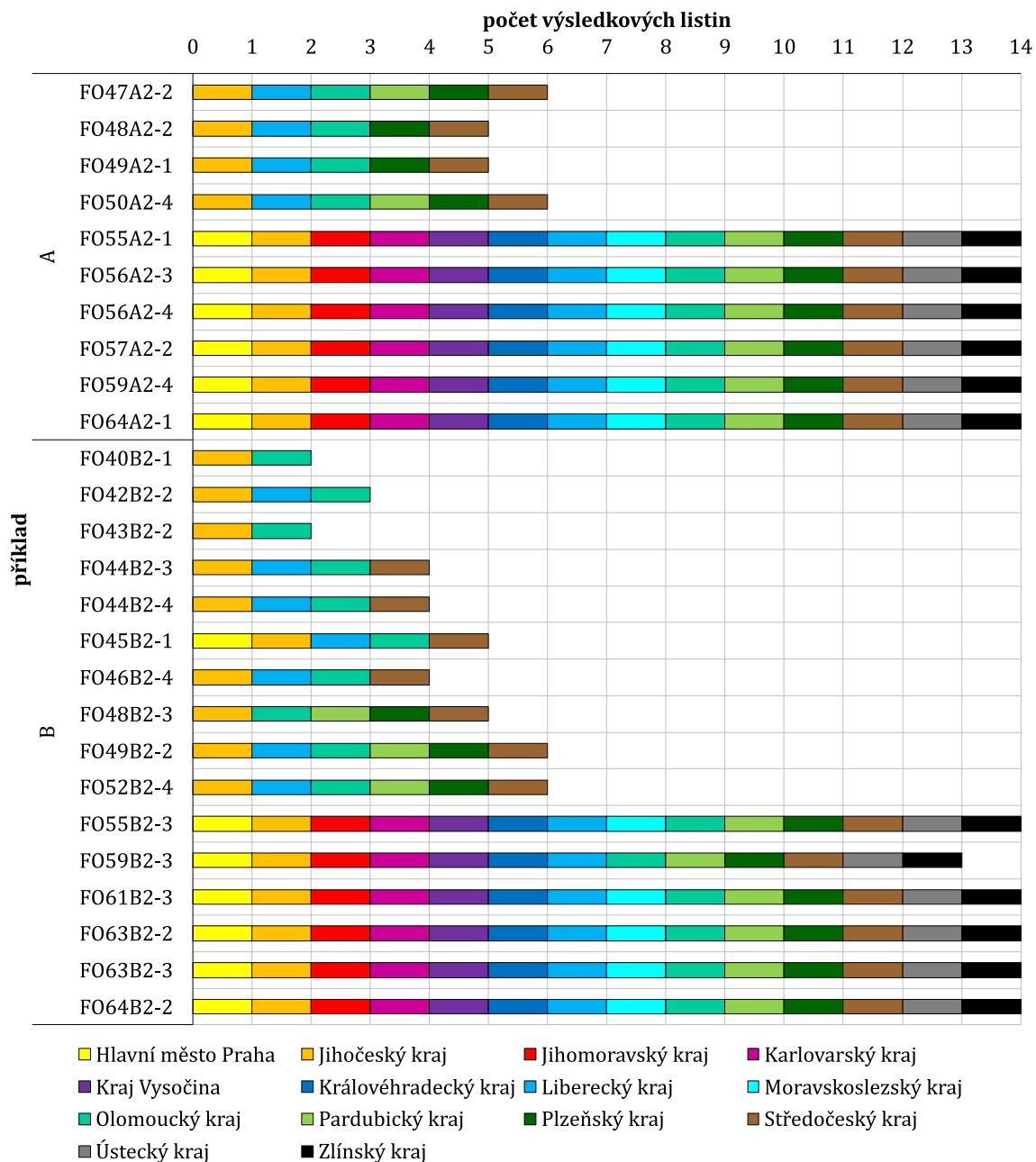


**Obrázek 19:** Průměrná procentuální úspěšnost příkladů z oblasti optiky ze všech zkoumaných kategorií a kol v jednotlivých ročnících Fyzikální olympiády.

### 1.2.5 Rozbor úspěšnosti jednotlivých krajů

Zajímavou součástí analýzy je také porovnání úspěšnosti jednotlivých krajů v rámci druhých kol Fyzikální olympiády. Výsledná úspěšnost příkladu je vždy vypočítána ze souboru všech soutěžících, nerozlišuje se, za který kraj řešitel soutěží. V rámci statistické úspěšnosti příkladů ve sbírkové části (u každé podkapitoly) je uváděn graf procentuální úspěšnosti u jed-

notlivých příkladů v jednotlivých krajích, pro který jsou data vypočítávána za jednotlivé kraje. Následující rozbor úspěšnosti krajů se zabývá komplexní analýzou úspěšnosti kraje v rámci jednotlivých podkapitol této sbírkové části, porovnává mezi sebou obě kategorie, a také dostupnost výsledkových listin pro jednotlivé příklady.



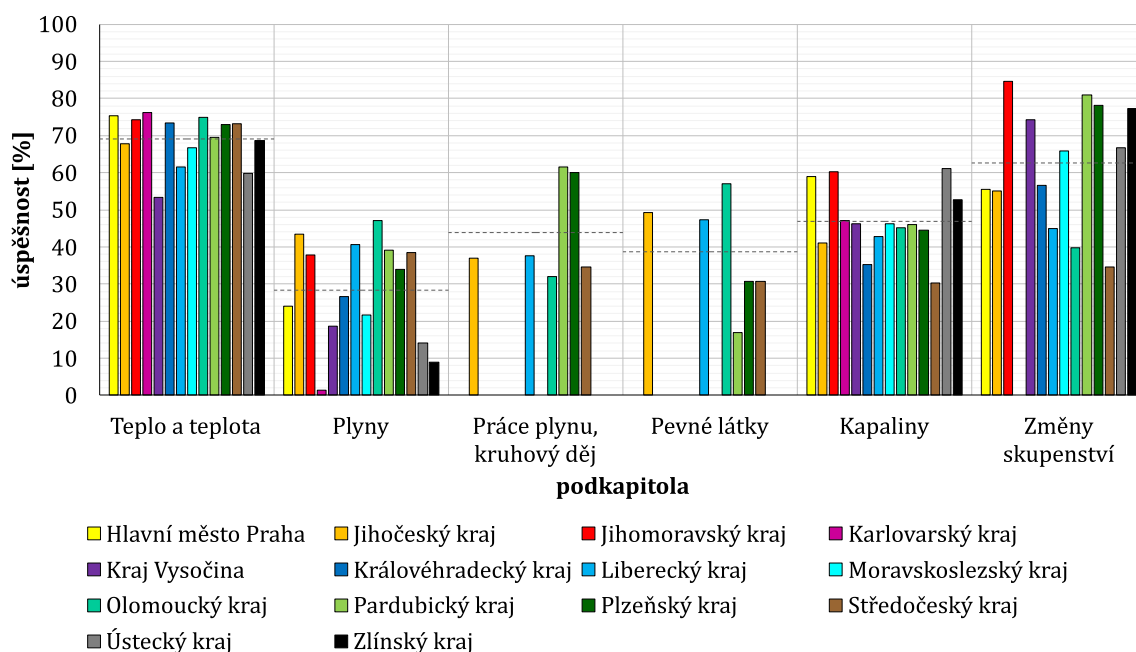
**Obrázek 20:** Počet dostupných listin na jednotlivé příklady zaměřené na oblast molekulové fyziky a termodynamiky.

V grafu na obrázku 20 je zobrazen počet dostupných listin pro jednotlivé příklady z molekulové fyziky a termodynamiky. Tato oblast zahrnuje příklady kategorie A i B, příklady obou kategorií jsou v levé části grafu odděleny černou čarou. Především pro starší ročníky je dostupné jen minimum výsledkových listin, příklady od 55. ročníku můžeme ale mezi sebou porovnávat spolehlivě. Protože cílem práce bylo porovnat co největší množství dat, jsou pro srovnání krajů využity všechny uvedené listiny.

Procentuální úspěšnosti (indexy obtížnosti) jsou v tomto případě vypočítány tak, že jsou sečteny všechny dosažené body soutěžících daného kraje u všech příkladů dané podkapitoly nebo kategorie, které jsou vydělené celkovým možným bodovým ziskem všech soutěžících v jednom kraji. Číslo je následně převedeno na procenta. Pro pochopení si uvedme modelový příklad – v podkapitole budou dva příklady ze dvou různých ročníků. V rámci daného kraje soutěžili v jednom ročníku tři soutěžící, kteří dohromady získali třináct bodů z příkladu spadajícího do dané kapitoly, ve druhém ročníku soutěžilo pět soutěžících, kteří získali sedmáct bodů. Dohromady mohli žáci získat v prvním ročníku třicet bodů, ve druhém padesát. Výsledná procentuální úspěšnost kapitoly se spočítá jako:

$$P = \frac{13 + 17}{30 + 50} = \frac{30}{80} = 0,375.$$

Výsledná úspěšnost daného kraje v této podkapitole je 37,50 %. Úspěšnost tedy není počítána jako průměr úspěšností příkladů, ale je vypočítávána ze všech dat dostupných pro jeden kraj. Tento postup platí pro výpočty dat, které byly využity k tvorbě grafů na obrázcích 21, 22, 24 a 25. V grafech jsou zobrazeny černou přerušovanou čarou průměrné hodnoty podkapitol nebo kategorií (dle typu grafu).



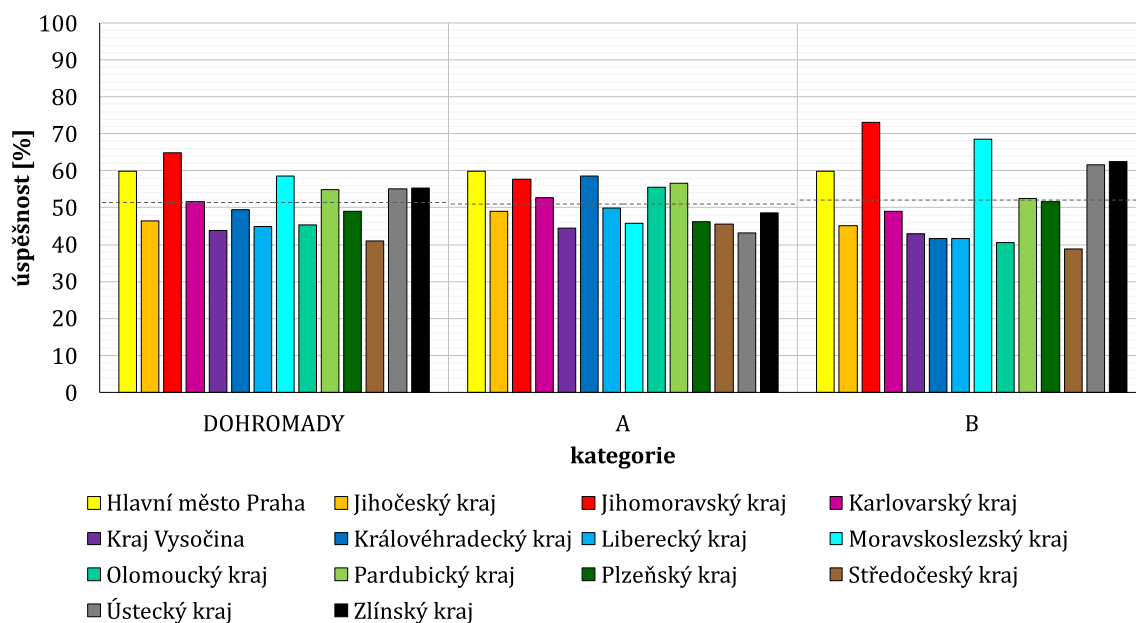
**Obrázek 21:** Průměrná procentuální úspěšnost podkapitol molekulové fyziky a termodynamiky v jednotlivých krajích.

V grafu na obrázku 21 jsou porovnávány kraje v rámci podkapitol molekulové fyziky a termodynamiky. Tento graf je uveden spíše pro zajímavost, protože už se jedná o velmi podrobné porovnání v rámci malých celků. U podkapitol 3 (Práce plynu, kruhový děj), 4 (Pevné látky) a 6 (Změny skupenství) není možné úplné porovnání, protože jsou to menší podkapitoly a navíc nejsou dostupné výsledkové listiny. Lepší porovnání krajů můžeme provést z tabulky 9 a podle ní vytvořeného grafu na obrázku 22. Dle těchto dat mezi kraje, jejichž řešitelé jsou úspěšní v řešení příkladů z oblasti termodynamiky a molekulové fyziky, můžeme zařadit Hlavní město Praha, Jihomoravský kraj a Pardubický kraj, a to v rámci obou kategorií zvlášť. Pokud bychom všechny řešitele kategorií A a B brali dohromady, mezi úspěšnější bychom také mohli zařadit Moravskoslezský, Ústecký a Zlínský kraj. Naopak mezi méně úspěšné kraje v této oblasti bychom zařadili Středočeský kraj, Kraj Vysočina a Liberecký kraj. V kategorii A (samostatně) je nejméně úspěšným krajem Ústecký s celkovou úspěšností 43,23 %, naopak

nejvyšších hodnot indexu obtížnosti dosahuje Hlavní město Praha (59,93 %). V kategorii B je nejlepšími výsledky dosahuje Jihomoravský kraj s úspěšností 73,05 %, největších ztrát nabývají řešitelé ze Středočeského kraje (38,86 %).

**Tabulka 9:** Průměrné procentuální úspěšnosti oblasti termodynamiky a molekulové fyziky v jednotlivých krajích.

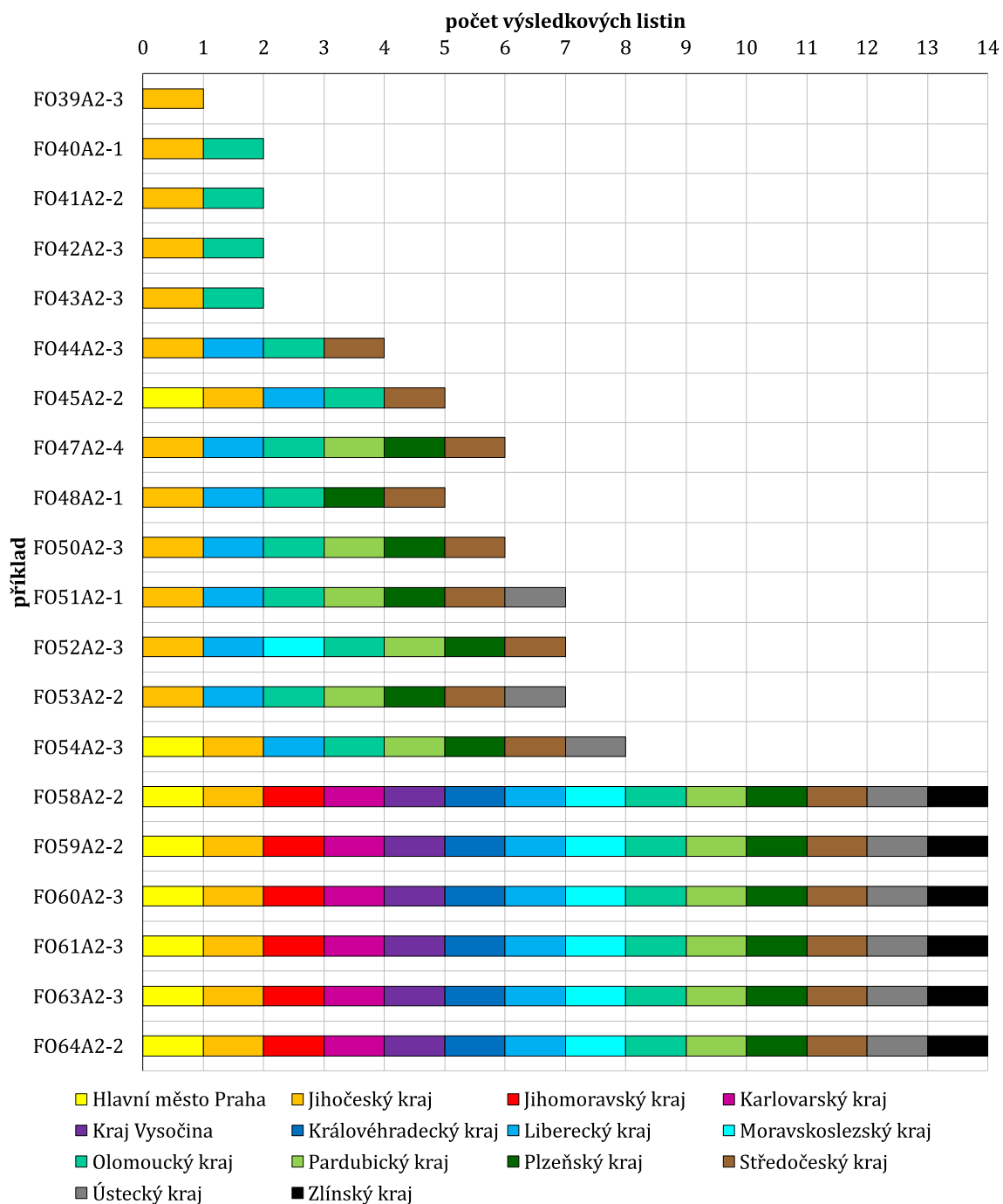
KRAJ	DOHROMADY	A	B
Hlavní město Praha	59,92	59,93	59,91
Jihočeský kraj	46,31	48,93	45,04
Jihomoravský kraj	64,78	57,71	73,05
Karlovarský kraj	51,52	52,61	49,00
Kraj Vysočina	43,73	44,53	42,89
Královéhradecký kraj	49,47	58,64	41,57
Liberecký kraj	44,96	49,81	41,69
Moravskoslezský kraj	58,53	45,69	68,47
Olomoucký kraj	45,33	55,57	40,60
Pardubický kraj	54,83	56,60	52,50
Plzeňský kraj	48,98	46,11	51,61
Středočeský kraj	41,07	45,65	38,86
Ústecký kraj	55,00	43,23	61,64
Zlínský kraj	55,40	48,52	62,44



**Obrázek 22:** Průměrná procentuální úspěšnost oblasti molekulové fyziky a termodynamiky v jednotlivých krajích.

V grafu na obrázku 23 je opět zaznamenán počet dostupných výsledkových listin, tentokrát pro oblast optiky. Jak již bylo několikrát zmiňováno, touto oblastí se až na jedinou výjimku zabývá pouze kategorie A, proto není nutné v grafu kategorie rozlišovat. Ze dvaceti příkladů je

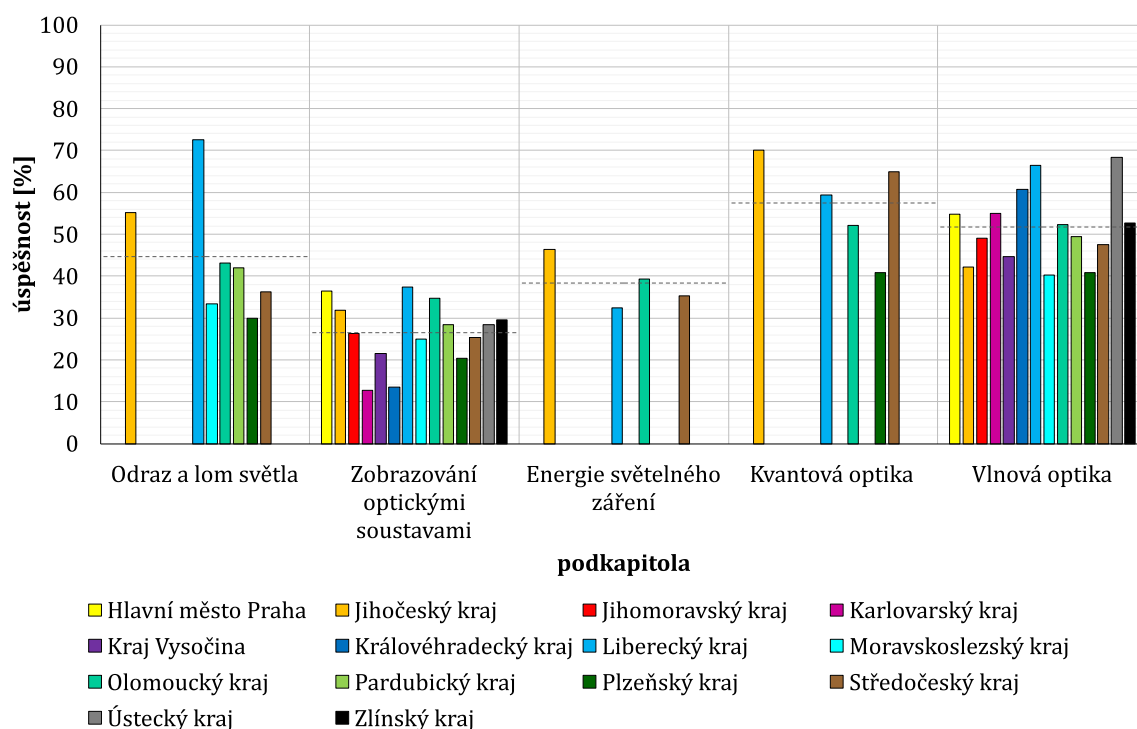
pouze pro šest kompletních čtrnáct výsledkových listin, především pro pět nejstarších příkladů je možné dohledat pouze minimum dat. Přesto jsou pro analýzu využita všechna data.



**Obrázek 23:** Počet dostupných listin na jednotlivé příklady zaměřené na oblast optiky.

Graf na obrázku 24 porovnává jednotlivé kraje v rámci pěti podkapitol optiky. Dle tohoto grafu je možné kompletní porovnání krajů pouze u druhé (Zobrazování optickými soustavami) a poslední (Vlnová optika) podkapitoly. Už zde je patrná úspěšnost Libereckého a Jihočeského kraje, vezmeme-li v potaz alespoň kraje, jejichž výsledkové listiny druhého kola jsou dostupné pro všechny podkapitoly.



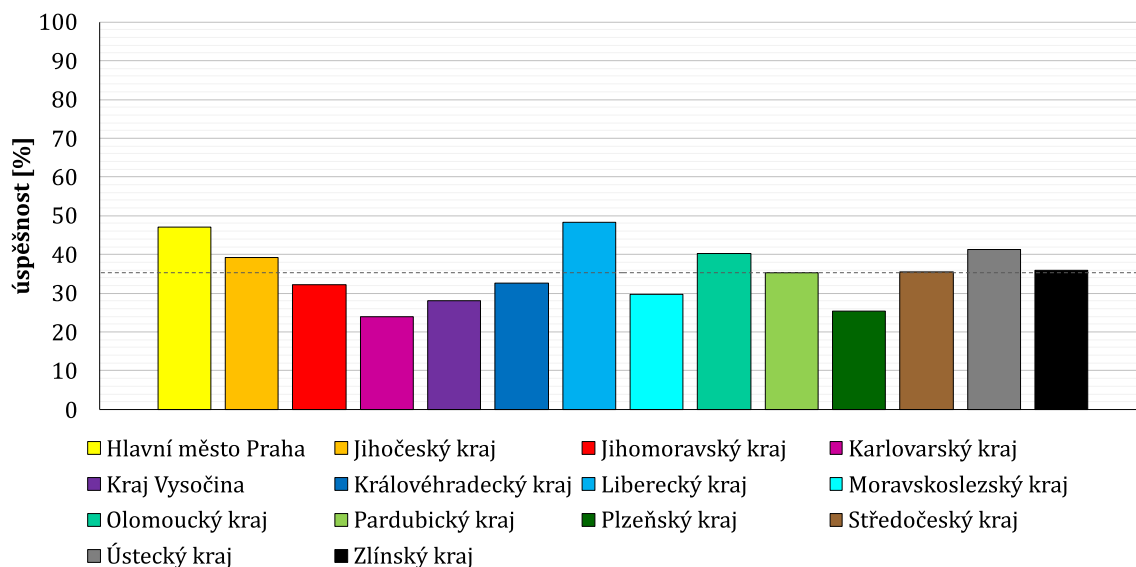


**Obrázek 24:** Průměrná procentuální úspěšnost podkapitol optiky v jednotlivých krajích.

Zajímavější pro srovnání v oblasti optiky je tabulka 10 a podle ní vytvořený graf na obrázku 25. Na rozdíl od tabulky 9 a obrázku 22 pro molekulovou fyziku a termodynamiku chybí pro srovnání kategorie B. Z tabulky a grafu pro optiku je patrné, že nejvyšší úspěšnost má Liberecký kraj (48,39 %), v těsném závěsu Hlavního města Prahy (47,10 %). Na třetím místě v pořadí bychom zařadili Ústecký kraj. Naopak nejméně úspěšný je Karlovarský kraj s procentuální úspěšností 24,00 %, mezi méně úspěšné bychom ale mohli zařadit také například Plzeňský kraj, Kraj Vysočina a Moravskoslezský kraj.

**Tabulka 10:** Průměrné procentuální úspěšnosti oblasti optiky v jednotlivých krajích.

KRAJ	A
Hlavní město Praha	47,10
Jihočeský kraj	39,23
Jihomoravský kraj	32,15
Karlovarský kraj	24,00
Kraj Vysočina	28,16
Královéhradecký kraj	32,66
Liberecký kraj	48,39
Moravskoslezský kraj	29,78
Olomoucký kraj	40,26
Pardubický kraj	35,39
Plzeňský kraj	25,36
Středočeský kraj	35,52
Ústecký kraj	41,35
Zlínský kraj	35,91



**Obrázek 25:** Průměrná procentuální úspěšnost oblasti optiky v jednotlivých krajích.

Porovnejme si ještě na závěr úspěšnost krajů v jednotlivých oblastech mezi sebou. Mezi nejúspěšnější kraje v rámci molekulové fyziky a termodynamiky patří v rámci kategorie A Hlavní město Praha, v rámci kategorie B Jihomoravský kraj, a pokud vezmeme obě kategorie dohromady, jsou mezi nejlepšími kraji v tomto pořadí Jihomoravský kraj, Hlavní město Praha a Moravskoslezský kraj. V rámci optiky mají nejvyšší úspěšnost Liberecký kraj, Hlavní město Praha a Ústecký kraj. Pro srovnání dle [2] jsou v rámci kategorie A oblasti elektřiny a magnetismu nejúspěšnější řešitelé z Hlavního města Prahy, v rámci kategorie B také řešitelé z Hlavního města Prahy, a v rámci obou kategorií patří mezi nejlepší kraje Hlavní město Praha, Moravskoslezský kraj a Olomoucký kraj. Pro porovnání s bakalářskou prací je ale nutné uvážit fakt, že byly posuzovány pouze ročníky 39 až 62 v kategorii A a 39 až 61 v kategorii B.

Na opačném konci žebříčku v oblasti molekulové fyziky a termodynamiky stojí v kategorii A Ústecký kraj, v kategorii B Středočeský kraj a v rámci obou kategorií jsou méně úspěšnými kraji Středočeský kraj, Kraj Vysočina a Liberecký kraj. Oblast optiky nejméně zvládají řešitelé z Karlovarského a Plzeňského kraje a Kraje Vysočina. Oblast elektřiny a magnetismu je v rámci kategorie A nejnáročnější pro soutěžící ze Středočeského kraje, v kategorii B z Královéhradeckého kraje a v rámci kompletní analýzy obou kategorií obsazují spodní příčky Královéhradecký, Ústecký a Plzeňský kraj.

Z tohoto porovnání je patrné, že v každém kraji je situace odlišná – např. Liberecký kraj má nejvyšší úspěšnost v oblasti optiky, ale patří mezi nejméně úspěšné kraje v rámci termodynamiky a molekulové fyziky. Ústecký kraj je na tom podobně jako Liberecký, ale mezi méně úspěšné kraje patří i v oblasti elektřiny a magnetismu. Dále si nelze nevšimnout, že Hlavní město Praha se mezi nejúspěšnějšími kraji pohybuje nejčastěji. Nezodpovězenou otázkou ovšem zůstává, co je příčinou těchto rozdílů.

## Kapitola 2

# Analýza úloh Fyzikální olympiády v dalších zemích

Pro srovnání úloh FO ČR s dalšími zemí bylo cílem srovnat náš systém se zemí s podobným systémem a se zemí s rozdílným systémem. Z tohoto důvodu byly vybrány Slovenská republika a Finská republika.

Slovenský systém fyzikální olympiády je v mnohém podobný našemu, což je dáno historií a jazykem. Člení se na sedm kategorií, přičemž pro střední školy jsou čtyři, které mají dvě až tři kola. Organizační struktura se liší v drobnostech, a pro analýzu bylo možné dohledat všech dvacet šest sledovaných ročníků kategorií A a B, především s pomocí PaedDr. Ľubomíra Konráda z Gymnázia Veľká Okružná 22 v Žilině.

Finský systém je odlišný a zahrnuje spolupráci s dalšími severskými i neseverskými zeměmi. Dělí se do stupňů a probíhá na školách i z prostředí domova. Soutěžící mohou soutěžit v rámci dvou sérií (obdoba kategorie), přičemž v závěrečném stupni, kterým je Seversko-Baltská olympiáda, už obě kategorie soutěží dohromady. Analýza finského olympijského systému byla prováděna ve spolupráci s doc. Anssi Lindellem, Ph. D. z Jyväskylän yliopisto. Bohužel v rámci rozboru systému této země bylo možné porovnání úloh pouze s tzv. Seversko-Baltskou olympiádou, protože první a druhý stupeň olympiády nemá kompletní zadání, která by mohla být analyzována.

## 2.1 Slovensko

Slovenský systém tamější Fyzikální olympiády je obdobný našemu systému Fyzikální olympiády. Organizátorem soutěže je Slovenská komisia Fyzikální olympiády spolupracující se Slovenským institutem mládeže. Do vzniku České a Slovenské republiky byla pořádána jedna společná Československá fyzikální olympiáda, která byla založena v roce 1959 [8]. První separovaný ročník České a Slovenské republiky byl 34. ročník ve školním roce 1993/1994, ve druhém pololetí školního roku 1992/1993 ještě olympiáda proběhla dohromady, přičemž celostátní kolo kategorie A se konalo v Žilině [9]. Separace nebyla hned od začátku úplná, nejprve se oddělilo vedení a administrativa, a teprve později si každá z komisí začala připravovat úlohy samostatně. Zajímavá je ale přítomnost původně české úlohy ve 43. ročníku prvního kola kategorie B (úloha 43-FO-B-I-6), která je obdobou příkladu FO43B1-3 v české olympiádě). Tento příklad je jediným za posledních dvacet šest let, který se objevil v rámci dostupných zadání Slovenské FO, a spadá do oblasti molekulové fyziky a termodynamiky.

### 2.1.1 Srovnání průběhu olympiády v Česku a na Slovensku

Fyzikální olympiáda Slovenska je pořádána v kategoriích A až G, přičemž pro střední školy jsou určeny kategorie A až D. Kategorie A odpovídá nejvyššímu ročníku střední školy (maturitnímu). Soutěž pro střední školy probíhá ve třech kolech pro kategorii A (domácí, krajské a celostátní) a ve dvou kolech pro kategorie B až D (domácí a krajské).

Domácí kolo zahrnuje sedm úloh, z nichž je minimálně jedna experimentální. Zde je dle srovnání slovenského a českého organizačního řádu rozdíl, protože v domácím kole české Fyzikální olympiády je vždy pouze jedna úloha experimentální [10, 11]. Nutno ale podotknout, že se od ročníku 39 v žádném kole ani jedné z obou zkoumaných kategorií dvě experimentální úlohy neřešily. V FO SK se však např. v příkladu 62FO-B-I-3 objevil pokyn k drobnému experimentu, kde je v podúloze a) zadáno: „*Urobte jednoduchý pokus s tromi rovnakými fľašami od minerálky a zistite, v akom poradí sa prevrátia.*“ (úlohu je možné dohledat v archivu IU-VENTA [12]). Na tuto podúlohu dále navazuje teoretické pokračování. Takto motivovaná úloha může být jistě pro žáka zajímavá, protože si situaci nejen představí, ale také ji vidí a mohou ho napadnout další možnosti řešení.

Podmínkou pro označení za úspěšného řešitele a postupu do dalšího kola je stejně jako v ČR vyřešení minimálně pěti úloh na pět bodů, a nutností je realizace experimentální úlohy, a to i neúspěšná [10, 13]. Za každou úlohu je možné získat celkem deset bodů. Úspěšný řešitel domácího kola kategorií A až D postupuje do druhého kola, kterým je kolo krajské. Pro kategorie B až D je toto kolo finální. Obdobně jako v ČR jsou zde zadávány čtyři úlohy po deseti bodech. Ty musí soutěžící vyřešit minimálně na patnáct bodů, aby byl označen za úspěšného řešitele, přičemž alespoň jednu úlohu musí mít minimálně na pět bodů. V české FO pro úspěšného řešitele není hranice patnáct bodů, ale čtrnáct.

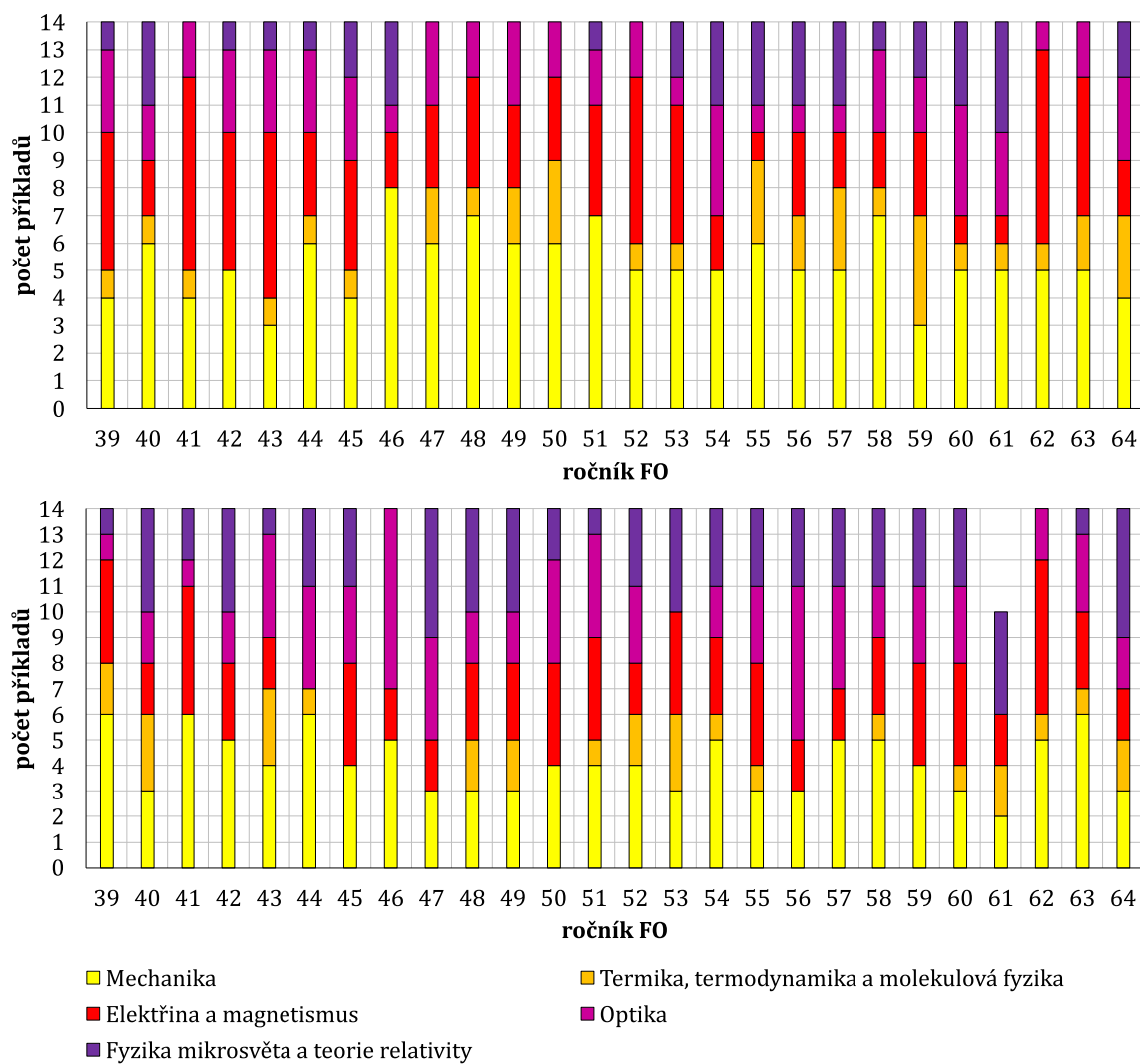
Úspěšní řešitelé druhého kola kategorie A postupují do posledního kola na poli Slovenské republiky, celostátního kola. Zde jsou zadávány čtyři teoretické a jedna experimentální úloha. Teoretická úloha je hodnocena deseti body a experimentální dvaceti. Úspěšně vyřešená úloha je taková, ve které soutěžící dosáhl alespoň 50 % maximálního bodového hodnocení. Vítězi celostátního kola jsou soutěžící, kteří obsadí prvních deset příček, další řešitelé, kteří mají alespoň 50 % bodového zisku za první až třetí místo a alespoň jednu úlohu hodnocenou úspěšně, získávají diplom úspěšného řešitele. Ostatní řešitelé obdrží diplom za účast. Tento postup je obdobný v ČR.

Na celostátní kolo navazuje ještě Mezinárodní fyzikální olympiáda (IPhO) a Evropská fyzikální olympiáda (EuPhO), kam se vybírají ti nejlepší z celostátního kola.

## 2.1.2 Srovnání příkladů zadávaných v olympiádě v Česku a na Slovensku

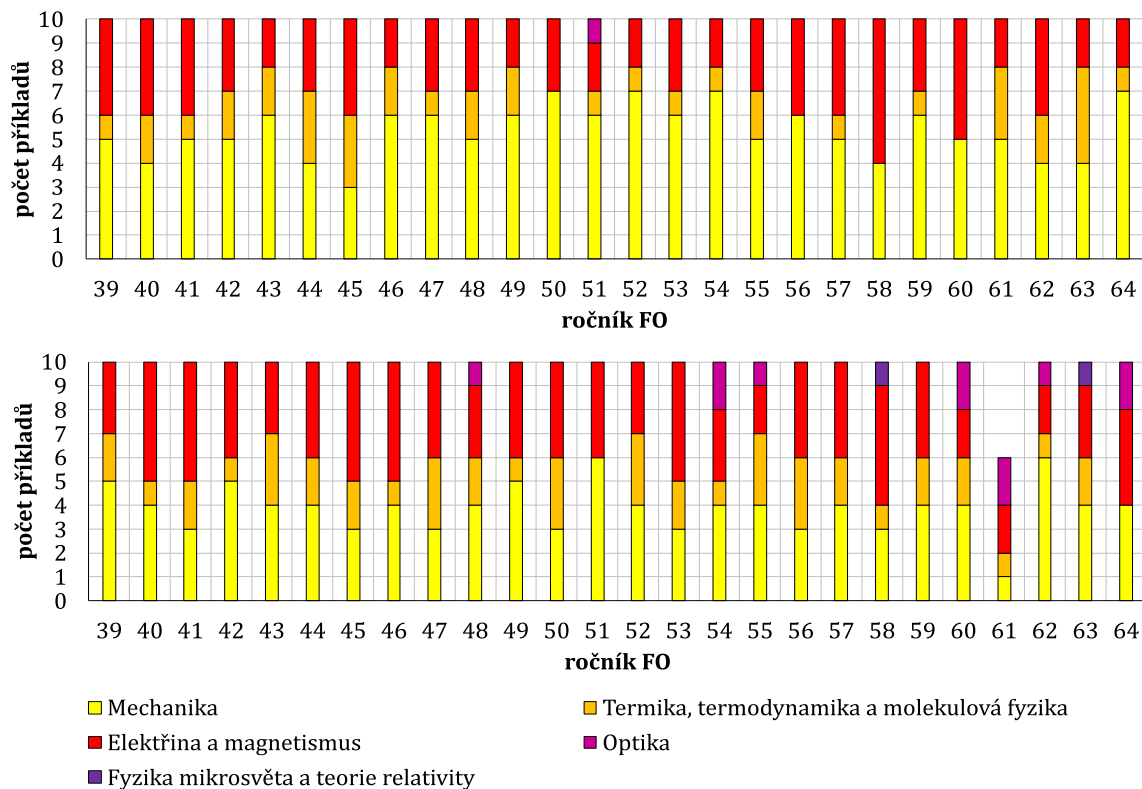
Pro srovnávací analýzu byla použita zadání a řešení slovenské fyzikální olympiády nalezená na webových stránkách [14, 15, 16] a průběžně aktualizovaná sbírka FYZIKA V ZAUJÍMAVÝCH RIEŠENÝCH ÚLOHÁCH [17], která je případně dostupná u PaedDr. Ľubomíra Konráda, který je dlouholetým členem komise. Úlohy jsou ve sbírce tematicky členěny a sbírka je vydávána ve formě CD a tímto způsobem pravidelně šířena zájemcům.

V grafech na obrázcích 1 a 2 jsou vykreslena zastoupení jednotlivých oblastí fyziky v jednotlivých ročnících FO Slovenska v kategoriích A a B. Pro přehlednost jsou v těchto obrázcích vloženy také kopie grafů pro FO ČR z první kapitoly obecné části diplomové práce.



**Obrázek 1:** Zastoupení jednotlivých oblastí fyziky v jednotlivých ročnících FO v kategorii A (horní obrázek Česká republika – kopie obrázku 1 první kapitoly obecné části, spodní obrázek Slovenská republika).

V kategorii A je každý rok v obou olympiádách zadáváno čtrnáct teoretických příkladů ze třech kol. Z obou grafů je patrné, že v České republice jsou v kategorii A častěji zadávány úlohy z mechaniky na úkor úloh z optiky a fyziky mikrosvěta a teorie relativity. V souvislosti s pandemií COVID-19 bylo třetí kolo kategorie A a druhé kolo kategorie B ve školním roce 2019/2020 (61. ročník) ve slovenské FO zrušeno.

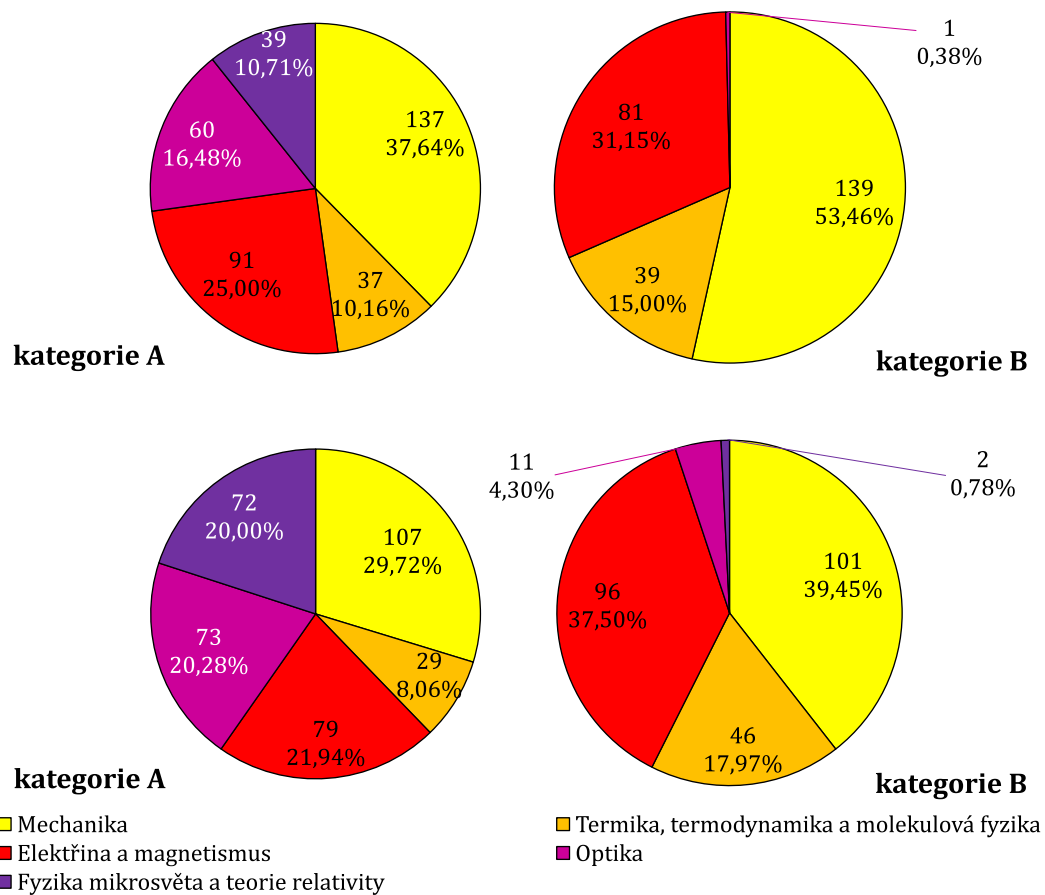


**Obrázek 2:** Zastoupení jednotlivých oblastí fyziky v jednotlivých ročnících FO v kategorii B (horní obrázek Česká republika – kopie obrázku 2 první kapitoly obecné části, spodní obrázek Slovenská republika).

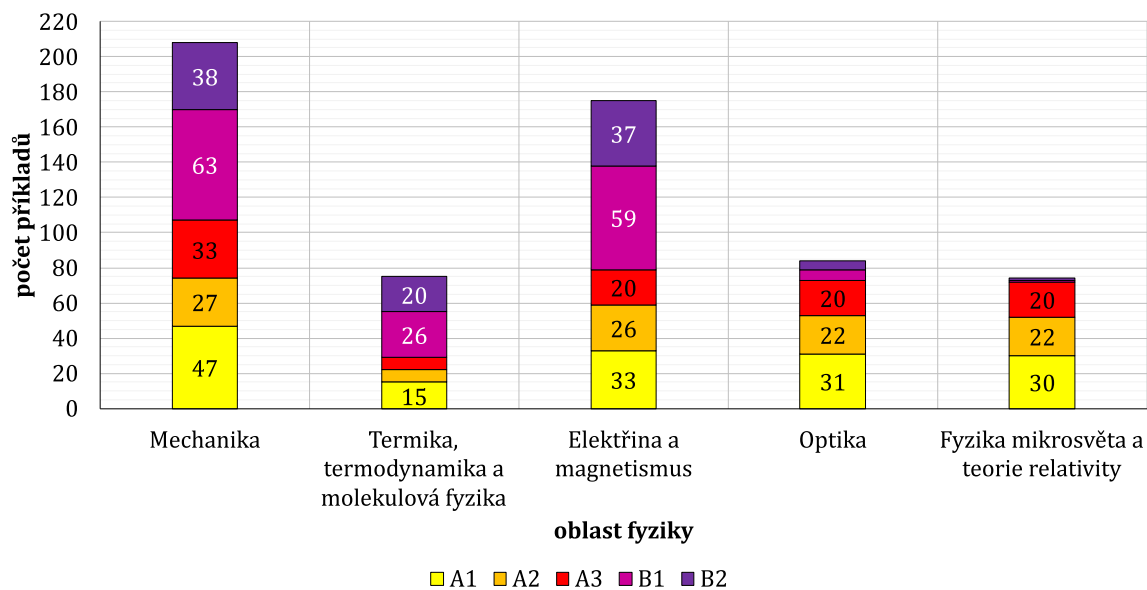
V kategorii B je dle obrázku 2 situace obdobná – na Slovensku je zadáváno méně příkladů z mechaniky a více příkladů z elektřiny a magnetismu, mimo to jsou ale v kategorii B také zadávány příklady z optiky. Ve starších ročnících se jednalo především o příklady podkapitoly Energie světelného záření, kam je zařazena také radiometrie a s ní související záření černého tělesa, v pozdějších ročnících jsou zadávány také příklady zabývající se čočkami a zákony odrazu a lomu. Mimo to se během dvaceti šesti let na Slovensku v kategorii B také vyskytly dva příklady z oblasti fyziky mikrosvěta a teorie relativity – 58FO-B-I-5 zaměřený na Ritzův paradox a 63FO-B-II-5 věnovaný urychlovačům částic.

V grafu na obrázku 3 je zobrazen koláčový graf ukazující podíl jednotlivých oblastí fyziky během dvaceti šesti let olympiády. Zde vidíme hlavní rozdíly v počtu úloh. Zatímco v ČR tvoří optika a fyzika mikrosvěta a teorie relativity okolo čtvrtiny úloh kategorie A, na Slovensku je těmto tématům věnována více než třetina úloh. Dominantou v obou zemích v kategorii A je oblast mechaniky, naopak nejmenší podíl tvoří molekulová fyzika a termodynamika. Elektřina a magnetismus v obou zemích tvoří zhruba čtvrtinu úloh (na Slovensku trochu méně). V kategorii B je rozdíl mezi zeměmi ještě větší. Zatímco v ČR se za dvacet šest let vyskytla pouze jediná úloha z oblasti optiky, na Slovensku se v posledních letech stává běžnou součástí zadání v obou kolech. Druhým patrným rozdílem je poměr mechaniky a elektřiny a magnetismu – zatímco v ČR je mechanika dominantou i v této kategorii (tvoří více než polovinu úloh), a elektřina a magnetismus tvoří okolo třetiny příkladů, na Slovensku jsou tyto oblasti více méně vyrovnané.

V obrázku 4 můžeme ještě sledovat rozložení příkladů jednotlivých oblastí v rámci kategorií. v České republice je pořadí zastoupení oblastí v rámci obou kategorií dohromady 1 – mechanika, 2 – elektřina a magnetismus, 3 – termika, termodynamika a molekulová fyzika, 4 – optika, 5 – fyzika mikrosvěta a teorie relativity. V slovenské olympiádě je situace podobná, ale na třetím místě je optika, a teprve poté molekulová fyzika a termodynamika.



**Obrázek 3:** Zastoupení jednotlivých oblastí fyziky v jednotlivých kategoriích FO (horní obrázek Česká republika – kopie obrázku 3 první kapitoly obecné části, spodní obrázek Slovenská republika).



**Obrázek 4:** Počty příkladů jednotlivých částí fyziky v jednotlivých kolech kategorií A a B FO Slovenska.

Slovenská fyzikální olympiáda má s českou mnoho společného, protože mají společné začátky a podobný jazyk, přesto se ale najde několik odlišností, zejména ve struktuře úloh. V případě, že budete procházet dvacet šest ročníků české a slovenské olympiády, všimnete si, že úlohy na Slovensku mají mnohem časteji historickou vsuvku. Ve stručnosti je na začátku úlohy popsána nějaká událost, poznatek z astronomie nebo objev, což je určitě dobré pro obohacování znalostí žáků. Tyto úvody jsou psány velmi poutavě a zajímavě. Úlohy se dále liší v hojnosti výskytu teoretických otázek v rámci příkladů, ve kterých se dále počítá – např. Uveďte fyzikální analýzu procesu..., Uveďte fyzikální zákony, které se uplatní při... atd. Takovéto otázky jsou v počátku dílčích otázek a jsou bodované. Bodování příkladů je ve slovenské FO podrobnější a řešení jsou ve spoustě případů podrobněji rozepsaná, s větším počtem mezikroků.

Kromě historické vsuvky na začátek a množství teoretických otázek se také úlohy z ČR a SR liší v množství „povzbuzujících námětů“ pro žáky. Při analýze úloh byla velmi zajímavá již zmíněná experimentální motivační otázka úlohy z prvního kola – na začátek žák vidí situaci v praxi a může tak dostat nové nápady. Mimo to je někdy na konci zadání ještě napsaná poznámka, která má žákovi dále pomoci pochopit zadání nebo zadání více specifikovat (např. kolik hodnot si má vypočítat pro konstrukci grafu, dovysvětlení otázky atd.). Takové poznámky někdy bývají i v české olympiádě, ale většinou jen ve formě návodu na zjednodušení matematického vztahu. Celkově i zadání úloh bývají na první pohled jiná – některé úlohy mají zadání delší, a mají více podúloh, které jsou jednodušší, a v řešení jsou rozepsány malé kroky po menším počtu bodů. Posledním na první pohled zřejmým rozdílem je zadávání úloh s velkým množstvím obrázků a především fotografií, které jsou navíc barevné – obrázky jsou v české FO v těchto kategoriích zadávány také, ale barevné fotografie prakticky vůbec.



## 2.2 Finsko

Systém fyzikální olympiády ve Finsku je odlišný od systému v ČR, přesto bychom mohli i FO Finska rozdělit na tři stupně (kola). Prvním stupněm je dobrovolná národní soutěž pořádaná v místních školách asociací MAOL (Finská asociace učitelů matematiky, fyziky, chemie a informatiky), která je tvořena dvaceti devíti kluby po celém Finsku [18]. Kluby se snaží nejen získávat nové nadšence pro vědu, ale také organizují vzdělávací a rekreační akce. Jednou z jejich činností je pořádání celostátní soutěže pro středoškoláky ve čtyřech přírodovědných oborech – matematice, fyzice, chemii a informatice.

Soutěž se dělí na dvě série – základní a otevřenou [19, 20]. Rozdíl je především ve věku žáků. Základní série (řada) je určena pro žáky prvních a druhých ročníků středních škol, a tudíž i jejím obsahem jsou úlohy odpovídající začátku střední školy (zejména mechanika a energie). Otevřená série se mohou zúčastnit všichni žáci střední školy, tedy i žáci prvního a druhého ročníku. Úlohy otevřené série zahrnují učivo celé střední školy. Pro obě série se první kolo koná zpravidla v listopadu přímo na středních školách a nejlepších deset účastníků otevřené série získává místo ke studiu bez přijímacích zkoušek pro matematické a přírodovědné obory na univerzitách po celé zemi. Tři nejlepší účastníci navíc získávají ještě finanční odměnu.

### 2.2.1 Trenérské dopisy (Valmennuskirjeet)

Pomyslným druhým kolem jsou tzv. Valmennuskirjeet, což bychom do češtiny přeložili jako trenérské dopisy („coaching letters“). Trenérské dopisy jsou zasílány čtyřiceti nejlepším žákům z každé série [19, 20]. V rámci tréninku jsou žákům zaslány dva trenérské dopisy (jeden na začátku ledna a jeden na začátku února), které žáci mohou dobrovolně odevzdávat zhruba do konce února.

V úvodu prvního dopisu je gratulace k postupu, organizační informace o datu a místě konání Seversko-Baltské olympiády, dále možnosti další přípravy, odkazy na výukové materiály, a především pokyny k odevzdání řešení úkolů, které jsou poslední součástí dopisu. Úloh je dohromady devět až deset, každá je bodována šesti body. Příklady jsou různorodé, z různých oblastí fyziky, a obsahují teoretické otázky k zamyslení a výpočtové úlohy. V rámci zadání jsou další dílčí úkoly a poznámky k řešení. Ukázka příkladu z optiky z trenérského dopisu z roku 2023, otevřená série, převzato z [21], přeloženo a upraveno:

#### Příklad 5 (6b.): Optika

Vzpomeňte si na to, co si pamatujete o čočkách a tvorbě obrazů jimi vytvořených. Poté se podívejte na videa na kanálu Learn Physics Channel.

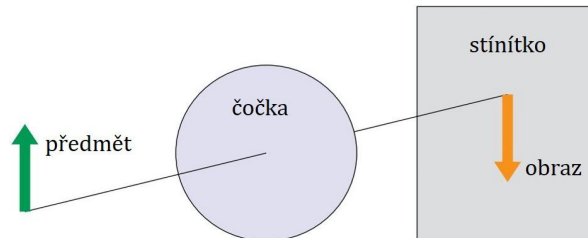
- Geometrická optika čoček a zrcadel (<https://www.youtube.com/watch?v=kA3ApQYGTqw>).
- Odraz (<https://www.youtube.com/watch?v=gawPCXrkhK0>), který popisuje, jak rovinná zrcadla vytvářejí obraz.
- Teorie tenkých čoček (<https://www.youtube.com/watch?v=Xo8bohzwjzU>)

Udělejte si poznámky k věcem, které jste dosud neznali. Zobrazení situace je k následujícím otázkám je na obrázku 5.

- a) Čočka na stínítku vytváří ostrý, převrácený obraz. Co uvidíte na stínítku, když čočku odstraníte?

1. Obraz je převrácený a rozmazaný.

2. Obraz je vzpřímený a ostrý.
3. Obraz je vzpřímený a rozmazaný.
4. Obraz je tmavší, ale jinak se nemění.
5. Obraz vůbec není vytvořen.



**Obrázek 5:** Zobrazení situace, k zadání příkladu č. 5 prvního trenérského dopisu 2023.

- b) Co se ve výše uvedené situaci stane s obrazem, když je horní část čočky zakrytá?
- c) Předmět vysoký 2 cm je vzdálen 40 cm od sbíhavé čočky s ohniskovou vzdáleností 20 cm. Pomocí sledování paprsků zjistíte polohu a velikost obrazu. Pokuste se to provést přesně pomocí pravítka změřením vzdáleností od obrazu. Tip: Začněte tím, že zvažíte měřítko, ve kterém budete obrázek kreslit. Nakonec vypočítejte polohu a velikost tvořeného obrazu. Výsledek porovnejte s tím, který jste určili kreslením.
- d) Ryba v akváriu s rovnými stěnami se dívá na hladovou kočku číhající mimo akvárium. Vidí ryba kočku blíže, dále nebo ve skutečné vzdálenosti? Zdůvodněte to.
- e) Podíváte se do zvětšovacího zrcadla a vidíte správně zvětšený obraz svého obličeje. Z čeho se tento obraz skládá? Je obraz před zrcadlem, na povrchu zrcadla nebo za zrcadlem? Zdůvodněte to.
- f) Když se podíváte na dutou stranu lžíce, obraz je vzhůru nohama. Proč?

Součástí tohoto zadání je tedy také experimentální úloha, a to s pomůckami, které jsou běžně dostupné doma. V prvním dopisu je ale také samostatná experimentální úloha, která je na rozdíl od experimentálních úloh zadávaných v ČR zadána velmi stroze a žák by měl sám přijít na to, jak úlohu provést. Příkladem takové úlohy je úloha č. 9 z trenérského dopisu z roku 2023, otevřená série, převzato z [21], přeloženo:

#### **Příklad 9 (6b.):**

Změřte konstantu pružiny kuličkového pera. Uveďte odhad chyby svého výsledku pomocí metody vhodné pro vámi zvolenou situaci (další informace o analýze chyb naleznete na domovské stránce olympijských trenérských dopisů na <https://www.jyu.fi/science/fi/fysiikka/ajankohtaista/suomen-fysiikan-olympiavalmennus/valmennusmateriaalia>).

Účelem cvičení je procvičit si analýzu chyb, například pomocí metody maxima a minima nebo použitím sofistikovanějších statistických metod. Zaměřte se tedy při řešení zejména na to – vlastní měření může být velmi jednoduché!

Na první trenérský dopis navazuje druhý, který obsahuje deset úloh, které ale mají mnohem kratší zadání než úlohy prvního dopisu. U úloh není přímo uvedeno bodování, dle dostupných informací je ale možné za jednu úlohu získat maximálně šest bodů. Součástí je opět experimentální úloha. Příklad fyzikální úlohy z druhého trenérského dopisu z roku 2023, otevřená série, převzato z [22], přeloženo:

#### **Příklad 4:**

Dvě auta A a B jedou vedle sebe po dálnici rychlostí  $v$ . Auto A pak zrychlí na rychlost  $2v$ . O kolik se zvýší jeho kinetická energie vzhledem k hodnotě

- a) policie stojící u silnice?
- b) autu B?

Vysvětlete a zdůvodněte případný rozdíl.

K úlohám prvního a druhého dopisu je možné využívat jakékoli zdroje, ať už internetové, knižní, ale také diskuze s přáteli a učiteli. Vyřešené úlohy se poté zasílají zpět k organizátorům a dvacet nejlepších řešitelů (dohromady z otevřené a základní série) je pozváno do Seversko-Baltské olympiády. V základní sérii je ještě pro ty nejlepší vytvořen víkendový kemp, v rámci kterého mají možnost se seznámit s některými experimentálními úlohami.

### **2.2.2 Seversko-Baltská olympiáda**

Seversko-Baltská fyzikální olympiáda (NBPhO) má počátky v roce 1992 [23]. Vznikla z dobrých vztahů mezi Finskem a Estonskem – v roce 1992 se ve Finsku konala Mezinárodní fyzikální olympiáda a Finové tehdy pozvali Estonsko, které po letech znovu získalo svou nezávislost.

Od roku 1999 obě země pořádají výcvikové kempy, jejichž teoretická část probíhá zhruba týden v Estonsku, a jejich experimentální část poté týden ve Finsku. Tréninkový kemp ve Finsku probíhá od roku 2009 pod záštitou katedry fyziky Univerzity v Jyväskylě [19].

Od roku 2003 začala být pořádána Estonsko-Finská fyzikální olympiáda, jejíž první ročník proběhl v Tallinnu a zúčastnilo se jí tehdy okolo dvaceti soutěžících z každé země [19, 23]. Postupem času se organizátoři rozhodli přizvat další země, a tak se v roce 2014 připojilo ještě Lotyšsko a v roce 2016 Švédsko. Soutěž bylo proto přejmenována na Seversko-Baltskou fyzikální olympiádu. Tyto čtyři země mohou každá posílat dvacet účastníků na základě svého výběru, soutěže se ale celkem účastní až sto dvacet lidí. Do soutěže se mohou totiž zapojit i další země, ale pouze s maximálním limitem pěti žáků [24]. Hostující týmy ze dalších zemí si musí podat žádost, která je individuálně posuzována. Letošního ročníku se tak zúčastnily týmy z Estonska, Finska, Lotyšska, Švédska, Litvy, Srbska, Gruzie, Saúdské Arábie a z Vietnamu [25].

Soutěž probíhá po dobu tří dnů v dubnu v hlavním městě Estonska a zahrnuje jak teoretickou, tak experimentální část [19, 20]. Po dobu těchto tří dnů nejsou žáci po celou dobu na soutěži, ale mají také možnost osobního volna na prohlídku města. Soutěž je dělena na dvě části, první část probíhá první den a druhá druhý den, pokaždé po dobu pěti hodin [25].

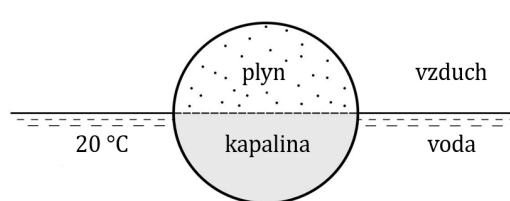
Úlohy zadávané v této části soutěže jsou odlišné od úloh, které žáci z Finska řeší na středních školách, což je také důvod, proč ve Finsku zavedli systém trenérských dopisů – úlohy v trenérských dopisech žáky připravují jak na Seversko-Baltskou fyzikální olympiádu, tak také na Evropskou fyzikální olympiádu a Mezinárodní fyzikální olympiádu [19]. Každá úloha je bodována jiným počtem bodů a u většiny úloh je velké množství dílčích úloh.

Příkladem úlohy z letošního ročníku je úloha č. 2, převzato z [26], přeloženo, upraveno:

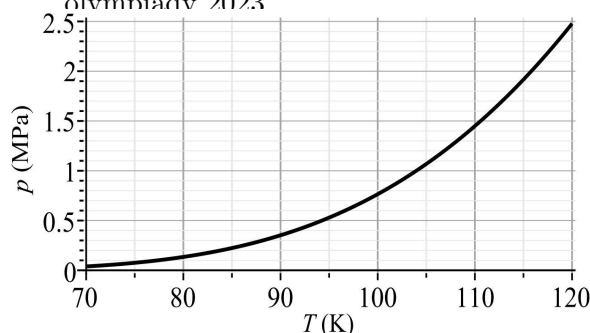
**Příklad 2 (8b.): Exploze dusíku – Päivo Simson**

Polokoule o poloměru  $r = 0,1\text{ m}$  je naplněna kapalným dusíkem o teplotě varu  $T_1 = 77,4\text{ K}$  ( $-195,8\text{ °C}$ ). Druhá polovina je pak pevně přitisknuta na první, čímž vznikne koule obsahující kapalný dusík a plyný dusík, z nichž každý zaujímá polovinu objemu. Koule je okamžitě vhozena do vody o teplotě  $T_v = 20\text{ °C}$ , kde plave přesně podle obrázku níže. Po nějaké době vybuchne. Zobrazení situace je na obrázku 6

Koule je vyrobena z plastu PCTFE o hustotě  $\rho_p = 2130\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , maximální pevnosti v tahu  $\sigma = 3,4\cdot 10^7\text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$  (při překročení tohoto napětí se plast rozlomí) a tepelné vodivosti  $k = 0,84\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ . Pro kapalný dusík je za zde uvažovaných podmínek latentní teplo vypařování  $\lambda = 2,0\cdot 10^5\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}$ , měrné teplo  $c_v = 2000\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  a hustota  $\rho_n = 808\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Molární hmotnost  $M(N_2) = 28\text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ . Ideální plynová konstanta  $R = 8,31\text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ . Závislost tlaku nasycených par dusíku na teplotě je uvedena v grafu na obrázku 7.



**Obrázek 6:** Zobrazení situace, k zadání příkladu č. 2 Seversko-Baltské fyzikální olympiády 2023



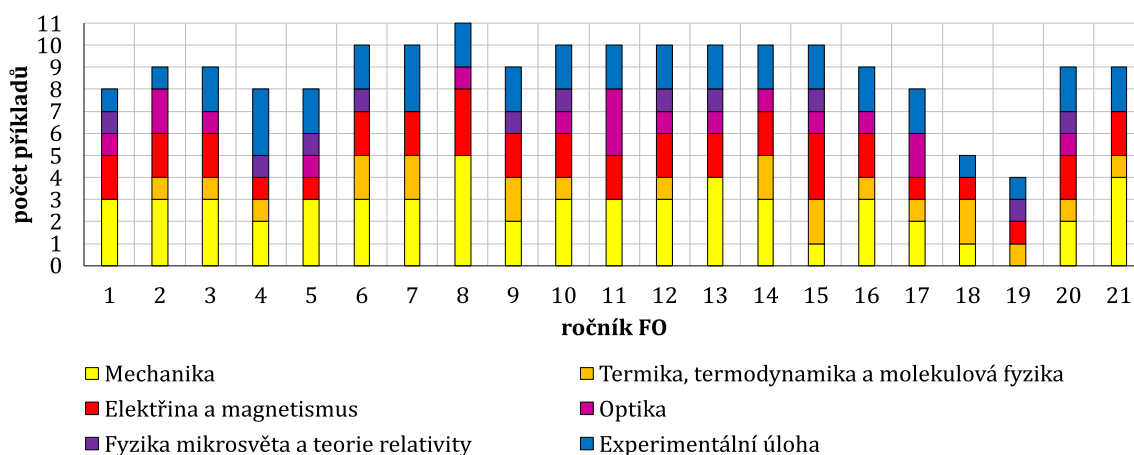
**Obrázek 7:** Graf závislosti tlaku nasycených par dusíku na teplotě, k zadání příkladu č. 2 Seversko-Baltské fyzikální olympiády 2023.

- (1,5 bodu) Jaká je tloušťka stěny  $d$  koule?
- (1,5 bodu) Jaký je tlak  $p_2$  uvnitř koule těsně před jejím výbuchem? Vnější tlak je  $p_a = 1,0\cdot 10^5\text{ Pa}$ .
- (1,5 bodu) Jaká je teplota  $T_2$  kapalného dusíku těsně před výbuchem?
- (1,5 bodu) Vypočítejte hmotnost dusíku, který se před výbuchem vypaří uvnitř koule.
- (2 body) Odhadněte dobu, za kterou koule exploduje. Tepelnou kapacitu plastu a tepelný tok procházející horní polovinou koule můžeme zanedbat.

Ze Seversko-Baltské olympiády je poté z finského národního týmu vybráno pět žáků, kteří Finsko reprezentují v Mezinárodní fyzikální olympiádě. Zajímavé je, že úlohy z NBPhO jsou pro žáky tak náročné, že ani vítěz v soutěži zdaleka nedosahuje maximálního počtu bodů. Např. vítěz letošního kola získal v soutěži 67,08 % z celkového počtu bodů, nejlepší Fin 54,17 %. Dle [19] má soutěžící téměř zajištěné místo v olympijském týmu pro Mezinárodní fyzikální olympiádu i v případě, že získá pouze třetinu maximálního počtu bodů. Před Mezinárodní fyzikální olympiádou probíhají jako příprava již zmiňované výukové kempy, jeden týden v Estonsku a jeden týden ve Finsku.

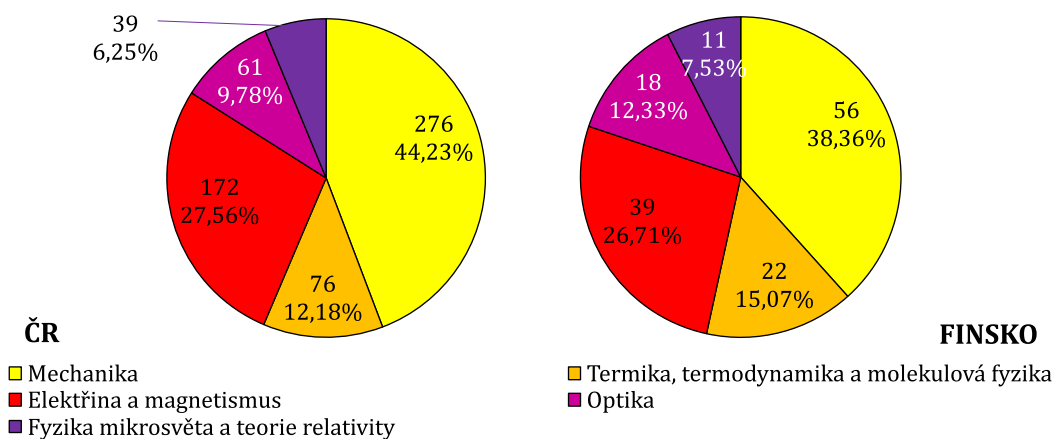
### 2.2.3 Srovnání příkladů zadávaných v olympiádě v České republice a v Seversko-Baltské olympiádě

Srovnání zastoupení jednotlivých ročníků a oblasti mezi Českou republikou (popř. Slovenskem) a Finskem je velmi obtížné vzhledem k tomu, že je ve Finsku jiný systém olympiády. Mimo to nejsou na internetu příliš dostupné trenérské dopisy, dohledatelné jsou pouze od roku 2017. Pro srovnání ale byla provedena analýza zadána a řešení Seversko-Baltské olympiády (původně Estonsko-Finské) od jejího počátku, tedy od roku 2003. Tato řešení je možné dohledat v archivu NBPhO [27, 25].



**Obrázek 8:** Zastoupení jednotlivých oblastí fyziky v jednotlivých ročnících v Seversko-Baltské olympiádě.

V grafu na obrázku 8 je zobrazeno zastoupení jednotlivých oblastí fyziky v jednotlivých ročnících Seversko-Baltské olympiády. Na první pohled je zřejmé kolísání počtu příkladů v jednotlivých ročnících. Nejméně příkladů bylo zadáno v 18. a 19. ročníku, a to pravděpodobně proto, že tyto ročníky probíhaly on-line. Naopak nejvíce příkladů, jedenáct, zahrnoval ročník 8. Do grafu pro Finsko byla také zahrnuta množství experimentálních úloh, a to zejména z toho důvodu, že na rozdíl od České a Slovenské republiky jich každý ročník zahrnuje jiné množství – od jedné až po tři. Tyto úlohy jsou velmi propracované a zahrnují experimentální dovednost, teoretické znalosti a kombinování s praktickými dovednostmi v rámci řešení příkladu. Počty příkladů jsou vždy uvedeny za oba dva dny průběhu olympiády.



**Obrázek 9:** Počty příkladů jednotlivých částí fyziky v rámci České republiky (za obě kategorie dohromady) a v rámci Seversko-Baltské olympiády.

V obrázku 9 jsou koláčové grafy s procentuálním zastoupením příkladů jednotlivých částí fyziky v ČR a v Seversko-Baltské olympiádě. Jako data k tvorbě koláčového grafu pro Českou republiku byly využity obě kategorie za posledních dvacet šest let. Dle tohoto grafu je procentuální zastoupení jednotlivých oblastí v ČR a v NBPhO velmi podobné (ačkoli je pro NBPhO zahrnuto mnohem méně příkladů). Mezi nápadné rozdíly patří grafický vzhled zadání – v NBPhO jsou zadání psána ve formě čtyř sloupců, zatímco v ČR a SR se zadání do sloupců nedělí. Velmi krásně psaná jsou také řešení příkladů zejména v posledních ročnících NBPhO, kde je velmi detailně rozepsáno, co je možné bodovat, jakým počtem bodů, a co naopak nebodovat. Člověk, který poté řešení opravuje, má tedy „podrobnější manuál“. V neposlední řadě jsou rozdílné také již zmiňované experimentální úlohy, a to jak ve struktuře, tak také v počtu – v ČR se vyskytují v prvním a třetím kole vždy po jedné, ve NBPhO v jediném kole v počtu jeden až tři, nejčastěji však dvě.

Část II

# PŘÍKLADOVÁ ČÁST

Příkladová část této práce se věnuje dvěma oblastem fyziky - molekulové fyzice a termodynamice, která zahrnuje úlohy kategorií A a B, a optice, která zahrnuje především úlohy kategorie A. Celkově zahrnuje šedesát příkladů, třicet z každé oblasti. Obě kapitoly jsou následně rozdělené do podkapitol podle témat, systém podkapitol byl inspirován dále zmíněnými středoškolskými učebnicemi, ale také samotnými úlohami z Fyzikální olympiády. Některé kapitoly, které se běžně vyskytují ve středoškolských učebnicích se v olympiádách vůbec nevyskytují, naopak se zde ale vyskytují úlohy, které jsou výrazně nadstavbové a je nutné se podívat také např. do vysokoškolských učebnic fyziky nebo středoškolských učebnic chemie. Stejně jako u bakalářské práce, která byla věnována oblasti elektřiny a magnetismu, je i zde každá podkapitola rozdělena do tří částí.

První část každé podkapitoly tvoří úvod obsahující vztahy, označení veličin pro vztahy a základní souvislosti a zákony mezi nimi. Nejedná se o žádný podrobný výklad, protože je zde vycházeno z předpokladu, že jestliže se žák věnuje řešení úloh Fyzikální olympiády, má základní znalost z hodin fyziky, a úvod do podkapitoly je pouze připomenutím před samotným řešením úloh. Při tvorbě těchto opakovacích částí jsem vycházela ze svých vlastních znalostí, ze vztahů uvedených přímo v řešení olympiád, popř. ze sbírek příkladů Cvičení z fyziky v kostce [28], Sbíрка úloh z fyziky [29], Sbíрка řešených úloh z fyziky [30] a středoškolských přehledů Přehled středoškolské fyziky [31] a Fyzika bez nervů [32], ze které byly čerpány také obrázky v optice. Mimo to byly využity také další odborné publikace, které jsou ale zvlášť uvedené u jednotlivých částí sbírky.

Ve druhé části podkapitol jsou uvedena samotná řešení jednotlivých úloh. Příklady jsou seřazeny od nejjednodušších po nejnáročnější – vždy v pravé části nadpisu příkladu je uvedena procentuální úspěšnost příkladu. V levé části nadpisu je poté uvedeno číslo příkladu (1 až 30), označení příkladu dle užívaného stylu ve Fyzikální olympiádě a název příkladu. U starších ročníků se v olympiádě neuváděl název příkladu, pro úplnost byl doplněn dle smyslu zadání příkladu. V práci nejsou odlišovány úlohy kategorie A a kategorie B v rámci podkapitol, všechny úlohy jsou brány jako rovnocenné, jsou odlišovány pouze v rámci obecné části diplomové práce. U některých úloh jsou v rámci řešení na oficiálních stránkách Fyzikální olympiády dohledatelná alternativní řešení, vzhledem k rozsahu práce bylo až na výjimku uvedeno vždy jedno řešení. Všechny příklady je možné dohledat na oficiálních webových stránkách Fyzikální olympiády České republiky [1], odkud byla také zadání a řešení převzata. Zadání a řešení byla následně kompletně opravena a pokud byla nalezena chyba, byla opravena.

Třetí část podkapitoly je pouze doplňující a propojuje řešené příklady se statistickým zpracováním. Příklady jsou porovnávány mezi sebou z hlediska obtížnosti, úspěšnosti jednotlivých krajů, množství dostupných výsledkových listin, ale také dle výskytu v jednotlivých ročnících a kolech FO. Na základě těchto údajů je možné říci, zda jsou vyhodnocená data porovnatelná mezi sebou – pokud jsou u některého příkladu dostupné pouze výsledkové listiny ze dvou krajů a u jiného ze dvanácti, porovnání není úplně objektivní. V každé podkapitole je uveden graf ukazující zastoupení příkladů v rámci ročníků Fyzikální olympiády, graf porovnávající příklady z hlediska obtížnosti (s uvedenou průměrnou procentuální úspěšností podkapitoly), a graf porovnávající jednotlivé kraje v rámci příkladů z krajských kol. Pokud podkapitola obsahuje pouze jeden příklad, není uveden graf porovnávající příklady z hlediska obtížnosti.



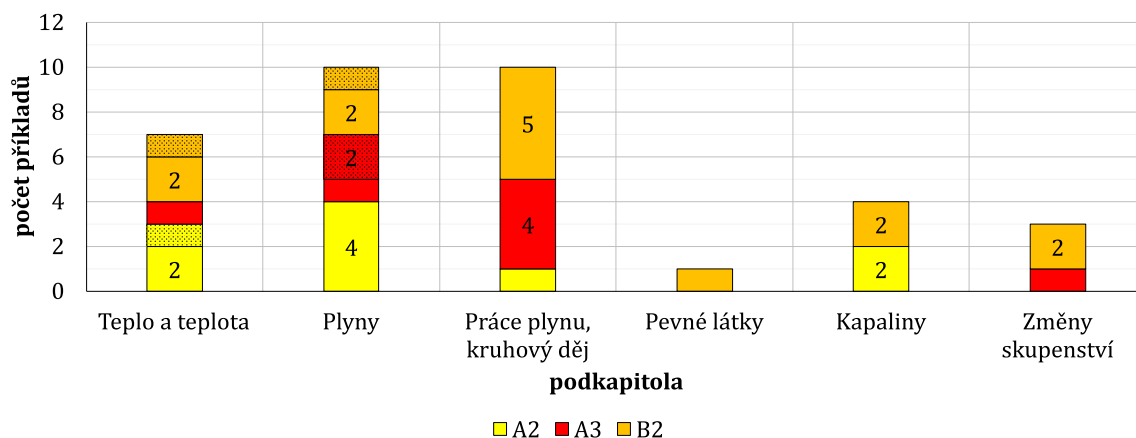
## Kapitola 3

# Molekulová fyzika a termodynamika

První část sbírky zahrnuje oblast molekulové fyziky a termodynamiky. Dohromady obsahuje třicet příkladů, které jsou rozdělené do šesti podkapitol a obsahují tyto počty řešených příkladů:

1. Teplo a teplota – pět příkladů,
2. Plyny – sedm příkladů,
3. Práce plynu, kruhový děj – deset příkladů,
4. Pevné látky – jeden příklad,
5. Kapaliny – čtyři příklady,
6. Změny skupenství – tři příklady.

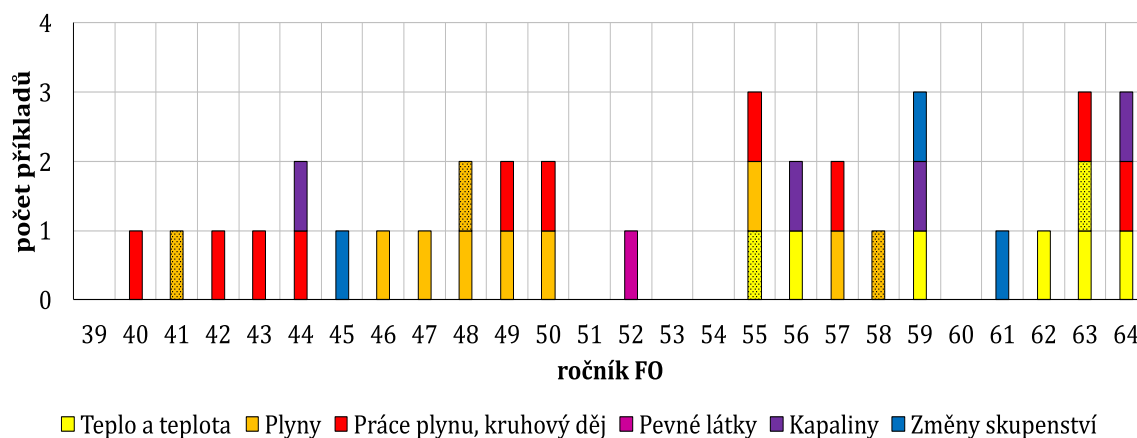
Zastoupení příkladů v jednotlivých podkapitolách z hlediska postupových kol kategorií A a B je zobrazeno na obrázku 1. Příklady, které do podkapitol řadíme, ale nejsou uvedeny ve sbírce, jsou odlišeny texturou.



**Obrázek 1:** Zastoupení řešených příkladů z molekulové fyziky a termodynamiky Fyzikální olympiády jednotlivých kol v podkapitolách.

Pět příkladů bylo z postupových kol vyřazeno a ve sbírce nejsou uvedeny. Nejvíce řešených příkladů je tedy z druhého kola kategorie B (čtrnáct), devět příkladů je z druhého kola kategorie A a sedm příkladů je ze třetího kola kategorie A. Obrázek 2 zobrazuje četnost příkladů uvedených ve sbírkové části v jednotlivých ročnících Fyzikální olympiády – příklady, které do podkapitol sice můžeme zařadit, ale nejsou ve sbírce uvedeny, jsou odlišeny texturou.

Z grafu je patrné, že sedm z dvaceti šesti ročníků není ve sbírce vůbec uvedeno, naopak z ročníků 59 a 64 jsou vždy uvedeny příklady tři. Nejvyšší procentuální úspěšnost má příklad FO56A2-3 první podkapitoly (příklad č. 1, 82,18 %), naopak nejnižší úspěšnost má příklad FO57A2-2 druhé podkapitoly (příklad č. 12, 10,36 %).



**Obrázek 2:** Zastoupení řešených příkladů z molekulové fyziky a termodynamiky Fyzikální olympiády jednotlivých podkapitol v jednotlivých ročnících.

Protože tato oblast fyziky je v některých místech úzce spojena s chemií, nebo naopak nestačily poznatky uvedené ve středoškolských učebnicích fyziky, byly pro tvorbu částí věnovaných základním pojmům a vztahům použity kromě zdrojů uvedených na začátku příkladové části také učebnice chemie [33] (zejména pro část Plyny) a vysokoškolské skriptum zabývající se touto oblastí fyziky [34] (pro části Plyny a Změny skupenství). Některé vztahy byly využity přímo z řešení jednotlivých úloh.

## 3.1 Teplo a teplota

### 3.1.1 Základní pojmy a vztahy

Teplo  $Q$  a teplota  $t$  jsou základními fyzikálními veličinami termiky a termodynamiky. Základním rozdílem těchto dvou veličin je, že teplota je stavovou veličinou, zatímco teplo je veličinou dějovou. Teplotu je možné měřit v různých teplotních stupnicích, mezi nejznámější patří Kelvinova a Celsiova, v USA je hojně využívaná stupnice Fahrenheitova. Převodní vztah mezi Celsiovou teplotou  $t$  udávanou ve stupních Celsia ( $^{\circ}\text{C}$ ) a termodynamickou teplotou  $T$  udávanou v kelvinech (K) je

$$t = (\{T\} - 273,15)^{\circ}\text{C},$$

a obdobně

$$T = (\{t\} + 273,15)\text{K}.$$

Základní teplotní stupnice je termodynamická teplotní stupnice, základní jednotkou teploty je tedy kelvin.

Teplo je skalární veličina jejíž jednotkou je joule (J). Je mírou energie, kterou těleso odevzdá, popř. přijme při tepelné výměně (tedy energie, kterou teplejší těleso předá chladnějšímu). Teplo můžeme vyjádřit vztahem

$$Q = mc\Delta t = mc\Delta T,$$

kde  $m$  je hmotnost tělesa, jehož teplota se změnila o  $\Delta t$  (popř.  $\Delta T$ ), a  $c$  je měrná tepelná kapacita látky. Měrná tepelná kapacita závisí na materiálu a skupenství látky, navíc závisí na teplotě. Při běžných výpočtech ale tuto hodnotu považujeme za konstantní, nebo v daném teplotním intervalu zavádíme průměrnou měrnou tepelnou kapacitu. Hodnotu měrné tepelné kapacity je možné dohledat v tabulkách, jednotkou této veličiny je joule na kilogram na kelvin ( $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ). Kromě měrné tepelné kapacity látky existuje také tepelná kapacita soustavy  $C$  daná vztahem

$$C = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{Q}{\Delta T},$$

jednotkou je joule na kelvin ( $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ ).

K experimentálnímu určení tepla a tepelné kapacity se využívá kalorimetrů. Jedním z nejznámějších kalorimetrů je směšovací kalorimetr, do kterého se vkládají kapalina a těleso, které má větší teplotu než kapalina. Pro soustavu platí kalorimetrická rovnice, tedy

$$Q_o = Q_p,$$

po rozvedení

$$c_1 m_1 (t_1 - t) = c_2 m_2 (t - t_2) + C (t - t_2),$$

kde  $Q_o$  je teplo odevzdané tělesem,  $Q_p$  teplo přijaté kapalinou a nádobou kalorimetru,  $c_1$  měrná tepelná kapacita látky, ze které je zhotoveno těleso,  $m_1$  hmotnost tělesa,  $t_1$  počáteční teplota tělesa,  $c_2$  měrná tepelná kapacita kapaliny,  $m_2$  hmotnost kapaliny,  $t_2$  počáteční teplota kapaliny,  $C$  tepelná kapacita kalorimetru a  $t$  výsledná teplota.

Ne vždy se ale měření tepelné kapacity a tepla týká jen tělesa a kapaliny, je možné směšovat i jiné látky. Při mísení roztoků platí směšovací rovnice

$$m_1 w_1 + m_2 w_2 = (m_1 + m_2) w,$$

kde  $m_1$  a  $m_2$  jsou hmotnosti prvního a druhého roztoku,  $w_1$  a  $w_2$  jsou hmotnostní procenta prvního a druhého roztoku a  $w$  je hmotnostní procento výsledního roztoku. Hmotnostní procento  $w$  je poměr mezi hmotnostmi rozpuštěné látky  $m_s$  a hmotností celého roztoku  $m_r$ , tedy

$$w = \frac{m_s}{m_r} = \frac{m_s}{m_k + m_s},$$

kde  $m_k$  je hmotnost kapaliny, ve které je látka rozpuštěna.

### 3.1.2 Řešené příklady

#### Příklad č. 1: FO56A2-3: Přelévání vody

[82,18 %]

V jednom kalorimetru je  $m = 200$  g vody o teplotě  $t_{01} = 20$  °C, ve druhém kalorimetru je dvojnásobné množství vody o teplotě  $t_{02} = 80$  °C. Z kalorimetru s teplejší vodou přelijeme  $\Delta m = 50$  g vody do kalorimetru s chladnější vodou a po promíchání přelijeme stejné množství vody zpět do kalorimetru s vodou teplejší.

- Jaký bude rozdíl teplot vody ( $t_2 - t_1$ ) v kalorimetrech po ustálení teplot?
- Jaký bude rozdíl teplot vody ( $t_4 - t_3$ ) v kalorimetrech, provedeme-li přelévání vody ještě jednou?
- Kolikrát budeme muset toto přelévání opakovat, aby rozdíl teplot v kalorimetrech byl menší než 1 °C?

Ztráty tepla při přelévání vody a tepelnou kapacitu kalorimetrů zanedbáme.

#### Řešení příkladu č. 1:

- a) Z kalorimetrické rovnice  $mc(t_1 - t_{01}) = \Delta mc(t_{02} - t_1)$  vyjádříme  $t_1$ :

$$t_1 = \frac{mt_{01} + \Delta mt_{02}}{m + \Delta m} = \frac{kt_{02} + t_{01}}{k + 1}, \quad \text{kde } k = \frac{\Delta m}{m} < 1.$$

Po vrácení vody do druhého kalorimetru platí  $c(2m - \Delta m)(t_{02} - t_2) = c\Delta m(t_2 - t_1)$ , takže po úpravě

$$2t_2 = t_{02}(2 - k) + kt_1 = t_{02}(2 - k) + \frac{kt_{02} + kt_{01}}{k + 1} = \frac{k(t_{01} + t_{02}) + 2t_{02}}{k + 1}.$$

Pro rozdíl teplot platí

$$t_2 - t_1 = \frac{k(t_{01} + t_{02}) + 2t_{02}}{2(k + 1)} - \frac{kt_{02} + t_{01}}{k + 1} = \frac{2(t_{02} - t_{01}) - k(t_{02} - t_{01})}{2(k + 1)}.$$

$$t_2 - t_1 = \frac{2 - k}{2(k + 1)}(t_{02} - t_{01}) = 42 \text{ °C}.$$

**5 bodů**

- b) Budeme-li přelévání opakovat ještě jednou, bude postup podobný a dostaneme

$$t_4 - t_3 = \frac{2 - k}{2(k + 1)}(t_2 - t_1) = \left[ \frac{2 - k}{2(k + 1)} \right]^2 (t_{02} - t_{01}) = 29 \text{ °C}.$$

**2 body**

- c) Aby byl rozdíl teplot  $\Delta t < 1$  °C, musíme celý proces opakovat nejméně  $n$ krát, musíme tedy vyřešit exponenciální rovnici:

$$\Delta t = \left[ \frac{2 - k}{2(k + 1)} \right]^n (t_{02} - t_{01}), \quad \text{odkud } n = \frac{\log \frac{\Delta t}{t_{02} - t_{01}}}{\log \frac{2 - k}{2(k + 1)}} = 11,5.$$

Celý postup tedy budeme muset opakovat 12krát.

**3 body**

**Příklad č. 2: FO63B2-2: Postupné ohřívání vody****[73,19 %]**

Kalorimetr s vodou má tepelnou kapacitu  $C$  a počáteční teplotu  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ . K dispozici máme větší počet stejných závažíček o tepelné kapacitě  $kC$ , kde  $k = 0,04$  o teplotě  $t = 100^\circ\text{C}$ . Jedno závažíčko vložíme do kalorimetru a po ustálení teplot je zase vytáhneme.

- Určete výslednou teplotu  $t_1$ .
- Do kalorimetru vložíme druhé závaží a postup opakujeme. Určete výslednou teplotu  $t_2$ .
- Jaká bude výsledná teplota, budeme-li postup opakovat 10krát?
- Kolikrát musíme postup opakovat, aby výsledná teplota přesáhla  $60^\circ\text{C}$ ?

**Řešení příkladu č. 2:**

- Podle kalorimetrické rovnice

$$C(t_1 - t_0) = kC(t - t_1)$$

vyjádříme

$$t_1 = \frac{kt + t_0}{1 + k} = \frac{kt + t - t + t_0}{1 + k} = t - \frac{1}{1 + k}(t - t_0) = 23,1^\circ\text{C}.$$

**3 body**

- Opět podle kalorimetrické rovnice

$$C(t_2 - t_1) = kC(t - t_2)$$

$$t_2 = t - \frac{1}{1 + k}(t - t_1) = t - \left(\frac{1}{1 + k}\right)^2(t - t_0) = 26,0^\circ\text{C}.$$

**2 body**

- Budeme-li postup opakovat  $n$ krát, bude pro výslednou teplotu platit

$$t_n = t - \left(\frac{1}{1 + k}\right)^n(t - t_0). \quad (1)$$

Pro  $n = 10$  je  $t_{10} = 46,0^\circ\text{C}$ .**2 body**

- Vztah (1) upravíme

$$t - t_n = \left(\frac{1}{1 + k}\right)^n(t - t_0)$$

a po zlogaritmování vyjádříme

$$n = \frac{\log \frac{t - t_0}{t - t_n}}{\log 1 + k}.$$

Dosadíme-li za  $t_n = 60^\circ\text{C}$ , dostaneme číselný výsledek  $n = 17,7$ . Aby výsledná teplota přesáhla  $t_n = 60^\circ\text{C}$ , musíme celý postup opakovat 18krát.

**3 body**

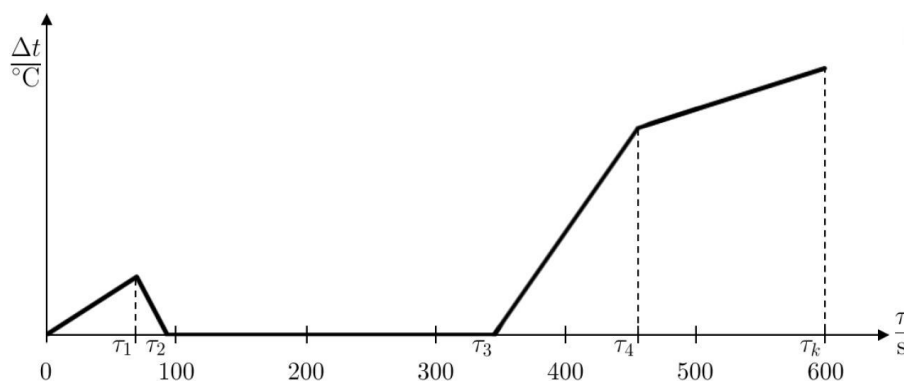
**Příklad č. 3: FO64B2-2: Kalorimetry s ledem**

[69,30 %]

Do dvou stejných kalorimetrů byly dány kousky ledu a po dobu  $\tau_k = 10$  min byly obsahy obou kalorimetrů zahřívány vařiči se stejným výkonem  $P$ . V prvním kalorimetru bylo o  $\Delta m = 100$  g ledu méně než ve druhém kalorimetru. Do grafu byla zaznamenávána závislost rozdílu teplot v kalorimetrech  $\Delta t$  na čase  $\tau$  (obr. 3). Zlomům grafu odpovídají hodnoty časů  $\tau_1 = 70$  s,  $\tau_2 = 93,3$  s,  $\tau_3 = 345$  s a  $\tau_4 = 460$  s. Měřítka na ose s rozdílem teplot se nedochovalo.

- Popište fyzikální děje v kalorimetrech v jednotlivých úsecích grafu.
- Určete výkon  $P$  vařičů.
- Určete hmotnosti  $m_1$  a  $m_2$  kousků ledu v obou kalorimetrech.
- Určete počáteční teploty kousků ledu  $t_{01}$  a  $t_{02}$  a konečné teploty  $t_{k1}$  a  $t_{k2}$  kousků ledu (nebo vzniklé vody) v kalorimetrech.

Měrná tepelná kapacita vody  $c_v = 4200 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , měrná tepelná kapacita ledu  $c_l = 2100 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , měrné skupenské teplo tání ledu  $l_t = 330 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

**Obrázek 3:** Graf k zadání úlohy FO64B2-2.**Řešení příkladu č. 3:**

- Protože je na začátku měření teplotní rozdíl v kalorimetrech nulový, je zřejmé, že počáteční teplota kousků ledu je v obou kalorimetrech stejná,  $t_{01} = t_{02}$ . Do času  $\tau_1$  je v obou kalorimetrech pouze led o teplotách zřejmě menších než  $0^\circ\text{C}$ , který se postupně ohřívá a ještě netaje. V prvním kalorimetru roste teplota rychleji, protože ledu je menší množství. V čase  $\tau_1$  začne led v prvním kalorimetru tát a teplotní rozdíl  $\Delta t$  se zmenšuje až do času  $\tau_2$ , kdy začne tát led i ve druhém kalorimetru. V časovém intervalu  $(\tau_2; \tau_3)$  taje led v obou kalorimetrech a teplota v nich je stejná ( $t_0 = 0^\circ\text{C}$ ), tedy  $\Delta t = 0$ . V čase  $\tau_3$  právě roztál všechny led v prvním kalorimetru a v časovém intervalu  $(\tau_3; \tau_4)$  se v prvním kalorimetru ohřívá voda vzniklá z ledu, zatímco ve druhém kalorimetru ještě pokračuje tání ledu. V intervalu  $(\tau_4; \tau_k)$  je již v obou kalorimetrech voda, která se postupně ohřívá. V prvním kalorimetru roste teplota rychleji než ve druhém.

**2 body**

- K určení výkonu potřebujeme znát dobu  $\tau_r$ , potřebnou k roztátí ledu o hmotnosti  $\Delta m$ , zahřátého na teplotu  $0^\circ\text{C}$ . Z grafu určíme

$$\tau_r = [(\tau_4 - \tau_2) - (\tau_3 - \tau_1)] = 91,7 \text{ s.}$$

Teplu na roztátí tohoto množství ledu dodá vaříč

$$P\tau_r = \Delta ml_t, \quad \text{odkud } P = \frac{\Delta ml_t}{\tau_r} = 360 \text{ W.}$$

**2 body**

c,d) Protože zahřátí ledu o hmotnosti  $\Delta m$  z počáteční teploty  $t_{01}$  na teplotu tání  $t_0 = 0^\circ\text{C}$  trvalo dobu  $(\tau_2 - \tau_1)$ , můžeme určit počáteční teplotu ledu  $t_{01}$  a  $t_{02}$ .

$$P(\tau_2 - \tau_1) = \Delta mc_l(t_0 - t_{01}),$$

odkud

$$t_{01} = t_{02} = t_0 - \frac{P(\tau_2 - \tau_1)}{\Delta mc_l} = t_0 - \frac{\Delta ml_t}{\tau_r} \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\Delta mc_l} = t_0 - \frac{l_t}{\tau_r} \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{c_l} = -40^\circ\text{C}.$$

**2 body**

Protože zahřívání menšího kousku ledu do teploty  $t_0 = 0^\circ\text{C}$  trvalo dobu  $\tau_1$ , můžeme určit jeho hmotnost  $m_1$ :

$$P\tau_1 = m_1 c_l(t_0 - t_{01}), \quad \text{odkud } m_1 = \frac{P\tau_1}{c_l(t_0 - t_{01})} = \frac{\Delta ml_t}{\tau_r} \frac{\tau_1}{c_l(t_0 - t_{01})} = 0,3 \text{ kg.}$$

Hmotnost druhého kousku ledu pak je

$$m_2 = m_1 + \Delta m = 0,4 \text{ kg.}$$

**2 body**

Zahříváním vody o hmotnosti  $m_1$  z teploty  $t_0 = 0^\circ\text{C}$  na konečnou teplotu  $t_{k1}$  v prvním kalorimetru trvá  $\tau_k - \tau_3 = 255$  s, vaříč dodá teplo

$$P(\tau_k - \tau_3) = m_1 c_v(t_{k1} - t_0).$$

Odtud

$$t_{k1} = t_0 + \frac{P(\tau_k - \tau_3)}{m_1 c_v} = t_0 + \frac{\Delta ml_t}{\tau_r} \frac{(\tau_k - \tau_3)}{m_1 c_v} = t_0 + \frac{c_l(t_0 - t_{01})(\tau_k - \tau_3)}{\tau_1 c_v} = 73^\circ\text{C}.$$

V prvním kalorimetru tedy bude výsledná teplota vody  $73^\circ\text{C}$ . V druhém kalorimetru se voda o hmotnosti  $m_2$  z teploty  $t_0 = 0^\circ\text{C}$  na konečnou teplotu  $t_{k2}$  ohřeje za dobu  $\tau_k - \tau_4 = 140$  s, vaříč dodá teplo

$$P(\tau_k - \tau_4) = m_2 c_v(t_{k2} - t_0), \quad \text{odkud } t_{k2} = t_0 + \frac{P(\tau_k - \tau_4)}{m_2 c_v} = 30^\circ\text{C}.$$

Výsledná teplota vody v druhém kalorimetru bude  $30^\circ\text{C}$ .

**2 body**

*Alternativní řešení této části úlohy bez předchozího výpočtu výkonu je možné dohledat na oficiálních stránkách FO.*

#### **Příklad č. 4: FO59A2-4: Přenos tepla**

**[61,31 %]**

Ve dvou nádobách A a B je stejný objem vody. V nádobě A je počáteční teplota  $t_{A0}$ , v nádobě B je počáteční teplota  $t_{B0}$ . Hmotnost vody  $m$  je v obou nádobách stejná, její měrná tepelná kapacita je  $c$ . V nádobě A se na počátku nachází tělísko s tepelnou kapacitou  $C_0$ . Tělísko přeneseme z nádoby A do nádoby B, počkáme, až se teploty vyrovnají, a pak tělísko přeneseme zpět do nádoby A.

- a) Jaké budou teploty  $t_{A1}$  a  $t_{B1}$  v nádobách po přenesení tělíska?  
 b) Dokažte, že pro teplotní rozdíl  $t_{A1} - t_{B1}$  platí vztah

$$t_{A1} - t_{B1} = \left( \frac{cm}{C_0 + cm} \right)^2 (t_{A0} - t_{B0}).$$

Přenášení tělíska opakujeme.

- c) Jaké budou teploty  $t_{Ak}$  a  $t_{Bk}$  v nádobách a jejich rozdíl  $t_{Ak} - t_{Bk}$  po  $k$ tém přenesení tělíska? Uvažte, že  $C_0 \ll cm$ .  
 d) Kolikrát musíme tělísko přenést, aby rozdíl teplot v nádobách nebyl větší než 3 % původního rozdílu teplot?

Tepelné ztráty do okolí zanedbáme. Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty  $t_{A0} = 80^\circ\text{C}$ ,  $t_{B0} = 18^\circ\text{C}$ ,  $m = 1,20\text{ kg}$ ,  $c = 4,2 \cdot 10^3\text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $C_0 = 80\text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $k = 8$ .

#### Řešení příkladu č. 4:

- a) Z kalorimetrické rovnice

$$C_0(t_{A0} - t_{B1}) = cm(t_{B1} - t_{B0}), \quad \text{odkud } t_{B1} = \frac{C_0 t_{A0} + cm t_{B0}}{C_0 + cm} = 19,0^\circ\text{C},$$

po přenesení tělíska zpět do nádoby A pak

$$C_0(t_{A1} - t_{B1}) = cm(t_{A0} - t_{A1}), \quad \text{odkud } t_{A1} = \frac{cm t_{A0} + C_0 t_{B1}}{C_0 + cm}$$

$$t_{A1} = \frac{cm t_{A0} + C_0 \frac{C_0 t_{A0} + cm t_{B0}}{C_0 + cm}}{C_0 + cm} = \frac{cm t_{A0} (C_0 + cm) + C_0 (C_0 t_{A0} + cm t_{B0})}{(C_0 + cm)^2} = 79^\circ\text{C}.$$

**2 body**

- b) Rozdíl teplot v nádobách po prvním přenosu

$$\begin{aligned} t_{A1} - t_{B1} &= \frac{cm t_{A0} (C_0 + cm) + C_0 (C_0 t_{A0} + cm t_{B0})}{(C_0 + cm)^2} - \frac{C_0 t_{A0} + cm t_{B0}}{C_0 + cm} = \\ &= \frac{cm t_{A0} (C_0 + cm) + C_0 (C_0 t_{A0} + cm t_{B0}) - (C_0 + cm) (C_0 t_{A0} + cm t_{B0})}{(C_0 + cm)^2}, \\ t_{A1} - t_{B1} &= \frac{(cm)^2}{(C_0 + cm)^2} (t_{A0} - t_{B0}) = \left( \frac{cm}{C_0 + cm} \right)^2 (t_{A0} - t_{B0}). \end{aligned}$$

**2 body**

- c) Podobně po  $k$ -tém přenosu

$$t_{Ak} - t_{Bk} = \left( \frac{cm}{C_0 + cm} \right)^{2k} (t_{A0} - t_{B0}) = 48^\circ\text{C}. \quad (2)$$

**2 body**

Napíšeme kalorimetrickou rovnici pro  $k$  přenosů:

$$(C_0 + cm)(t_{A0} - t_{Ak}) = cm(t_{Bk} - t_{B0}).$$



Rovnici upravíme na tvar

$$(C_0 + cm)t_{A0} + cmt_{B0} = (C_0 + cm)t_{Ak} + cmt_{Bk}.$$

Uvážíme-li, že  $C_0 \ll cm$ , můžeme napsat

$$t_{A0} + t_{B0} = t_{Ak} + t_{Bk}. \quad (3)$$

Z rovnic (2) a (3) pak po jejich sečtení

$$t_{Ak} = \frac{1}{2}t_{A0} \left[ 1 + \left( \frac{cm}{C_0 + cm} \right)^{2k} \right] + \frac{1}{2}t_{B0} \left[ 1 - \left( \frac{cm}{C_0 + cm} \right)^{2k} \right] = 73^\circ\text{C}$$

a jejich odečtením

$$t_{Bk} = \frac{1}{2}t_{A0} \left[ 1 - \left( \frac{cm}{C_0 + cm} \right)^{2k} \right] + \frac{1}{2}t_{B0} \left[ 1 + \left( \frac{cm}{C_0 + cm} \right)^{2k} \right] = 25^\circ\text{C}$$

**2 body**

*Alternativní řešení této části úlohy bez uvážení, že  $C_0 \ll cm$ , je možné dohledat na oficiálních stránkách FO.*

d) Ze vztahu (2) plyne

$$\frac{t_{Ak} - t_{Bk}}{t_{A0} - t_{B0}} = \left( \frac{cm}{C_0 + cm} \right)^{2k} < 0,03, \quad \text{odkud } k > \frac{\ln 0,03}{2 \ln \frac{cm}{C_0 + cm}} = 111,3.$$

Muselo by dojít k alespoň 112 přelitím.

**2 body**

### Příklad č. 5: FO62A3-3: Rozpouštění soli

[46,28 %]

Vhodíme-li do vroucí vody trochu kuchyňské soli, voda se na chvíli přestane vařit.

- a) Určete, k jakému snížení teploty dojde pouze tepelnou výměnou, uvažíme-li, že sůl má před vhozením do vody pokojovou teplotu. Podle směšovacího pravidla je tepelná kapacita směsi rovna součtu tepelných kapacit jednotlivých složek.

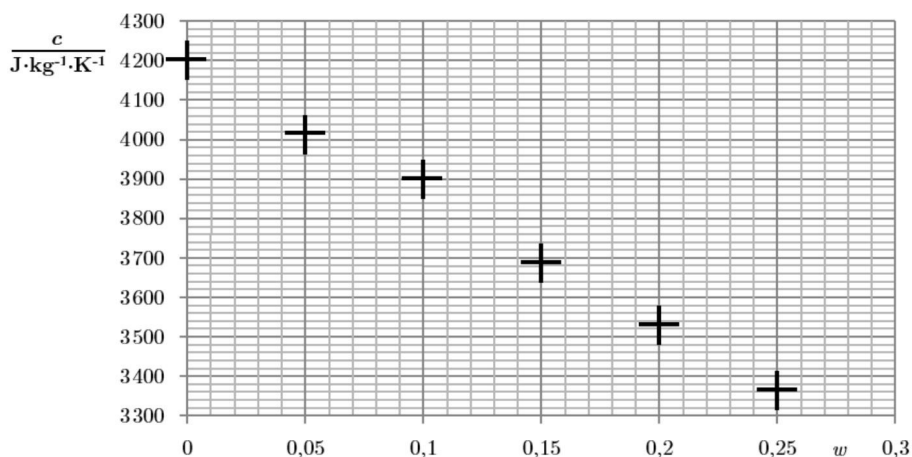
K určení měrné tepelné kapacity  $c_s$  chloridu sodného využijte experimentem získaný graf závislosti měrné tepelné kapacity  $c$  solného roztoku na jeho koncentraci  $w$  na obrázku 4. Koncentraci definujeme jako podíl  $w = \frac{m_s}{m_r}$ , kde  $m_s$  je hmotnost soli a  $m_r$  hmotnost roztoku.

- b) Určete, k jakému snížení teploty dojde, uvažíme-li, že na samotné rozpouštění soli je potřeba dodat rozpouštěcí teplo  $q$ .

Závislost rozpouštěcího tepla soli  $q$  na hmotnosti soli  $m_s$ , připadající na 1 kg vody při teplotách blízkých teplotě varu vody je v tabulce 1.

**Tabulka 1:** Tabulka k zadání úlohy FO62A3-3b.

$\frac{m_s}{\text{g}}$	10	50	100	200	350
$\frac{q}{\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}}$	72,3	66,2	57,3	42,5	32,2



Obrázek 4: Graf k zadání úlohy FO62A3-3a.

- c) S využitím přiložené tabulky 2 závislosti bodu varu na koncentraci soli ukažte, že zvýšení bodu varu vody je úměrné podílu hmotnosti soli a hmotnosti vody  $\Delta t = \frac{km_s}{m_v}$  a určete zvýšení bodu varu vody.

Tabulka 2: Tabulka k zadání úlohy FO62A3-3c.

$\frac{w}{\%}$	0	5	10	15	20	25
$\frac{t_v}{^\circ\text{C}}$	100	100,5	101,0	101,6	102,2	102,9

- d) Při uvážení všech tří jevů vypočítejte, za jak dlouho se bude voda znovu vařit, jestliže zahřátí 1 kg čisté vody z teploty  $t = 20^\circ\text{C}$  na teplotu varu  $t_v = 100^\circ\text{C}$  za stejných podmínek trvalo 6 minut.

Měrná tepelná kapacita vody  $c_v = 4,2 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Počáteční teplota soli  $t = 20^\circ\text{C}$ , hmotnost vody  $m_v = 1,0 \text{ kg}$ , hmotnost soli  $\alpha) m_{s1} = 25 \text{ g}$ ,  $\beta) m_{s2} = 250 \text{ g}$ .

### Řešení příkladu č. 5:

- a) Označme úbytek teploty  $\Delta t$ . Z kalorimetrické rovnice  $m_v c_v \Delta t = c_s m_s (t_v - \Delta t - t)$  vyjádříme

$$\Delta t = \frac{c_s m_s (t_v - t)}{m_v c_v + m_s c_s}.$$

Podle směšovacího pravidla  $c(m_v + m_s) = m_v c_v + m_s c_s$ . Protože  $w = \frac{m_s}{m_v + m_s}$ ,  $\frac{m_v}{m_v + m_s} = 1 - w$ , můžeme měrnou tepelnou kapacitu roztoku vyjádřit jako

$$c = c_v (1 - w) + c_s w = c_v - (c_v - c_s) w.$$

Závislost tepelné kapacity roztoku na jeho koncentraci je lineární, směrnice přímky je

$$k = -(c_v - c_s), \quad -\frac{4200 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} - 3360 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}{0,25} = -3360 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1},$$

měrná tepelná kapacita čisté soli  $c_s = 840 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

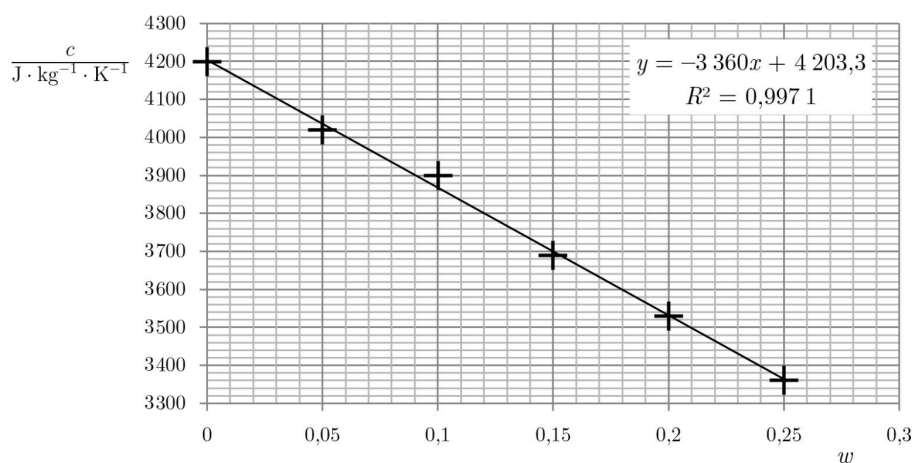
Teplota vody se tedy sníží o

$$\alpha) \Delta t_1 = \frac{c_s m_{s1} (t_v - t)}{m_v c_v + m_{s1} c_s} = 0,40^\circ\text{C}$$

$$\beta) \Delta t_2 = \frac{c_s m_{s2} (t_v - t)}{m_v c_v + m_{s2} c_s} = 3,8^\circ\text{C}$$

Pro ilustraci uvádíme na obrázku 5 parametry lineární regrese.

**3 body**



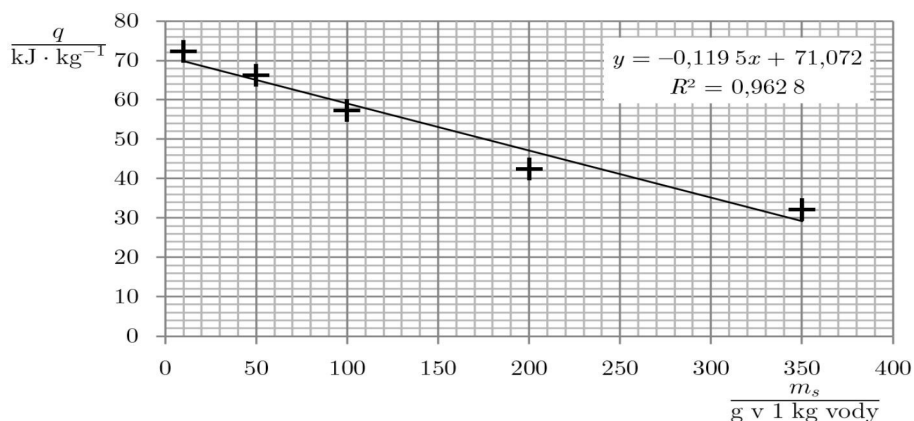
**Obrázek 5:** Graf k řešení úlohy FO62A3-3a.

- b) Závislost rozpouštěcího tepla soli na její hmotnosti v 1 kg vody je také přibližně lineární, můžeme tedy napsat  $q = am_s + b$ , pro krajní meze intervalu (10; 350) dostaneme

$$72,3 = 10a + b,$$

$$32,2 = 350a + b.$$

Odtud  $a = -0,12 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}$ ,  $b = 73,5 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Pro ilustraci uvádíme přesné parametry lineární regrese (obrázek 6).



**Obrázek 6:** Graf k řešení úlohy FO62A3-3b.

Pro  $m_{s1} = 25 \text{ g}$  dostaneme  $q_1 = 25a + b = 70,5 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ , pro  $m_{s2} = 250 \text{ g}$  dostaneme  $q_2 = 250a + b = 44 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Na rozpuštění soli je potřeba teplo  $qm_s$ . Z kalorimetrické rovnice

$$qm_s = (m_v c_v + m_s c_s) \Delta t \quad \text{odkud} \quad \Delta t = \frac{qm_s}{(m_v c_v + m_s c_s)}.$$

Pro  $m_{s1} = 25 \text{ g}$  dojde ke snížení teploty o  $\Delta t_1 = 0,40^\circ\text{C}$ , pro  $m_{s2} = 250 \text{ g}$  ke snížení teploty o  $\Delta t_2 = 2,5^\circ\text{C}$ .

**3 body**

c) Upravíme vztah pro koncentraci

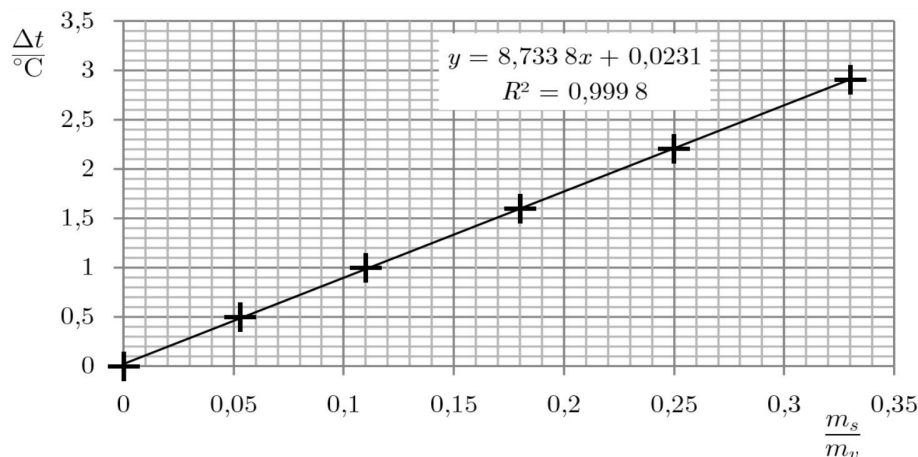
$$w = \frac{m_s}{m_v + m_s} = \frac{1}{1 + \frac{m_v}{m_s}}, \quad \text{odkud } \frac{m_s}{m_v} = \frac{w}{1 - w}.$$

Doplníme tabulku 2 závislosti bodu varu na koncentraci soli ze zadání o další hodnoty (tabulka 3):

**Tabulka 3:** Tabulka k řešení FO62A3-3c.

$\frac{w}{\%}$	0	5	10	15	20	25
$\frac{m_s}{m_v}$	0	0,053	0,11	0,18	0,25	0,33
$\frac{t_v}{^\circ\text{C}}$	100	100,5	101,0	101,6	102,2	102,9
$\frac{\Delta t}{^\circ\text{C}}$	0	0,5	1,0	1,6	2,2	2,9

Podle předpokladu jde o lineární závislost  $\Delta t = k \frac{m_s}{m_v}$ , tedy  $k = \frac{\Delta t m_v}{m_s} = 8,7^\circ\text{C}$ . Hodnoty konstanty  $k$  můžeme opět porovnat s přesnými parametry lineární regrese (obrázek 7).



**Obrázek 7:** Graf k řešení úlohy FO62A3-3c.

Pro  $m_{s1} = 25 \text{ g}$  je  $\Delta t_1 = k \frac{m_{s1}}{m_v} = 0,22^\circ\text{C}$ , pro  $m_{s2} = 250 \text{ g}$  je  $\Delta t_2 = k \frac{m_{s2}}{m_v} = 2,2^\circ\text{C}$ .

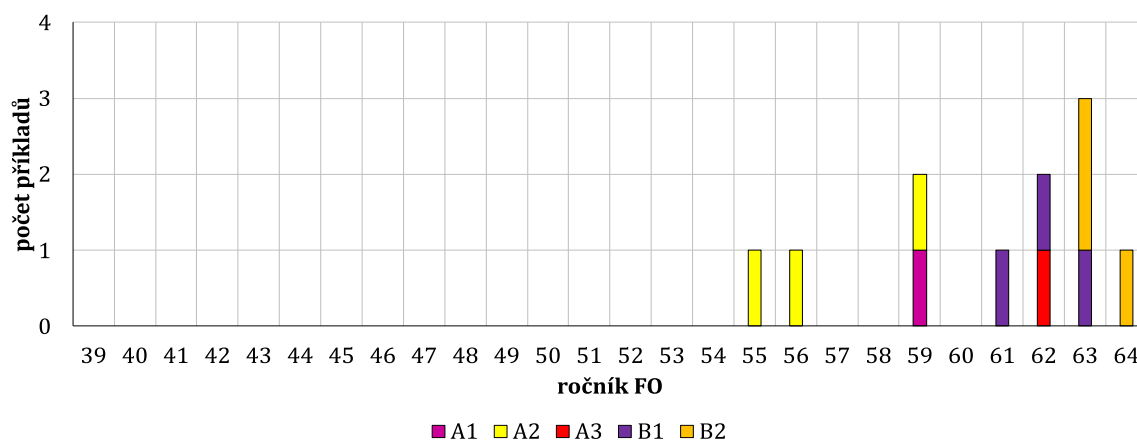
**2 body**

d) Roztok budeme muset ještě ohřát o  $\Delta t_1 = (0,40 + 0,4 + 0,22)^\circ\text{C} = 1,02^\circ\text{C}$  při přidání 25 g soli nebo o  $\Delta t_2 = (3,8 + 2,5 + 2,2)^\circ\text{C} = 8,5^\circ\text{C}$  při přidání 250 g soli. K tomu bude třeba ještě zahřívát po dobu  $\tau_1 = \frac{360 \text{ s}}{80^\circ\text{C}} \cdot 1,02^\circ\text{C} = 4,59 \text{ s}$  při přidání 25 g soli nebo  $\tau_2 = \frac{360 \text{ s}}{80^\circ\text{C}} \cdot 8,5^\circ\text{C} = 38,25 \text{ s}$  při přidání 250 g soli.

**2 body**

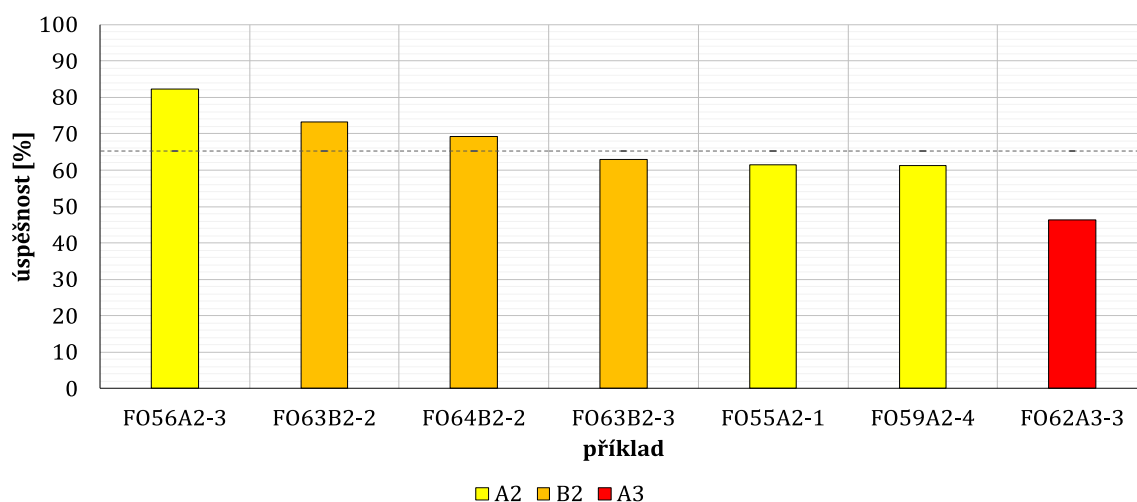
### 3.1.3 Statistická úspěšnost příkladů

Podkapitola obsahuje dohromady jedenáct příkladů, což je 14,47 % ze všech příkladů termodynamiky a molekulové fyziky v ročnících 39 až 64 Fyzikální olympiády.



**Obrázek 8:** Zastoupení příkladů podkapitoly zaměřené na teplo a teplotu v jednotlivých ročnících a kolech Fyzikální olympiády.

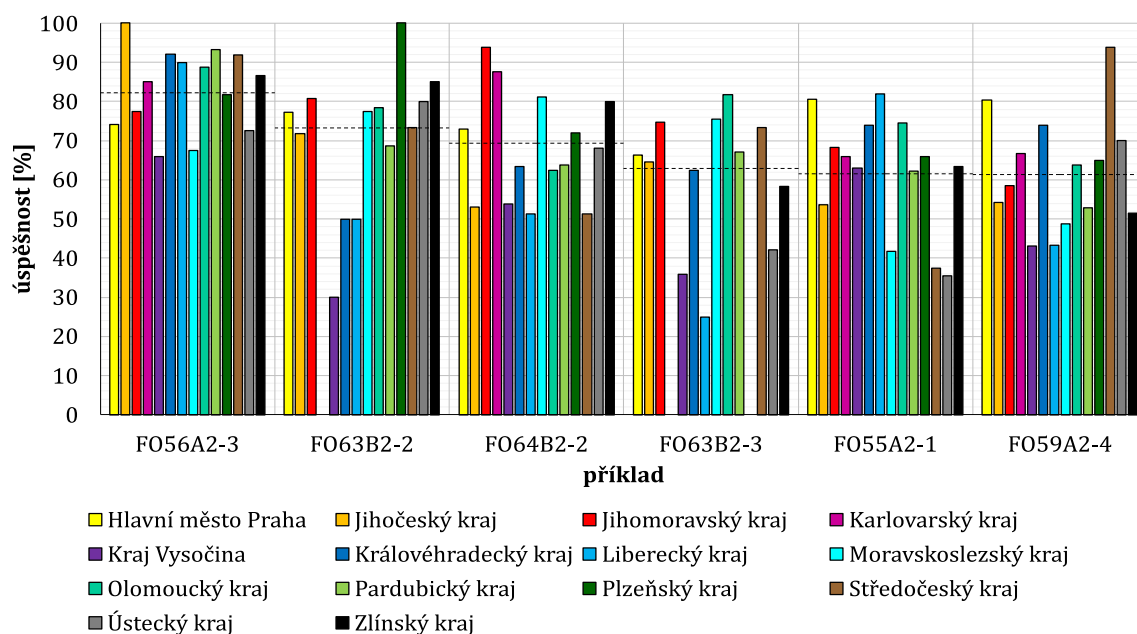
Dle grafu na obrázku 8 se příklady této podkapitoly vyskytují pouze v ročnících posledních deseti let, objevily se ve všech kolech kategorie A nebo B alespoň jednou. Největší počet příkladů z této oblasti v jednom ročníku je tři, žádný příklad se nevyskytl v ročnících 39 až 54, a dále v ročnících 57, 58 a 60. Z jedenácti příkladů je postupových pouze sedm, přičemž v kategorii A se jedná o tři příklady v krajských kolech a jeden příklad z celostátního kola, v kategorii B se jedná o dva příklady z krajského kola 63. ročníku a jeden příklad ze 64. ročníku. Je nutné zmínit, že ve skutečnosti tato podkapitola zahrnuje pouze devět originálních příkladů, protože příklady FO56A2-3 a FO63B1-4, a FO61B1-3 a FO62B1-3 jsou shodné.



**Obrázek 9:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladů zaměřených na teplo a teplotu.

V grafu na obrázku 9 je uvedena procentuální úspěšnost příkladů z postupových kol. Průměrná úspěšnost těchto příkladů je 65,25 %, nejnáročnější byl jediný příklad z celostátního kola kategorie A s procentuální úspěšností 46,28 %. Celkově byli řešitelé kategorie B s průměrnou úspěšností 68,48 % o kousek úspěšnější než řešitelé kategorie A s průměrnou úspěšností 62,83 %. Do této kapitoly patří nejméně úspěšný příklad z oblasti

termodynamiky a molekulové fyziky za posledních 26 let, kterým je příklad FO56A2-3 s procentuální úspěšností 82,18 %. V grafu na obrázku 10 je zaznamenána ještě podrobnější procentuální úspěšnost příkladů v jednotlivých krajích, která je podrobná díky dostupným výsledkovým listinám. V 63. ročníku nebyli v kategorii B krajského kola v Libereckém kraji žádní soutěžící. V Plzeňském kraji v 63. ročníku příklad FO63B2-3 žádný soutěžící nevyšil, jeho úspěšnost v tomto kraji je nulová. Naopak u příkladů FO56A2-3 v Jihočeském kraji a FO63B2-2 v Plzeňském kraji je velmi vysoká úspěšnost dosahující 100 %, což je velmi zajímavé, protože příklad FO56A2-3 v Jihočeském kraji řešilo celkem dvanáct soutěžících, kteří měli dohromady průměrnou úspěšnost z druhého kola olympiády 67,08 %. Příklad FO63B2-2 v Plzeňském kraji řešili pouze dva soutěžící, kteří měli velmi malou úspěšnost v ostatních příkladech. Žádný z krajů není ve všech uvedených příkladech nad průměrem.



**Obrázek 10:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladech zaměřených na teplo a teplotu v jednotlivých krajích ČR.

## 3.2 Plyny

### 3.2.1 Základní pojmy a vztahy

Každá látka se skládá z atomů. Pro výpočty spojené s plyny je třeba rozlišovat veličiny označované jako  $A_r$ ,  $M_r$ ,  $M_m$  a  $n$ , pro které platí následující vztahy.  $A_r$  neboli relativní atomová hmotnost je dána vztahem

$$A_r = \frac{m_a}{m_u},$$

kde  $m_a$  je klidová hmotnost atomu a  $m_u$  atomová hmotnostní konstanta definovaná z klidové hmotnosti atomu nuklidu uhlíku  $^{12}_6\text{C}$ , její hodnota je přibližně  $m_u \doteq 1,66 \cdot 10^{-27}$  kg.

Atomy prvků mohou tvořit molekuly. Relativní molekulová hmotnost  $M_r$  je dána vztahem

$$M_r = \frac{m_m}{m_u}.$$

kde  $m_m$  je klidová hmotnost molekuly. Pro výpočet relativní molekulové hmotnosti je třeba sečíst relativní atomové hmotnosti atomů, které danou molekulu tvoří. Ve fyzice je častěji využívána molární hmotnost  $M_m$ , která je dána vztahem

$$M_m = M_r \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}, \quad \text{popř. } M_m = A_r \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

Jedná se o molární veličinu, kterou je možné určit též ze vztahu

$$n = \frac{m}{M_m} = \frac{N}{N_A} = \frac{V}{V_m},$$

kde  $n$  je látkové množství soustavy částic,  $m$  hmotnost tělesa z chemicky stejnorodé látky,  $N$  je počet částic soustavy,  $N_A$  Avogadrova konstanta,  $V$  objem tělesa za daných fyzikálních podmínek a  $V_m$  molární objem tělesa z chemicky stejnorodé látky za daných fyzikálních podmínek. Avogadrova konstanta je stanovena na  $N_A \doteq 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  a udává počet částic v tělese o látkovém množství 1 mol.

Pro zjednodušení využíváme model tzv. ideálního plynu, což je zjednodušený model reálného plynu. Skutečné (reálné) plyny se ideálním přibližují při vysokých teplotách a nízkém tlaku. Protože platí, že jednotlivé molekuly plynu do sebe neustále naráží, dochází neustále ke změnám velikosti a směru rychlostí těchto molekul. Jednotlivé molekuly tedy nemají v danou chvíli stejnou rychlost, proto se využívá rozdělení molekul podle rychlostí a výpočtu střední kvadratické rychlosti  $v_k$  molekul dané vztahem

$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3kTN_A}{M_m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_m}},$$

kde  $T$  je termodynamická teplota plynu,  $m_0$  hmotnost jedné molekuly,  $k \doteq 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  je Boltzmannova konstanta a  $R = kN_A \doteq 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  je molární plynová konstanta. V důsledku neuspořádaného posuvného pohybu má molekula střední kinetickou energii  $E_0$ , pro kterou platí

$$E_0 = \frac{1}{2}m_0v_k^2 = \frac{3}{2}kT.$$

Vnitřní energie  $U_i$  je dána rozdílně pro jedno a víceatomové molekuly v závislosti na stupni volnosti molekuly. Pro jednoatomovou molekulu je vnitřní energie dána vztahem

$$U_i = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}nRT.$$

Jednoatomová molekula má totiž tři stupně volnosti, její poloha v prostoru je dána třemi souřadnicemi. Dvouatomová molekula už má stupňů volnosti 5 a víceatomová dokonce 6, což je třeba při výpočtech vzít v úvahu.

Plyn v rovnovážném stavu můžeme charakterizovat stavovými veličinami, jejichž vzájemný vztah je popsán stavovou rovnicí, která pro ideální plyn vypadá např. následovně:

$$pV = nRT, \quad pV = NkT,$$

kde  $p$  je tlak a  $V$  je objem.

Můžeme rozlišit 4 základní děje s ideálním plynem – izotermický, izochorický, izobarický a adiabatický. Pro izotermický děj platí Boyleův-Mariottův zákon:

$$pV = \text{konst.}, \quad \text{tedy } p_1V_1 = p_2V_2,$$

součin tlaku a objemu tedy zůstává konstantní. Vnitřní energie zůstává konstantní ( $\Delta U = 0$ ) a první termodynamický zákon lze zapsat ve tvaru

$$Q = W' = p\Delta V.$$

Teplo, které ideální plyn při izotermickém ději přijme, je rovno práci, kterou plyn při ději vykoná, popř. teplo, které ideální plyn při izotermickém ději odevzdá, je rovno práci, která je nutná pro stlačení plynu. Pro izochorický děj platí Charlesův zákon:

$$\frac{p}{T} = \text{konst.}, \quad \text{tedy } \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}.$$

Při izochorickém ději s ideálním plynem zůstává podíl tlaku a termodynamické teploty konstantní, plyn nekoná práci (nerozpíná se ani není stlačován,  $W' = 0$ ). Teplo, které ideální plyn při izochorickém ději přijme, je rovno přírůstku vnitřní energie

$$Q = \Delta U = c_V m \Delta T,$$

kde  $c_V$  je měrná tepelná kapacita plynu při stálém objemu teploty a  $\Delta T$  je přírůstek teploty. Při izobarickém ději s ideálním plynem zůstává konstantní tlak a platí Gay-Lussacův zákon:

$$\frac{V}{T} = \text{konst.}, \quad \text{tedy } \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2},$$

podíl objemu a teploty zůstává konstantní. Při tomto ději nejen že se mění vnitřní energie plynu, ale také plyn koná práci. První termodynamický zákon má tedy podobu

$$Q = \Delta U + W' = \Delta U + p\Delta V.$$

Posledním dějem je děj adiabatický, při kterém nedochází k výměně tepla mezi plynem a okolím, tedy  $Q = 0$ . První termodynamický zákon zní následovně:

$$\Delta U = W.$$

Změna vnitřní energie se rovná přijaté nebo vykonané práci. Pro adiabatický děj s ideálním plynem platí Poissonův zákon:

$$pV^\kappa = \text{konst.}, \quad \text{tedy } p_1V_1^\kappa = p_2V_2^\kappa,$$

kde  $\kappa$  je Poissonova konstanta, která má pro jednoatomové plyny přibližnou hodnotu  $\kappa \doteq \frac{5}{3}$ , pro dvouatomové plyny  $\kappa \doteq \frac{7}{5}$ . Z Poissonovy a stavové rovnice je možné odvodit vztah mezi tlakem, teplotou a objemem:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}.$$

Pro úplnost uvěďme ještě vztah mezi tlakem a nadmořskou výškou, který vyjadřuje barometrická rovnice

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}},$$

kde  $p_0$  je hornota normálního tlaku,  $\rho_0$  je hustota vzduchu za normálního tlaku a teplotě  $0^\circ\text{C}$ ,  $g$  je tíhové zrychlení a  $h$  je nadmořská výška. Tlak vzduchu tedy s rostoucí výškou exponenciálně klesá.



### 3.2.2 Řešené příklady

#### Příklad č. 6: FO48A2-2: Tlak plynu

[74,90 %]

Do nádoby o objemu 1 l byl vložen 1 g hydridu uranu  $\text{UH}_3$ . Nádoba byla uzavřena a po vyčerpání vzduchu zahřáta na teplotu  $400^\circ\text{C}$ . Při této teplotě se hydrid uranu zcela rozložil na uran a vodík.

- Napište rovnici reakce, která v nádobě proběhla, a určete látkové množství vyloučeného vodíku.
- Určete tlak vodíku v nádobě při teplotě nádoby  $400^\circ\text{C}$  a po ochlazení na teplotu laboratoře  $20^\circ\text{C}$ .

Relativní atomová hmotnost uranu je 238,03, vodíku 1,008. Teplotní roztažnost nádoby zanedbejte.

#### Řešení příkladu č. 6:

- Rozklad hydridu uranu proběhne podle rovnice  $2\text{UH}_3 \longrightarrow 2\text{U} + 3\text{H}_2$ . **2 body**

Hmotnost  $m_1$  vyloučeného vodíku určíme ze vztahu  $\frac{m_1}{m} = \frac{3A_r(\text{H})}{M_r(\text{UH}_3)}$ :

$$m_1 = m \frac{3A_r(\text{H})}{M_r(\text{UH}_3)} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \frac{3,024}{241,054} = 1,254 \cdot 10^{-5} \text{ kg}.$$

Tomu odpovídá látkové množství

$$n = \frac{m_1}{M_m(\text{H}_2)} = \frac{1,254 \cdot 10^{-5} \text{ kg}}{2,016 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}} = 6,22 \cdot 10^{-3} \text{ mol}.$$

**4 body**

- Tlak vodíku určíme pomocí stavové rovnice:

$$\frac{pV}{T} = nR, \quad \text{odkud } p = \frac{nRT}{V} = \frac{3A_r(\text{H}) mRT}{M_m(\text{UH}_3) M_r(\text{H}_2) V}.$$

Při teplotě  $400^\circ\text{C}$  je to

$$p = \frac{3,024 \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot 8,314 \cdot 673}{2,016 \cdot 10^{-3} \cdot 241,054 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} \text{ Pa} = 35 \text{ kPa}.$$

Ochlazení na teplotu laboratoře  $T'$  proběhne izochoricky a tlak vodíku klesne na

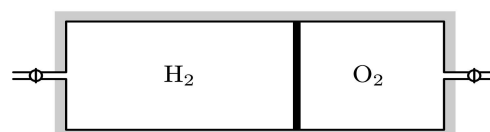
$$p' = p \frac{T'}{T} = 15 \text{ kPa}.$$

**4 body**

#### Příklad č. 7: FO50A3-3: Válec s pístem

[69,78 %]

Dokonale tepelně izolovaná válcová nádoba o celkovém objemu  $V = 20,0 \text{ dm}^3$  je rozdělena na dvě části lehce pohyblivým pístem zanedbatelné hmotnosti (obrázek 11). Do levé části nádoby napustíme vodík o hmotnosti  $m_1 = 3,0 \text{ g}$  a teplotě  $T_1 = 300 \text{ K}$ , do pravé části kyslík o hmotnosti  $m_2 = 16,0 \text{ g}$  a teplotě  $T_2 = 400 \text{ K}$ . Píst slabě vede teplo a teploty v obou částech nádoby se postupně vyrovnávají.



**Obrázek 11:** Vodorovná nádoba s pístem, k zadání úlohy FO50A3-3.

- a) Určete počáteční objemy vodíku a kyslíku  $V_1$ ,  $V_2$  a počáteční tlak  $p_0$  plynů v nádobě.  
 b) Určete teplotu  $T$ , tlak  $p'$  a objemy  $V'_1$ ,  $V'_2$  plynů po vyrovnání teplot.  
 c) Určete teplo, které během celého děje projde pístem.

Vnitřní energie  $n$  molů ideálního plynu s dvouatomovými molekulami je  $\frac{5}{2}nRT$ .

### Řešení příkladu č. 7:

- a) Ze stavové rovnice ideálního plynu odvodíme:

$$p_0V_1 = n_1RT_1, \quad p_0V_2 = n_2RT_2, \quad p_0V = R(n_1T_1 + n_2T_2),$$

kde  $n_1 = \frac{m_1}{M_{m1}} = 1,488$  mol,  $n_2 = \frac{m_2}{M_{m2}} = 1,500$  mol jsou látková množství vodíku a kyslíku. Z toho

$$p_0 = \frac{R(n_1T_1 + n_2T_2)}{V} = 2,69 \cdot 10^5 \text{ Pa},$$

$$V_1 = V \frac{n_1T_1}{n_1T_1 + n_2T_2} = 13,8 \text{ dm}^3, \quad V_2 = V \frac{n_2T_2}{n_1T_1 + n_2T_2} = 6,2 \text{ dm}^3.$$

**3 body**

- b) Protože nádoba je dokonale tepelně izolovaná, je celková vnitřní energie  $U$  obou plynů konstantní. Ze zákona zachování energie plyne

$$U = \frac{5}{2}n_1RT_1 + \frac{5}{2}n_2RT_2 = \frac{5}{2}(n_1 + n_2)RT, \quad \text{odkud } T = \frac{n_1T_1 + n_2T_2}{n_1 + n_2} = 325 \text{ K}.$$

Po vyrovnání teplot je objem jednoho molu vodíku stejný jako objem jednoho molu kyslíku. Platí

$$V'_1 : V'_2 : V = n_1 : n_2 : (n_1 + n_2),$$

$$V'_1 = \frac{n_1V}{n_1 + n_2} = 15,0 \text{ dm}^3, \quad V'_2 = \frac{n_2V}{n_1 + n_2} = 5,0 \text{ dm}^3,$$

$$p'V'_1 + p'V'_2 = p'V = (n_1 + n_2)RT = n_1RT_1 + n_2RT_2,$$

$$p' = \frac{R(n_1T_1 + n_2T_2)}{V} = p_0.$$

**4 body**

- c) Podle předpokladu píst vede teplo slabě, proto se teploty vyrovnávají pomalu a děj můžeme považovat za rovnovážný. Jestliže v určitém okamžiku teplota vodíku stoupne na hodnotu  $T_1^*$  a teplota kyslíku klesne na hodnotu  $T_2^*$ , platí podle zákona zachování energie

$$U = \frac{5}{2}n_1RT_1^* + \frac{5}{2}n_2RT_2^* = \frac{5}{2}n_1RT_1 + \frac{5}{2}n_2RT_2 = \text{konst.}$$

Tlak plynů v daném okamžiku je  $p^* = \frac{R(n_1T_1^* + n_2T_2^*)}{V} = \frac{R(n_1T_1 + n_2T_2)}{V} = p_0$ . Tlak plynů v nádobě se tedy během děje nemění, jedná se tedy u vodíku, jehož teplota vzroste, o izobarickou expanzi a u kyslíku, jehož teplota poklesne, o izobarickou kompresi. Teplo  $Q$ , které kyslík předá vodíku, je rovno součtu přírůstku vnitřní energie vodíku a práce vykonané vodíkem při posunutí pístu. Platí

$$Q = \frac{5}{2}n_1R(T - T_1) + p_0(V'_1 - V_1) = \frac{5}{2}n_1R(T - T_1) + n_1R(T - T_1) = \frac{7}{2}n_1R(T - T_1),$$

$$Q = \frac{7n_1n_2}{2(n_1 + n_2)}R(T_2 - T_1) = 1090 \text{ J}.$$

**3 body**

**Příklad č. 8: FO46B2-4: Atmosféra na Venuši**

[47,76 %]

Předpokládejme, že atmosféra planety Venuše obsahuje  $k_1 = 96,5\%$  molekul  $\text{CO}_2$  a  $k_2 = 3,5\%$  molekul  $\text{N}_2$ . Ostatní složky můžeme zanedbat. Teplota atmosféry je  $t = 464^\circ\text{C}$  a atmosférický tlak na povrchu Venuše dosahuje  $p_0 = 9,1\text{ MPa}$ . Hmotnost planety je  $M = 4,87 \cdot 10^{24}\text{ kg}$  a poloměr  $R = 6052\text{ km}$ .

- a) Určete hustotu  $\rho_0$  atmosféry a gravitační zrychlení  $g_v$  u povrchu Venuše.
- b) K výzkumu atmosféry planety použijeme otevřený "horkovzdušný balon" (plněný ovšem atmosférou planety) o objemu  $V = 50\text{ m}^3$ . Hmotnost konstrukce je  $m = 100\text{ kg}$ . Na jakou teplotu  $t_1$  musíme ohřát plyn v balonu, aby začal stoupat nad povrch planety? Při které teplotě  $t_2$  uvnitř balonu dosáhneme výšky  $1\text{ km}$ ?

Rotaci Venuše a pokles gravitačního zrychlení při výstupu balonu zanedbejte. Teplotu atmosféry do výšky  $1\text{ km}$  považujte za konstantní. Molární hmotnosti obou hlavních složek atmosféry Venuše jsou  $M_m(\text{CO}_2) = 44 \cdot 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $M_m(\text{N}_2) = 28 \cdot 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

**Řešení příkladu č. 8:**

- a) Hustotu  $\rho_0$  atmosféry u povrchu Venuše určíme pomocí stavové rovnice

$$\frac{pV}{T} = \frac{m}{M_m}R, \quad \text{odkud } \rho = \frac{m}{V} = \frac{pM_m}{RT},$$

kde  $m$  a  $V$  jsou hmotnost a objem určitého množství plynu. Molární hmotnost plynu, který tvoří atmosféra Venuše, je

$$M_m = k_1M_m(\text{CO}_2) + k_2M_m(\text{N}_2) = 43,4 \cdot 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

Po dosazení

$$\rho_0 = \frac{p_0M_m}{RT} = 64,5\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

**2 body**

Gravitační zrychlení na povrchu Venuše určíme pomocí gravitačního zákona:

$$F_G = mg_v = \kappa \frac{Mm}{R^2} \quad \text{odkud } g_v = \frac{\kappa M}{R^2} = 8,87\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

**2 body**

- b) Teplotu  $t_1$ , při které začne balon stoupat, určíme užitím Archimedova zákona z rovnosti tíhové a vztlakové síly:

$$F_G = mg_v + V\rho_1g_v = F_{vz} = V\rho_0g_v,$$

kde  $\rho_1$  je hustota plynu uvnitř balonu při tlaku  $p_0$  a teplotě  $t_1$ . Ze stavové rovnice plyne  $\rho_1 = \rho_0 \frac{T}{T_1}$ . Pak

$$m = V\rho_0 \left(1 - \frac{T}{T_1}\right), \quad \text{odkud } T_1 = \frac{T}{1 - \frac{m}{\rho_0 V}} = 761\text{ K}, \quad t_1 = 488^\circ\text{C}.$$

**2 body**

Tlak atmosféry Venuše a její hustotu ve výšce  $h$  určíme užitím barometrické rovnice a ze stavové rovnice

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g_v h}{p_0}}, \quad \rho = \frac{pM_m}{RT} = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0 g_v h}{p_0}}.$$

Plyn uvnitř balonu bude mít hustotu  $\rho_2 = \rho \frac{T}{T_2}$ . Dosazením a úpravou dostaneme

$$m = V\rho_0 \left(1 - \frac{T}{T_2}\right) e^{-\frac{\rho_0 g v h}{p_0}}, \quad e^{\frac{\rho_0 g v h}{p_0}} = \frac{V\rho_0}{m} \left(1 - \frac{T}{T_2}\right),$$

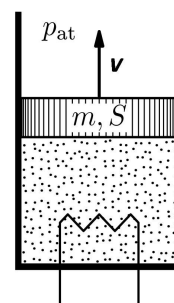
$$T_2 = \frac{T}{1 - \frac{m}{V\rho_0} e^{\frac{\rho_0 g v h}{p_0}}} = 762 \text{ K}, \quad t_2 = 489^\circ \text{C}.$$

4 body

**Příklad č. 9: FO49A2-1: Rozpínání plynu**

[44,90 %]

V tepelně izolované válcové nádobě se svislou osou je dokonale klouzajícím pístem o hmotnosti  $m$  a plošném obsahu  $S$  uzavřeno  $n$  molů helia (obrázek 12). U dna nádoby je topná spirála. Kromě plynu v nádobě se ohřívají i stěny nádoby a píst o celkové tepelné kapacitě  $C$ . Jejich teplota roste stejně rychle jako teplota plynu. V důsledku zahřívání soustavy se píst rovnoměrně zvedá rychlostí  $\vec{v}$ . Vzduch nad pístem má atmosférický tlak  $p_a$ . Tepelná kapacita topné spirály je zanedbatelná.



- Jak se zvýší teplota plynu za jednu sekundu?
- Jaký je výkon  $P$  topné spirály?

**Obrázek 12:** Nádoba s pístem, k zadání úlohy FO49A2-1.

Úlohu řešte obecně a pak pro hodnoty  $p_a = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ,  $n = 0,5 \text{ mol}$ ,  $m = 5 \text{ kg}$ ,  $S = 2 \text{ dm}^2$ ,  $C = 200 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $v = 1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Řešení příkladu č. 9:**

- Ze stavové rovnice plyne

$$nR\Delta T = p\Delta V = \left(p_a + \frac{mg}{S}\right) Sv\Delta\tau = (p_a S + mg) v\Delta\tau.$$

Z toho

$$\frac{\Delta T}{\Delta\tau} = \frac{(p_a S + mg) v}{nR} = 0,49 \text{ K} \cdot \text{s}^{-1}.$$

4 body

- Teplo  $Q$  dodané topnou spirálou za dobu  $\Delta\tau$  je rovno součtu práce vykonané plynem  $W'$ , přírůstku vnitřní energie plynu  $\Delta U_p$ , a přírůstku vnitřní energie válce a pístu  $\Delta U_{vp}$ :

$$Q = P\Delta\tau = W' + \Delta U_p + \Delta U_{vp}. \quad (4)$$

Pro helium jako plyn s jednoatomovými molekulami platí

$$\Delta U = \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}p\Delta V.$$

Rovnici (4) upravíme na tvar

$$P\Delta\tau = p\Delta V + \frac{3}{2}p\Delta V + C\Delta T = \frac{5}{2}(p_a S + mg) v\Delta\tau + \frac{C(p_a S + mg) v\Delta\tau}{nR}.$$

Z toho

$$P = (p_a S + mg) v \left[ \frac{5}{2} + \frac{C}{nR} \right] = 104 \text{ W}.$$

6 bodů

**Příklad č. 10: FO47A2-2: Směs plynů****[38,52 %]**Směs argonu a helia měla při teplotě  $t = 27^\circ\text{C}$  a tlaku  $p = 152\text{ kPa}$  hustotu  $\rho = 1,45\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .

- a) Pro obě složky určete parciální hustoty  $\rho_1, \rho_2$ , parciální tlaky  $p_1, p_2$  a počty molekul  $N_1, N_2$  v  $1\text{ cm}^3$  objemu.
- b) Určete měrnou tepelnou kapacitu  $c_V$  této směsi při stálém objemu.

Relativní atomové hmotnosti jsou  $A_r(\text{He}) = 4,00$ ,  $A_r(\text{Ar}) = 39,95$ .**Řešení příkladu č. 10:**

- a) Molární hmotnosti obou složek jsou

$$M_{m1} = A_r(\text{He}) \cdot 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1} = 4,00 \cdot 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1},$$

$$M_{m2} = A_r(\text{Ar}) \cdot 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1} = 39,95 \cdot 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}.$$

Označme  $m_1, m_2$  hmotnosti obou složek a  $n_1, n_2$  jejich látková množství. Celková hustota plynu je součtem parciálních hustot složek:  $\rho = \rho_1 + \rho_2$ . Stavovou rovnici  $\frac{pV}{T} = nR = (n_1 + n_2)R = \left(\frac{m_1}{M_{m1}} + \frac{m_2}{M_{m2}}\right)R$  upravíme na tvar

$$\frac{p}{RT} = \frac{m_1}{M_{m1}V} + \frac{m_2}{M_{m2}V} = \frac{\rho_1}{M_{m1}} + \frac{\rho_2}{M_{m2}} = \frac{\rho_1}{M_{m1}} + \frac{\rho - \rho_1}{M_{m2}}.$$

Z toho

$$\rho_1 = \frac{M_{m1}(pM_{m2} - \rho RT)}{RT(M_{m2} - M_{m1})} = 0,11\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3},$$

$$\rho_2 = \rho - \rho_1 = 1,34\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}.$$

**3 body**

Také parciální tlaky složek určíme užitím stavové rovnice:

$$p_1 = \frac{n_1 RT}{V} = \frac{m_1 RT}{M_{m1} V} = \frac{\rho_1 RT}{M_{m1}} = \frac{pM_{m2} - \rho RT}{(M_{m2} - M_{m1})} = 68\text{ kPa},$$

$$p_2 = p - p_1 = 84\text{ kPa}.$$

**2 body**Počty molekul v objemu  $V = 1\text{ cm}^3$  jsou

$$N_1 = N_A \frac{\rho_1 V}{M_{m1}} = 1,65 \cdot 10^{19}, \quad N_2 = N_A \frac{\rho_2 V}{M_{m2}} = 2,02 \cdot 10^{19}.$$

**2 body**

- b) Směs se chová jako ideální plyn s jednoatomovými molekulami, jehož molekulární hmotnost určíme pomocí stavové rovnice:

$$M_m = \frac{mRT}{pV} = \frac{\rho RT}{p} = 23,8 \cdot 10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}.$$

Při izochorickém ohřátí je přijaté teplo rovno přírůstku vnitřní energie:

$$Q = \Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T = \frac{3}{2}\frac{m}{M_m}R\Delta T = mc_V\Delta t.$$

$$\text{Z toho } c_V = \frac{3R}{2M_m} = \frac{3p}{2\rho T} = 524\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}.$$

**3 body**

**Příklad č. 11: FO55B2-3: Horký hrnec****[33,81 %]**

Položíme-li na mokrý povrch desky kuchyňské linky dnem vzhůru horký hrnec s teplotou  $t_m$  větší než je teplota místnosti, budou nejprve zpod hrnce unikat bublinky vzduchu, ale později se hrnec k desce přisaje a k jeho odtržení od desky musíme vyvinout určitou sílu.

Uvažujme válcový hrnec s obsahem podstavy  $S$ , výškou  $h$  a hmotností  $m$ . V kuchyni je tlak vzduchu  $p_0$  a teplota  $t_0$ . Předpokládejte, že vzduch může procházet pod okrajem hrnce, jen když je přítlačná síla hrnce k desce nulová. Předpokládejte také, že v okamžiku položení hrnce na desku je teplota vzduchu v hrnci rovna teplotě okolí  $t_0$ . Tepelná kapacita vzduchu pod hrncem je nepatrná v porovnání s tepelnou kapacitou hrnce.

- Jaká je teplota  $t_1$  vzduchu pod hrncem, když se začnou vytvářet bublinky vzduchu unikající z prostoru pod hrncem?
- Jaký je relativní úbytek hmotnosti vzduchu z prostoru pod hrncem, když se vzduch ohřeje na teplotu hrnce  $t_m$ ?
- Potom se hrnec a vzduch pod ním postupně pomalu ochlazují. Při které teplotě  $t_2$  je tlak vzduchu pod hrncem rovný tlaku okolního prostředí  $p_0$ ? Předpokládáme, že teplota hrnce a vzduchu pod ním je během ochlazování stejná.
- Jakou silou je hrnec přitlačen k desce, když se teplota hrnce a vzduchu pod ním vyrovná s teplotou okolí?

Úlohu řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty:  $t_m = 40^\circ\text{C}$ ,  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ ,  $p_0 = 101\text{ kPa}$ ,  $m = 1,2\text{ kg}$ ,  $S = 1,5\text{ dm}^2$ .

**Řešení příkladu č. 11:**

- Na počátku je teplota vzduchu pod hrncem  $T_0$  a tlak  $p_0$ . Postupně se vzduch pod hrncem ohřívá a tlak se izochoricky zvětšuje. Bublinky začnou unikat, když se tlaková síla způsobená přetlakem vzduchu uvnitř vyrovná s tíhou hrnce. Platí

$$(p_1 - p_0)S = mg, \quad \frac{p_0}{T_0} = \frac{p_1}{T_1}.$$

$$\text{Z toho } T_1 = T_0 \left(1 + \frac{mg}{Sp_0}\right) = 295,4\text{ K, tedy } t_1 = 22,3^\circ\text{C}.$$

**2 body**

- Na počátku je hmotnost  $m_0$  vzduchu pod hrncem dána stavovou rovnicí

$$m_0 = \frac{M_m p_0 S h}{RT_0}.$$

Po zahřátí na teplotu hrnce  $T_m > T_1$  je tlak pod hrncem  $p_1$  a hmotnost vzduchu je

$$m_m = \frac{M_m \left(p_0 + \frac{mg}{S}\right) S h}{RT_m}.$$

Relativní změna hmotnosti vzduchu pod hrncem je

$$\delta m = \frac{m_m - m_0}{m_0} = \frac{T_0}{T_m} \left(1 + \frac{mg}{Sp_0}\right) - 1 = -5,7\%.$$

**4 body**

- Při ochlazování probíhá děj izochorický, platí  $\frac{p_0 + \frac{mg}{S}}{T_m} = \frac{p_0}{T_2}$ . Z toho

$$T_2 = \frac{T_m}{1 + \frac{mg}{p_0 S}} = 310,7\text{ K, } t_2 = 37,6^\circ\text{C}.$$

**2 body**

d) Při dalším poklesu teploty na  $T_0$  bez nasávání vzduchu z okolí je

$$\frac{p_0 + \frac{mg}{S}}{T_m} = \frac{p}{T_0}, \quad \text{odkud } p = \frac{T_0}{T_m} \left( p_0 + \frac{mg}{S} \right).$$

Přítlačná síla má velikost

$$F = (p_0 - p)S + mg = \left( 1 - \frac{T_0}{T_m} \right) (mg + p_0S) = 98 \text{ N}.$$

**2 body**

*Poznámka:* Uvedené úvahy a výpočty mají význam jen v případě, že platí  $T_1 < T_m$ . Kdyby tato nerovnost neplatila, vzduch by zpod hrnce neunikal a hrnec by se ke stolu nepřisál.

**Příklad č. 12: FO57A2-2: Dva plyny ve válci** **[10,36 %]**

Tepelně izolovaný, uzavřený, vertikálně postavený válec je rozdělen na dvě stejné části těžkým, tepelně vodivým pístem. Nad i pod pístem, který je na počátku upevněn zarážkou, jsou stejná množství ideálního dvouatomového plynu o teplotě  $T = 300 \text{ K}$  a tlaku  $p = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ . Po uvolnění zarážky píst klesne a rozdíl tlaků v dolní a horní části válce bude  $\Delta p = 1 \cdot 10^4 \text{ Pa}$ . Jak se při tom změnila teplota plynu  $\Delta T$  po dosažení rovnovážného stavu? Tepelnou kapacitu pístu i stěn válce zanedbejte.

**Řešení příkladu č. 12:**

Označme  $2V$  objem válce bez pístu, hmotnost pístu  $m$  a látkové množství plynu  $2n$ . Pak podle stavové rovnice před uvolněním pístu:

$$pV = nRT. \quad (5)$$

Po uvolnění pístu bude platit:

$$(p + \Delta p_1)(V - Sh) = nR(T + \Delta T), \quad (6)$$

$$(p - \Delta p_2)(V + Sh) = nR(T + \Delta T). \quad (7)$$

Protože se píst nachází opět v rovnováze, platí:

$$\Delta p_1 + \Delta p_2 = \Delta p = \frac{mg}{S}. \quad (8)$$

Píst poklesl do hloubky  $h$ , jeho potenciální tíhová energie se zmenšila, musí se tedy zvětšit vnitřní energie plynu:

$$mgh = \frac{5}{2} \cdot 2nR\Delta T, \quad \text{odkud } h = \frac{5nR\Delta T}{mg}. \quad (9)$$

**5 bodů**

Musíme vyřešit soustavu 5 rovnic o 5 neznámých. Z rovnice (5) vyjádříme objem  $V$ , z rovnice (8) obsah plochy  $S$ , z rovnice (9) vyjádříme  $h$  a dosadíme do rovnic (6) a (7):

$$(p + \Delta p_1) \left( \frac{T}{p} - \frac{5\Delta T}{\Delta p} \right) = T + \Delta T,$$

$$(p - \Delta p_2) \left( \frac{T}{p} + \frac{5\Delta T}{\Delta p} \right) = T + \Delta T.$$

Vyjádřením  $\Delta p_1$  a  $\Delta p_2$  a jejich sečtením

$$\Delta p_1 + \Delta p_2 = (T + \Delta T) \left( \frac{1}{\frac{T}{p} - \frac{5\Delta T}{\Delta p}} - \frac{1}{\frac{T}{p} + \frac{5\Delta T}{\Delta p}} \right) = \frac{(T + \Delta T) 10p^2 \Delta p \Delta T}{T^2 (\Delta p)^2 - 25p^2 (\Delta T)^2} = \Delta p.$$

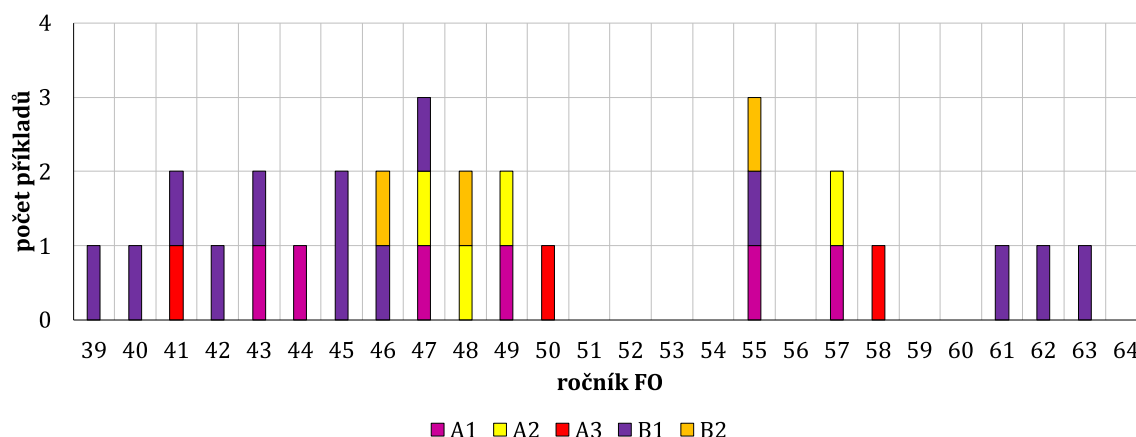
Dostáváme kvadratickou rovnici  $35p^2 (\Delta T)^2 + 10p^2 T \Delta T - (\Delta p)^2 T^2 = 0$  s kořeny

$$\Delta T = -\frac{T}{7} \pm T \sqrt{\frac{100}{70^2} + \frac{140}{70^2} \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2} = -\frac{T}{7} \pm T \sqrt{\frac{1}{49} + \frac{1}{35} \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2}.$$

Číselně vyhovuje kladný kořen  $\Delta T = 0,3 \text{ K}$ , tedy teplota vzrostla o  $0,3^\circ \text{C}$ , neboť celkově se vnitřní energie plynu zvětšila na úkor potenciální energie pístu. **5 bodů**

### 3.2.3 Statistická úspěšnost příkladů

Příklady vyskytující se v této podkapitole jsou ve Fyzikální olympiádě nejčastější (pokud zahrneme kategorii A a B v ročnících 39 až 64). Do podkapitoly spadá dvacet devět příkladů, což činí 38,67 % z oblasti termodynamiky a molekulové fyziky.

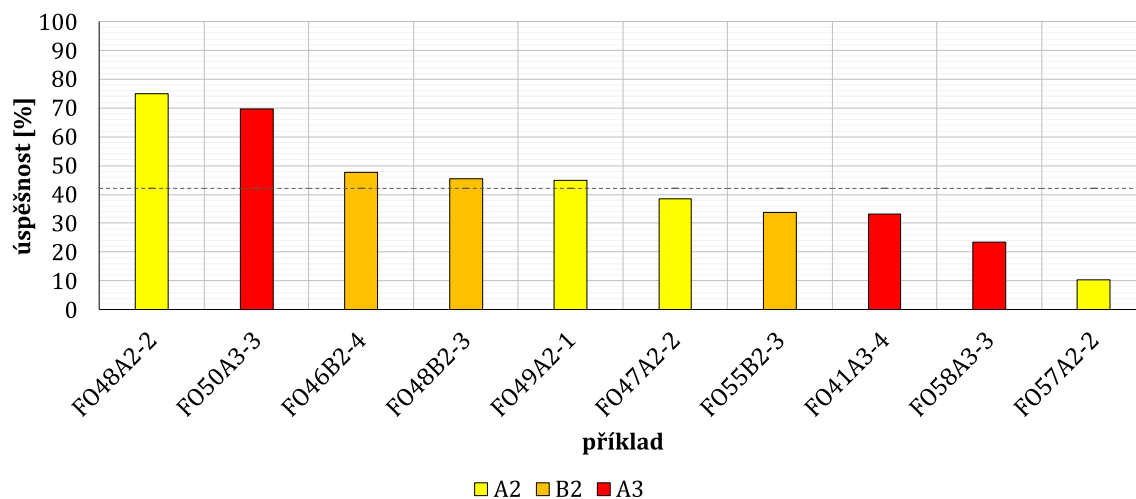


**Obrázek 13:** Zastoupení příkladů podkapitoly zaměřené na plyny v jednotlivých ročnících a kolech Fyzikální olympiády.

V grafu na obrázku 13 je zobrazen výskyt příkladů v jednotlivých ročnících, ze kterého je patrné, že se příklady s plyny v různých kolech olympiády vyskytují poměrně často, a to v relativně velkém zastoupení. Ve dvou ročnících (47 a 55) se vyskytly dokonce tři příklady, jsou ale také ročníky, kdy se neobjevily příklady žádné (51 až 54 a 59 až 60). Nejčastěji se vyskytují v prvních kolech kategorie B, naopak nejméně v závěrečných kolech obou kategorií, tedy ve třetím kole kategorie A a druhém kole kategorie B. Z celkového počtu dvacet devět příkladů je postupových pouze 34,48 % příkladů, tedy deset, a to konkrétně čtyři v druhém kole kategorie A, tři v druhém kole kategorie B a tři ve třetím kole kategorie A. Příklad FO61B1-7 je totožný jako FO62B1-7, originálních je tedy pouze dvacet osm příkladů.

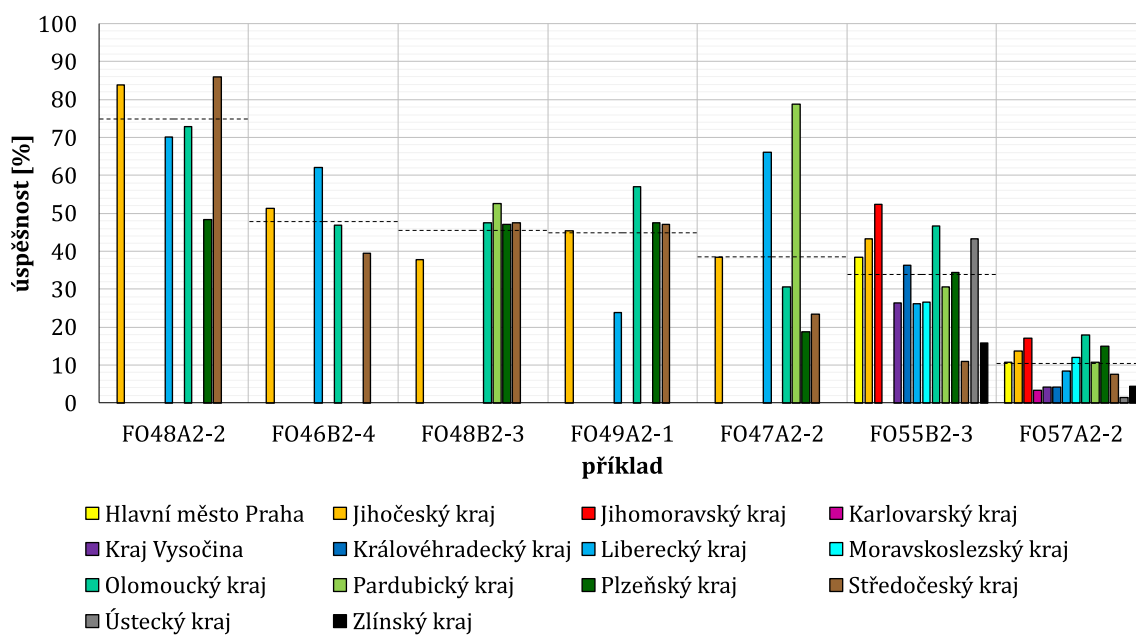
Protože jsou postupová kola především ve starších ročnících, kde nejsou dostupné kompletní výsledkové listiny, nebylo možné dopočítat podrobnější procentuální úspěšnost v jednotlivých krajích. Dle grafu na obrázku 14 je možné tvrdit, že příklady v aktuálnějších ročnících Fyzikální olympiády jsou méně úspěšné než příklady ze starších ročníků, alespoň co se této podkapitoly týče. Tento poznatek může být ale zavádějící vzhledem k tomu, že ze starších ročníků jsou dostupné listiny pouze z Jihočeského, Olomouckého, Libereckého a Středočeského kraje (viz graf na obrázku 15), a Olomoucký a Středočeský kraj bývají mezi úspěšnějšími kraji. Nejméně úspěšným příkladem je příklad FO57A2-2, který je vůbec nejméně úspěšným příkladem z oblasti termodynamiky a molekulové fyziky s procentuální úspěšností 10,36 %. Porovnání krajů mezi sebou je velmi obtížné, porovnáme-li alespoň příklady FO55B2-3 a FO57A2-2, které mají kompletní výsledkové listiny, tak mezi nejúspěšnější kraje patří Jihomoravský a Olomoucký, naopak mezi nejméně úspěšné kraje





**Obrázek 14:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladů zaměřených na plyny.

patří Karlovarský kraj, který má u příkladu FO55B2-3 dokonce nulovou úspěšnost (v Karlovarském kraji v daném ročníku soutěžili čtyři žáci).



**Obrázek 15:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladů zaměřených na plyny v jednotlivých krajích ČR.

### 3.3 Práce plynu, kruhový děj

#### 3.3.1 Základní pojmy a vztahy

V části sbírky věnované plynům jsme rozebrali jednotlivé děje ideálního plynu, připomeňme alespoň práci  $W'$ , která je vykonána plynem při stálém tlaku  $p$ :

$$W' = p\Delta V,$$

kde  $\Delta V$  je změna objemu plynu. Práce se dá vyjádřit také v  $p - V$  diagramu obsahem plochy pod křivkou.

Práce plynu využívají tepelné stroje, které mohou trvale pracovat pouze v případě, že se plyn po ukončení expanze vrátí do původního stavu. Jelikož u kruhového děje dochází k tomu, že je počáteční stav plynu totožný jako konečný stav, je celková změna vnitřní energie pracovní látky po jednom cyklu kruhového děje nulová ( $\Delta U = 0$ ), a tedy dle prvního termodynamického zákona platí

$$W' = Q$$

Celková práce, kterou vykoná plyn, je rovna celkovému teplu, které je během jednoho cyklu přijato od okolí. Účinnost kruhového děje  $\eta$  je dána vztahem

$$\eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \quad (10)$$

kde  $Q_1$  je teplo, které plyn přijme od okolí (od ohříváče), a  $Q_2$  je teplo, které předá plyn chladiči. Rovnici (10) můžeme také přepsat pomocí teplot na nerovnici

$$\eta \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

kde  $T_1$  je teplota ohříváče a  $T_2$  teplota chladiče. Znaménko rovná se by platilo pro maximální účinnost  $\eta_{max}$  tepelného stroje, protože ale může docházet ke ztrátám, skutečná účinnost tepelného stroje  $\eta$  bývá nižší než maximální účinnost  $\eta_{max}$ . Nejvyšší možné termické účinnosti  $\eta_{max}$  je teoreticky dosaženo při tzv. Carnotově cyklu, který sestává ze dvou izotermických a dvou adiabatických dějů – izotermické expanze, adiabatické expanze, izotermické komprese a adiabatické komprese. Tento cyklus je teoretický (ideální), nelze jej prakticky realizovat.

#### 3.3.2 Řešené příklady

##### Příklad č. 13: FO64A3-1: Klimatizace místnosti

[71,14 %]

Klimatizaci místnosti můžeme popsat jako tepelný stroj pracující v obráceném režimu: odebírá teplo  $Q_m$  z místnosti o teplotě  $T_m$  a vzduchu v okolí domu o teplotě  $T_v$  odevzdává teplo  $Q_v > Q_m$ . Elektrický kompresor přitom musí dodat práci  $W$ . Předpokládejme, že zařízení pracuje jako Carnotův stroj s maximální možnou účinností.

- Elektrická část zařízení pracuje s výkonem  $P$ . Jaké množství tepla  $Q_m$  odvede z místnosti za čas  $\Delta t$ ?
- I když je místnost izolovaná, dostává se do ní zvenčí teplo rychlostí  $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = k\Delta T$ , kde  $\Delta T = T_v - T_m$  je rozdíl teplot mezi okolím domu a místností a  $k$  je konstanta. Na jakou nejmenší teplotu lze snížit teplotu vzduchu v místnosti při dané teplotě venkovního vzduchu  $T_v$ , daném výkonu  $P$  a hodnotě konstanty  $k$ ? Výsledek vyjádřete pomocí těchto tří veličin.
- Jaký nejmenší výkon  $P$  klimatizace potřebujeme, chceme-li při venkovní teplotě  $t_v = 40^\circ\text{C}$  udržet v místnosti teplotu  $t_m = 25^\circ\text{C}$ , je-li běžná hodnota konstanty  $k = 173 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}$ ?

### Řešení příkladu č. 13:

- a) Podle zákona zachování energie platí  $Q_v = Q_m + W$ . Ze vztahů pro účinnost Carnotova cyklu

$$\eta = \frac{W}{Q_v} = \frac{Q_v - Q_m}{Q_v} = \frac{T_v - T_m}{T_v},$$
$$1 - \frac{Q_m}{Q_v} = 1 - \frac{T_m}{T_v},$$
$$Q_v = \frac{T_v}{T_m} Q_m$$

úpravami postupně dostaneme

$$W = Q_v - Q_m = \frac{T_v}{T_m} Q_m - Q_m = \left( \frac{T_v}{T_m} - 1 \right) Q_m = \frac{T_v - T_m}{T_m} Q_m,$$

odkud  $Q_m = W \frac{T_m}{T_v - T_m} = P \Delta t \frac{T_m}{T_v - T_m}$ .

4 body

*Alternativní řešení této části úlohy je možné dohledat na oficiálních stránkách FO.*

- b) V rovnováze musí klimatizační zařízení odebírat z místnosti stejné množství tepla, kolik ho do místnosti vniká z okolí. Platí proto

$$k \Delta T \Delta t = P \Delta t \frac{T_m}{T_v - T_m} = P \Delta t \frac{T_m}{\Delta T} = P \Delta t \frac{T_v - \Delta T}{\Delta T}.$$

Pro rozdíl teplot  $\Delta T$  dostáváme kvadratickou rovnici

$$k (\Delta T)^2 + P \Delta T - P T_v = 0, \quad (11)$$

jejímž řešením vychází

$$\Delta T = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 + 4kPT_v}}{2k}.$$

Fyzikální význam má pouze kladný kořen

$$\Delta T = \frac{P}{2k} \left( \sqrt{1 + \frac{4kT_v}{P}} - 1 \right).$$

Pro teplotu místnosti dostaneme

$$T_m = T_v - \Delta T = T_v - \frac{P}{2k} \left( \sqrt{1 + \frac{4kT_v}{P}} - 1 \right).$$

5 bodů

- c) Z rovnice (11)

$$P = \frac{k (\Delta T)^2}{T_v - \Delta T} = \frac{k (\Delta T)^2}{T_m} = 130 \text{ W}.$$

1 bod

### Příklad č. 14: FO40B2-1 (FO44B1-3): Škoda Favorit

[60,48 %]

V dokumentaci motoru Škoda 781.136 pro automobil FAVORIT je uveden *zdvihový objem válce*  $V_{zdv} = 322 \text{ cm}^3$  a *kompresní poměr*  $\epsilon = 9,7$ . (Zdvihový objem válce je rozdíl maximálního objemu  $V_{max}$  a minimálního objemu  $V_{min}$  pracovního prostoru válce, kompresní poměr je jejich podíl.)

Děje probíhající v motoru můžeme modelovat kruhovým dějem  $ABCD$ , při kterém se pracovní látka (vzduch s nepatrným množstvím benzínu) nejprve adiabaticky stlačí z počátečního objemu  $V_A = V_{max}$ , počátečního tlaku  $p_A = 1 \cdot 10^5$  Pa a počáteční teploty  $T_A = 300$  K na objem  $V_B = V_{min}$ , tlak  $p_B$  a teplotu  $T_B$ .

Následuje zážeh a izochorické shoření malého množství benzínu rozptýleného ve vzduchu, při kterém se teplota zvýší z  $T_B$  na  $T_C$  a tlak z  $p_B$  na  $p_C$ . Předpokládejme takové množství benzínu, že  $T_C = 3 \cdot T_B$ .

Pak proběhne adiabatická expanze zahřátého vzduchu se spaliny na počáteční objem  $V_D = V_{max}$ , při které se teplota zmenší na  $T_D$  a tlak na  $p_D$ , a nakonec se vzduch izochoricky ochladí na počáteční stav.

- Určete maximální objem  $V_{max}$  a minimální objem  $V_{min}$  pracovního prostoru válce. Výsledky zaokrouhlete na  $\text{cm}^3$ .
- Určete látkové množství vzduchu ve válci.
- Vypočtete zbývající hodnoty stavových veličin v bodech  $B, C$  a  $D$ . Nakreslete ve vhodném měřítku  $p - V$  diagram děje. Průběhy adiabat nakreslete jen „od ruky“.
- Pro každý z dějů  $AB, BC, CD$  a  $DA$  určete změnu vnitřní energie, vykonanou nebo spotřebovanou práci a přijaté nebo odevzdané teplo.
- Určete celkovou práci při jednom proběhnutí cyklu a jeho účinnost.
- Motor je čtyřválcový. Jaký výkon by měl za uvažovaných ideálních podmínek při frekvenci otáčení klikového hřídele  $f = 3000 \text{ min}^{-1}$ ?

Vzduch v pracovním prostoru považujte za ideální plyn s dvouatomovými molekulami, pro jehož vnitřní energii platí  $U = \frac{5}{2}nRT$ . Poissonova konstanta má hodnotu  $\kappa = 1,40$ , plynová konstanta  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

#### Řešení příkladu č. 14:

- Řešením soustavy rovnic

$$V_{max} - V_{min} = V_{zdv}, \quad \frac{V_{max}}{V_{min}} = \epsilon$$

dostaneme

$$V_{min} = V_B = V_C = \frac{V_{zdv}}{\epsilon - 1} = 37 \text{ cm}^3 = 3,7 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3,$$

$$V_{max} = V_A = V_D = \frac{\epsilon V_{zdv}}{\epsilon - 1} = 359 \text{ cm}^3 = 3,59 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3.$$

**1 bod**

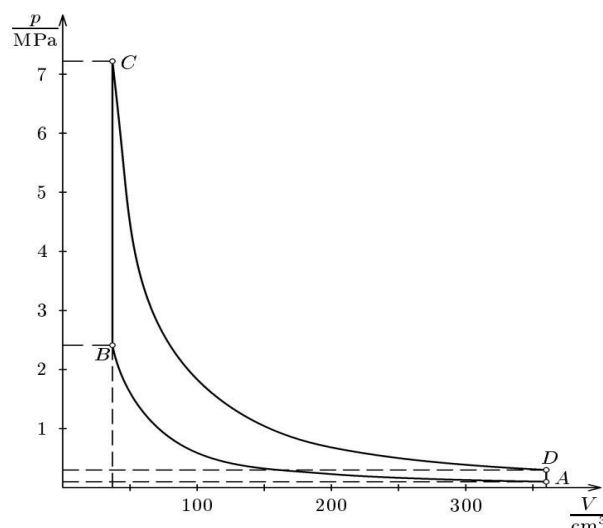
- Vyjdeme ze stavové rovnice

$$\frac{pV}{T} = nR, \quad n = \frac{p_A V_A}{RT_A} = 0,0144 \text{ mol.}$$

**1 bod**

- Ze stavové rovnice a Poissonova zákona odvodíme:

$$p_B = p_A \left( \frac{V_A}{V_B} \right)^\kappa = p_A \cdot \epsilon^\kappa = 2,41 \text{ MPa,}$$



Obrázek 16:  $p - V$  diagram k řešení úlohy FO40B2-1.

$$T_B = \frac{p_B V_B}{p_A V_A} T_A = T_A \cdot \epsilon^{\kappa-1} = 744 \text{ K}, \quad T_C = 3T_B = 2230 \text{ K}.$$

$$\frac{p_B}{p_A} = \frac{p_C}{p_D}, \quad \text{odkud } \frac{p_D}{p_A} = \frac{p_C}{p_B} = \frac{T_D}{T_A} = \frac{T_C}{T_B}, \quad p_C = p_B \frac{T_C}{T_B} = 7,22 \text{ MPa},$$

$$p_D = p_A \frac{T_C}{T_B} = 300 \text{ kPa}, \quad T_D = T_A \frac{T_C}{T_B} = 900 \text{ K}.$$

**2 body**

$p - V$  diagram je na obrázku 16.

**2 body**

d) Děje  $AB$  a  $CD$  jsou adiabatické:

$$Q_{AB} = 0, \quad W_{AB} = \Delta U_{AB} = \frac{5}{2} nR (T_B - T_A) = 133 \text{ J},$$

$$Q_{CD} = 0, \quad W'_{CD} = -\Delta U_{CD} = \frac{5}{2} nR (T_C - T_D) = 398 \text{ J}.$$

Děje  $BC$  a  $DA$  jsou izochorické:

$$W_{BC} = 0, \quad Q_{BC} = \Delta U_{BC} = \frac{5}{2} nR (T_C - T_B) = 445 \text{ J},$$

$$W_{DA} = 0, \quad Q'_{DA} = -\Delta U_{DA} = \frac{5}{2} nR (T_D - T_A) = 180 \text{ J}.$$

**2 body**

e) Během jednoho cyklu se vykoná celková práce

$$W = W'_{CD} - W_{AB} = Q_{BC} - Q'_{DA} = 265 \text{ J}.$$

Účinnost cyklu je

$$\eta = \frac{W}{Q_{BC}} = \frac{Q_{BC} - Q'_{DA}}{Q_{BC}} = 60\%.$$

**1 bod**

f) Kruhový děj ve válci proběhne během dvou otáček klikového hřídele. Protože motor je čtyřválcový, platí:  $P = 4 \cdot 0,5f \cdot W = 2 \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 266 \text{ J} = 26,6 \text{ kW}$ .

**1 bod**

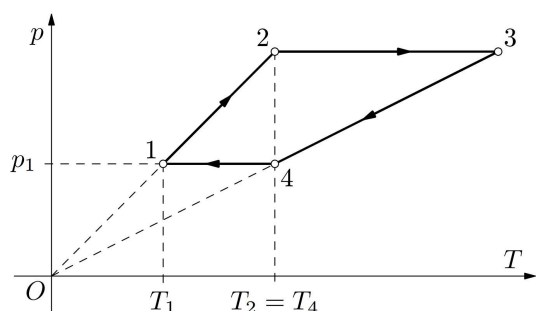
**Příklad č. 15: FO49B2-2: Kruhový děj v ideálním plynu I.**

[58,76 %]

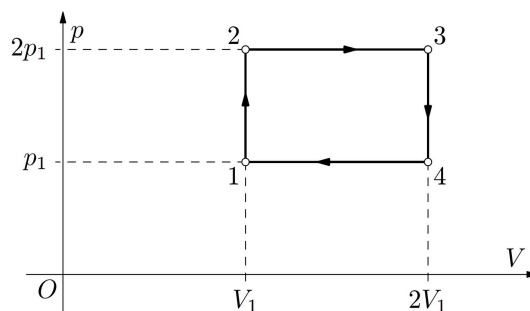
Ideální plyn s dvouatomovými molekulami o látkovém množství 1 mol vykonal kruhový děj 12341 znázorněný v  $p - T$  diagramu na obrázku 17. Na počátku děje ve stavu 1 měl plyn počáteční teplotu  $t_1 = 0^\circ\text{C}$  a tlak  $p_1 = 0,1\text{ MPa}$ . V průběhu kruhového děje dosáhl plyn maximální teploty  $T_3 = 4T_1$  (v kelvinech), pro další teploty platilo, že  $T_2 = T_4$ .

- Charakterizujte (stačí i slovně) jednotlivé části kruhového děje.
- Vyjádřete hodnoty teplot  $T_2$  a  $T_4$  pomocí teploty  $T_1$ .
- Určete hodnoty tlaku a objemu v bodech 1, 2, 3, 4 kruhového děje.
- Překreslete tento kruhový děj ve vhodném měřítku do  $p - V$  diagramu.
- Určete práci vykonanou v průběhu jednoho cyklu kruhového děje.
- Vypočtete teplo dodané ideálnímu plynu v průběhu jednoho cyklu a účinnost tohoto kruhového děje. Při výpočtu tepla použijte první termodynamický zákon a vztah pro vnitřní energii plynu s dvouatomovými molekulami  $U = \frac{5}{2}nRT$ .

Řešte nejprve obecně, pak pro zadané hodnoty,  $R = 8,314\text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .



**Obrázek 17:**  $p - T$  diagram k zadání úlohy FO49B2-2.



**Obrázek 18:**  $p - V$  diagram k řešení úlohy FO49B2-2d.

**Řešení příkladu č. 15:**

- Děj  $1 \rightarrow 2$  je izochorický,  $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$ ; děj  $2 \rightarrow 3$  je izobarický,  $p_2 = p_3$ , děj  $3 \rightarrow 4$  je izochorický,  $\frac{p_3}{T_3} = \frac{p_4}{T_4}$ , děj  $4 \rightarrow 1$  je izobarický,  $p_4 = p_1$ . **2 body**
- Ze vztahů v a) můžeme psát  $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_3}{T_2}$ , z čehož  $\frac{p_1}{p_3} = \frac{T_1}{T_2}$ . Dále také  $\frac{p_3}{T_3} = \frac{p_1}{T_2}$ , z čehož  $\frac{p_1}{p_3} = \frac{T_2}{T_3}$ . Porovnáním vztahů pro  $\frac{p_1}{p_3}$  dostaneme  $\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_2}{T_3}$ , z čehož  $T_2 = \sqrt{T_1 T_3}$ , dále užijeme vztah  $T_3 = 4T_1$  a dostaneme  $T_2 = 2T_1 = T_4$ . **2 body**
- Vyjdeme ze stavové rovnice ideálního plynu ve tvaru  $pV = nRT$ .
  - $V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} = 0,023\text{ m}^3$ ,  $p_1 = 0,1\text{ MPa}$ .
  - $V_2 = V_1$ ,  $p_2 = \frac{T_2}{T_1}p_1 = 2p_1 = 0,2\text{ MPa}$ .
  - $V_3 = \frac{T_3}{T_2}V_2 = 2V_1 = 0,045\text{ m}^3$ ,  $p_3 = p_2 = 2p_1 = 0,2\text{ MPa}$ .
  - $V_4 = \frac{T_4}{T_1}V_1 = 2V_1 = V_3 = 0,045\text{ m}^3$ ,  $p_4 = p_1$ .
- Graf je znázorněn na obrázku 18. **2 body**

e) Práce vykonaná plynem při kruhovém ději je dána vztahem

$$W' = (p_2 - p_1)(V_3 - V_2) = p_1 V_1 = nRT_1 = 2270 \text{ J.}$$

1 bod

f) Dodané teplo

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + W'_{23} = \frac{5}{2}nR(T_2 - T_1) + \frac{5}{2}nR(T_3 - T_2) + p_2(V_3 - V_2),$$

$$Q_1 = \frac{5}{2}V_1(2p_1 - p_1) + \frac{5}{2}2p_1(2V_1 - V_1) + 2p_1(2V_1 - V_1) = 9,5p_1V_1.$$

$$\text{Účinnost je pak dána vztahem } \eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{p_1V_1}{9,5p_1V_1} = \frac{1}{9,5} = 10,5\%.$$

1 bod

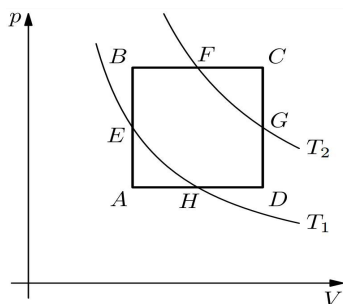
### Příklad č. 16: FO55A3-3: Účinnost kruhového děje

[39,78 %]

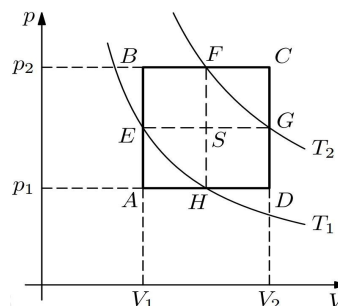
Kruhový děj, jehož  $p - V$  diagram je na obrázku 19, se skládá ze dvou dějů izochorických a dvou dějů izobarických. Pracovní látkou je 1 mol ideálního plynu s dvouatomovými molekulami. Střední spodní izobary a levé izochory leží na stejné izotermě s odpovídající teplotou  $T_1$ , střední horní izobary a pravé izochory leží na stejné izotermě s odpovídající teplotou  $T_2$ .

- Určete teploty plynu v bodech  $A, B, C$  a  $D$ .
- Určete práci plynem vykonanou během kruhového děje  $ABCD$ .
- Určete teoretickou účinnost tepelného stroje, který by podle tohoto cyklu pracoval.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty  $T_1 = 300 \text{ K}$ ,  $T_2 = 700 \text{ K}$ .



Obrázek 19:  $p - V$  diagram k zadání úlohy FO55A3-3.



Obrázek 20:  $p - V$  diagram k řešení úlohy FO55A3-3a.

### Řešení příkladu č. 16:

- Střední příčka  $EG$  je rovněž izobara a střední příčka  $FH$  je izochora (obrázek 20). Protože při ději izobarickém je objem přímo úměrný termodynamické teplotě a při ději izochorickém je tlak přímo úměrný termodynamické teplotě, platí

$$T_S = \frac{T_1 + T_2}{2}, \quad \frac{T_B}{T_1} = \frac{T_C}{T_2} = \frac{T_2}{T_1 + T_2}, \quad \frac{T_A}{T_1} = \frac{T_D}{T_2} = \frac{T_1}{T_1 + T_2}.$$

Pak

$$T_B = T_D = \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2} = 420 \text{ K}, \quad T_A = \frac{2T_1^2}{T_1 + T_2} = 180 \text{ K}, \quad T_C = \frac{2T_2^2}{T_1 + T_2} = 980 \text{ K}.$$

3 body

- b) Práce vykonaná plynem při jednom cyklu je číselně rovna obsahu obdélníka  $ABCD$ . Ze stavové rovnice ideálního plynu odvodíme

$$W' = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = p_2V_2 - p_2V_1 - p_1V_2 + p_1V_1 = nR(T_C - T_B - T_D + T_A)$$

$$W' = 2nR \frac{T_2^2 - 2T_1T_2 + T_1^2}{T_1 + T_2} = 2nR \frac{(T_2 - T_1)^2}{T_1 + T_2} = 2660 \text{ J.}$$

**3 body**

- c) Plyn přijímá teplo při dějích  $AB$  a  $BC$ :

$$Q_{AB} = \frac{5}{2}nR(T_B - T_A) = 5nR \frac{T_1T_2 - T_1^2}{T_1 + T_2},$$

$$Q_{BC} = \frac{7}{2}nR(T_C - T_B) = 7nR \frac{T_2^2 - T_1T_2}{T_1 + T_2},$$

$$Q_{AB} + Q_{BC} = nR \frac{7T_2^2 - 2T_1T_2 - 5T_1^2}{T_1 + T_2} = 21\,300 \text{ J.}$$

Teoretická účinnost kruhového děje

$$\eta = \frac{W'}{Q_{AB} + Q_{BC}} = \frac{2T_2^2 - 4T_1T_2 + 2T_1^2}{7T_2^2 - 2T_1T_2 - 5T_1^2} = \frac{2(T_2 - T_1)}{7T_2 + 5T_1} = 0,125.$$

**4 body**

**Příklad č. 17: FO50A2-4: Porovnání účinnosti dvou kruhových dějů [39,30 %]**

Dva kruhové děje zobrazené v diagramu  $p - V$  na obrázku 21 obdélníky 12341 a 15671 proběhly v ideálním plynu s dvouatomovými molekulami. Určete poměr  $\frac{\eta_1}{\eta_2}$  jejich účinností. Vnitřní energie  $n$  molů ideálního plynu s dvouatomovými molekulami je  $\frac{5}{2}nRT$ .

**Řešení příkladu č. 17:**

Účinnost  $\eta$  kruhového děje je definována jako poměr celkové práce  $W'$  plynu během jednoho cyklu a celkového tepla  $Q$  přijatého plynem během jednoho cyklu ohříváče,  $\eta = \frac{W'}{Q}$ . Práce  $W'$  je určena obsahem obrazce omezeného grafem. V obou případech má stejnou velikost  $W' = 2p_1V_1$ . Poměr účinností obou cyklů je tedy

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{Q_2}{Q_1},$$

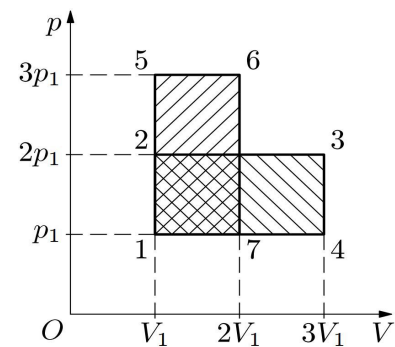
**2 body**

kde  $Q_1$  je celkové teplo přijaté plynem v jednom cyklu prvního děje a  $Q_2$  v jednom cyklu druhého děje. Celkové teplo přijaté během prvního cyklu je součtem tepla přijatého při izochorickém ohřátí  $1 \rightarrow 2$  a tepla přijatého při izobarické expanzi  $2 \rightarrow 3$ . U druhého cyklu je součtem tepla přijatého při izochorickém ohřátí  $1 \rightarrow 5$  a tepla přijatého při izobarické expanzi (resp.  $5 \rightarrow 6$ ).

Označme  $T_1$  teplotu plynu ve stavu 1, tedy při tlaku  $p_1$  a objemu  $V_1$ . Ze stavové rovnice plyne

$$T_2 = T_7 = 2T_1, \quad T_5 = T_4 = 3T_1, \quad T_6 = T_3 = 6T_1.$$

**2 body**



**Obrázek 21:**  $p - V$  diagram k zadání úlohy FO50A2-4.



Teplo přijaté plynem při izochorickém ohřátí je rovno přírůstku vnitřní energie. Teplo přijaté při izobarické expanzi je rovno součtu přírůstku vnitřní energie a vykonané práce. Proto

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = \frac{5}{2}nR(T_2 - T_1) + \frac{5}{2}nR(T_3 - T_2) + 2p_1 \cdot 2V_1$$

$$Q_1 = \frac{5}{2}nRT_1 + 10nRT_1 + 4nRT_1 = \frac{33}{2}nRT_1,$$

$$Q_2 = Q_{15} + Q_{56} = \frac{5}{2}nR(T_5 - T_1) + \frac{5}{2}nR(T_6 - T_5) + 3p_1V_1$$

$$Q_2 = 5nRT_1 + \frac{15}{2}nRT_1 + 3nRT_1 = \frac{31}{2}nRT_1.$$

5 bodů

Poměr účinností obou kruhových dějů je

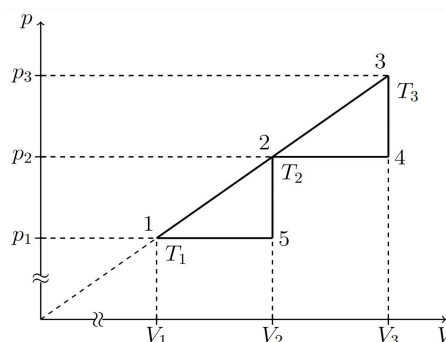
$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{31}{33}.$$

1 bod

### Příklad č. 18: FO57A3-3: Účinnost tepelného stroje

[38,65 %]

Tepelný stroj, jehož pracovní látkou je ideální plyn s dvouatomovými molekulami, pracuje v cyklu 1234251 jehož  $p - V$  diagram je na obrázku 22. Body 1, 2 a 3 leží na přímce procházející počátkem, bod 2 je střed úsečky 13. Nejnižší teplota cyklu je  $T_{min}$ , nejvyšší teplota cyklu je  $k$ -krát vyšší.



- Určete teplotu  $T_2$ , poměry objemů  $\frac{V_2}{V_1}$  a  $\frac{V_3}{V_1}$ .
- Určete účinnost  $\eta$  stroje pracujícího podle tohoto cyklu.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty  $T_{min} = 300$  K,  $k = 4$ . Vnitřní energie ideálního plynu s dvouatomovými molekulami je  $U = \frac{5}{2}nRT$ .

**Obrázek 22:**  $p - V$  diagram k zadání úlohy FO57A3-3.

### Řešení příkladu č. 18:

- Teplota plynu, jehož stav je zobrazen přímkou, roste se vzdáleností od počátku. Proto  $T_{min} = T_1$  a  $T_3 = kT_1$ . Dále platí:

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{p_3}{p_1} = \frac{\frac{nRT_3}{V_3}}{\frac{nRT_1}{V_1}} = \frac{T_3}{T_1} \frac{V_1}{V_3} = k \frac{V_1}{V_3}, \quad \text{odkud } \frac{V_3}{V_1} = \sqrt{k} = 2,$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{V_1+V_3}{2}}{V_1} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{V_3}{V_1} \right) = \frac{1 + \sqrt{k}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Z rovnic  $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$  a  $\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_2}{V_1}$  plyne

$$T_2 = \frac{p_2V_2}{p_1V_1}T_1 = \frac{V_2^2}{V_1^2}T_1 = \frac{(1 + \sqrt{k})^2}{4}T_1 = 675 \text{ K}.$$

5 bodů

- b) Abychom určili účinnost cyklu, musíme určit teplo  $Q_1$ , které plyn během cyklu dostane od ohřívače a práci  $W'$ , kterou plyn během cyklu vykoná. V daném cyklu plyn přijímá teplo při ději 123. Podle prvního zákona termodynamiky platí:

$$Q_1 = \Delta U_{13} + W'_{123} = \frac{5}{2}nR(T_3 - T_1) + \frac{1}{2}(p_1 + p_3)(V_3 - V_1).$$

Užitím vztahu  $\frac{V_3}{V_1} = \frac{p_3}{p_1}$  a stavové rovnice dostaneme

$$Q_1 = \frac{5}{2}nR(T_3 - T_1) + \frac{1}{2}(p_1V_3 - nRT_1 + nRT_3 - p_3V_1)$$

$$Q_1 = 3nR(T_3 - T_1) = 3nR(k - 1)T_1.$$

Plynnem vykonaná práce je rovna součtu obsahů dvou shodných trojúhelníků:

$$W' = 2 \frac{(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)}{2} = p_1V_1 + p_2V_2 - p_1V_2 - p_2V_1.$$

Dosazením  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1+\sqrt{k}}{2}$  a  $\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2}$  a drobnou úpravou dále dostaneme

$$W' = nRT_1 = \left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right)^2 = \frac{(1 - \sqrt{k})^2}{4}nRT_1.$$

Účinnost kruhového děje je pak:

$$\eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{\frac{(1-\sqrt{k})^2}{4}nRT_1}{3(k-1)nRT_1} = \frac{(1-\sqrt{k})^2}{12(k-1)} = \frac{1}{36} = 2,8\%.$$

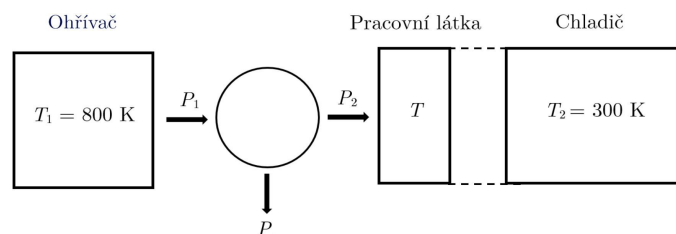
**5 bodů**

*Alternativní řešení výpočtu práce je možné dohledat na oficiálních stránkách FO.*

**Příklad č. 19: FO63A3-3: Tepelný motor**

**[34,43 %]**

Tepelný motor pracuje v Carnotově cyklu s ohřívačem o teplotě  $T_1 = 800$  K. Tepelná výměna mezi pracovní látkou a chladičem o teplotě  $T_2 = 300$  K probíhá při teplotě  $T$  skrze velmi hmotné těleso izolované od okolí. Těleso přenáší tepelný výkon  $P_2$  odebíraný motorem k chladiči tepelným vedením dle funkčního předpisu  $P_2 = \alpha(T - T_2)$ , kde  $\alpha = 1,00 \text{ kW} \cdot \text{K}^{-1}$ , viz obrázek 23.



**Obrázek 23:** Schéma k zadání úlohy FO63A3-3.

- Vyjádřete  $P$  jako funkci teplot  $T_1$ ,  $T_2$  a  $T$ .
- Určete teplotu  $T_m$  tělesa, při níž bude výkon motoru maximální.
- Určete maximální výkon  $P_m$  motoru.

d) Určete účinnost  $\eta_m$  Carnotova cyklu při maximálním výstupním výkonu.

Části b), c), d) řešte obecně i pro číselné hodnoty.

### Řešení příkladu č. 19:

a) Pro účinnost motoru pracujícím v Carnotově cyklu platí

$$\eta = \frac{P}{P + P_2} = \frac{T_1 - T}{T_1}.$$

Z rovnice plyne

$$P = P_2 \frac{T_1 - T}{T} = \alpha \frac{(T - T_2)(T_1 - T)}{T}.$$

**2 body**

b) Z úlohy a) máme k dispozici závislost výkonu  $P$  na teplotě  $T$ , kde  $T_1$  a  $T_2$  jsou dané konstanty. Vztah upravíme:

$$P = \alpha \frac{(T - T_2)(T_1 - T)}{T} = \alpha \left[ T_1 + T_2 - \left( T + \frac{T_1 T_2}{T} \right) \right].$$

Výkon je maximální, jestliže dvojčlen v závorce nabývá minima. Provedeme derivaci:

$$\frac{d}{dT} \left( T + \frac{T_1 T_2}{T} \right) = 1 - \frac{T_1 T_2}{T^2}.$$

Z podmínky nulové derivace plyne

$$T_m = \sqrt{T_1 T_2} = 490 \text{ K}.$$

Derivace je pro  $T < \sqrt{T_1 T_2}$  záporná, pro  $T > \sqrt{T_1 T_2}$  kladná, proto je nalezený extrém minimem a výkon maximem.

**4 body**

c) Maximální výkon tedy je

$$P_m = \alpha \left[ T_1 + T_2 - \left( \sqrt{T_1 T_2} + \frac{T_1 T_2}{\sqrt{T_1 T_2}} \right) \right] = \alpha \left( \sqrt{T_1} - \sqrt{T_2} \right)^2 = 120 \text{ kW}.$$

**2 body**

d) Účinnost při maximálním výkonu motoru je

$$\eta_m = \frac{T_1 - \sqrt{T_1 T_2}}{T_1} = \frac{\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}} = 0,388.$$

**2 body**

### Příklad č. 20: FO43B2-2: Kruhový děj v ideálním plynu II.

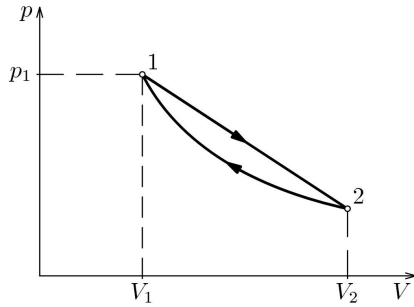
[27,05 %]

Ideální plyn o látkovém množství  $n = 2$  mol prochází kruhovým dějem 121, jehož  $p - V$  diagram je na obrázku 24. Děj  $1 \rightarrow 2$  je zobrazen úsečkou, děj  $2 \rightarrow 1$  je izotermický. V počátečním stavu 1 má plyn objem  $V_1 = 50$  l a tlak  $p_1 = 1 \cdot 10^5$  Pa. Ve stavu 2 má plyn objem  $V_2 = 3V_1$ .

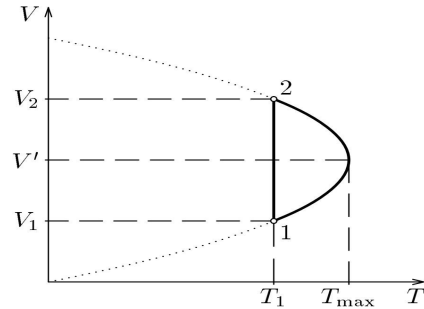
a) Určete počáteční teplotu  $T_1$ . Určete teplotu  $T_2$  a tlak  $p_2$  ve stavu 2.

- b) Určete závislost  $T(V)$  teploty na objemu pro obě větve cyklu a znázorněte cyklus ve  $V - T$  diagramu.
- c) Určete maximální teplotu  $T_{max}$  během cyklu, příslušný objem  $V'$  a tlak  $p'$ .
- d) Určete celkovou práci vykonanou plynem během jednoho cyklu.

Molární plynová konstanta  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .



**Obrázek 24:**  $p - V$  diagram k zadání úlohy FO43B2-2.



**Obrázek 25:**  $V - T$  diagram k řešení úlohy FO43B2-2b.

### Řešení příkladu č. 20:

- a) Teplota ve stavu 1 je stejná jako ve stavu 2:

$$T_1 = T_2 = \frac{p_1 V_1}{nR} = 300 \text{ K.}$$

Z Boylova-Mariottova zákona:

$$p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2} = \frac{p_1}{3} = 3,3 \cdot 10^4 \text{ Pa.}$$

**1 bod**

- b) Při izotermickém ději  $2 \rightarrow 1$  platí  $T = T_1 = \text{konst.}$  Rovnici přímky, na které leží graf děje  $1 \rightarrow 2$ , můžeme napsat ve tvaru  $p = aV + b$ . Koeficienty  $a, b$  nalezneme řešením soustavy rovnic

$$p_1 = aV_1 + b, \quad \frac{1}{3}p_1 = a \cdot 3V_1 + b.$$

Dostaneme:

$$a = -\frac{p_1}{3V_1}, \quad b = \frac{4}{3}p_1, \quad \text{tedy } p = -\frac{p_1}{3V_1}V + \frac{4}{3}p_1.$$

Po dosazení do stavové rovnice máme:

$$-\frac{p_1}{3V_1}V^2 + \frac{4}{3}p_1V = nRT, \quad T = \frac{4p_1}{3nR}V - \frac{p_1}{3nRV_1}V^2.$$

Jde tedy o kvadratickou funkci. Její graf ve  $V - T$  diagramu (obrázek 25) je parabola.

**4 body**

- c) Ze symetrie paraboly plyne, že plyn bude mít největší teplotu během děje  $1 \rightarrow 2$  při objemu

$$V' = \frac{V_1 + V_2}{2} = 2V_1 = 100 \text{ l.}$$

Příslušná teplota je

$$T_{max} = \frac{4p_1}{3nR} 2V_1 - \frac{p_1}{3nRV_1} 4V_1^2 = \frac{4p_1V_1}{3nR} = \frac{4}{3}T_1 = 400 \text{ K.}$$

Příslušný tlak je

$$p' = \frac{\frac{4}{3}nRT_1}{2V_1} = \frac{2}{3}p_1 = 6,7 \cdot 10^4 \text{ Pa.}$$

**3 body**

- d) Celková práce plynu během jednoho cyklu je rovna rozdílu práce vykonané při ději  $1 \rightarrow 2$  a práce spotřebované při ději  $2 \rightarrow 1$ :

$$W' = \frac{p_1 + \frac{p_1}{3}}{2} (3V_1 - V_1) - nRT_1 \ln \frac{3V_1}{V_1} = p_1 V_1 \left( \frac{4}{3} - \ln 3 \right) = 1,17 \text{ kJ.}$$

**2 body**

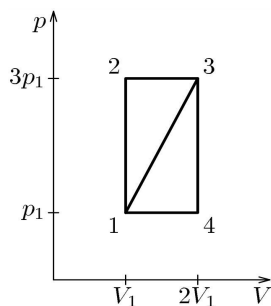
**Příklad č. 21: FO44B2-3: Dva kruhové děje**

[22,85 %]

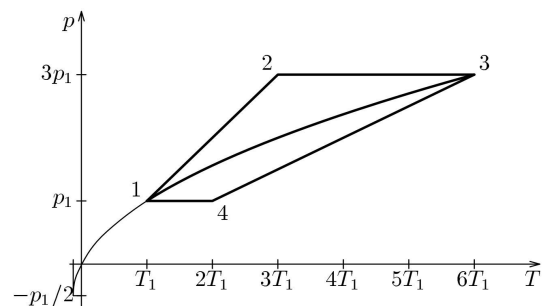
Na obrázku 26 jsou v  $p - V$  diagramu zakresleny dva kruhové děje 1231 a 1341. V obou dějích je pracovní látkou plyn s jednoatomovými molekulami o stejném látkovém množství  $n$ . Porovnejte

- celkovou práci vykonanou při jednom cyklu,
- teplo přijaté pracovní látkou při jednom cyklu,
- účinnost kruhových dějů.
- Překreslete oba cykly do diagramu  $p - T$ , u nelineárních závislostí uveďte vztah mezi veličinami  $T$  a  $p$ .

V případech a), b), c) určete poměr veličin pro oba děje.



**Obrázek 26:**  $p - V$  diagram k zadání úlohy FO44B2-3.



**Obrázek 27:**  $p - T$  diagram k řešení úlohy FO44B2-3d.

**Řešení příkladu č. 21:**

- a) Celková práce je v obou případech stejná a je rovna obsahu plochy v  $p - V$  diagramu:

$$W'_{1231} = W'_{1341} = \frac{1}{2} V_1 \cdot 2p_1 = p_1 V_1, \quad W'_{1231} : W'_{1341} = 1.$$

**1 bod**

b) Určíme teploty ve stavech 1, 2, 3, 4:

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR}, \quad T_2 = 3T_1, \quad T_3 = 6T_1, \quad T_4 = 2T_1.$$

Změny vnitřní energie při jednotlivých dějích:

$$\begin{aligned} \Delta U_{12} &= C_V \Delta T_{12} = \frac{3}{2} nR (T_2 - T_1) = \frac{3}{2} nR \cdot 2T_1 = 3nR \frac{p_1 V_1}{nR} = 3p_1 V_1, \\ \Delta U_{23} &= \frac{3}{2} nR \cdot 3T_1 = \frac{9}{2} p_1 V_1, & \Delta U_{31} &= \frac{3}{2} nR (-5T_1) = -\frac{15}{2} p_1 V_1, \\ \Delta U_{13} &= \frac{15}{2} p_1 V_1, & \Delta U_{34} &= -6p_1 V_1, & \Delta U_{41} &= -\frac{3}{2} p_1 V_1. \end{aligned}$$

V cyklu 1231 je teplo dodáváno při dějích 12 a 23:

$$Q_{1231} = \Delta U_{12} + W'_{12} + \Delta U_{23} + W'_{23} = 3p_1 V_1 + 0 + \frac{9}{2} p_1 V_1 + 3p_1 V_1 = \frac{21}{2} p_1 V_1.$$

V cyklu 1341 je teplo dodáváno jen při ději 13:

$$Q_{1341} = \Delta U_{13} + W'_{13} = \frac{15}{2} p_1 V_1 + 2p_1 V_1 = \frac{19}{2} p_1 V_1.$$

Tepla jsou v poměru  $\frac{Q_{1231}}{Q_{1341}} = \frac{21}{19}$ .

**3 body**

c) Účinnost cyklu 1231 je  $\eta_{1231} = \frac{W'_{1231}}{Q_{1231}} = \frac{\frac{p_1 V_1}{\frac{21}{2} p_1 V_1}}{\frac{21}{2} p_1 V_1} = \frac{2}{21}$ , účinnost cyklu 1341 je  $\eta_{1341} = \frac{W'_{1341}}{Q_{1341}} = \frac{\frac{19}{2} p_1 V_1}{\frac{19}{2} p_1 V_1} = \frac{2}{19}$ . Účinnosti jsou v poměru  $\frac{\eta_{1231}}{\eta_{1341}} = \frac{19}{21}$ .

**2 body**

d) Při dějích 23 a 41 je tlak konstantní, při dějích 12 a 34 je tlak přímo úměrný termodynamické teplotě. Závislost tlaku na teplotě je nelineární při ději 13, kde platí

$$\frac{V - V_1}{p - p_1} = \frac{V_1}{2p_1}, \quad V = V_1 + \frac{V_1}{2p_1} (p - p_1),$$

$$nRT = pV = pV_1 + \frac{pV_1}{2p_1} (p - p_1) = \frac{V_1}{2p_1} p^2 + \frac{V_1}{2} p \quad T = \frac{1}{nR} \left( \frac{V_1}{2p_1} p^2 + \frac{V_1}{2} p \right).$$

Dostali jsme rovnici paraboly, která prochází počátkem grafu na obrázku 27 a body 1 a 3. Další úpravou dostaneme

$$T = \frac{p_1 V_1}{2nR} \left( \frac{p}{p_1} \right)^2 + \frac{p_1 V_1 p}{2nR p_1} = \frac{T_1}{2} \left( \frac{p}{p_1} \right)^2 + \frac{T_1}{2} \frac{p}{p_1} = \frac{T_1}{2} \left( \frac{p}{p_1} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{T_1}{8}.$$

Vrchol paraboly je v bodě  $\left[ -\frac{T_1}{8}, -\frac{p_1}{2} \right]$ .

**4 body**

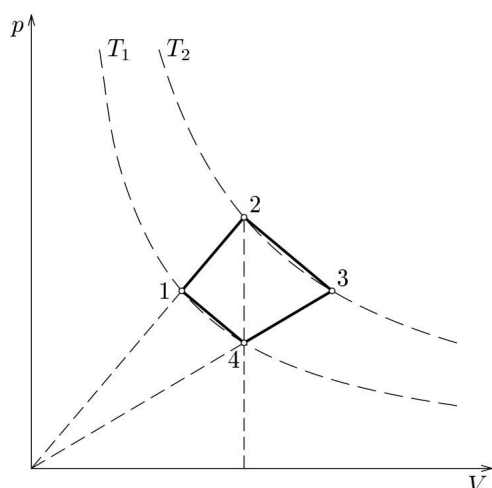
**Příklad č. 22: FO42B2-2: Kruhový děj v ideálním plynu III.**

[11,55 %]

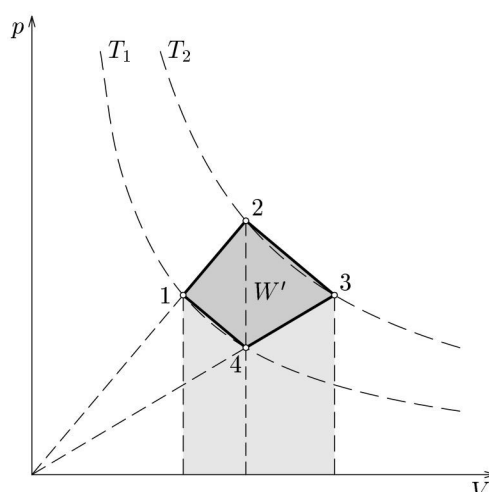
Na obrázku 28 je  $p - V$  diagram teoretického kruhového děje 12341, jehož pracovní látkou je ideální plyn o látkovém množství  $n$ . Jednotlivé úseky děje jsou zobrazeny úsečkami. Body 1 a 4, resp. 2 a 3 leží na izotermách pro teploty  $T_1$  a  $T_2$ . Dále platí  $V_2 = V_4$ .

- Vyjádřete objemy  $V_1$  a  $V_3$  pomocí teplot  $T_1$ ,  $T_2$  a objemu  $V_2$ .
- Pro každý úsek kruhového děje určete vykonanou nebo spotřebovanou práci.
- Určete celkovou práci kruhového děje.

Řešte obecně a pak pro hodnoty  $T_1 = 300 \text{ K}$ ,  $T_2 = 450 \text{ K}$ ,  $n = 2 \text{ mol}$ .



**Obrázek 28:**  $p - V$  diagram k zadání úlohy FO42B2-2.



**Obrázek 29:**  $p - V$  diagram k řešení úlohy FO42B2-2.

### Řešení příkladu č. 22:

- a) Podle stavové rovnice platí  $p_1 V_1 = p_4 V_4 = nRT_1$ ,  $p_2 V_2 = p_3 V_3 = nRT_2$ . Z obrázku 28 je zřejmé:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_2}{V_1}, \quad \frac{p_3}{p_4} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Porovnáním vztahů dostaneme:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2, \quad V_1 = V_2 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_3 V_3}{p_4 V_4} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^2, \quad V_3 = V_4 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = V_2 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.$$

**3 body**

- b) Děj  $1 \rightarrow 2$ :

Vykonanou práci určíme z  $p - V$  diagramu jako obsah lichoběžníka (obrázek 29).

$$W'_{12} = \frac{p_2 + p_1}{2} (V_2 - V_1) = \frac{1}{2} (p_2 V_2 + p_1 V_2 - p_2 V_1 - p_1 V_1).$$

Současně platí  $\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_2}{V_1}$ , odkud  $p_1 V_2 - p_2 V_1 = 0$ .

$$W'_{12} = \frac{1}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{1}{2} nR (T_2 - T_1).$$

Děj  $2 \rightarrow 3$ :

$$W'_{23} = \frac{p_2 + p_3}{2} (V_3 - V_2) = \frac{1}{2} (p_2 V_3 + p_3 V_3 - p_2 V_2 - p_3 V_2).$$

Současně platí  $p_2 V_2 = p_3 V_3$ , odkud  $p_2 V_2 - p_3 V_3 = 0$  a  $p_3 = p_2 \frac{V_2}{V_3} = p_2 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$ .

$$W'_{23} = \frac{1}{2} (p_2 V_3 - p_3 V_2) = \frac{1}{2} p_2 V_2 \left( \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \right).$$

Děj 3 → 4:

Spotřebovanou práci určíme z  $p - V$  diagramu jako obsah lichoběžníka.

$$W_{34} = \frac{p_3 + p_4}{2} (V_3 - V_4) = \frac{1}{2} (p_3 V_3 + p_4 V_3 - p_3 V_4 - p_4 V_4).$$

Současně platí  $\frac{p_3}{p_4} = \frac{V_3}{V_4}$ , odkud  $p_4 V_3 - p_3 V_4 = 0$ .

$$W_{34} = \frac{1}{2} (p_3 V_3 - p_4 V_4) = \frac{1}{2} nR(T_2 - T_1) = W'_{12}.$$

Děj 4 → 1:

$$W_{41} = \frac{p_4 + p_1}{2} (V_4 - V_1) = \frac{1}{2} (p_4 V_4 + p_1 V_4 - p_4 V_1 - p_1 V_1).$$

Současně platí  $p_4 V_4 = p_1 V_1$ , odkud  $p_4 V_4 - p_1 V_1 = 0$  a  $p_1 = p_4 \frac{V_4}{V_1} = p_4 \frac{V_2}{V_1} = p_4 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$ .

$$W_{41} = \frac{1}{2} (p_1 V_4 - p_4 V_1) = \frac{1}{2} p_4 V_4 \left( \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \right).$$

**4 body**

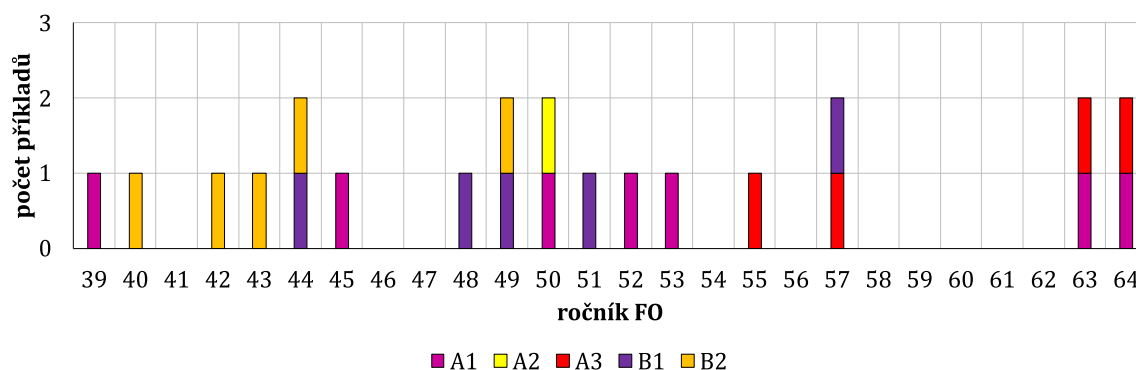
c) Celková vykonaná práce  $W' = W'_{12} + W'_{23} - W_{34} - W_{41} = W'_{23} - W_{41}$ , odkud

$$W' = \frac{1}{2} nRT_2 \left( \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \right) - \frac{1}{2} nRT_1 \left( \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \right) = \frac{nR(T_2 - T_1)^2}{2\sqrt{T_1 T_2}} = 509 \text{ J.}$$

**3 body**

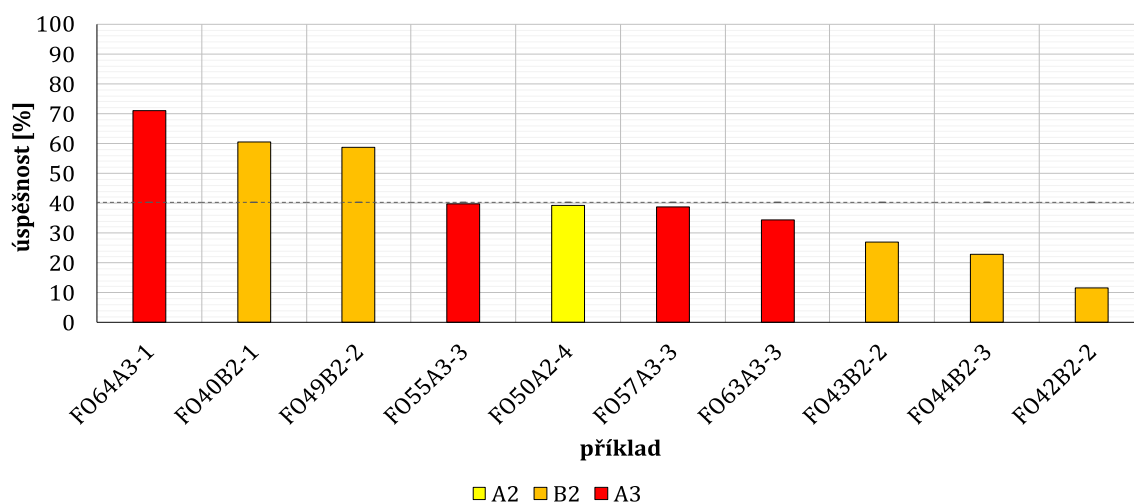
### 3.3.3 Statistická úspěšnost příkladů

Příklady, které se věnují práci plynu a kruhovým dějům, jsou v olympiádě druhé nejčastější, alespoň v kategoriích A a B dohromady. Celkově tato podkapitola zahrnuje dvacet dva příkladů, což odpovídá 29,33 % ze všech příkladů termodynamiky a molekulové fyziky.



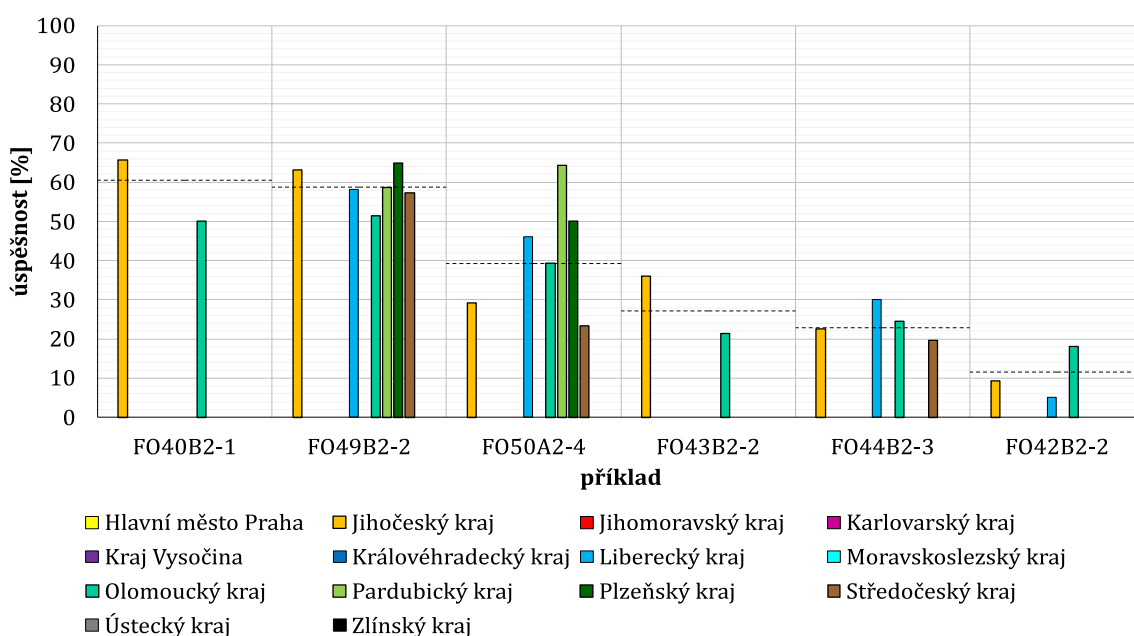
**Obrázek 30:** Zastoupení příkladů podkapitoly zaměřené na práci plynu a kruhový děj v jednotlivých ročnících a kolech Fyzikální olympiády.





**Obrázek 31:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladů zaměřených na práci plynu a kruhový děj.

Dle grafu na obrázku 30 se příklady vyskytují v olympiádě pravidelně, ale ne v hojném počtu (maximálně jeden až dva příklady v ročníku). Nejčastěji se objevují v prvních kolech kategorií A a B, ve druhém kole kategorie A se vyskytl za dvacet šest let pouze jeden příklad v 50. ročníku, ve druhém kole kategorie B pět příkladů a ve třetím kole kategorie A čtyři příklady. Celkem je deset příkladů v postupových kolech, což odpovídá 45,45 % příkladů této podkapitoly. Zajímavé je, že tato podkapitola se zařazuje do celostátních kol pouze v posledních deseti ročnících, a příklady této podkapitoly se aktuálně dávají spíše do kategorie A než kategorie B. Originálních příkladů je pouze dvacet jedna, příklad FO40B2-1 je totožný jako FO44B1-3.



**Obrázek 32:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladů zaměřených na práci plynu a kruhový děj v jednotlivých krajích ČR.

V grafu na obrázku 31 je zobrazena úspěšnost jednotlivých příkladů z postupových kol. Průměrná úspěšnost příkladů je 40,40 %, soutěžící v kategorii A mají úspěšnost 44,66 %, soutěžící v kategorii B 35,29 %.

v kategorii B 36,14 %. Porovnání jednotlivých krajů je možné jen v omezené míře, protože všechna krajská kola jsou ze starších ročníků, kde jsou dostupné výsledkové listiny pouze pro Jihočeský a Olomoucký kraj, popř. ještě pro Středočeský, Pardubický, Plzeňský a Liberecký kraj. Dle úspěšnosti příkladů FO49B2-2 a FO50A2-4 (obrázek 32), které mají nejvíce dostupných výsledkových listin, patří mezi nejúspěšnější kraje Plzeňský kraj, naopak nejméně úspěšný je Středočeský kraj.

## 3.4 Pevné látky

### 3.4.1 Základní pojmy a vztahy

Pevná látka může měnit své rozměry a tvar především mechanickým nebo teplotním působením. Pro pružnou deformaci v tahu nebo tlaku platí Hookův zákon

$$\sigma_n = E\epsilon,$$

kde  $\sigma_n = \frac{F_p}{S}$  je normálové napětí, které způsobí síla pružnosti  $F_p$  působící na plochu o obsahu  $S$ , a  $E$  je modul pružnosti v tahu (Youngův modul). Jednotkou modulu pružnosti je Pa.  $\epsilon$  je relativní prodloužení a je definováno jako

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

kde  $\Delta l = l - l_0$  je prodloužení, které je závislé na počáteční délce  $l_0$  a  $l$  je délka po prodloužení.

Teplotním působením na pevnou látku dochází ke změnám délky, objemu a hustoty. Pro délkovou roztažnost platí vztah:

$$l = l_0 + \Delta l = l_0 + \alpha l_0 \Delta t = l_0 (1 + \alpha \Delta t), \quad (12)$$

kde  $\Delta t$  je přírůstek nebo úbytek teploty a  $\alpha$  je teplotní součinitel délkové roztažnosti udávaný v  $K^{-1}$ . U vyšších teplotních rozdílů se uplatňuje také kvadratický člen, vztah (12) pro délku tělesa je možné v takovém případě upravit na

$$l = l_0 (1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2).$$

Objemová roztažnost pevných látek je dána vztahem

$$V = V_0 + \Delta V = V_0 + \beta V_0 \Delta t = V_0 (1 + \beta \Delta t), \quad (13)$$

kde  $V$  je objem tělesa po teplotním působení,  $V_0$  počáteční objem,  $\Delta V$  změna objemu a  $\beta$  je teplotní součinitel objemové roztažnosti, jehož jednotkou je  $K^{-1}$ . Pro izotropní látku  $\beta \doteq 3\alpha$ . I u objemové roztažnosti se u vyšších teplotních rozdílů uplatňuje kvadratický člen a vztah (13) je možné upravit na

$$V = V_0 (1 + \beta_1 t + \beta_2 t^2).$$

Se změnou teploty je ovlivněna také hustota, závislost je dána vztahem

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta \Delta t), \quad (14)$$

kde  $\rho$  je hustota po teplotním působení a  $\rho_0$  počáteční hustota.

### 3.4.2 Řešené příklady

**Příklad č. 23: FO52B2-4: Teplotní roztažnost** [39,16 %]

Relativní prodloužení  $\frac{\Delta l}{l_0}$  měkké oceli má v důsledku zahřátí při teplotě  $100^\circ\text{C}$  hodnotu 0,00120 a při teplotě  $200^\circ\text{C}$  hodnotu 0,00251. Délka  $l_0$  je při vztažné teplotě  $0^\circ\text{C}$ .

- a) V intervalu  $\langle 0^\circ\text{C}, 200^\circ\text{C} \rangle$  můžeme závislost délky ocelového předmětu na teplotě a dostatečnou přesností vyjádřit vztahem

$$l = l_0 (1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2).$$

Určete koeficienty  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ .

- b) V témže intervalu můžeme závislost objemu ocelového předmětu na teplotě s dostatečnou přesností vyjádřit vztahem

$$V = V_0 (1 + \beta_1 t + \beta_2 t^2).$$

Určete koeficienty  $\beta_1, \beta_2$ .

Koeficienty  $\alpha_1, \beta_1$  vypočítejte alespoň na tři platné číslice, koeficienty  $\alpha_2, \beta_2$  alespoň na dvě platné číslice.

### Řešení příkladu č. 23:

- a) Ze vztahu

$$l = l_0 (1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2) = l_0 + \Delta l$$

vyjádříme relativní prodloužení:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2.$$

Dosazením zadaných hodnot dostaneme soustavu rovnic pro číselné hodnoty  $\{\alpha_1\}, \{\alpha_2\}$ :

$$100\{\alpha_1\} + 1 \cdot 10^4\{\alpha_2\} = 0,00120,$$

$$200\{\alpha_1\} + 4 \cdot 10^4\{\alpha_2\} = 0,00251.$$

Řešením dostaneme:

$$\{\alpha_1\} = 1,145 \cdot 10^{-5}, \quad \{\alpha_2\} = 5,5 \cdot 10^{-9},$$

$$\alpha_1 = 1,145 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}, \quad \alpha_2 = 5,5 \cdot 10^{-9} \text{ K}^{-2}.$$

**5 bodů**

- b) Závislost objemu na teplotě vyjadřuje vztah, který odvodíme pro těleso krychlového tvaru:

$$V = l^3 = l_0^3 \left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right)^3 = V_0 \left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right)^3 = V_0 (1 + \beta_1 t + \beta_2 t^2).$$

Dosazením zadaných hodnot dostaneme soustavu rovnic pro číselné hodnoty  $\{\beta_1\}, \{\beta_2\}$ :

$$1 + 100\{\beta_1\} + 1 \cdot 10^4\{\beta_2\} = (1 + 0,00120)^3 = 1,003604322,$$

$$1 + 200\{\beta_1\} + 4 \cdot 10^4\{\beta_2\} = (1 + 0,00251)^3 = 1,007548916.$$

Řešením dostaneme:

$$\{\beta_1\} = 3,434 \cdot 10^{-5}, \quad \{\beta_2\} = 1,7 \cdot 10^{-8},$$

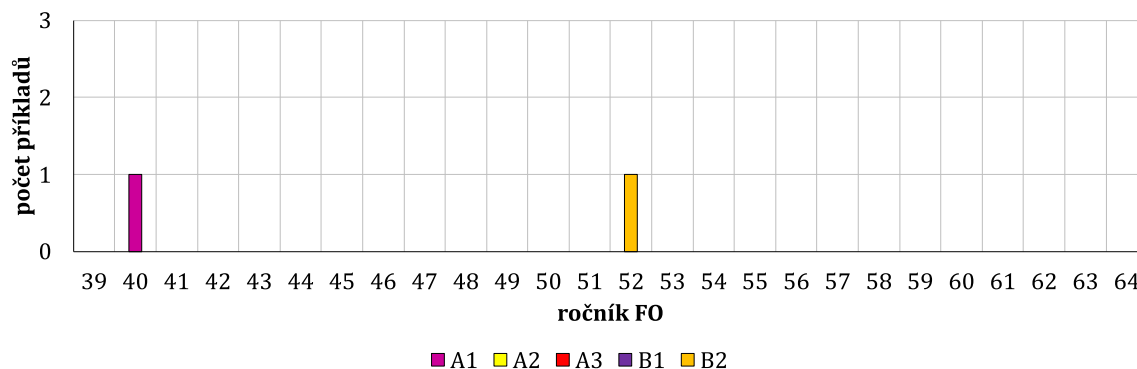
$$\beta_1 = 3,434 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}, \quad \beta_2 = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ K}^{-2}.$$

**5 bodů**

*Alternativní řešení této části úlohy je možné dohledat na oficiálních stránkách FO.*

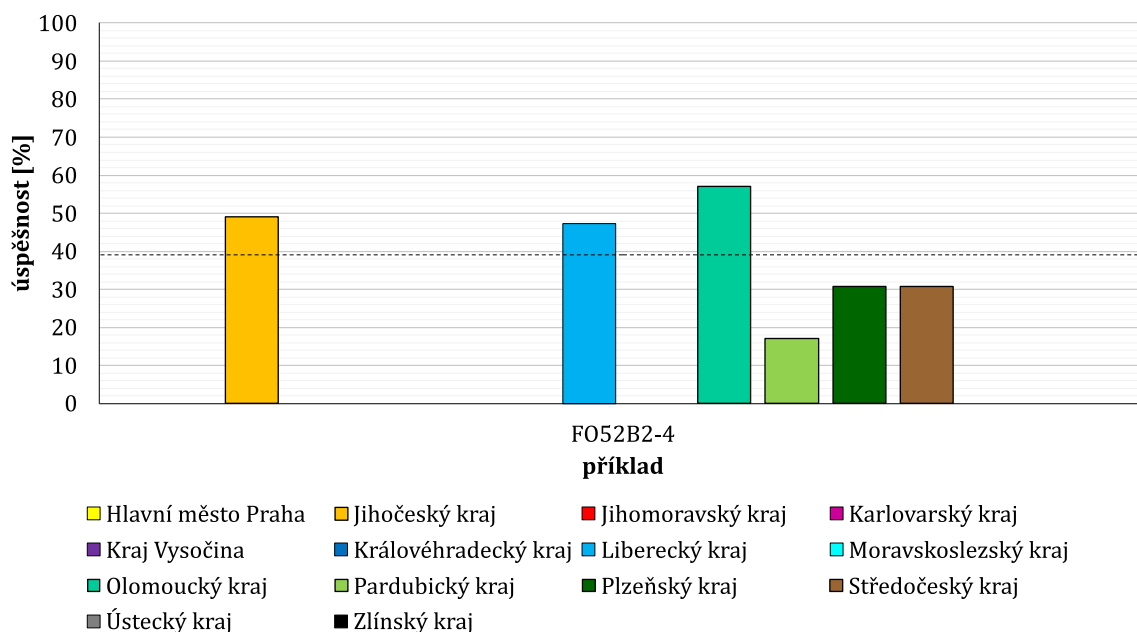
### 3.4.3 Statistická úspěšnost příkladů

Příklady zabývající se pevnými látkami tvoří nejmenší podkapitolu, která čítá pouze dva příklady, což je 2,67 % z celkového počtu příkladů oblasti termodynamiky a molekulové fyziky.



**Obrázek 33:** Zastoupení příkladů podkapitoly zaměřené na pevné látky v jednotlivých ročnících a kolech Fyzikální olympiády.

Z obrázku 33 je možné zjistit, že tyto příklady byly zadány ve starších ročnících, konkrétně v prvním kole kategorie A 40. ročníku a ve druhém kole kategorie B v 52. ročníku. Příklady jsou oba originální.



**Obrázek 34:** Procentuální úspěšnost příkladu FO52B2-4 v jednotlivých krajích ČR.

Procentuální úspěšnost příkladu FO52B2-4, jediného příkladu v postupových kolech kategorie A a B, je možné vidět na obrázku 34. Celková průměrná úspěšnost tohoto příkladu je 39,16 %. Bohužel, protože se jedná o starší příklad, jsou výsledkové listiny dostupné pouze pro některé kraje. Z dostupných údajů byli u tohoto příkladu nejúspěšnější řešitelé z Olomouckého kraje, naopak nejméně úspěšní byli řešitelé z Pardubického kraje.

## 3.5 Kapaliny

### 3.5.1 Základní pojmy a vztahy

Na rozdíl od plynů a pevných látek mají kapaliny hladinu. Na povrchu kapalin se vytváří vrstva molekul, která se snaží zmenšit plošný obsah povrchu kapaliny. Síla  $F_p$ , která k této vrstvě molekul působí kolmo, vyvolává tzv. povrchové napětí  $\sigma$ , které je dáno vztahem

$$\sigma = \frac{F_p}{l},$$

kde  $l$  je délka okraje povrchové blány, kterou molekuly kapaliny vytváří. Jednotkou povrchového napětí je  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ . Protože je povrchová blána pružná, vzniká pod zakřiveným povrchem kapaliny kapilární tlak  $p_k$ , který je pro volný povrch kapaliny kulového tvaru

$$p_k = \frac{2\sigma}{r},$$

kde  $r$  je poloměr kulového povrchu. Pro mýdlovou bublinu je kapilární tlak dvojnásobný, protože má dva povrchy.

Důsledkem existence kapilárního tlaku jsou kapilární elevace a kapilární deprese. Ke kapilární elevaci dochází v případě, že kapalina je smáčivá, ke kapilární elevaci dochází u nesmáčivých kapalin. Pokud do kapaliny vsuneme kapiláru, můžeme výšku  $h$  sloupce kapaliny v kapiláře určit z rovnosti hydrostatického a kapilárního tlaku, tedy platí

$$h\rho g = \frac{2\sigma}{r}, \quad \text{odkud } h = \frac{2\sigma}{\rho g r},$$

kde  $\rho$  je hustota kapaliny,  $g$  je tíhové zrychlení a  $r$  vnitřní poloměr kapiláry.

Pro doplnění zmiňme ještě osmotický tlak  $p_{osm}$ , což je tlak, který existuje mezi dvěma kapalinami, které jsou oddělené semipermeabilní (výběrově propustnou) membránou. Tento tlak je dán vztahem

$$p_{osm} = iRTc,$$

kde  $i$  je van 't Hoffův koeficient,  $R$  molární plynová konstanta,  $T$  termodynamická teplota a  $c = \frac{n}{V}$  molární koncentrace rozpuštěné soli daná podílem látkového množství a objemu roztoku.

Stejně jako u pevných látek i u kapalin dochází při změně teploty k objemové roztažnosti a změně hustoty, tedy platí vztahy (13) a (14).

### 3.5.2 Řešené příklady

**Příklad č. 24: FO59B2-3: Kapilární a osmotický tlak** [54,93 %]

Pro výživu rostlin i živočichů jsou významné kapilární jevy a osmotický tlak.

- Rostlinné kapiláry mají průměr  $d_1 = 10^{-5}$  m. Do jaké výšky  $h_1$  vystoupí voda v kapiláře o takovém průměru? Jaký průměr  $d_2$  by musely mít kapiláry v kmeni sekvoje, aby se jimi voda dostala do výšky  $h_2 = 80$  m? Stačí kapilární tlak pro dopravení živin do koruny vysokého stromu?
- Jak velký osmotický tlak vznikne v kořenech rostliny, předpokládáme-li, že v půdě je čistá voda a v rostlinných kapilárách roztok soli, obsahující v jednom litru vody 10 g NaCl? Stačí takový tlak dopravit živiny do koruny vysokého stromu? Průměrnou teplotu půdy předpokládejte  $15^\circ\text{C}$ .
- Osmotický tlak krve u člověka je přibližně  $7 \cdot 10^5$  Pa. Kolikaprocentní roztok NaCl bude izotonický s krví, tj. bude mít za stejné teploty stejný osmotický tlak?

Osmotický tlak závisí na molární koncentraci rozpuštěné soli podle vztahu  $p_{osm} = iRTc$ , kde  $c$  je molární koncentrace rozpuštěné soli v jednotkách  $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$  a  $i$  van 't Hoffův koeficient. Pro roztok NaCl je hodnota  $i \approx 2$ .

Povrchové napětí vody  $\sigma = 72 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , molární plynová konstanta  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , tíhové zrychlení  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , molární hmotnosti sodíku a chloru  $M_m(\text{Na}) = 23 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $M_m(\text{Cl}) = 35,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

### Řešení příkladu č. 24:

- a) Z rovnosti kapilárního a hydrostatického tlaku  $\frac{4\sigma}{d_1} = h_1 \rho g$  plyne

$$h_1 = \frac{4\sigma}{d_1 \rho g} = 3 \text{ m.}$$

Z rovnosti kapilárního a hydrostatického tlaku  $\frac{4\sigma}{d_2} = h_2 \rho g$  plyne

$$d_2 = \frac{4\sigma}{h_1 \rho g} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m.}$$

Pro dopravení živin do koruny vysokého stromu kapilární tlak nestačí.

**3 body**

- b) Nejprve určíme molární koncentraci soli v roztoku:

$$c = \frac{n}{V} = \frac{m}{V (M_m(\text{Na}) + M_m(\text{Cl}))}.$$

Osmotický tlak potom bude

$$p_{osm} = iRTc = iRT \frac{m}{V (M_m(\text{Na}) + M_m(\text{Cl}))} = 0,85 \text{ MPa.}$$

*Velikost osmotického tlaku vysvětluje, proč dokáží některé rostliny prorůst i vrstvou asfaltu.*

Z rovnosti osmotického a hydrostatického tlaku

$$h \rho g = iRT \frac{m}{V (M_m(\text{Na}) + M_m(\text{Cl}))}$$

pak plyne

$$h = iRT \frac{m}{V \rho g (M_m(\text{Na}) + M_m(\text{Cl}))} = 87 \text{ m.}$$

**4 body**

- c) Molární koncentrace  $c = \frac{p_{osm}}{iRT} = \frac{m}{V (M_m(\text{Na}) + M_m(\text{Cl}))}$ , odkud

$$\frac{m}{V} = \frac{p_{osm}}{iRT} (M_m(\text{Na}) + M_m(\text{Cl})) = 8,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

V 1 kg roztoku je 8,2 g soli, roztok je tedy přibližně 0,8%.

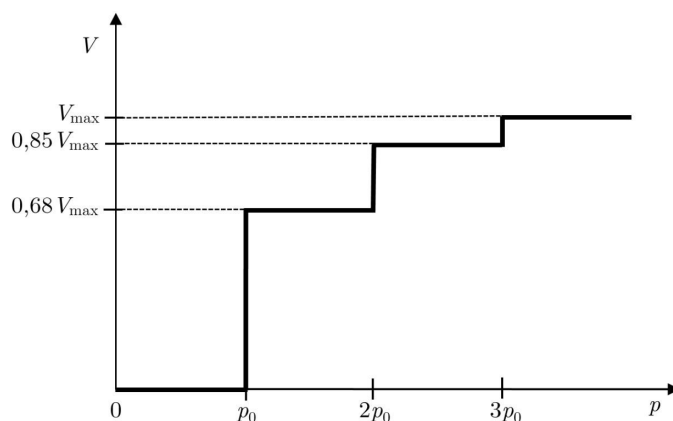
**3 body**

**Příklad č. 25: FO64A2-1: Měření pórovitosti látky**

[53,97 %]

Pórovitou látku si představíme jako pevnou látku protkanou sítí kanálků různých, ale stálých průměrů. Pro jednoduchost uvažujme, že kanálky se navzájem nekříží a prochází celým objemem látky. Pórovitost definujme jako podíl objemu kanálků a celého objemu vzorků  $\vartheta = \frac{V_k}{V}$ .

- a) Jednoduchý způsob měření spočívá v tom, že vzorek nejprve zvážíme na vzduchu a pak ve vodě. Po vysušení se vzorek pokryje tenkou vrstvičkou parafínu, která póry uzavře, a znova zváží ve vodě. Jaká je pórovitost vzorku, bylo-li zjištěno, že ve vodě vzorek váží polovinu a po uzavření pórů třetinu původní tíhy? Předpokládejte, že voda látku dokonale smáčí. Hmotnost parafínu je zanedbatelná.
- b) Rtuťová porozimetrie umožňuje určit i rozdělení pórů podle jejich průměrů. Ve speciální komoře se vyčerpá z pórů vzduch a pak se do vzorku vtlačuje rtuť. Přitom se měří závislost vtlačeného objemu na použitém tlaku. S využitím grafu na obrázku 35, kde  $p_0 = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ , a ze známého povrchového napětí rtuti  $\sigma_{Hg} = 485 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$  určete průměry pórů ve vzorku obsažených a jejich procentuální zastoupení v celkovém počtu pórů. Předpokládejte, že rtuť látku dokonale nesmáčí.  $V_{max}$  je maximální objem rtuti, který se do vzorku podařilo vtlačit. Všechny póry mají stejnou délku.



Obrázek 35:  $V - p$  diagram k zadání úlohy FO64A2-1.

**Řešení příkladu č. 25:**

- a) Označme  $\rho$  hustotu materiálu vzorku a  $\rho_v$  hustotu vody. Na vzduchu má vzorek tíhu

$$G = \rho(V - V_k)g,$$

ve vodě pak

$$G_1 = \rho(V - V_k)g - \rho_v(V - V_k)g = \frac{1}{2}G = \frac{1}{2}\rho(V - V_k)g, \quad \text{odkud } \rho = 2\rho_v.$$

Tíha tělesa s uzavřenými póry ve vodě

$$G_2 = \rho(V - V_k)g - \rho_v Vg.$$

Podle zadání

$$G_2 = \frac{G}{3}, \quad \text{odkud } \rho(V - V_k) - \rho_v V = \frac{1}{3}\rho(V - V_k), \quad \text{odkud } V_k = \frac{V}{4} \text{ a } \vartheta = 25\%.$$

**3 body**



- b) Protože rtuť látku nesmáčí, musí vnější síla překonávat sílu způsobenou kapilárním tlakem

$$p\pi\frac{d^2}{4} = \sigma_{Hg}\pi d,$$

proto začne rtuť plnit kapiláry o průměru  $d$ , až když tlak dosáhne hodnoty

$$p = \frac{4\sigma_{Hg}}{d}.$$

Nejdříve se tedy budou zaplňovat póry o průměru  $d_1 = \frac{4\sigma_{Hg}}{p_0} = 1,94 \cdot 10^{-5}$  m, pak póry o průměru  $d_2 = \frac{2\sigma_{Hg}}{p_0} = 9,7 \cdot 10^{-6}$  m a nakonec póry o průměru  $d_3 = \frac{4\sigma_{Hg}}{3p_0} = 6,5 \cdot 10^{-6}$  m.

**3 body**

Ve vzorku látky jsou tedy póry o třech různých průměrech. Pro jejich celkový počet platí  $N = N_1 + N_2 + N_3$ . Z grafu vidíme, že do pórů o průměru  $d_1$  pronikl objem rtuťi

$$N_1\pi\frac{d_1^2}{4}l = 0,68V_{max},$$

kde  $l$  je délka póru. Podobně

$$N_2\pi\frac{d_2^2}{4}l = 0,85V_{max} - 0,68V_{max} = 0,17V_{max},$$

$$N_3\pi\frac{d_3^2}{4}l = V_{max} - 0,85V_{max} = 0,15V_{max}.$$

Dělením rovnic a vzhledem k tomu, že  $d_2 = \frac{1}{2}d_1$  a  $d_3 = \frac{1}{3}d_1$ , dostáváme

$$N_1d_1^2 : N_2d_2^2 : N_3d_3^2 = N_1 : N_2\frac{1}{4} : N_3\frac{1}{9} = 0,68 : 0,17 : 0,15,$$

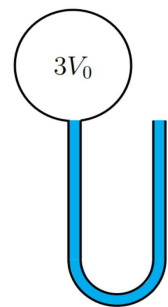
pak  $N_1 : N_2 : N_3 = 0,68 : 0,68 : 1,35 \doteq 1 : 1 : 2$ . Ve vzorku je tedy 50 % pórů o průměru  $d_3$ , 25 % o průměru  $d_1$  a 25 % o průměru  $d_2$ .

**4 body**

#### Příklad č. 26: FO56A2-4: Nádoba s U-trubicí

[41,40 %]

K jednomu konci vertikálně postavené, tenkostěnné, skleněné U-trubice s obsahem vnitřního kruhového průřezu  $S = 0,5 \text{ cm}^2$  a vnitřním objemem  $V_0 = 25 \text{ cm}^3$ , naplněné vodou o hustotě  $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , je těsně připojena nádoba se vzduchem objemu  $3V_0$  (viz obrázek 36). Počáteční tlak vzduchu v nádobě je roven atmosférickému tlaku  $p_0 = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ , jeho počáteční teplota je  $T_0 = 300 \text{ K}$ . Nádobu se vzduchem budeme pomalu zahřívát tak dlouho, dokud z U-trubice nevyteče třetina množství vody.



- Jak se přitom změní teplota vzduchu v nádobě?
- Jaké teplo  $Q$  budeme muset dodat?
- Během děje se uplatňuje též kapilarita. Rozhodněte, zda přispívá k vytékání vody z trubice, či působí proti vytékání, a posuďte pomocí číselného výpočtu, zda je či není zanedbatelná.

**Obrázek 36:** U-trubice, k zadání úlohy FO56A2-4.

Ztráty tepla do okolí zanedbáme. Poloměr křivosti ohybu trubky je zanedbatelný v porovnání s její délkou. Vzduch můžeme považovat za ideální plyn s dvouatomovými molekulami. Vnitřní energie ideálního plynu s dvouatomovými molekulami určíme ze vztahu  $U = \frac{5}{2}nRT$ . Předpokládejte, že teplota vody v trubici se při zahřívání nádobky nemění. Povrchové napětí vody při  $27^\circ\text{C}$  je  $\sigma = 71,7 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$ .

### Řešení příkladu č. 26:

- a) Při zahřívání se objem vzduchu zvětšuje a voda začne z trubice vytékat. Když z trubice vyteče třetina množství vody, bude objem vzduchu  $\frac{10}{3}V_0$  a jeho tlak bude  $p_1 = p_0 + \rho g \frac{V_0}{3S}$ , jeho teplota se zvýší na  $T$ . Zapišeme stavovou rovnici:

$$\frac{p_0 3V_0}{T_0} = \frac{(p_0 + \rho g \frac{V_0}{3S}) \frac{10}{3} V_0}{T}.$$

Odsud vyjádříme rozdíl teplot:

$$T - T_0 = \frac{T_0}{p_0 3V_0} \left( \frac{10}{3} p_0 V_0 + \rho g \frac{10V_0^2}{9S} - p_0 3V_0 \right) = \frac{T_0}{p_0 3V_0} \left( \frac{1}{3} p_0 V_0 + \rho g \frac{10V_0^2}{9S} \right)$$

$$T - T_0 = \left( \frac{1}{9} + \frac{10V_0 \rho g}{27S p_0} \right) T_0 = 38,8 \text{ K}.$$

**4 body**

- b) Dodané teplo určíme pomocí prvního zákona termodynamiky:  $Q = \Delta U + W'$ , kde

$$\Delta U = \frac{5}{2} nR (T - T_0) = \frac{15p_0 V_0}{2T_0} (T - T_0) = \frac{15p_0 V_0}{2T_0} \frac{T_0}{p_0 3V_0} \left( \frac{1}{3} p_0 V_0 + \rho g \frac{10V_0^2}{9S} \right)$$

$$\Delta U = \frac{5}{2} \left( \frac{1}{3} p_0 V_0 + \rho g \frac{10V_0^2}{9S} \right) = \frac{5}{6} p_0 V_0 + \frac{25\rho g V_0^2}{9S}.$$

Práce plynu během rozpínání probíhá při lineárně rostoucím tlaku z počáteční hodnoty  $p_0$  na konečnou hodnotu  $p_0 + \rho g \frac{V_0}{3S}$ . Plyn vykonal práci

$$W' = \frac{p_0 + (p_0 + \rho g \frac{V_0}{3S})}{2} \cdot \frac{V_0}{3} = \frac{1}{3} p_0 V_0 + \frac{\rho g V_0^2}{18S}.$$

Dosažením do prvního zákona termodynamiky:

$$Q = \Delta U + W' = \frac{5}{6} p_0 V_0 + \frac{25\rho g V_0^2}{9S} + \frac{1}{3} p_0 V_0 + \frac{\rho g V_0^2}{18S} = \frac{7}{6} p_0 V_0 + \frac{17\rho g V_0^2}{6S} = 3,3 \text{ J}.$$

**4 body**

*Alternativní řešení této části úlohy je možné dohledat na oficiálních stránkách FO.*

- c) V levém rameni rozpínající se vzduch působí proti vztlínání vody, tedy práce vykonaná plynem je v důsledku kapilarity větší než vypočtená. Prohne se i hladina vody při jejím vytékání z pravého ramena a i zde kapilární tlak brání vytékání vody. Kapilární tlak má při dokonalém smáčení v trubici o poloměru  $r$  velikost  $p_k = \frac{2\sigma}{r}$  a celkový kapilární tlak má hodnotu

$$p_k = 4\sigma \sqrt{\frac{\pi}{S}}.$$

Při teplotě 300 K je jeho číselná hodnota 72 Pa a v porovnání s atmosférickým tlakem je jeho vliv zanedbatelný.

**2 body**

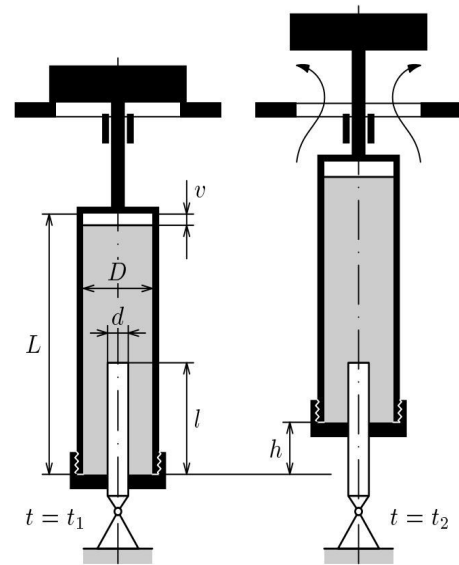
**Příklad č. 27: FO44B2-4: Zařízení pro automatické větrání**

[23,82 %]

Zařízení pro automatické větrání je vybaveno svislým ocelovým válcem o vnitřní délce  $L = 35$  cm a vnitřním průměru  $D = 30$  mm. Do otvoru ve dně válce je skrz těsnění zasunuta válcová tyč o průměru  $d = 8$  mm, která funguje jako píst a je dolním koncem upevněna ke konstrukci větraného objektu. Válec je téměř zcela zaplněn olejem o teplotním součiniteli objemové roztažnosti  $\beta = 7,06 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ . Malý zbytek objemu je vyplněn vzduchem. Celé zařízení kromě pístu má hmotnost  $m = 5$  kg (obrázek 37).

Vzrůstá-li se teplota objektu, zvětšuje se objem oleje mnohem rychleji než objem ocelového válce a tlak ve válci stoupá, až při teplotě  $t_1 = 20$  °C překoná tlaková síla pístu tíhu zařízení a kryt otvoru se začne zvedat. V tomto počátečním okamžiku má zasunutá část pístu délku  $l = 15$  cm a vrstva vzduchu nad olejem výšku  $v = 1,5$  mm.

Zanedbejte nejprve teplotní roztažnost oceli a hydrostatický tlak oleje a řešte úlohy a) až c). Pak řešte úlohu d).



**Obrázek 37:** Nákres zařízení, k zadání úlohy FO44B2-4.

- Určete přetlak  $p$  ve válci oproti atmosférickému tlaku  $p_b = 1 \cdot 10^5$  Pa.
- Určete výšku  $h$ , do které vystoupí válec, jestliže teplota zařízení stoupne na  $t_2 = 40$  °C.
- Určete přetlak  $p'$  ve válci oproti atmosférickému tlaku a výšku  $v'$  vzduchové vrstvy, jestliže teplota zařízení klesne na  $t_3 = -10$  °C.
- Odhadněte chybu, které jste se dopustili při určení výšky  $h$  zanedbáním teplotní roztažnosti oceli, jestliže teplotní součinitel délkové roztažnosti oceli je  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .

**Řešení příkladu č. 27:**

- Přetlak oproti atmosférickému tlaku je vyvolán tíhou zařízení

$$p = \frac{F_G}{S} = \frac{4mg}{\pi d^2} = 9,75 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

Ve válci je tlak  $p_1 = p + p_b = 10,75 \cdot 10^5$  Pa.

1 bod

- Vzroste-li teplota  $t_1$  na  $t_2$ , absolutní teplota z  $T_1$  na  $T_2$ , dojde ve válci k izobarickému ději. Zvětšení objemu oleje a vzduchu způsobí vysunutí pístu:

$$\left[ \frac{\pi D^2}{4} (L - v) - \frac{\pi d^2}{4} l \right] \beta \Delta t + \frac{\pi D^2}{4} v \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = \frac{\pi d^2}{4} h,$$

$$h = \frac{D^2 (L - v) \beta \Delta t}{d^2} - l \beta \Delta t + \frac{D^2 v \Delta t}{d^2 T_1} = 0,066 \text{ m} = 6,6 \text{ cm.}$$

4 body

- c) Poklesne-li teplota z  $t_1$  na  $t_3$ , absolutní teplota z  $T_1$  na  $T_3$ , zmenší se objem oleje a zvětší se objem vzduchu:

$$V_1 - V_3 = \frac{\pi D^2}{4} (v' - v) = \left[ \frac{\pi D^2 (L - v)}{4} - \frac{\pi d^2 l}{4} \right] \beta (t_1 - t_3),$$

$$v' = v + \left( L - v - \frac{d^2 l}{D^2} \right) \beta (t_1 - t_3) = 0,008\,37\text{ m} = 8,37\text{ mm}.$$

Ze stavové rovnice  $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_3 V_3}{T_3}$  dostaneme

$$p_3 = \frac{p_1 T_3 V_1}{T_1 V_3} = \frac{p_1 T_3 v}{T_1 v'} = 1,73 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Přetlak ve válci poklesne na  $p' p_3 - p_b = 0,73 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ .

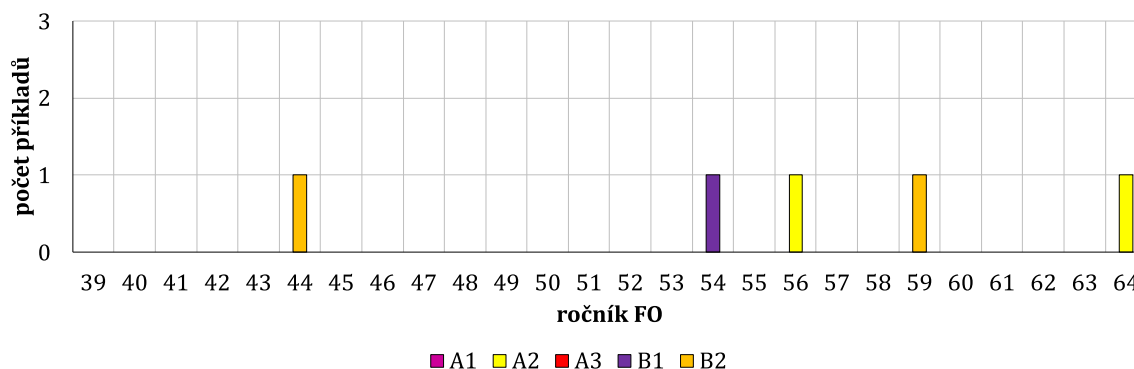
**4 body**

- d) V důsledku zvýšení teploty z  $t_1$  na  $t_2$  se poněkud zvětší i objem ocelového válce a vysunutí pístu z válce bude menší, než jsme předpokládali v b). Teplotní součinitel objemové roztažnosti oceli je  $3\alpha = 36 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ , což je asi 5 % teplotního součinitele objemové roztažnosti oleje  $\beta$ . Proto výška  $h$ , do které vystoupí, bude asi o 5 % menší, než jsme vypočítali v části b).

**1 bod**

### 3.5.3 Statistická úspěšnost příkladů

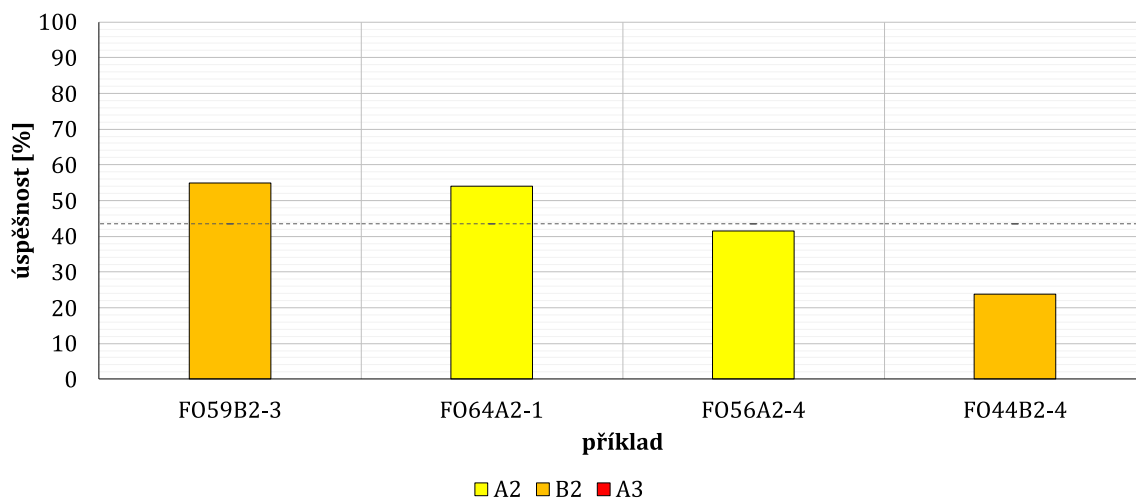
Kapaliny jsou malá podkapitola s 6,67% výskytem v oblasti termodynamiky a molekulové fyziky zahrnující celkem pět příkladů v kategoriích A a B dohromady. Tyto příklady jsou dle grafu na obrázku 38 zadávány především v pozdějších ročnících, a to zejména ve druhých kolech. Z pěti příkladů jsou čtyři z postupových kol a všechny jsou originální.



**Obrázek 38:** Zastoupení příkladů podkapitoly zaměřené na kapaliny v jednotlivých ročnících a kolech Fyzikální olympiády.

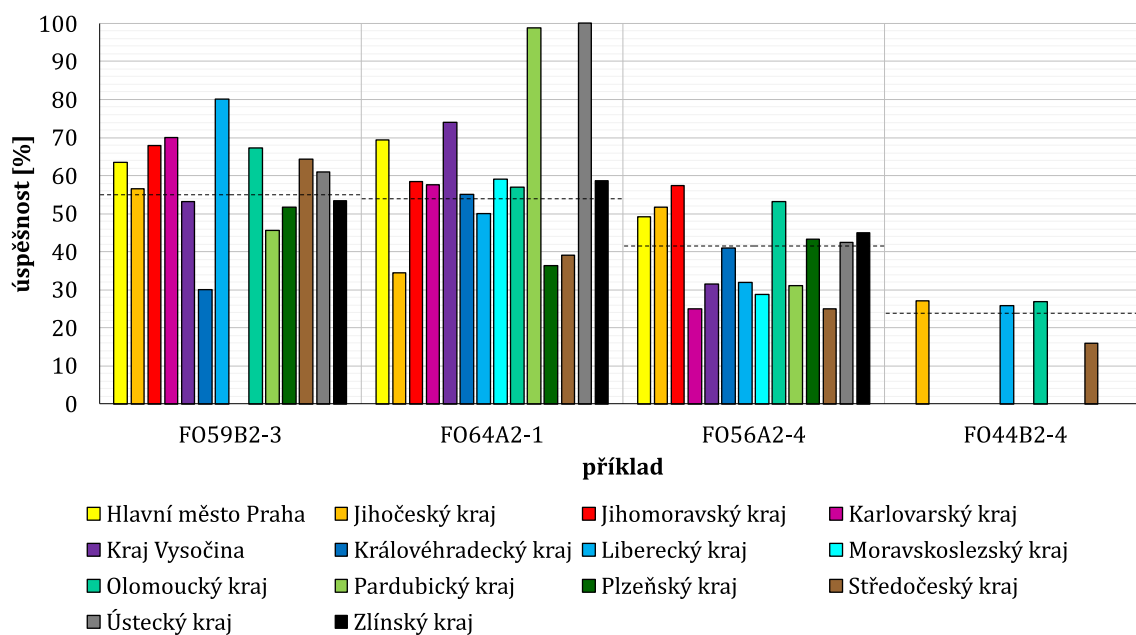
Postupová kola jsou půl na půl z kategorie A a z kategorie B (viz obrázek 39). Průměrná úspěšnost všech příkladů je 43,53 %, úspěšnost v kategorii A dosahuje 47,69 %, v kategorii B 39,38 % – úspěšnější jsou tedy řešitelé v kategorii A.

Protože je většina příkladů z postupových kol z pozdějších ročníků, jsou dobře dostupné výsledkové listiny a je možné dobré porovnání v rámci krajů u třech ze čtyř příkladů (obrázek 40). V grafu vidíme dva výrazné sloupce u příkladu FO64A2-1, u Pardubického kraje dosahuje sloupec hodnoty 98,75 %, u Ústeckého kraje dokonce 100 %. V Pardubickém kraji soutěžili čtyři žáci, z nichž tři dosáhli maximálního počtu bodů, čtvrtý uspěl s půlbodovou



**Obrázek 39:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladů zaměřených na kapaliny.

ztrátou. V Ústeckém kraji se do soutěže zapojili pouze dva žáci. V 59. ročníku bohužel chybí výsledková listina z Moravskoslezského kraje. Mezi úspěšnější kraje patří např. Olomoucký kraj, Hlavní město Praha, Jihočeský kraj, Jihomoravský kraj či Ústecký kraj, naopak mezi méně úspěšné patří např. Středočeský kraj a Plzeňský kraj.



**Obrázek 40:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladů zaměřených na kapaliny v jednotlivých krajích ČR.

## 3.6 Změny skupenství

### 3.6.1 Základní pojmy a vztahy

Jednotlivá skupenství látek se mezi sebou mohou měnit. Každá změna skupenství vyžaduje dodání nebo odebrání tepla  $Q$ . Dochází-li ke změně plynného skupenství na pevné a naopak, mluvíme o desublimaci a sublimaci. Potřebné teplo  $L_s$  za dané teploty se nazývá skupenské teplo sublimace a je možné ho vyjádřit vztahem

$$L_s = ml_s,$$

kde  $m$  je hmotnost tělesa a  $l_s$  měrné skupenské teplo sublimace za dané teploty, jeho jednotkou je  $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Změna skupenství z kapaliny na pevnou látku a naopak se nazývá tuhnutí a tání, a skupenské teplo tání  $L_t$ , které musíme dodat pevné látce, aby se přeměnila na kapalinu, se spočítá jako

$$L_t = ml_t,$$

kde  $l_t$  je měrné skupenské teplo tání za dané teploty, jeho jednotkou je  $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Změně plynného skupenství na kapalinu a naopak říkáme kondenzace a vypařování (popř. var). Skupenské teplo vypařování  $L_v$ , které musí kapalina přijmout, aby se změnila v páru, je dáno vztahem

$$L_v = ml_v,$$

kde  $l_v$  je měrné skupenské teplo vypařování za dané teploty, jeho jednotkou je  $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

Pára, která je v dynamické rovnováze se svou kapalinou, se nazývá sytá pára. Pokud má pára nižší tlak a hustotu než sytá pára o stejné teplotě, nazývá se tato pára přehřátá. Množství vodních par se dá vyjádřit pomocí absolutní a relativní vlhkosti vzduchu. Absolutní vlhkost vzduchu se označuje  $\phi$  a spočítá se jako

$$\phi = \frac{m}{V},$$

kde  $m$  je hmotnost vodní páry ve vzduchu o objemu  $V$ . Jednotkou absolutní vlhkosti je  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Relativní vlhkost se značí  $\varphi$  a jedná se o poměr absolutní vlhkosti vzduchu za daných podmínek  $\phi$  a absolutní vlhkosti vzduchu  $\phi_m$ , kterou by měl vzduch při stejné teplotě, kdyby byl plně nasycen vodními parami, tedy

$$\varphi = \frac{\phi}{\phi_m}.$$

Relativní vlhkost se udává v procentech. Teplota, při které je vzduch plně nasycen vodními parami, se nazývá rosný bod.

Teplo není látkou pouze přijímáno nebo odevzdáváno, ale také vedeno. Schopnost látky vést teplo se nazývá tepelná vodivost a je charakterizována součinitelem tepelné vodivosti  $\lambda$ , který je dán vztahem

$$\lambda = \frac{d}{tS\Delta T}Q,$$

kde  $d$  je vzdálenost mezi dvěma plochami o stejném obsahu  $S$ ,  $\Delta T$  je rozdíl teplot mezi deskami,  $t$  čas, za které projde teplo  $Q$  těmito plochami.

### 3.6.2 Řešené příklady

#### Příklad č. 28: FO61B2-3: Kalorimetr

[75,68 %]

Ve válcové kalorimetrické nádobě o poloměru  $r = 5$  cm je voda o hmotnosti  $m_1 = 500$  g, ve které plave led o hmotnosti  $m_2 = 5$  g. Soustava je v rovnovážném stavu. Do nádoby ponoříme měděný váleček o hmotnosti  $m_3 = 100$  g a teplotě  $t_3 = 50$  °C.

- Jaká bude výsledná teplota vody?
- O jakou výšku stoupne její hladina 1. ponořením válečku, 2. roztátím ledu? V obou případech 1. i 2. doložte svá tvrzení příslušnými výpočty.

Tepelné ztráty zanedbejte, nepřihlížejte ani k závislosti hustoty a měrné tepelné kapacity na teplotě. Měrné skupenské teplo tání ledu je  $l_t = 330$  kJ · kg<sup>-1</sup>, měrná tepelná kapacita vody je  $c_1 = 4200$  J · kg<sup>-1</sup> · K<sup>-1</sup>, měrná tepelná kapacita mědi je  $c_3 = 383$  J · kg<sup>-1</sup> · K<sup>-1</sup>, hustota mědi je  $\rho_3 = 8900$  kg · m<sup>-3</sup>.

#### Řešení příkladu č. 28:

- Označme  $Q_1$  teplo, které přijme voda,  $Q_2$  teplo, které přijme led a  $Q_3$  teplo, které vydá váleček, výsledná teplota vody je  $t$ .

Podle zákona zachování energie je množství tepla  $Q_3$ , které předá váleček vodě a ledu, rovno množství tepla, které přijme voda  $Q_1$  a  $Q_2$  (zanedbáme-li tepelné ztráty vzniklé ohřátím kalorimetru a vyzářením). Proto platí rovnice

$$Q_3 = Q_1 + Q_2. \quad (15)$$

Označíme-li výslednou teplotu  $t$ , potom teplo, které vydá váleček při ochlazení, je

$$Q_3 = m_3 c_3 (t_3 - t).$$

Teplo, které spotřebuje voda, aby se ohřála na teplotu  $t$ , je

$$Q_1 = m_1 c_1 t,$$

neboť voda, v níž plave led, má teplotu 0 °C. Teplo, které přijme led, se spotřebuje jednat na roztátí ledu (není-li ledu příliš mnoho), jednat na ohřátí vody vzniklé táním ledu z 0 °C na výslednou teplotu  $t$ , proto

$$Q_2 = m_2 l + c_1 m_2 t.$$

Dosazením do  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  do rovnice (15) získáme kalorimetrickou rovnici

$$m_3 c_3 (t_3 - t) = m_2 l + (m_1 + m_2) c_1 t,$$

z níž určíme neznámou

$$t = \frac{m_3 c_3 t_3 - m_2 l}{(m_1 + m_2) c_1 + m_3 c_3}.$$

Pro dané hodnoty:  $t = \frac{0,1 \cdot 383 \cdot 50 - 0,005 \cdot 330 \cdot 10^3}{(0,5 + 0,005) \cdot 4200 + 0,1 \cdot 383}$  °C = 0,12 °C.

**4 body**

1. Po ponoření válečku stoupne hladina vody v kalorimetru o objem vody vytlačené válečkem. Objem měděného válečku je

$$V_1 = \frac{m_3}{\rho_3}. \quad (16)$$

Vytlačená voda zaujme podle nádoby tvar válce, jehož výška je  $h$ , takže

$$V_1 = \pi r^2 h. \quad (17)$$

Porovnáním rovnic (16) a (17) dostáváme pro  $h$  rovnici

$$\frac{m_3}{\rho_3} = \pi r^2 h,$$

odkud

$$h = \frac{m_3}{\pi r^2 \rho_3}.$$

Pro dané hodnoty  $h = \frac{0,1}{\pi \cdot 0,05^2 \cdot 8900} \text{ m} = 0,14 \text{ cm}$ .

**3 body**

2. Označme  $\rho_2$  hustotu vody,  $V$  objem ponořené části ledu a  $V'_2$  objem roztátého ledu. Led o hmotnosti  $m_2$  má po roztátí objem

$$V'_2 = \frac{m_2}{\rho_2}.$$

Z Archimédova zákona

$$m_2 g = \rho_2 V g$$

dostaneme

$$V = \frac{m_2}{\rho_2}.$$

Z porovnání plyne  $V'_2 = V$ , tedy úroveň hladiny vody se nezmění.

**3 body**

### Příklad č. 29: FO59A3-4: Zamrzání jezera

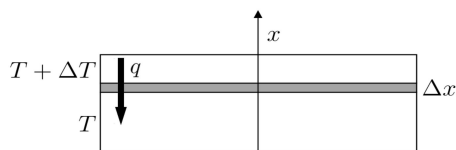
[51,81 %]

Předpokládejme, že ve vrstvě látky teplota závisí pouze na souřadnici  $x$  (obrázek 41). Jestliže udržujeme protilehlé plochy vrstvy homogenní a izotropní látky na různých teplotách s teplotním rozdílem  $\Delta T$ , pak vrstvou tloušťky  $\Delta x$  prochází ve směru poklesu teploty tepelný tok. Hustota tepelného toku je  $q = \frac{Q}{S\tau} = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x}$ , kde  $Q$  je teplo prošlé za čas  $\tau$  plochou o obsahu  $S$  a  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti látky.

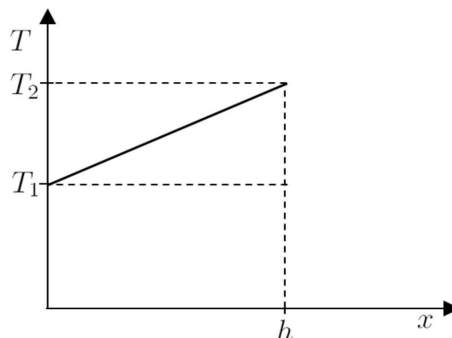
Hustota vody  $\rho_0 = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , hustota ledu  $\rho_l = 900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , teplota tání ledu  $t_0 = 0^\circ \text{C}$ , měrné skupenské teplo tání ledu  $l_t = 3,3 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ , měrná tepelná kapacita vody  $c_0 = 4200 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  měrná tepelná kapacita ledu  $c_l = 2100 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , součinitel tepelné vodivosti vody  $\lambda_0 = 0,63 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , součinitel tepelné vodivosti ledu  $\lambda_l = 2,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

- Jak závisí teplota uvnitř desky o tloušťce  $h$ , jejíž stěny jsou udržovány na stálých teplotách  $T_1$  a  $T_2$ , na vzdálenosti  $x$  od jejího chladnějšího okraje? Platí  $T_1 < T_2$ .
- Ledový hranol má tloušťku  $h = 30 \text{ cm}$  a teplotu  $t_1 = -15^\circ \text{C}$ . Hranol položíme na masivní kovovou podložku, jejíž teplota je udržována na hodnotě  $t_2 = -5^\circ \text{C}$ . Teplota okolí ledu je rovněž  $t_1$ . Jak dlouhou dobu  $\tau_0$  bude trvat vytvoření stálého rozložení teplot uvnitř ledového hranolu? Můžeme předpokládat, že k přenosu energie mezi deskou a kolem dochází stejně jako při již vytvořeném stavu tepelné rovnováhy. Únik tepla bočními stěnami hranolu je zanedbatelný.
- Teplota nad klidnou hladinou jezera klesla na hodnotu  $t_3 = -10^\circ \text{C}$  a zůstává stálá. Teplota vody v jezeře je stálá a je rovna  $t_0 = 0^\circ \text{C}$ . Jak dlouhou dobu  $\tau_1$  bude trvat vytvoření ledové vrstvy na hladině jezera, která bude mít tloušťku  $h = 30 \text{ cm}$ ?
- Na hladině jezera je vrstva ledu o tloušťce  $h_0 = 30 \text{ cm}$ . Teplota okolního vzduchu stoupá na hodnotu  $t_4 = 10^\circ \text{C}$  a zůstává stálá. Jak dlouhou dobu  $\tau_2$  bude trvat, než led roztaje? Předpokládejte, že všechna voda vzniklá táním ledu zůstává nad ledem.





**Obrázek 41:** Parametry vrstvy, k zadání úlohy FO59A3-4.



**Obrázek 42:** Graf závislosti teploty na souřadnici, k řešení úlohy FO59A3-4.

**Řešení příkladu č. 29:**

- a) Z předpokladu ustáleného tepelného toku  $q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} = \text{konst.}$  plyne

$$-\lambda \frac{T_2 - T_1}{h} = -\lambda \frac{T - T_1}{x}.$$

Z rovnice dostaneme  $T = \frac{T_2 - T_1}{h}x + T_1$ . Teplota uvnitř desky se tedy mění lineárně (viz obrázek 42). **1 bod**

- b) Hranol leží na ploše o velikosti  $S$ . Do ustavení tepelné rovnováhy, kdy teplota uvnitř hranolu ve směru dolů lineárně roste, přijme hranol teplo

$$Q = mc_l \frac{T_2 - T_1}{2} = Sh\rho_l c_l \frac{T_2 - T_1}{2}.$$

Toto teplo musí hranolu předat teplejší deska za dobu  $\tau_0$ :

$$Q = \lambda_l S \frac{T_2 - T_1}{h} \tau_0.$$

Pak

$$Sh\rho_l c_l \frac{T_2 - T_1}{2} = \lambda_l S \frac{T_2 - T_1}{h} \tau_0, \quad \text{odkud } \tau_0 = \frac{\rho_l c_l h^2}{2\lambda_l} \doteq 4 \cdot 10^4 \text{ s} \doteq 11 \text{ h.}$$

**3 body**

- c) Při zamrznání ledu odebírá teplo vznikajícímu ledu vzduch nad jeho povrchem. Toto teplo dodává kapalná voda pod ledem. Za velmi krátkou dobu  $d\tau$  vznikne vrstvička ledu o tloušťce  $dx$ . Přitom se skupenské teplo krystalizace musí rovnat odebranému teplu. Vzduch musí odebrat jednak teplo rovné skupenskému teplu tuhnutí a navíc teplo, potřebné k ustavení tepelné rovnováhy ve vznikající vrstvě ledu.

$$l_t dm + S\rho_l c_l \frac{t_0 - t_3}{2} dx = l_t S\rho_l dx + S\rho_l c_l \frac{t_0 - t_3}{2} dx = \lambda_l S \frac{t_0 - t_3}{x} d\tau,$$

odkud

$$d\tau = \frac{l_t \rho_l}{\lambda_l (t_0 - t_3)} x dx + \frac{\rho_l c_l}{2\lambda_l} x dx,$$

$$\tau_1 = \left( \frac{l_t \rho_l}{\lambda_l (t_0 - t_3)} + \frac{\rho_l c_l}{2\lambda_l} \right) \int_0^h x dx = \frac{l_t \rho_l h^2}{2\lambda_l (t_0 - t_3)} + \frac{\rho_l c_l}{4\lambda_l} h^2 \doteq 6,27 \cdot 10^5 \text{ s} \doteq 7,3 \text{ dne.}$$

**3 body**

- d) Při tání ledu je teplo potřebné k jeho tání přiváděno vrstvou vody, která vzniká na jeho povrchu. Zvolme osu  $x$  s počátkem v rovině hladiny v horní vrstvě vody ve směru dolů. Za nekonečně malou dobu  $d\tau$  přibude nad ledem voda nekonečně malé tloušťky  $dx$ , přičemž platí rovnice tepelné rovnováhy

$$\lambda_0 \frac{t_4 - t_0}{x} S dx = l_t S \rho_l dx + S \rho_0 c_0 \frac{t_4 - t_0}{2} dx$$

z níž plyne

$$d\tau = \left( \frac{l_t \rho_l}{\lambda_0 (t_4 - t_0)} + \frac{\rho_0 c_0}{2\lambda_0} \right) x dx.$$

Integrací v mezích od nuly do konečné tloušťky vrstvy  $h'_0 = \frac{\rho_l}{\rho_0} h_0$  dostaneme

$$\tau_2 = \left( \frac{l_t \rho_l}{\lambda_0 (t_4 - t_0)} + \frac{\rho_0 c_0}{2\lambda_0} \right) \int_0^{h'_0} x dx = \left( \frac{l_t \rho_l}{\lambda_0 (t_4 - t_0)} + \frac{\rho_0 c_0}{2\lambda_0} \right) \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\rho_l}{\rho_0} h_0}$$

$$\tau_2 = \frac{l_t \rho_l^3 h_0^2}{2\lambda_0 \rho_0^2 (t_4 - t_0)} + \frac{c_0 \rho_0^2 h_0^2}{4\lambda_0 \rho_0} = 1,84 \cdot 10^6 \text{ s} \doteq 511 \text{ h} \doteq 21 \text{ dní.}$$

**3 body**

### Příklad č. 30: FO45B2-1: Horký letní den

[32,96 %]

V horkém letním dni těsně před bouřkou byla při teplotě vzduchu  $t = 30^\circ\text{C}$  a atmosférickém tlaku  $p = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  naměřena relativní vlhkost vzduchu  $\varphi = 57\%$ .

- Určete absolutní vlhkost vzduchu za uvedených podmínek, tj. hustotu  $\rho_p$  vodních par v atmosféře.
- Určete hustotu  $\rho$  vlhkého vzduchu za uvedených podmínek a porovnejte ji s hustotou  $\rho_0$  suchého vzduchu za stejného tlaku a teploty.
- Určete pro uvedené podmínky rosný bod, tj. teplotu, na kterou musíme ochladit těleso, aby se na něm začala srážet vodní pára.

V teplotním intervalu od  $20^\circ\text{C}$  do  $30^\circ\text{C}$  můžeme tlak sytých vodních par vypočítat s potřebnou přesností pomocí vztahu

$$p_s = At^2 + Bt + C,$$

kde  $A = 4,005 \text{ Pa} \cdot \text{K}^{-2}$ ,  $B = -9,55 \text{ Pa} \cdot \text{K}^{-1}$  a  $C = 922 \text{ Pa}$ . Molární hmotnost suchého vzduchu je  $M_v = 28,96 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ , molární hmotnost vodních par je  $M_p = 18,02 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ , molární plynová konstanta má hodnotu  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

### Řešení příkladu č. 30:

- Užitím vzorce  $p_s = At^2 + Bt + C$  určíme tlak sytých par při teplotě  $t = 30^\circ\text{C}$ :  $p_s = 4240 \text{ Pa}$ . **1 bod**

Za uvedených podmínek mají vodní páry ve vzduchu parciální tlak

$$p_p = \varphi p_s = 2417 \text{ Pa} \doteq 2420 \text{ Pa}.$$

Jejich hustotu a tedy i absolutní vlhkost vzduchu určíme užitím stavové rovnice:

$$\frac{pV}{T} = \frac{m}{M_m} R, \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{pM_m}{RT},$$

$$\rho_p = \frac{p_p M_p}{RT} = 0,017 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

**3 body**

b) Samotný vzduch bez vodní páry má za daných podmínek parciální tlak a hustotu

$$p_v = p - p_p = 97\,580 \text{ Pa}, \quad \rho_v = \frac{(p - p_p) M_v}{RT} = 1,121 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Celková hustota vzduchu s vodní párou je

$$\rho = \rho_v + \rho_p = 1,139 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Suchý vzduch o dané teplotě  $t$  a tlaku  $p$  by měl hustotu

$$\rho_0 = \frac{p M_v}{RT} = 1,149 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3},$$

tedy o  $0,010 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  větší než vzduch vlhký.

**3 body**

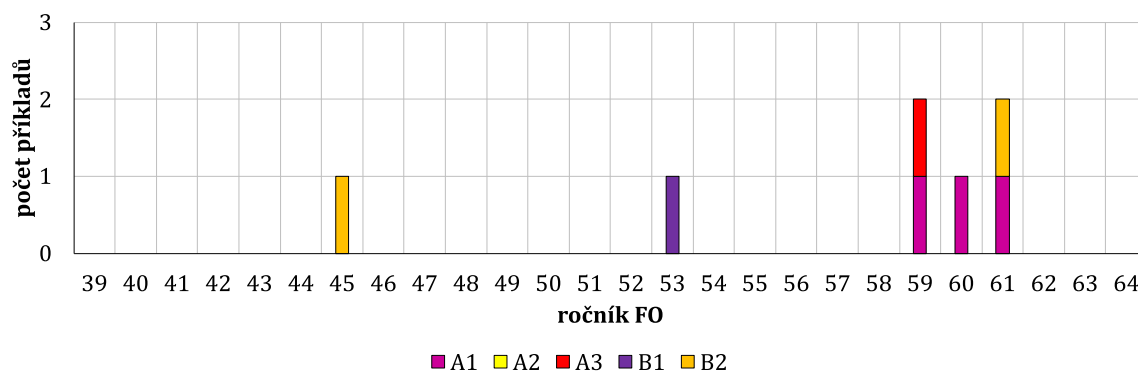
c) Teplotu rosného bodu, při které by vodní pára o daném parciálním tlaku byla sytá, určíme řešením kvadratické rovnice  $At^2 + Bt + C = p_p$ . Úloze vyhovuje kořen

$$t = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4A(C - p_p)}}{2A} = 21 \text{ }^\circ\text{C}.$$

**3 body**

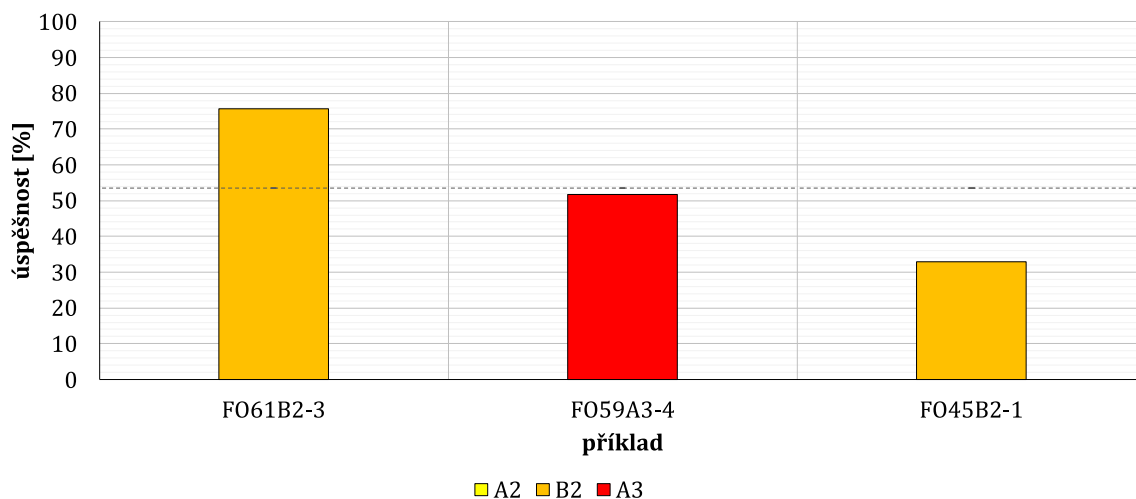
### 3.6.3 Statistická úspěšnost příkladů

Poslední podkapitola zaměřená na změny skupenství látek obsahuje sedm příkladů, což odpovídá 9,33 % z celkového počtu příkladů z termodynamiky a molekulové fyziky.



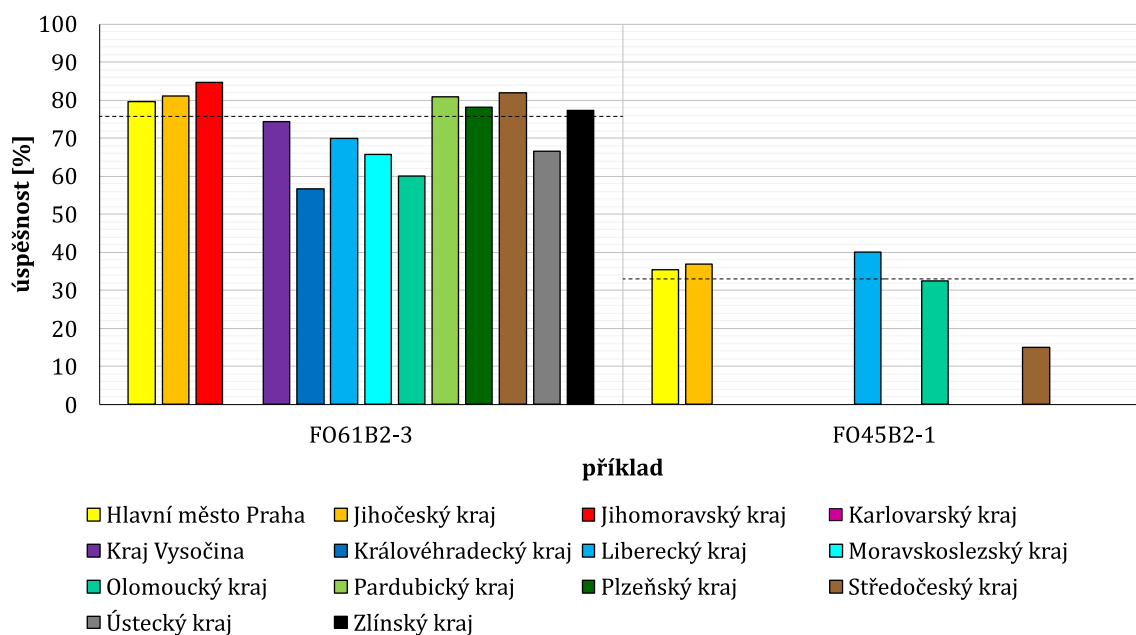
**Obrázek 43:** Zastoupení příkladů podkapitoly zaměřené na změny skupenství v jednotlivých ročnících a kolech Fyzikální olympiády.

Dle grafu na obrázku 43 jsou tyto příklady především z mladších ročníků. Postupové příklady jsou tři, dva z druhého kola kategorie B a jeden z třetího kola kategorie A. Žádný z příkladů se nevyskytuje v zadáních dvakrát. Úspěšnost těchto příkladů je relativně vysoká, dosahuje průměrné hodnoty 53,48 %. Srovnání jednotlivých příkladů je uvedeno v grafu na obrázku 44.



**Obrázek 44:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladů zaměřených na změny skupenství.

Z grafu je patrné, že nejnáročnějším příkladem je nejstarší příklad podkapitoly z 45. ročníku olympiády nazvaný Horký letní den, který se zabývá vlhkostí vzduchu. Naopak nejjednodušším příkladem je příklad FO61B2-3, který má na rozdíl od FO45B2-1 kompletní analýzu díky uceleným výsledkovým listinám. Srovnání mezi kraji je možné sledovat na obrázku 45. V 61. ročníku Fyzikální olympiády v Karlovarském kraji nesoutěžil žádný žák v krajském kole, proto není v grafu vidět sloupec tohoto kraje.



**Obrázek 45:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladů zaměřených na změny skupenství v jednotlivých krajích ČR.

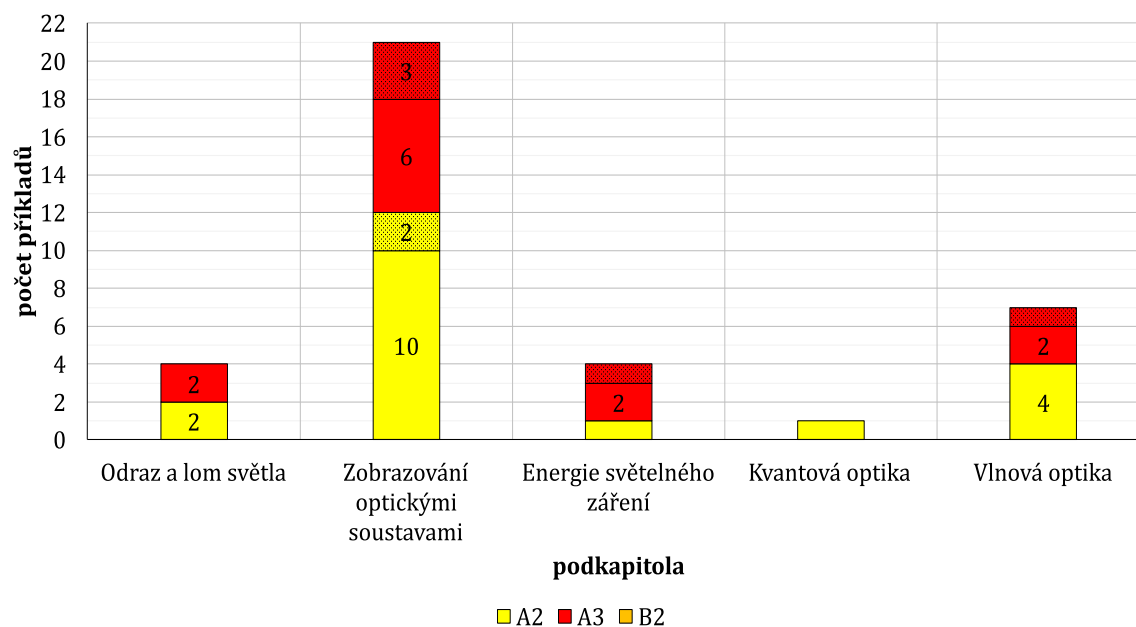
# Kapitola 4

## Optika

Druhá část sbírky se věnuje oblasti optiky. I tato část obsahuje celkem třicet příkladů, které jsou rozdělené do pěti podkapitol. Jednotlivé podkapitoly obsahují následující počty řešených příkladů:

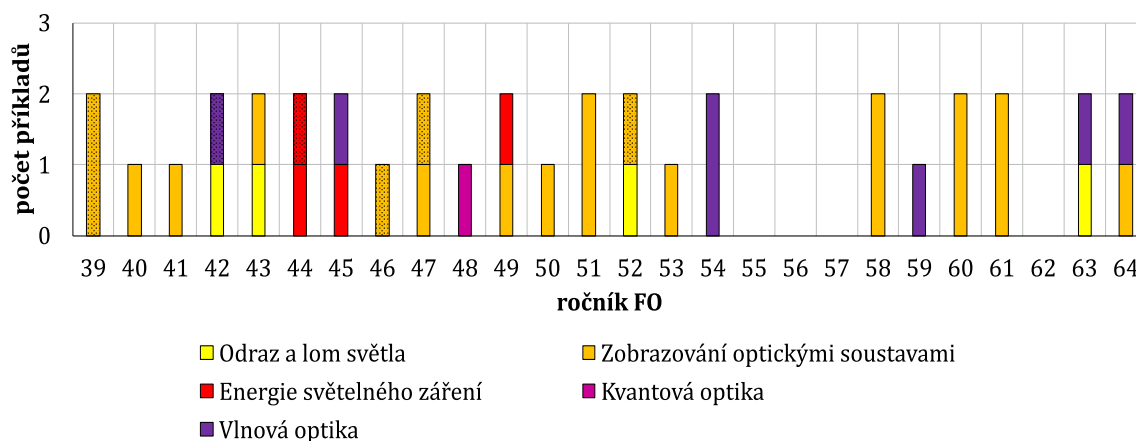
1. Odraz a lom světla – čtyři příklady,
2. Zobrazování optickými soustavami – šestnáct příkladů,
3. Energie světelného záření – tři příklady,
4. Kvantová optika – jeden příklad,
5. Vlnová optika – šest příkladů.

Počty příkladů v jednotlivých podkapitolách jsou zobrazeny také v grafu na obrázku 1, kde jsou texturou odlišeny také příklady, které do podkapitol spadají, ale nejsou uvedeny ve sbírce řešených příkladů.



**Obrázek 1:** Zastoupení řešených příkladů z optiky Fyzikální olympiády jednotlivých kol v podkapitolách.

Celkem sedm příkladů z postupových kol není ve sbírce uvedeno. Ve sbírce je celkem osmnáct příkladů z krajských kol a dvanáct příkladů z celostátních kol kategorie A. Nejvyšší zastoupení příkladů má druhá podkapitola, a to především proto, že celkově zahrnuje 47, 54 % všech příkladů z optiky. Ani tato podkapitola však není dále členěna, protože se úlohy na zrcadla a čočky prolínají a členění by bylo obtížné. Na obrázku 2 je vykreslen výskyt příkladů v jednotlivých ročnících Fyzikální olympiády, a vyřazené úlohy z postupových kol, které nejsou uvedeny ve sbírkové části, jsou opět odlišeny texturou. Ve sbírce z optiky nejsou vůbec uvedeny řešené příklady z ročníků 39, 46, 55, 56, 57 a 62, naopak u ročníků 43, 45, 49, 51, 54, 58, 60, 61, 63 a 64 jsou uvedeny vždy dva řešené příklady. Nejvyšší úspěšnosti dosahuje příklad FO43A3-2 (příklad č. 1, 73,94 %), naopak nejvíce obtížný příklad je FO58A2-2 (příklad č. 20, 15,35 %).



**Obrázek 2:** Zastoupení řešených příkladů z optiky Fyzikální olympiády jednotlivých podkapitol v jednotlivých ročnících.

Optika, jakožto oblast, která se vyskytuje pouze v kategorii A (výjimkou je jediný příklad ve třetí kapitole), je ve Fyzikální olympiádě náročnější oblastí, a je nutno říci, že při zpracovávání prvních částí podkapitol (Základní pojmy a vztahy) bylo nutné využívat vysokoškolské učebnice, především knih Optika 1 [35] a Optika 2 [36] od profesora Bajera.

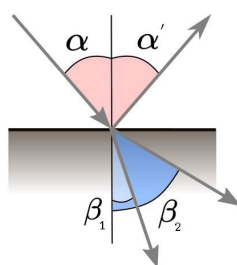
## 4.1 Odraz a lom světla

### 4.1.1 Základní pojmy a vztahy

Paprsková (geometrická) optika pracuje s představou, že světlo je tvořeno paprsky, které se šíří ze světelného zdroje optickým prostředím. Její nejdůležitější poznatky zahrnují tyto zákony a principy: princip přímočarého šíření světla v opticky homogenním prostředí, princip vzájemné nezávislosti chodu paprsků, zákon odrazu a zákon lomu.

Princip přímočarého šíření světla v opticky homogenním prostředí, jak už jeho název napovídá, říká, že světlo se v prostředí, kde jsou všechny optické vlastnosti stejné, šíří přímočaře. Světlo se ze zdroje šíří do všech směrů, jednotlivé paprsky se mohou protínat, ale vzájemně se neovlivňují. Světlo může přecházet z jednoho optického prostředí do druhého.

Zákony odrazu a lomu popisují situaci, kdy se paprsky světla nešíří přímočaře, ale odraží se nebo se lámou (nebo se částečně odrazí a částečně lámou) na rozhraní dvou různých optických prostředí.



**Obrázek 3:** Odraz a lom světla, k základním pojmům a vztahům.

Zákon odrazu (v obrázku 3 zaznamenan červene): „Úhel odrazu světla  $\alpha'$  je roven úhlu dopadu  $\alpha$  a odražený paprsek leží v rovině dopadu.“, tedy

$$\alpha' = \alpha.$$

Od matného povrchu se světlo odrazí všemi směry, zatímco u lesklého hladkého povrchu se odrazí pouze v jednom dobře definovaném směru [35].

Zákon lomu (obrázku 3 zaznamenan modře): „Poměr  $\sin$ ů úhlu dopadu a úhlu lomu je stálý a je roven poměru rychlostí světla v obou prostředích, lomený paprsek leží v rovině dopadu.“, tedy

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Tento zákon se jinak také nazývá Snellův, a je možné ho přepsat pomocí indexu lomu  $n$ :

$$n = \frac{c}{v}, \quad \text{odkud} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

kde  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  je rychlost světla ve vakuu a  $v_1, v_2$  jsou rychlosti světla v daných optických prostředích. Indexy lomu prostředí  $n_1, n_2$  závisí na frekvenci světla, proto při lomu světla, které obsahuje více frekvencí, dochází k tzv. disperzi (rozkladu) světla. Dle toho, zda světlo přechází z opticky hustšího nebo řidšího prostředí, můžeme rozlišit dvě situace, lom ke kolmici a od kolmice. Jestliže světlo přechází z prostředí opticky hustšího do prostředí opticky řidšího ( $n_1 > n_2$ ), dochází k lomu od kolmice ( $\alpha < \beta_2$ ), naopak pokud světlo přechází z prostředí opticky řidšího do prostředí opticky hustšího ( $n_1 < n_2$ ), dochází k lomu ke kolmici ( $\alpha > \beta_1$ ).

Ke zvláštnímu případu dochází, jestliže je úhel lomu  $\beta = 90^\circ$ . Úhel dopadu se v tomto případě nazývá mezní úhel  $\varepsilon_m$ , a protože  $\sin 90^\circ = 1$ , platí pro něj

$$\sin \varepsilon_m = \frac{n_2}{n_1}.$$

Pokud je navíc opticky řidším prostředím (tedy tím, kterým se šíří dopadající paprsek) vzduch, můžeme psát

$$\sin \varepsilon_m = \frac{1}{n_1}.$$

Pokud je úhel dopadu větší než mezní úhel, nedochází k žádnému lomu a nastává úplný odraz (totální reflexe).

#### 4.1.2 Řešené příklady

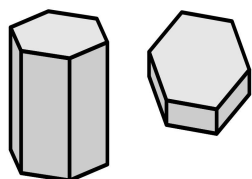
##### Příklad č. 1: FO43A3-2: Halové jevy

[73,94 %]

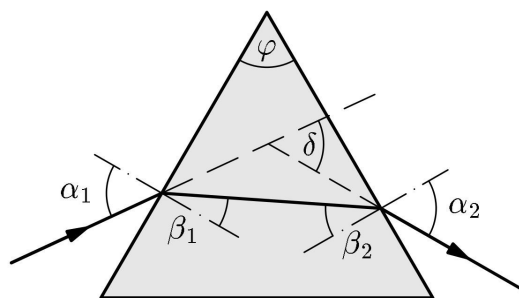
Halové jevy jsou optické úkazy, které se objevují na obloze kolem Slunce a Měsíce v podobě kol, oblouků a skvrn. Podmínkou pro jejich vznik je přítomnost drobných ledových krystalků v atmosféře. Ledové krystalky se nejčastěji nacházejí ve výškách nad 6 km, za chladu (především v arktických oblastech) se mohou vyskytovat i v přízemní vrstvě ovzduší. Vyskytují se v mnoha formách, ale pro vznik halových jevů jsou důležité krystalky ve tvaru šestiboké destičky nebo šestibokého sloupku (obrázek 4).

- Stěny trojbokého hranolu svírají lámavý úhel  $\varphi$ , materiál hranolu má index lomu  $n$ . Paprsek vstupuje do hranolu v rovině kolmé k lámavé hraně (průsečnici lámavých stěn) pod úhlem  $\alpha_1$ , vystupuje pod úhlem  $\alpha_2$  (obrázek 5). Vyjádřete deviaci paprsku (odchylku paprsku od původního směru) pomocí veličin  $\beta_1$ ,  $\varphi$  a  $n$ .
- Deviace  $\delta$  je minimální, je-li průchod paprsku hranolem symetrický, tj.  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Dokažte toto tvrzení pro případ paprsku dopadajícího v rovině kolmé k lámavé hraně.  
(Při řešení je možno použít vztah  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  pro  $|x| < 1$ .)
- Vyjádřete obecně  $\delta_{min}$  pomocí  $n$  a  $\varphi$  pro případ paprsku dopadajícího v rovině kolmé k lámavé hraně.
- Sluneční paprsky dopadající na boční stěny ledových hranolků a vystupující opět bokem hranolu (obrázek 6), vytvářejí tzv. *malé holo*, které se projevuje jako světlý kruh kolem slunečního disku. Jev je nejvýraznější na kružnici o úhlovém poloměru  $\delta_{min} = 22^\circ$  (minimální odchylka). Na základě řešení úlohy b) a c) a výše uvedených údajů určete index lomu  $n$  ledového hranolku.
- Paprsky vnikající boční stěnou krystalku a vycházejícího podstavou, se odchýlí od původního směru o úhel  $\gamma$  (obrázek 7). Jev je nejvýraznější, nabývá-li  $\gamma$  minimálních hodnot. Kolem Slunce se vytváří tzv. *velké holo* s úhlovým poloměrem  $\gamma_{min}$ . Na základě známé hodnoty indexu lomu  $n$  ledových krystalků z úlohy c) určete  $\gamma_{min}$ .

Řešte nejprve obecně, potom pro dané hodnoty.

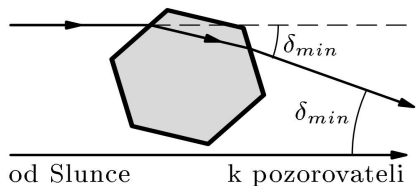


Obrázek 4: Tvar krystalků, k zadání úlohy FO43A3-2.

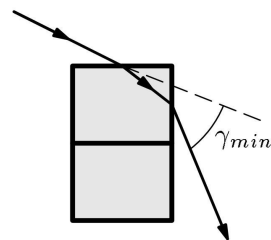


Obrázek 5: Průchod paprsku hranolem, k zadání úlohy FO43A3-2a.





**Obrázek 6:** Průchod paprsku krystal-  
kem I., k zadání úlohy FO43A3-2d.



**Obrázek 7:** Průchod paprsku krystal-  
kem II., k zadání úlohy FO43A3-2e.

**Řešení příkladu č. 1:**

- a) Na optickém hranolu dochází k dvojímu lomu. Podle obrázku 8 platí:

$$\varphi = \beta_1 + \beta_2,$$

$$\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2,$$

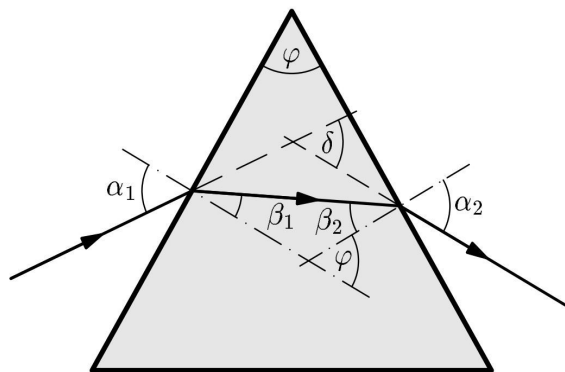
$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \varphi. \quad (1)$$

Ze zákona lomu:  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = n$ ,  $\frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_2} = n$ ,  
odkud

$$\alpha_1 = \arcsin(n \sin \beta_1),$$

$$\alpha_2 = \arcsin(n \sin \beta_2),$$

$$\alpha_2 = \arcsin[n \sin(\varphi - \beta_1)].$$



**Obrázek 8:** Průchod paprsku krystal-  
kem II., k zadání úlohy FO43A3-2e.

Po dosazení do vztahu (1) dostaneme

$$\delta = \arcsin(n \sin \beta_1) + \arcsin[n \sin(\varphi - \beta_1)] - \varphi.$$

Výraz je definován, jestliže

$$\sin \beta_1 < \frac{1}{n}, \quad \text{a současně } \sin(\varphi - \beta_1) = \sin \beta_2 < \frac{1}{n}.$$

Úhly  $\beta_1$  a  $\beta_2$  musí být menší než mezní úhel pro daný index lomu  $n$ . Pokud paprsek prochází oběma lámavými stěnami, je to splněno.

**2 body**

- b) Hledáme minimum funkce pro  $\delta(\beta_1)$ , tj.

$$\frac{d\delta}{d\beta_1} = \frac{n \cos \beta_1}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \beta_1}} - \frac{n \cos(\varphi - \beta_1)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\varphi - \beta_1)}} = 0.$$

Úpravou dostaneme

$$\cos^2 \beta_1 [1 - n^2 \sin^2(\varphi - \beta_1)] = \cos^2(\varphi - \beta_1) (1 - n^2 \sin^2 \beta_1),$$

$$\cos^2 \beta_1 - \cos^2(\varphi - \beta_1) = n^2 [\cos^2 \beta_1 - \cos^2(\varphi - \beta_1)],$$

$$(n^2 - 1) [\cos^2 \beta_1 - \cos^2(\varphi - \beta_1)] = 0.$$

$$\beta_1 = \varphi - \beta_1, \quad \text{odkud } \beta_1 = \frac{\varphi}{2}, \beta_2 = \varphi - \frac{\varphi}{2} = \frac{\varphi}{2} = \beta_1.$$

Proto také  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Průchod paprsku hranolem je symetrický.

**2 body**

Pomocí druhé derivace se přesvědčíme, že se jedná o lokální minimum. Platí

$$\frac{d^2\delta}{d\beta_1^2} = \frac{(n^2 - 1)n \sin \beta_1}{(1 - n^2 \sin^2 \beta_1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(n^2 - 1)n \sin(\varphi - \beta_1)}{[1 - n^2 \sin^2(\varphi - \beta_1)]^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

**1 bod**

c) Při symetrickém průchodu paprku hranolem je

$$\delta_{min} = 2\alpha_1 - \varphi = 2 \arcsin\left(n \sin \frac{\varphi}{2}\right) - \varphi. \quad (2)$$

**1 bod**

d) Při symetrickém průchodu paprsku bočními stěnami krystalků ledu je

$$\varphi = 60^\circ, \quad \beta_1 = \beta_2 = 30^\circ, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}(\delta_{min} + \varphi) = 41^\circ,$$

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta_{min} + \varphi)}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin 41^\circ}{\sin 30^\circ} = 1,31.$$

**2 body**

e) Paprsek může procházet symetricky i podstavou a boční stěnou ledového hranolku. V takovém případě je

$$\varphi = 90^\circ, \quad \beta_1 = \beta_2 = 45^\circ, \quad \sin \beta_1 = \sin \beta_2 < \frac{1}{n},$$

Podle (2) je

$$\gamma_{min} = 2 \arcsin\left(n \sin \frac{\varphi}{2}\right) - \varphi = 2 \arcsin(1,31 \sin 45^\circ) - 90^\circ = 46^\circ.$$

Úhlový poloměr velkého hala je  $46^\circ$ .

**2 body**

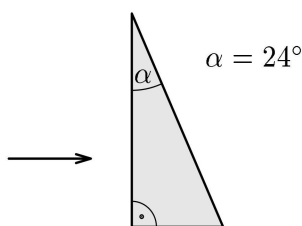
### **Příklad č. 2: FO42A2-3: Hranol z flintového skla**

**[56,09 %]**

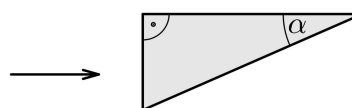
Heliové spektrum obsahuje sedm výrazných čar, z nichž nejvýraznější – žlutá – má vlnovou délku  $\lambda_{\bar{z}} = 587,6 \text{ nm}$ . Světlo z heliové výbojky necháme podle obrázku 9 kolmo dopadat na hranol z flintového skla (tzv. těžké sklo), jehož index lomu vzhledem ke vzduchu pro vlnovou délku  $\lambda_{\bar{z}}$  je  $n_{\bar{z}} = 1,752$ . Úhly hranolu jsou zřejmé z obrázku.

- Po průchodu hranolem dochází k disperzi a poslední čára na fialovém konci spektra o vlnové délce  $\lambda_f = 447,1 \text{ nm}$  je od žluté čáry odchýlena o úhel  $\varphi_f = 1^\circ 8' 50''$  (úhel lomu fialové je o  $\varphi_f$  větší než úhel lomu žluté). Určete index lomu  $n_f$  pro fialovou čáru.
- Závislost indexu lomu na vlnové délce velmi dobře popisuje poloempirický vztah  $n = a + b/\lambda^2$ , kde  $a, b$  jsou konstanty charakteristické pro daný materiál. Využijte toho pro určení indexu lomu  $n_{\bar{c}}$  poslední čáry na červeném konci spektra, jejíž vlnová délka je  $\lambda_{\bar{c}} = 706,5 \text{ nm}$ . Určete také odchylku  $\varphi_{\bar{c}}$  od žlutého paprsku.
- Jaké budou odchylky  $\varphi'_f, \varphi'_{\bar{c}}$ , jestliže hranol otočíme o  $90^\circ$  (obrázek 10)? Načrtněte chod paprsku hranolem.

Vypočtené úhly zaokrouhlete na úhlové minuty.



**Obrázek 9:** Dopad světla na hranol, k zadání úlohy FO42A2-3.



**Obrázek 10:** Dopad světla na otočený hranol, k zadání úlohy FO42A2-3c.

### Řešení příkladu č. 2:

- a) Světlo do hranolu pronikne bez lomu a na rozhraní sklo-vzduch dopadá pod úhlem  $\alpha$ . Mezní úhel pro toto rozhraní je přibližně  $35^\circ$ , světlo se tedy láme. Podle zákona lomu platí pro žluté a fialové světlo:

$$n_z \sin \alpha = \sin \beta_z, \quad n_f = \sin \alpha = \sin \beta_f.$$

Z prvního vztahu vyjádříme  $\beta_z$ , do druhého dosadíme  $\beta_f = \beta_z + \varphi_f$  a vyjádříme  $n_f$ :

$$n_f = \frac{\sin [\arcsin (n_z \sin \alpha) + \varphi_f]}{\sin \alpha} = 1,786.$$

**3 body**

- b) Podle zadání platí  $n_z = a + b/\lambda_z^2$  a  $n_f = a + b/\lambda_f^2$ . Odtud plyne

$$a = \frac{n_z \lambda_z^2 - n_f \lambda_f^2}{\lambda_z^2 - \lambda_f^2} = 1,705, \quad b = \frac{n_z - n_f}{\lambda_z^{-2} - \lambda_f^{-2}} = 1,62 \cdot 10^{-14} \text{ m}^2,$$

$$n_c = a + b/\lambda_c^2 = 1,738.$$

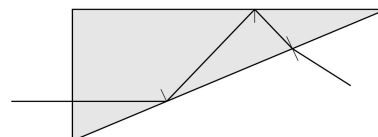
Odchytku opět určíme dosazením do zákona lomu:

$$\varphi_c = \arcsin (n_c \sin \alpha) - \arcsin (n_z \sin \alpha) = -27'48'' \doteq 28'.$$

Záporné znaménko znamená, že úhel lomu červeného světla je menší než úhel lomu žlutého.

**3 body**

- c) V tomto uspořádání dopadá světlo na rozhraní sklo-vzduch nejprve pod úhlem  $90^\circ - \alpha = 66^\circ$ , což je více než mezní úhel, dochází tedy k totálnímu obrazu (obrázek 11). Na dalším rozhraní světlo dopadne již pod menším úhlem  $66^\circ - 24^\circ = 42^\circ$ , stále tedy nedochází k lomu. Teprve na dalším rozhraní je úhel dopadu  $42^\circ - 24^\circ = 18^\circ$  a lom nastane. Odchytky určíme stejně jako v b), pouze místo  $\alpha$  dosadíme  $\alpha' = 90^\circ - 3\alpha = 18^\circ$ .



**Obrázek 11:** Totální odraz, k řešení úlohy FO42A2-3c.

$$\varphi_f' = \arcsin (n_f \sin \alpha') - \arcsin (n_z \sin \alpha') = 43'08'' \doteq 43',$$

$$\varphi_c' = \arcsin (n_c \sin \alpha') - \arcsin (n_z \sin \alpha') = -17'40'' \doteq 18'.$$

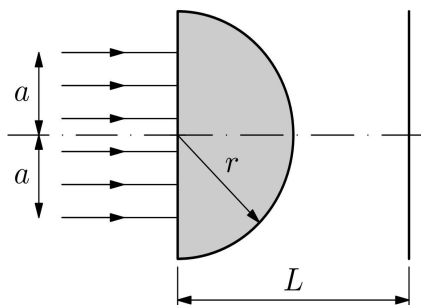
**4 body**

**Příklad č. 3: FO52A2-3: Skleněná polokoule****[37,50 %]**

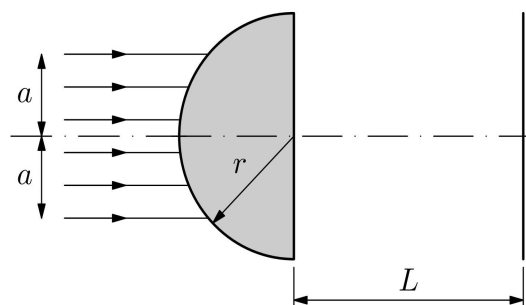
Na rovinnou plochu skleněné polokoule s poloměrem  $r = 4$  cm o indexu lomu  $n = 1,5$  dopadá rovnoběžně s optickou osou kruhový svazek rovnoběžných paprsků o průměru  $2a = 6$  cm (obrázek 12).

- Jaký bude poloměr  $R$  osvětleného kruhu na stínítku, které je umístěné kolmo k optické ose ve vzdálenosti  $L = 8$  cm od rovinné plochy polokoule?
- Jaký bude tento poloměr, když čočku obrátíme tak, aby svazek dopadal na kulovou plochu polokoule (obrázek 13)?

Úlohu řešte pro dané číselné zadání, obecné řešení se nepožaduje.



**Obrázek 12:** Situace a), k zadání úlohy FO52A2-3.



**Obrázek 13:** Situace b), k zadání úlohy FO52A2-3.

**Řešení příkladu č. 3:**

- Za kulovou plochu proniknou pouze paprsky, které na ni dopadají pod menším úhlem, než je mezní úhel  $\alpha_m$ . Platí:

$$\sin \varepsilon_m = \frac{1}{n}, \quad \text{odkud } \varepsilon_m = 41,8^\circ.$$

Krajní paprsky projdou ve vzdálenosti

$$b = r \sin \varepsilon_m = \frac{r}{n} = 2,67 \text{ cm}$$

od optické osy, která splňuje podmínku  $b < a$ . U paprsků vzdálenějších od osy dojde k úplnému odrazu (obrázek 14). Z podobnosti trojúhelníků  $ABE$  a  $DCE$  a z pravoúhlého trojúhelníka  $OBE$  plyne

$$\tan \varepsilon_m = \frac{L - x}{R},$$

z čehož

$$R = \frac{L - x}{\tan \varepsilon_m} = \left( L - \frac{r}{\cos \varepsilon_m} \right) \frac{\cos \varepsilon_m}{\sin \varepsilon_m} = (L \cos \varepsilon_m - r) \frac{1}{\sin \varepsilon_m}$$

$$R = L \sqrt{n^2 - 1} - nr = 2,94 \text{ cm.}$$

**5 bodů**

- Průchod krajního paprsku polokoulí znázorňuje obrázek 15. Platí:

$$\sin \alpha = \frac{a}{r}, \quad \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}, \quad \sin \gamma = n \sin (\alpha - \beta).$$

V trojúhelníku  $ABS$  platí sinová věta:

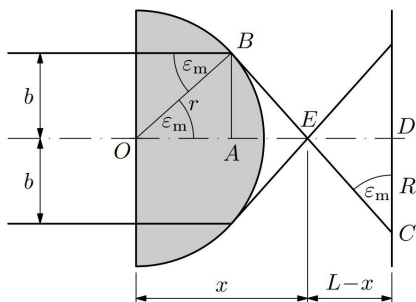
$$\frac{y}{\sin \beta} = \frac{r}{\sin (90^\circ + \alpha - \beta)} = \frac{r}{\cos (\alpha - \beta)}, \quad \text{odkud } y = \frac{r \sin \beta}{\cos (\alpha - \beta)}.$$

Z trojúhelníka  $BSE$ :  $x = \frac{y}{\tan \gamma}$ , z podobnosti trojúhelníků  $BSE$  a  $DCE$

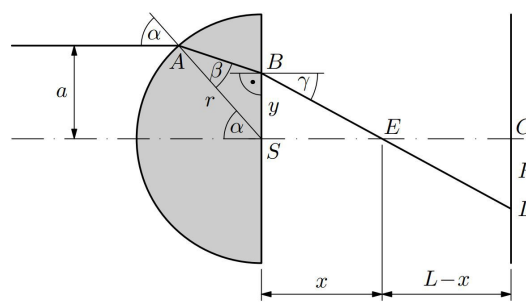
$$\frac{y}{x} = \frac{R}{L-x}, \quad \text{odkud } R = \frac{y}{x}(L-x).$$

Číselně  $\alpha = 48,6^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $\gamma = 28,6^\circ$ ,  $y = 2,11$  cm,  $x = 3,88$  cm,  $R = 2,25$  cm.

**5 bodů**



**Obrázek 14:** Situace a), k řešení úlohy FO52A2-3.



**Obrázek 15:** Situace b), k řešení úlohy FO52A2-3.

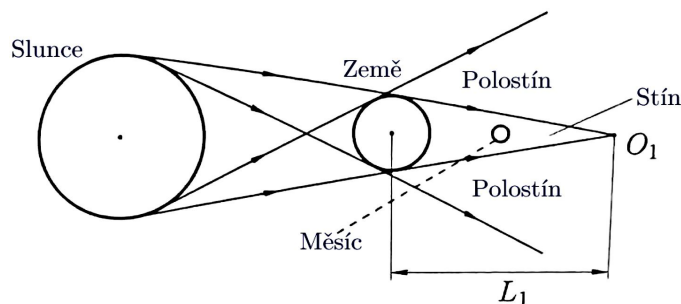
**Příklad č. 4: FO63A3-1: Zatmění Měsíce**

[20,00 %]

Slunce není bodovým zdrojem světla. Pozorujeme-li Měsíc ze Země, má úhlovou velikost  $2\delta = 0,52^\circ$ . Proto je oblast zastíněná Zemí při zatmění Měsíce konečná. Ilustrace zatmění je na obrázku 16.

- V první části řešení zanedbejte lom slunečního světla v atmosféře. Do jaké vzdálenosti  $L_1$  dosahuje od středu Země plný stín? Určete dobu trvání úplného zatmění Měsíce v tomto případě.
- Ve skutečnosti lom světla v atmosféře významně ovlivňuje velikost oblasti úplného stínu. Předpokládejte, že výška atmosféry je  $h = 8$  km a průměrný index lomu je  $n = 1,00028$ . Předpokládejte, že hranice úplného stínu je tvořena paprsky tečnými k povrchu Země. Určete, do jaké maximální vzdálenosti  $L_2$  od středu Země dosahuje plný stín v tomto případě.

Poloměr Země je  $R = 6400$  km, tíhové zrychlení je  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , úhlová velikost Měsíce při pozorování ze Země nechť je stejná jako úhlová velikost Slunce  $2\delta$ , doba oběhu Měsíce kolem Země je  $T_0 = 27,3$  dne. Zanedbejte pohyb Země kolem Slunce. Všechny potřebné údaje (vzdálenosti těles) určete pouze z údajů v zadání, tj. bez použití tabulek. Vzdálenost Země-Měsíc je mnohem menší než vzdálenost Země-Slunce.



**Obrázek 16:** Ilustrativní obrázek k zadání úlohy FO63A3-1.

### Řešení příkladu č. 4:

- a) Při zanedbání lomu světla se sbíhají paprsky pod stejným úhlem, pod jakým vidíme Slunce, tedy  $2\delta$ , tedy:

$$L_1 = \frac{R}{\delta} \approx 1,4 \cdot 10^6 \text{ km.}$$

S použitím druhého Newtonova zákona na oběžnou dráhu Měsíce o poloměru  $R_0$  s úhlovou frekvencí  $\omega_0$  získáme:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{GM}{R_0^3}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R_0^3}},$$

tedy

$$R_0 = \left( \frac{gT_0^2 R^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 384 \cdot 10^3 \text{ km}$$

díky čemuž určíme průměr Měsíce

$$D = 2\delta R_0 = 3,45 \cdot 10^3 \text{ km}$$

a průměr stínu ve vzdálenosti Měsíce (viz obrázek 17)

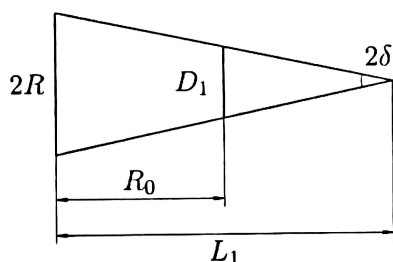
$$D_1 = 2R \left( 1 - \frac{R_0}{L_1} \right) \approx 9,3 \cdot 10^3 \text{ km.}$$

Celková doba zatmění Měsíce tedy bude

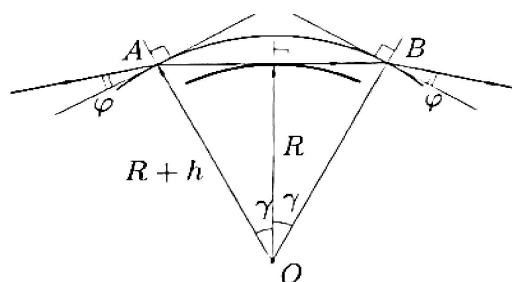
$$T = \frac{D_1 - D}{\omega_0 R_0} = \frac{T_0(D_1 - D)}{2\pi R_0} \approx 1,6 \text{ h.}$$

**5 bodů**

*Poznámka:* Při započtení pohybu Země kolem Slunce by došlo ke změně výsledku maximálně o 10 %.



**Obrázek 17:** Nákres k řešení úlohy FO63A3-1a.



**Obrázek 18:** Lom tečného paprsku v atmosféře, k řešení úlohy FO52A2-3b.

- b) Zapišeme Snellův zákon pro tečný paprsek, který se láme v atmosféře (viz obrázek 18):

$$\sin \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = n \sin \left( \frac{\pi}{2} - \gamma \right),$$

neboli

$$\cos \varphi = n \cos \gamma.$$

Označme  $\Delta\varphi = \gamma - \varphi$  úhlovou odchylku lomeného paprsku vzhledem k dopadajícímu. Celkově se po vstupu a výstupu z atmosféry směr paprsku změní o úhel  $2\Delta\varphi$ .

V případě uvážení lomu světla bude úhel  $\psi$ , pod kterým se paprsky protnou, roven  $\psi = 2\delta + 4\Delta\varphi$ . Dle obrázku 18 platí, že  $\cos(\gamma) = \frac{R}{R+h}$ . Dosadíme:

$$L_2 = \frac{R}{\delta + 2\Delta\varphi} = \frac{R}{\delta + 2\left(\arccos \frac{R}{R+h} - \arccos \frac{nR}{R+h}\right)} = 389 \cdot 10^3 \text{ km.}$$

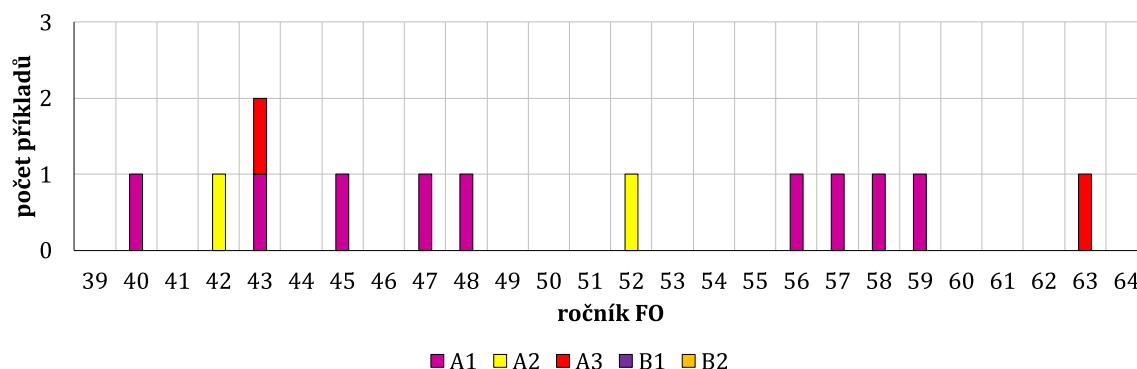
5 bodů

*Alternativní řešení s aproximacemi je možné dohledat na oficiálních stránkách FO.*

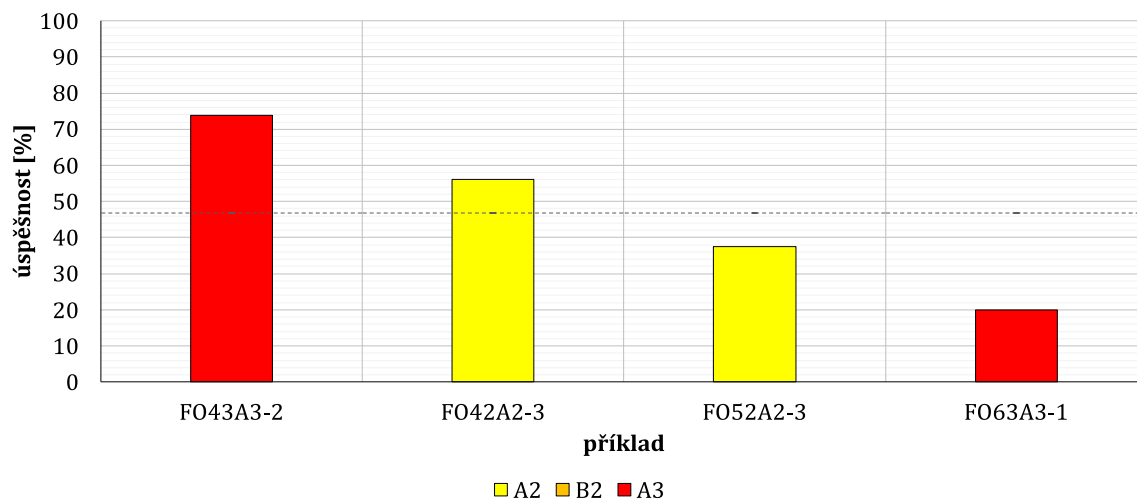
*Poznámka:* Web <https://kof.zcu.cz/st/dp/hosnedl/html/astronom.html> uvádí, že odchylka tečného paprsku k zemskému povrchu procházejícího skutečnou atmosférou  $\Delta\varphi' = 34'54'' = 0,582^\circ$ . Z toho pak plyne skutečná vzdálenost vrcholu plného stínu od středu Země  $L_2' = 258 \cdot 10^3 \text{ km}$ , což je méně než minimální vzdálenost Země-Měsíc  $363 \cdot 10^3 \text{ km}$ . To znamená, že při měsíčním zatmění se Měsíc do plného stínu nikdy nedostane a pozemský pozorovatel vidí na jeho povrchu narudlou barvu se spjítě se měnící intenzitou.

### 4.1.3 Statistická úspěšnost příkladů

Podkapitola věnující se základům optiky – odrazu a lomu světla, obsahuje dohromady třináct příkladů, což tvoří něco přes pětinu příkladů z optiky.



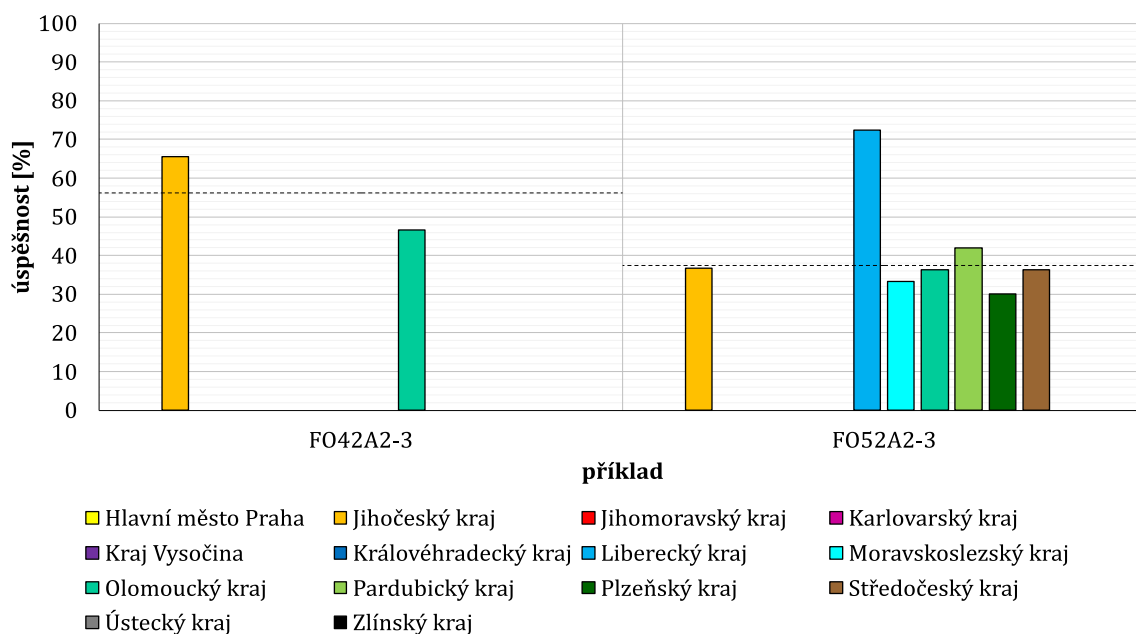
**Obrázek 19:** Zastoupení příkladů podkapitoly zaměřené na odraz a lom světla v jednotlivých ročnících a kolech Fyzikální olympiády.



**Obrázek 20:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladů zaměřených na odraz a lom světla.

Na obrázku 19 vidíme graf ukazující výskyt příkladů v jednotlivých ročnících a kolech Fyzikální olympiády. Příklady z postupových kol jsou pouze čtyři, půl na půl z krajských a celostátních kol kategorie A. Nejvíce příkladů v rámci jednoho ročníku se vyskytlo ve 43. ročníku, a to dva, jinak se objevují pouze po jednom. Všechny příklady této podkapitoly jsou originální a nevyskytují se duplicitně.

V grafu na obrázku 20 je srovnání obtížnosti postupových kol. Nejnáročnějším příkladem podkapitoly je příklad FO63A3-1 věnovaný zatmění Měsíce, naopak nejjednodušším je příklad ze 43. ročníku zabývající se halovými jevy. Průměrná úspěšnost příkladů této podkapitoly je 46,88 %. Příklady druhého kola jsou zde pouze dva, FO42A2-3 a FO52A2-3, a protože se jedná o starší ročníky, je dostupných jen několik výsledkových listin. Srovnání úspěšnosti jednotlivých krajů je zobrazeno v grafu na obrázku 21.



**Obrázek 21:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladech zaměřených na odraz a lom světla v jednotlivých krajích ČR.

Nejvyšší průměrné úspěšnosti dosahuje Liberecký kraj u příkladu FO52A2-3, naopak nejnižší úspěšnost má Plzeňský kraj u stejného příkladu. V rámci příkladu FO52A2-3 sice Liberecký kraj výrazně dominuje, ale je nutné podotknout, že zde soutěžili pouze čtyři žáci, zatímco ve většině ostatních krajů (kromě Pardubického), ze kterých jsou dostupné výsledkové listiny, soutěžil více než dvojnásobek žáků.



## 4.2 Zobrazování optickými soustavami

### 4.2.1 Základní pojmy a vztahy

Jako zobrazovací (optické) soustavy označujeme zařízení, která mění chod paprsků, a díky tomu je vytvořen obraz předmětu. Optické přístroje dělíme na objektivní a subjektivní. Objektivní optické přístroje jsou takové, které vytvářejí obraz předmětu na stínítku, vytváří se tedy skutečný (reálný) obraz. Mezi takové přístroje řadíme např. fotoaparát nebo dataprojektor. Naopak subjektivní optické přístroje vytvářejí zdánlivý obraz, který vzniká uvnitř přístroje nebo v nekonečnu, a k jeho zobrazení je nutné lidské oko (vytváří obraz na sítnici). Subjektivními optickými přístroji jsou například mikroskop, lupa, nebo dalekohled. V dnešní době už ale i některé tyto přístroje umí obraz zpracovat a jsou také objektivními optickými přístroji.

Mezi nejjednodušší optická zobrazovací zařízení patří zrcadla a čočky. Zrcadla jsou tvořena hladkou plochou, která odráží světlo na základě zákona odrazu. Zrcadla dělíme na rovinná a kulová (sférická), přičemž kulová zrcadla mohou být dutá (konkávní) a vypuklá (konvexní). U zrcadel patří mezi nejvýznamnější zkoumané veličiny vzdálenost předmětu od vrcholu zrcadla  $a$ , vzdálenost obrazu od vrcholu zrcadla  $a'$ , ohnisková vzdálenost  $f$ , poloměr křivosti kulové plochy zrcadla  $r$ , výška předmětu  $y$  a výška obrazu  $y'$ . Mezi  $a$ ,  $a'$ ,  $f$  a  $r$  platí zobrazovací rovnice:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} = \frac{2}{r}. \quad (3)$$

Tento tvar zobrazovací rovnice označujeme jako Gaussův [35]. Z výšky předmětu  $y$  a výšky obrazu  $y'$  můžeme určit příčné zvětšení  $Z$  zrcadla:

$$Z = \frac{y'}{y} = -\frac{a'}{a}. \quad (4)$$

Kromě Gaussova tvaru zobrazovací rovnice můžeme využít také tvar Newtonův, který je dán vztahem

$$f^2 = xx',$$

kde  $x = a - f$  a  $x' = a' - f$ . Zvětšení je pomocí Newtonova tvaru zobrazovací rovnice

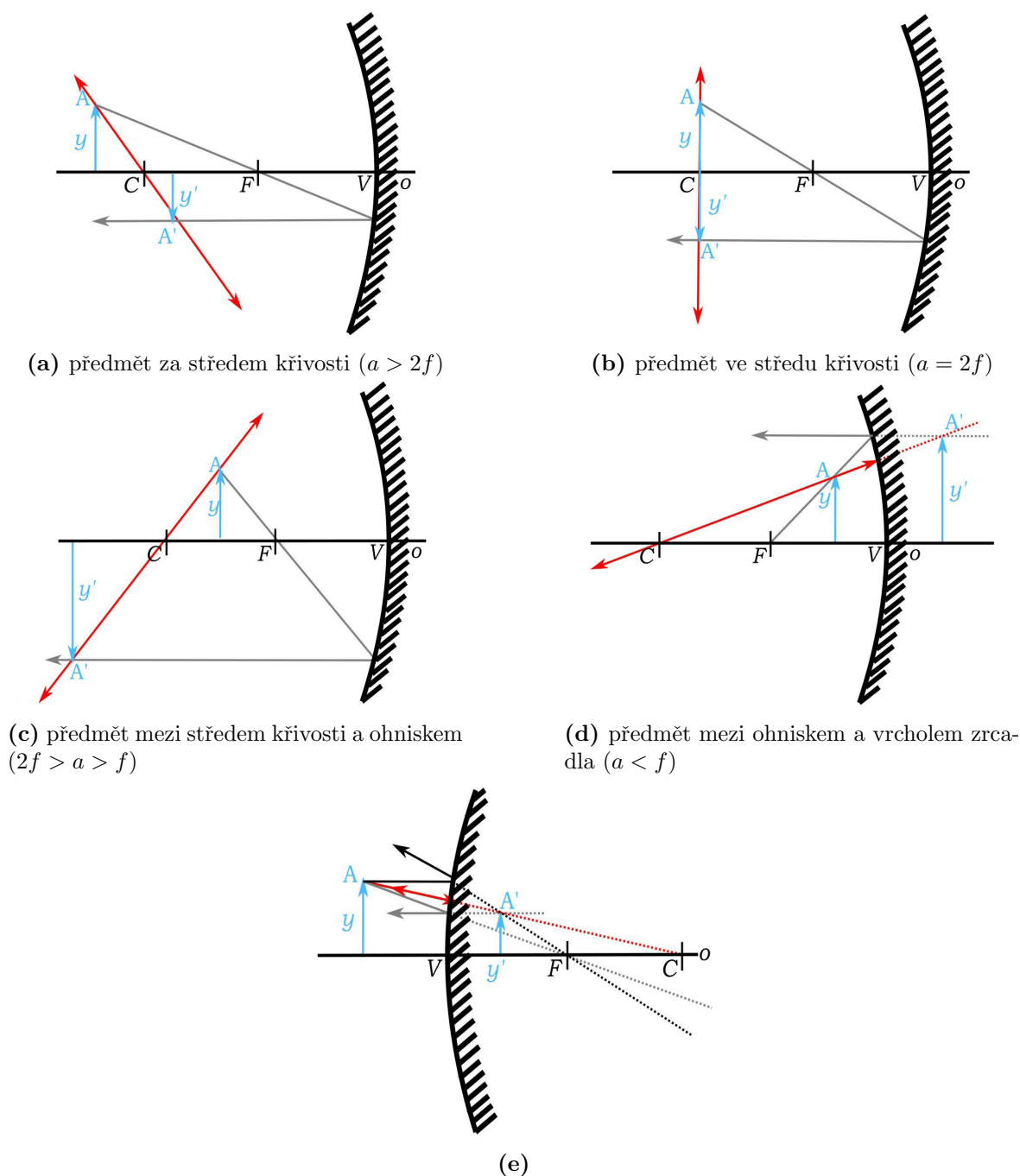
$$Z = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f}.$$

Dle znamének u jednotlivých vzdáleností a zvětšení je možné určit vlastnosti obrazu. Pokud je  $a'$  kladné, je obraz před zrcadlem a je tedy skutečný (reálný), pokud je záporné, je obraz za zrcadlem a je neskutečný (zdánlivý). Pokud je zvětšení záporné ( $Z < 0$ ), je obraz převrácený, přímý (vzprámený) obraz vzniká, jestliže  $Z > 0$ . Obraz může být zvětšený ( $|Z| > 1$ ), zmenšený ( $|Z| < 1$ ), nebo stejně velký ( $|Z| = 1$ ). V tabulce 1 je uveden přehled vlastností při zobrazování kulovými zrcadly.

**Tabulka 1:** Přehled vlastností při zobrazování kulovými zrcadly, převzato z [28], upraveno.

ZRCADLO	$a$	$a'$	$Z$	$ Z $	VLASTNOSTI OBRAZU
duté	$a > 2f$	$a' > 0$	$Z < 0$	$ Z  < 1$	zmenšený, převrácený, reálný
	$a = 2f$	$a' > 0$	$Z < 0$	$ Z  = 1$	stejně velký, převrácený, reálný
	$2f > a > f$	$a' > 0$	$Z < 0$	$ Z  > 1$	zvětšený, převrácený, reálný
	$a = f$	obraz je v nekonečnu			
	$a < f$	$a' < 0$	$Z > 0$	$ Z  > 1$	zvětšený, přímý, zdánlivý
vypuklé	$\infty > a > 0$	$a' < 0$	$Z > 0$	$ Z  < 1$	zmenšený, přímý, zdánlivý

Pro úplnost jsou v obrázku 22 přiložena geometrická řešení pro jednotlivé vzdálenosti předmětu od vrcholu kulového zrcadla.



**Obrázek 22:** Zobrazování pomocí zrcadel (a-d) duté, e) vypuklé) – převzato z [32], upraveno.

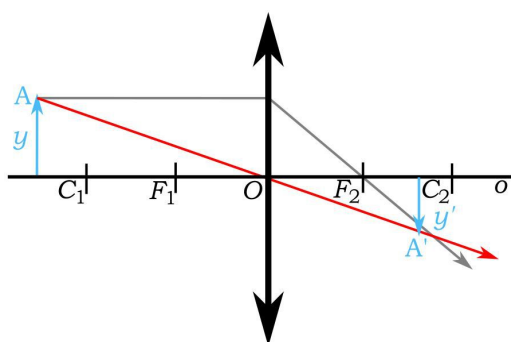
Čočky jsou kousky skla, které jsou dobře vybroušené a fungují na principu zákona lomu. Dělíme je na spojné (spojky) a rozptylné (rozptylky). Stejně jako u zrcadel i u čoček měříme předmětovou vzdálenost  $a$ , obrazovou vzdálenost  $a'$ , ohniskovou vzdálenost čočky  $f$ , výšku předmětu  $y$ , výšku obrazu  $y'$ , a mezi těmito veličinami platí vztahy (3) a (4).

Znaménková konvence u čoček se liší především v poloze obrazu – zatímco u zrcadel je obraz skutečný (reálný) před zrcadlem, u čoček je před čočkou obraz zdánlivý, za čočkou obraz reálný. Pro zvětšení platí stejná pravidla jako u zrcadel. V tabulce 2 je uveden přehled vlastností pro zobrazování čočkami.

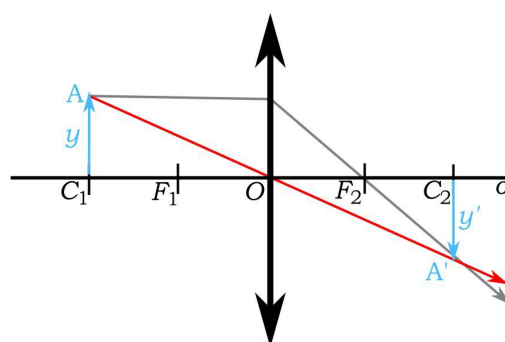
**Tabulka 2:** Přehled vlastností při zobrazování čočkami, převzato z [28], upraveno.

ČOČKA	$a$	$a'$	$Z$	$ Z $	VLASTNOSTI OBRAZU
spojka	$a > 2f$	$a' > 0$	$Z < 0$	$ Z  < 1$	zmenšený, převrácený, reálný
	$a = 2f$	$a' > 0$	$Z < 0$	$ Z  = 1$	stejně velký, převrácený, reálný
	$2f > a > f$	$a' > 0$	$Z < 0$	$ Z  > 1$	zvětšený, převrácený, reálný
	$a = f$	obraz je v nekonečnu			
	$a < f$	$a' < 0$	$Z > 0$	$ Z  > 1$	zvětšený, přímý, zdánlivý
rozptylka	$\infty > a > 0$	$a' < 0$	$Z > 0$	$ Z  < 1$	zmenšený, přímý, zdánlivý

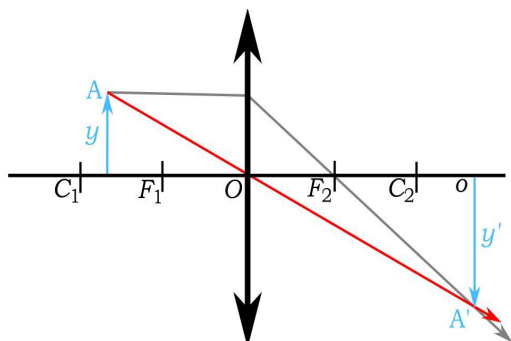
Na obrázku 23 jsou zakresleny možné situace polohy předmětu před čočkou a geometrická řešení obrazu.



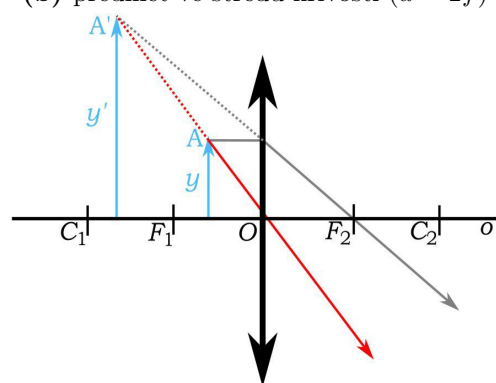
(a) předmět za středem křivosti ( $a > 2f$ )



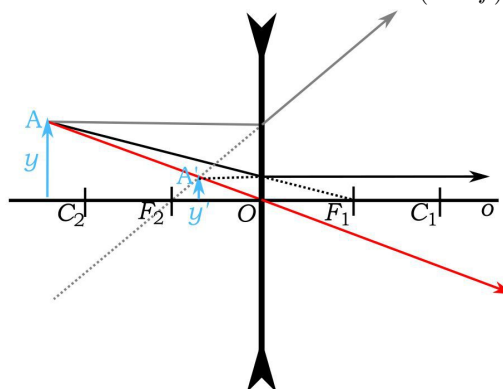
(b) předmět ve středu křivosti ( $a = 2f$ )



(c) předmět mezi středem křivosti a ohniskem ( $2f > a > f$ )



(d) předmět mezi ohniskem a optickým středem ( $a < f$ )



(e)

**Obrázek 23:** Zobrazování pomocí čoček (a-d) spojka, (e) rozptylka) – převz. z [32], upraveno.

U čoček se kromě již zmíněných vztahů využívá také vztahu pro tzv. optickou mohutnost čočky  $\varphi$ , která se udává v dioptriích (D), a platí pro ni

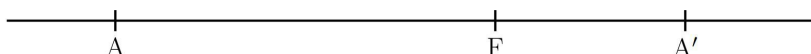
$$\varphi = \frac{1}{f} \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

kde  $n_1$  je index lomu prostředí, které obklopuje čočku,  $n_2$  index lomu materiálu, ze kterého je čočka vyrobena,  $r_1$  a  $r_2$  poloměry křivosti kulových ploch, které ohraničují čočku, a  $f$  je ohnisko vzdálenost čočky (v případě, že před i za čočkou je stejné prostředí). Pro spojky je optická mohutnost kladná ( $\varphi > 0$ ), pro rozptylky záporná ( $\varphi < 0$ ). Stejná znaménková konvence platí i pro ohniskovou vzdálenost – pro spojky je  $f > 0$ , pro rozptylky  $f < 0$ .

#### 4.2.2 Řešené příklady

**Příklad č. 5: FO58A3-4: Kde byla čočka** [61,02 %]

V archivu byl nalezen obrázek, na němž byla na optické ose zakreslena poloha zdroje bodového světla A, jeho obrazu A' a jednoho z ohnisek F tenké čočky. Poloha čočky ale na obrázku chybí (viz obrázek 24). Kde byla umístěna čočka, která na obrázku chybí? Zvažte všechny možnosti. Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty:  $|AA'| = l = 8$  cm,  $|AF| = d = 6$  cm.



**Obrázek 24:** Nalezený obrázek k zadání úlohy FO58A3-4.

#### Řešení příkladu č. 5:

Jsou celkem čtyři možnosti

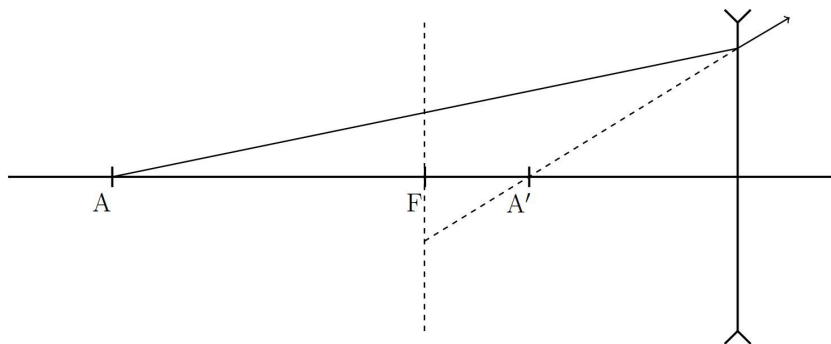
1. Čočka je rozptylka. V takovém případě leží čočka za bodem A' a dává neskutečný obraz. Vzdálenost zdroje od čočky označme  $x$ . Podle zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-l} = -\frac{1}{x-d}.$$

Odtud po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici  $x^2 - 2lx + ld = 0$ . Čočka se nachází ve vzdálenosti  $x = l + \sqrt{l(l-d)} = 12$  cm od zdroje.

Úlohu lze řešit rovněž geometrickou konstrukcí (viz obrázek 25).

**2,5 bodu**



**Obrázek 25:** Geometrické řešení první možnosti řešení úlohy FO58A3-4.

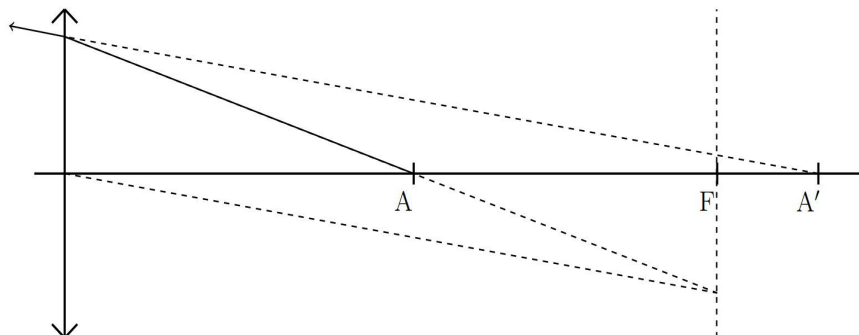
2. Čočka je spojka, která leží před bodem A. Pak čočka dává neskutečný obraz. Podle zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+l} = \frac{1}{x+d}.$$

Odtud po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici  $x^2 = ld$ . Čočka se nachází ve vzdálenosti  $x = \sqrt{ld} = 6,9$  cm před zdrojem.

Úlohu lze řešit rovněž geometrickou konstrukcí (viz obrázek 26).

**2,5 bodu**



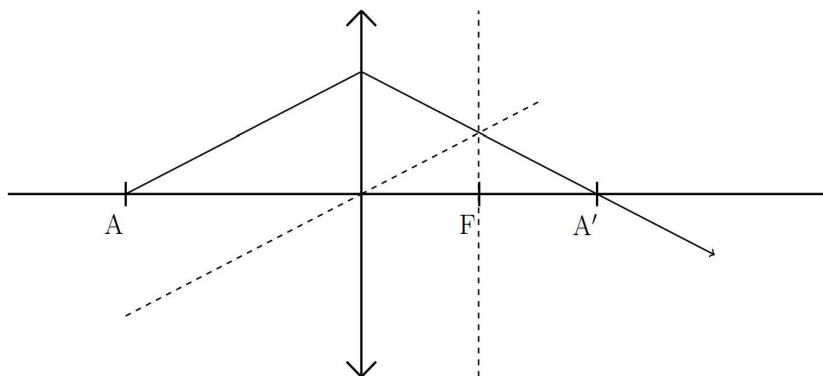
**Obrázek 26:** Geometrické řešení druhé možnosti řešení úlohy FO58A3-4.

3. Čočka je spojka, F je obrazové ohnisko. Obraz vytvořený čočkou je skutečný. Podle zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{l-x} = \frac{1}{d-x}.$$

Odtud po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici  $x^2 - 2lx + ld = 0$ . Čočka se nachází ve vzdálenosti  $x = l - \sqrt{l(l-d)} = 4$  cm od zdroje. Úlohu lze řešit rovněž geometrickou konstrukcí (viz obrázek 27).

**2,5 bodu**



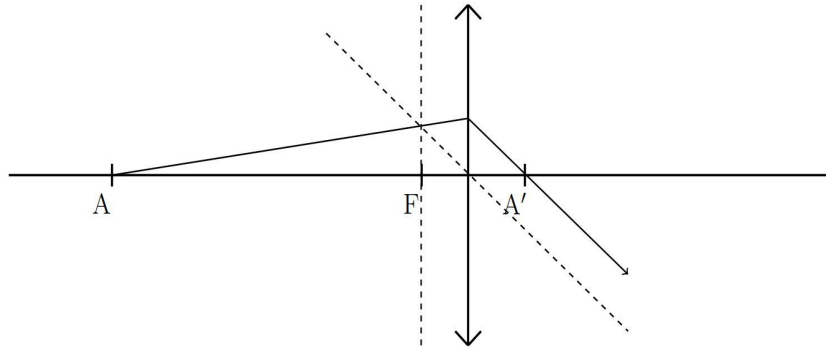
**Obrázek 27:** Geometrické řešení třetí možnosti řešení úlohy FO58A3-4.

4. Čočka je spojka, F je předmětové ohnisko. Obraz vytvořený spojkou je skutečný. Podle zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{l-x} = \frac{1}{x-d}.$$

Odtud po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici  $x^2 = ld$ . Čočka se nachází ve vzdálenosti  $x = \sqrt{ld} = 6,9$  cm od zdroje. Úlohu lze řešit rovněž geometrickou konstrukcí (viz obrázek 28).

**2,5 bodu**



**Obrázek 28:** Geometrické řešení čtvrté možnosti řešení úlohy FO58A3-4.

**Příklad č. 6: FO61A3-1: Čočka a stínítka**

[56,03 %]

Bodový zdroj světla se nachází ve vzdálenosti  $L$  od stínítka. Mezi zdroj a stínítka umístíme tenkou spojnou čočku o průměru  $D$ , s ohniskovou vzdáleností  $f$ , kterou můžeme volně posunovat po její ose. Osa je kolmá ke stínítku a na ose leží bodový zdroj světla.

- Jaký musí být vztah mezi ohniskovou vzdáleností  $f$  a vzdáleností  $L$  stínítka od zdroje, má-li na stínítku vzniknout ostrý obraz?
- Nyní posuneme stínítka blíže ke zdroji. V jaké vzdálenosti  $x$  od zdroje musíme při daném  $L'$  a  $f$  umístit čočku, aby plocha osvětleného kruhu na stínítku byla minimální, a jaký bude průměr  $d$  tohoto kruhu?
- Jaký bude průměr tohoto kruhu při zadaném  $L'$  a  $f$  v případě, že  $x = \frac{f}{2}$ ?

**Řešení příkladu č. 6:**

- Jednoduchou úvahou zjistíme, že oba kořeny  $a_{1,2}$  jsou v intervalu  $\langle 0, L \rangle$ , tj. čočka se opravdu bude nacházet mezi zdrojem a stínítkem. Je-li vzdálenost mezi zdrojem a obrazem  $L$  a vzdálenost mezi čočkou a zdrojem označíme  $x$ , pak podle zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{L-x}.$$

Rovnici upravíme na kvadratickou rovnici  $x^2 - xL + Lf = 0$  s kořeny

$$x_{1,2} = \frac{L \pm \sqrt{L^2 - 4Lf}}{2}.$$

Aby na stínítku vznikl ostrý obraz zdroje, musí být splněna podmínka

$$L^2 - 4Lf \geq 0, \quad \text{odkud } f \leq \frac{L}{4}.$$

**3 body**

- Bude-li splněna podmínka  $L \geq 4f$ , mohou nastat tři případy:

- $4f \leq L' < \infty$ , pak při daném  $L'$  lze obraz zaostřit a při splnění podmínky

$$x_{1,2} = \frac{L \pm \sqrt{L^2 - 4Lf}}{2}.$$

vznikne na stínítku ostrý obraz zdroje ( $d = 0$ ).

2.  $f \leq L' < 4f$ , na stínítku vznikne kruh o průměru  $d$  (obrázek 29). Z podobnosti trojúhelníků je průměr kruhu

$$d = D \frac{x + y - L'}{y} = D \left( \frac{x - L'}{y} + 1 \right). \quad (5)$$

Výraz bude minimální, když bude mít minimum funkce  $z = \frac{x-L'}{y}$ . Ze zobrazovací rovnice  $\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  vyjádříme  $y = \frac{fx}{x-f}$ . Po dosazení dostaneme

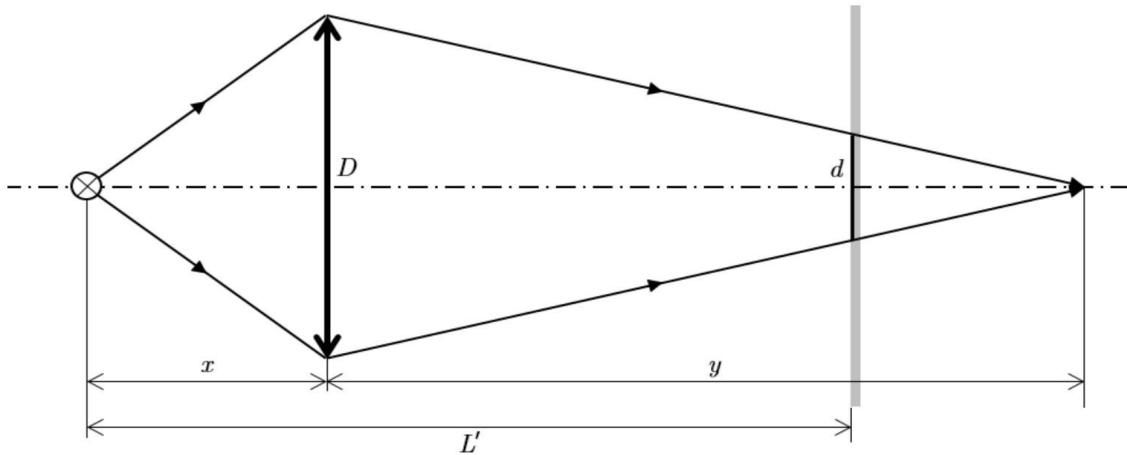
$$z = \frac{(x-L')(x-f)}{fx} = \frac{1}{f} \left( x + \frac{L'f}{x} - L' - f \right).$$

Najdeme derivaci této funkce a položíme ji rovnou nule:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{f} \left( 1 - \frac{L'f}{x^2} \right) = 0.$$

Odtud vidíme, že  $x = \sqrt{L'f}$ . Druhá derivace je zřejmě kladná, proto jde o minimum. Dosazením do vztahu (5) dostaneme

$$d = D \left( \frac{x-L'}{y} + 1 \right) = D \left[ \frac{1}{f} \left( x + \frac{L'f}{x} - L' - f \right) + 1 \right] = \frac{D}{f} (2\sqrt{L'f} - L').$$



**Obrázek 29:** Geometrické řešení pro minimální plochu osvětleného kruhu, k řešení úlohy FO61A3-1b.

3. Pro  $0 < L' < f$  minimum nastane pro  $x = L'$ . Čočka se totiž musí nacházet mezi zdrojem a stínítkem, tj.  $x \in \langle 0, L' \rangle$ , minimum proto nastane na okraji intervalu, nikoli v místě nulové derivace (které se nachází mimo interval). Potom  $d = D$ .

**4 body**

- c) Pro  $x < f$  bude mít kruh na stínítku průměr  $d_1 > D$ . V tomto případě leží zdánlivý obraz zdroje před čočkou (obrázek 30). Z podobnosti trojúhelníků

$$d_1 = D \frac{y + L' - x}{y} = D \left( \frac{L' - x}{y} + 1 \right), \quad (6)$$

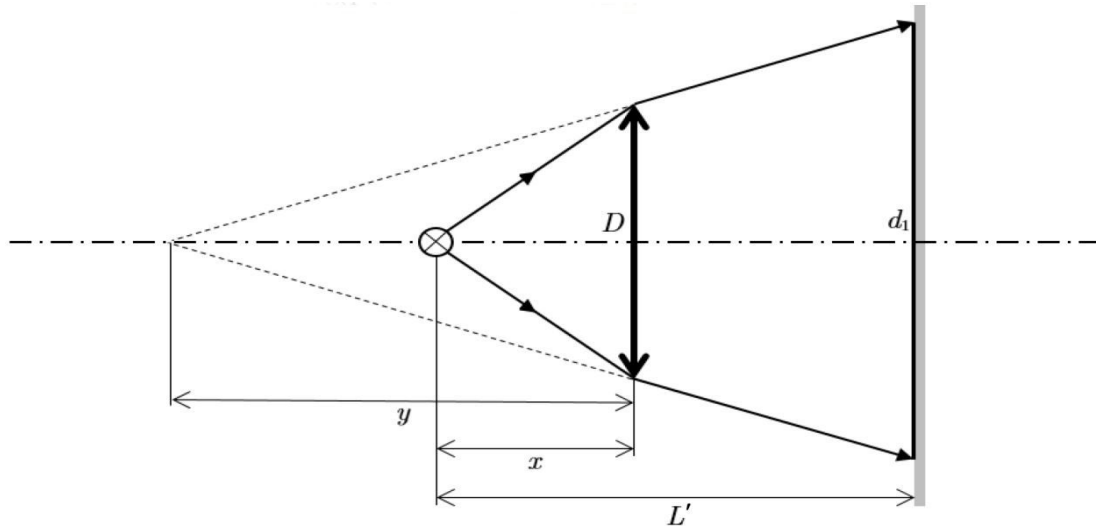
ze zobrazovací rovnice  $\frac{1}{f} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$  vyjádříme

$$y = \frac{fx}{f-x}.$$

Dosazením do vztahu (6)

$$d_1 = D \left( \frac{L' - x}{\frac{fx}{f-x}} + 1 \right) = D \left[ \frac{(L' - x)(f - x)}{fx} + 1 \right] = \frac{D}{f} \left( L' + \frac{f}{2} \right).$$

3 body

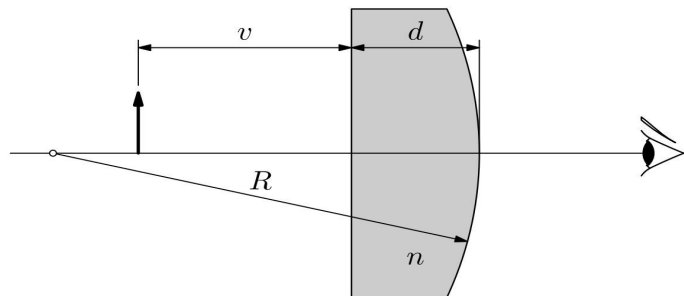


Obrázek 30: Geometrické řešení pro minimální pro  $x = \frac{f}{2}$ , k řešení úlohy FO61A3-1c.

**Příklad č. 7: FO47A3-4: Lupa**

[55,92 %]

Malý předmět pozorujeme ploško-vypuklou lupou o tloušťce  $d = 30 \text{ mm}$  vyrobenou ze skla o indexu lomu  $n = 1,56$ . Poloměr kulového rozhraní lupy je  $R = -100 \text{ mm}$ , předmět je ve vzdálenosti  $v = 50 \text{ mm}$  od rovinného rozhraní lupy (obrázek 31). Určete polohu obrazu vytvořeného lupou a jeho příčné zvětšení.



Obrázek 31: Nákres optické soustavy k zadání úlohy FO47A3-4.

**Řešení příkladu č. 7:**

Řešení postupným zobrazováním na prvním a druhém rozhraní čočky  
Použijeme zobrazovací rovnici kulového rozhraní ve tvarech

$$n_1 \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{a} \right) = n_2 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{a'} \right), \quad \frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1,$$

kde  $f = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1}$ ,  $f' = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}$  jsou ohniskové vzdálenosti, a vztah pro výpočet příčného zvětšení

$$Z = -\frac{f}{a - f}.$$

1. *Rovinné rozhraní:*  $R \rightarrow \infty$ ,  $n_1 \doteq 1$ ,  $n_2 = n = 1,56$ ,  $a_1 = v$ . Z toho  $f_1 \rightarrow \infty$ ,  $f'_1 \rightarrow \infty$ .  
Použijeme první tvar zobrazovací rovnice. Z něj plyne

$$a'_1 = -\frac{n_2}{n_1} a_1 = -nv = -78 \text{ mm}.$$

Příčné zvětšení obrazu vytvořeného rovinným rozhraním je  $Z_1 = 1$ .

5 bodů



2. Kulové rozhraní:  $R = -100$  mm,  $n_1 = n = 1,56$ ,  $a_2 = -a'_1 + d = 108$  mm,  $n_2 \doteq 1$ .  
Použijeme druhý tvar zobrazovací rovnice.

$$f_2 = \frac{nR}{1-n} = 279 \text{ mm}, \quad f'_2 = \frac{R}{1-n} = 179 \text{ mm},$$

$$a'_2 = \frac{a_2 f'_2}{a_2 - f_2} = -113 \text{ mm}, \quad Z_2 = -\frac{f_2}{a_2 - f_2} = 1,63.$$

Obraz leží v předmětovém poloprostoru ve vzdálenosti 113 mm od kulového rozhraní a má příčné zvětšení  $Z = Z_1 Z_2 = 1,63$ . **5 bodů**

*Alternativní řešení tohoto postupu (zobrazení na rovinném rozhraní) je možné dohledat na oficiálních stránkách FO.*

Řešení pomocí hlavních rovin a ohniskové vzdálenosti tlusté čočky (obrázek 32) – viz studijní text *Zobrazení čočkami* dostupný na oficiálních stránkách FO.

Parametry čočky:  $R_1 \rightarrow \infty$ ,  $R_2 = -100$  mm,  $d = 30$  mm,  $n_1 \doteq 1$  (okolní vzduch),  $n_2 = n = 1,56$  (sklo).

Obecný vztah pro ohniskovou vzdálenost tlusté čočky

$$f = \frac{n_1 n_2 R_1 R_2}{(n_2 - n_1) [(n_2 - n_1)d + n_2(R_2 - R_1)]} = \frac{n R_1 R_2}{(n - 1) [(n - 1)d + n(R_2 - R_1)]}$$

upravíme na tvar  $f = \frac{n R_2}{(n - 1) [(n - 1) \frac{d}{R_1} + n (\frac{R_2}{R_1} - 1)]}$ .

Podobně musíme upravit vztah pro výpočet polohy hlavního bodu H:

$$a_1(H) = \frac{n_1 R_1 d}{(n_2 - n_1)d + n_2(R_2 - R_1)} = \frac{R_1 d}{(n - 1)d + n(R_2 - R_1)} = \frac{d}{(n - 1) \frac{d}{R_1} + n (\frac{R_2}{R_1} - 1)}.$$

Protože  $R_1 \rightarrow \infty$ , dostáváme

$$f = -\frac{R_2}{n - 1} = 179 \text{ mm}, \quad a_1(H) = -\frac{d}{n} = -19,2 \text{ mm},$$

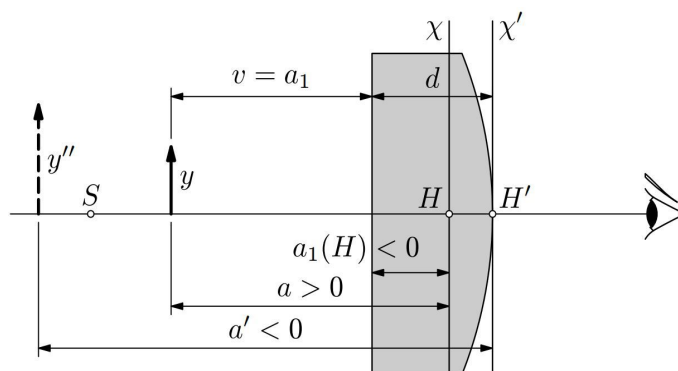
$$a'_2(H') = -\frac{n_1 R_2 d}{(n_2 - n_1)d + n_2(R_2 - R_1)} = 0$$

**6 bodů**

Pozorovaný předmět má předmětovou vzdálenost  $a = a_1 - a_1(H) = 69,2$  mm.

Obrazová vzdálenost je  $a' = \frac{af}{a-f} = -113$  mm =  $a'_2$ , obraz leží v předmětovém poloprostoru ve vzdálenosti 113 mm od kulového rozhraní a má příčné zvětšení  $Z = -\frac{f}{a-f} = 1,63$ .

**4 body**

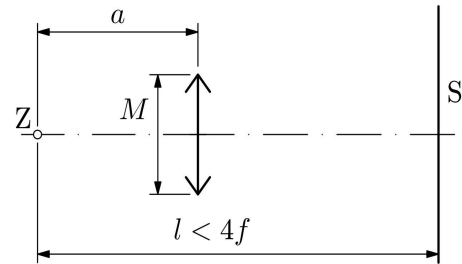


**Obrázek 32:** Geometrické řešení pro řešení pomocí hlavních rovin a ohniskové vzdálenosti tlusté čočky, k řešení úlohy FO47A3-4.

**Příklad č. 8: FO51A3-3: Skvrna**

[54,27 %]

Bodový zdroj světla Z se nachází ve vzdálenosti  $l$  od stínítka S. Mezi zdroj a stínítko umístíme podle obrázku 33 tenkou spojku o ohniskové vzdálenosti  $f > \frac{l}{4}$  a průměru  $M$ .



- Zdůvodněte, proč na stínítku nemůže vzniknout ostrý obraz zdroje.
- Jaká musí být vzdálenost  $a$  čočky od zdroje, aby průměr  $m$  světelné skvrny na stínítku byl co nejmenší? Určete jeho velikost.

**Obrázek 33:** Nákres optické soustavy k zadání úlohy FO51A3-3.

Sférickou vadu čočky zanedbáváme.

**Řešení příkladu č. 8:**

- Vznikne-li zobrazením reálného předmětu reálný obraz, platí  $a > 0$ ,  $a' > 0$ . Jejich vzdálenost je  $a + a'$ . Ze zobrazovací rovnice tenké spojky plyne

$$a' = \frac{af}{a-f} > 0, \quad \text{odkud } a > f, \quad a + a' = a + \frac{af}{a-f} = \frac{a^2}{a-f}. \quad (7)$$

Minimum tohoto součtu nalezneme užitím první derivace:

$$\frac{d(a + a')}{da} = \frac{2a(a-f) - a^2}{(a-f)^2} = \frac{a(a-2f)}{(a-f)^2} = 0, \quad \text{pro } a = 2f.$$

Pro  $a > 2f$  je derivace kladná, pro  $a < 2f$  je záporná. Jedná se tedy o minimum. Minimální vzdálenost reálného obrazu od reálného předmětu je tedy

$$(a + a')_{\min} = \frac{4f^2}{2f-f} = 4f > l.$$

Bodový reálný obraz zdroje tedy vznikne vždy až za stínítkem a na stínítku při každé poloze čočky vznikne světelná skvrna. **4 body**

- Položíme-li čočku přímo na stínítko, je  $m = M$ . Má-li se po oddálení čočky od stínítka průměr skvrny zmenšit, musí se svazek paprsků za čočkou sbíhat do reálného obrazu Z' za stínítkem (obrázek 34). Ze vztahů 7 a z obrázku 34 plyne

$$l > a > f, \quad \frac{m}{M} = \frac{a' + a - l}{a'} = \frac{\frac{af + (a-l)(a-f)}{a-f}}{\frac{af}{a-f}} = \frac{a^2 - al + lf}{af},$$

$$m = \frac{M}{f} \cdot \frac{a^2 - al + lf}{a}.$$

Minimum opět nalezneme užitím první derivace:

$$\frac{dm}{da} = \frac{M}{f} \cdot \frac{(2a-l)a - a^2 + al - lf}{a^2} = \frac{M}{f} \cdot \frac{a^2 - lf}{a^2} = 0, \quad \text{pro } a = \sqrt{lf}.$$

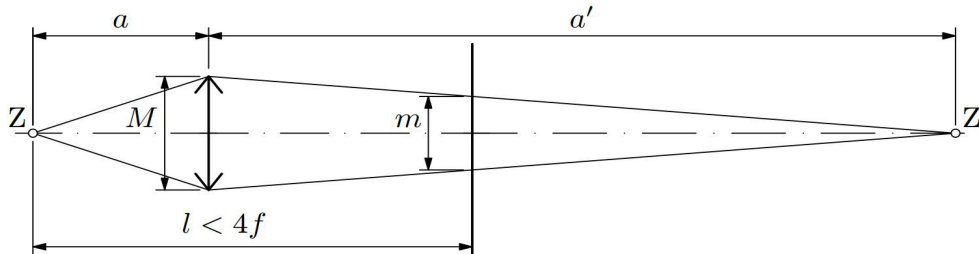
Pro  $a > \sqrt{lf}$  je derivace kladná, pro  $a < \sqrt{lf}$  je záporná. Jedná se tedy o minimum.

*Poznámka:* Z podmínky  $f > \frac{l}{4}$  plyne  $a > \sqrt{\frac{l^2}{4}} = \frac{l}{2}$ .

Minimální průměr skvrny za výše uvedeného předpokladu  $l > f$  je

$$m_{min} = \frac{M}{f} \cdot \frac{lf - l\sqrt{lf} + lf}{\sqrt{lf}} = \frac{M}{f} (2\sqrt{lf} - l).$$

Jestliže  $l \leq f$ , pak po oddálení čočky od stínítka platí  $a < f$ , paprsky se za čočkou rozbíhají a skvrna se zvětšuje. Nejmenší průměr  $m = M$  má, když je čočka položena na stínítku. **6 bodů**



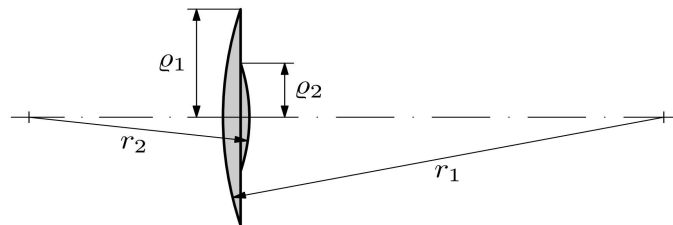
**Obrázek 34:** Geometrické řešení k řešení úlohy FO51A3-3b.

**Příklad č. 9: FO49A3-2: Dvočočka**

[48,86 %]

Dvě ploskovypuklé čočky položené rovnými plochami na sebe tvoří centrovanou optickou soustavu (obrázek 35). Kulové plochy čoček mají poloměry  $r_1 = 50$  mm a  $r_2 = 25$  mm, obvodové kružnice mají poloměry  $\varrho_1 = 14$  mm a  $\varrho_2 = 7$  mm. Index lomu skla je  $n = 1,55$ . Na optickou osu soustavy umístíme do vzdálenosti  $a = 200$  mm před první čočkou bodový zdroj světla a za druhou čočku umístíme stínítko kolmé k optické ose. Jaká musí být vzdálenost  $x$  stínítka od rovinných ploch obou čoček, aby poloměr  $\varrho$  osvětlené plochy stínítka byl co nejmenší? Určete tento nejmenší poloměr.

Řešte jako úlohu o tenkých čočkách.



**Obrázek 35:** Nákres optické soustavy k zadání úlohy FO49A3-2.

**Řešení příkladu č. 9:**

Jednotlivé čočky mají optické mohutnosti

$$\varphi_1 = (n - 1) \frac{1}{r_1} = 11 \text{ D}, \quad \varphi_2 = (n - 1) \frac{1}{r_2} = 22 \text{ D}$$

a ohniskové vzdálenosti

$$f_1 = \frac{r_1}{n - 1} = \frac{1}{11} \text{ m}, \quad f_2 = \frac{r_2}{n - 1} = \frac{1}{22} \text{ m}.$$

Výsledná optická mohutnost a ohnisková vzdálenost spojených čoček je

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 33 \text{ D}, \quad f = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{33} \text{ m}.$$

Paprsky, které procházejí ve větší vzdálenosti od optické osy (okrajem optické soustavy), se budou lámat pouze na větší ploskovypuklé čočce a vytvoří obraz ve vzdálenosti

$$a'_1 = \frac{af_1}{a - f_1} = \frac{1}{6} \text{ m.}$$

Střední část optické soustavy vytvoří obraz ve vzdálenosti

$$a'_2 = \frac{af}{a - f} = \frac{1}{28} \text{ m.}$$

**3 body**

Z obrázku 36 (ve kterém nejsou dodrženy proporce) je zřejmé, že krajní paprsky, které se lámou jen na větší čočce a krajní paprsky, které se lámou na obou čočkách, vytvoří rotační kuželové plochy. Nejmenší osvětlená plocha je ohraničena kružnicí, která je průnikem těchto kuželových ploch. Její vzdálenost  $x$  od spojených čoček a poloměr  $\varrho$  určíme z podobnosti trojúhelníků. Platí

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{a'_1 - x}{a'_1}, \quad \frac{\varrho}{\varrho_2} = \frac{x - a'_2}{a'_2}.$$

**4 body**

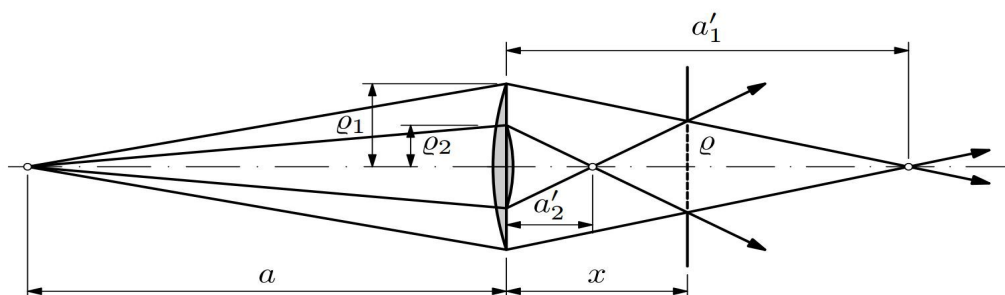
Z toho

$$\varrho = \frac{(a'_1 - x)\varrho_1}{a'_1} = \frac{(x - a'_2)\varrho_2}{a'_2}, \quad \text{odkud } (a'_1 - x)\varrho_1 a'_2 = (x - a'_2)\varrho_2 a'_1,$$

$$x = \frac{a'_1 a'_2 (\varrho_1 + \varrho_2)}{\varrho_1 a'_2 + \varrho_2 a'_1} = 0,075 \text{ m,}$$

$$x = a'_1 - \frac{\varrho a'_1}{\varrho_1} = \frac{\varrho a'_2}{\varrho_2} + a'_2, \quad \text{odkud } \varrho = \frac{a'_1 - a'_2}{\frac{a'_1}{\varrho_1} + \frac{a'_2}{\varrho_2}} = 0,0077 \text{ m.}$$

**3 body**



**Obrázek 36:** Geometrické řešení, k řešení úlohy FO49A3-2.

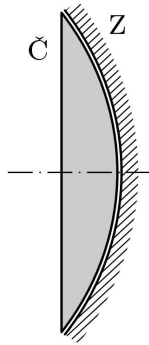
**Příklad č. 10: FO51A2-1: Kombinace zrcadla a čočky** [45,57 %]

Do dutého kulového zrcadla o poloměru křivosti  $r$  vložíme ploskovypuklou čočku o stejné velkém poloměru křivosti vyrobenou ze skla o indexu lomu  $n = 1,5$  (obrázek 37).

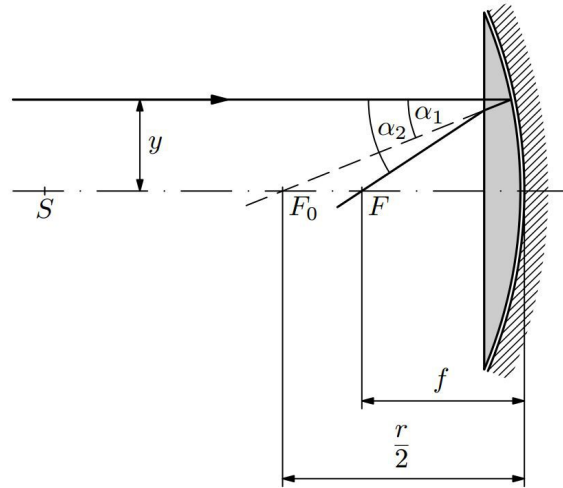
- Kolikrát menší je ohnisková vzdálenost  $f$  soustavy než ohnisková vzdálenost  $f_0$  samotného zrcadla?
- Do středu křivosti kulové plochy zrcadla vložíme malý předmět. Porovnejte polohu a příčné zvětšení  $Z_0$  obrazu tohoto předmětu vytvořeného samotným zrcadlem s polohou a příčným zvětšením  $Z$  obrazu, který vznikne po vložení čočky.

- c) Kam bychom museli přesunout předmět z úlohy b), aby příčné zvětšení obrazu vytvořeného zrcadlem s čočkou mělo opět hodnotu  $Z_0$ ? Jaká by byla v tomto případě poloha obrazu?

Uvažujte jen zobrazení v paraxiálním prostoru. Tloušťka čočky je malá v porovnání s poloměrem křivosti zrcadla. (Můžete využít poznatku, že optické mohutnosti tenkých zobrazovacích prvků položených na sebe se sčítají.)



**Obrázek 37:** Čočka, k zadání úlohy FO51A2-1.



**Obrázek 38:** Náskres k řešení úlohy FO51A2-1.

### Řešení příkladu č. 10:

- a) Vyjdeme z obrázku 38. Protože paprsky procházejí v blízkosti osy, platí

$$\tan \alpha_1 \approx \sin \alpha_1 \approx \frac{y}{r}, \quad \tan \alpha_2 \approx \sin \alpha_2 \approx \frac{y}{f}, \quad \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{r}{2f} = n,$$

z čehož  $f = \frac{r}{2n}$  je ohnisková vzdálenost soustavy. Protože  $f_0 = \frac{r}{2}$ , je  $f = \frac{f_0}{n} = \frac{2}{3}f_0$ .  
Ohnisková vzdálenost se zmenší 1,5krát. **4 body**

*Alternativní řešení této pomocí optické mohutnosti je možné dohledat na oficiálních stránkách FO.*

- b) Při zobrazení samotným zrcadlem je

$$a = r, \quad \frac{1}{a'} = \frac{1}{f_0} - \frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{1}{r}, \quad a' = r = a, \quad Z_0 = -\frac{a'}{a} = -1.$$

Obraz je skutečný, převrácený, stejně velký jako předmět a nachází se také ve středu křivosti zrcadla.

Při zobrazení soustavou je

$$a = r, \quad \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a} = \frac{2n}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}, \quad a' = \frac{r}{2}, \quad Z = -\frac{a'}{a} = -\frac{1}{2}.$$

Obraz je skutečný, převrácený, zmenšený na polovinu a nachází se uprostřed mezi vrcholem zrcadla a středem křivosti. **3 body**

c) Použijeme vztah pro příčné zvětšení

$$Z = -\frac{f}{a-f}, \quad \text{odkud } a = \frac{Z-1}{Z}f.$$

Jestliže  $Z = Z_0 = -1$ , pak

$$a = \frac{-1-1}{-1}f = 2f = 2 \cdot \frac{r}{2n} = \frac{r}{n} = \frac{2}{3}r, \quad a' = -Z_0a = a.$$

**3 body**

**Příklad č. 11: FO43A2-3: Malý předmět a spojka** [40,00 %]

Malý předmět umístíme do blízkosti optické osy tenké spojky o ohniskové vzdálenosti  $f = 50$  mm do vzdálenosti  $a = 2f = 100$  mm od středu čočky.

- Určete polohu a vlastnosti obrazu vytvořeného čočkou.
- Jak se změní poloha obrazu a jeho příčné zvětšení, vložíme-li mezi předmět a čočku kolmo k optické ose skleněnou planparalelní desku, která má tloušťku  $d = 30$  mm a index lomu  $n = 1,5$ ?
- Jak se změní poloha a vlastnosti obrazu vzhledem k úloze a), jestliže desku umístíme mezi čočku a obraz?

Průměr čočky a rozměry předmětu jsou malé v porovnání s ohniskovou vzdáleností čočky. Světelné paprsky tedy svírají s optickou osou jen malé úhly, pro které platí  $\tan \alpha \approx \alpha \approx \sin \alpha$ .

**Řešení příkladu č. 11:**

- Použijeme zobrazovací rovnici tenké čočky a vztah pro výpočet příčného zvětšení:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}, \quad \text{odkud } a' = \frac{af}{a-f} = 2f = 100 \text{ mm}, \quad Z = -\frac{f}{a-f} = -1.$$

Obraz leží ve vzdálenosti  $2f = 100$  mm od středu čočky, je převrácený a stejně velký jako předmět. **1 bod**

- Paprsky vycházející z bodu  $A$  na optické ose se při průchodu planparalelní deskou posunou, jako by vycházely z bodu  $A_1$ , jehož polohu určíme podle obrázku 39. Platí

$$|AA_1| = |KL| = |KM| - |LM| = d - \frac{|MN|}{\tan \alpha} = d - \frac{d \tan \beta}{\tan \alpha}.$$

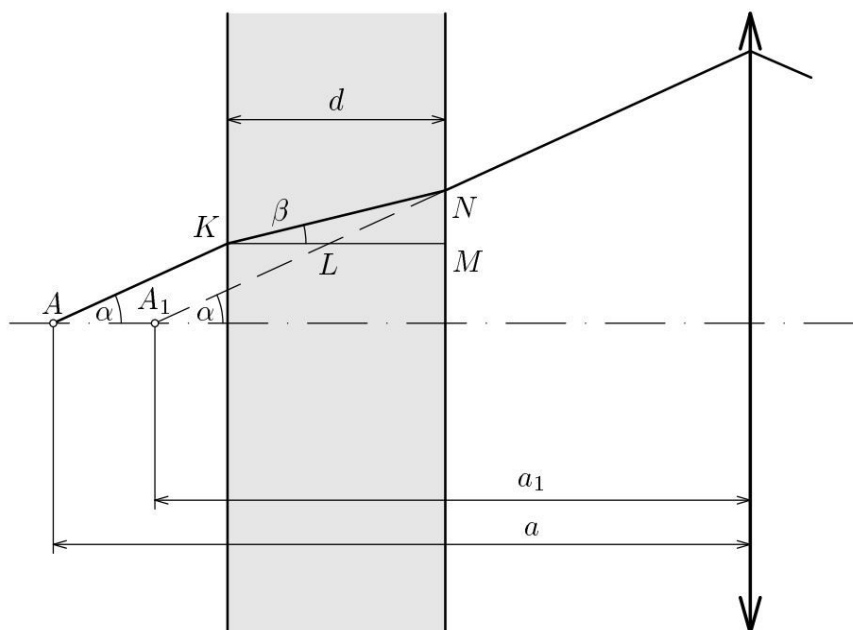
Pro malé úhly

$$|AA_1| \approx d - \frac{d \sin \beta}{\sin \alpha} = d - \frac{d}{n} = 10 \text{ mm}.$$

Stejně se chovají i paprsky vycházející z bodů předmětu, které neleží na optické ose. Účinek skleněné desky je tedy takový, jako kdybychom předmět přemístili do vzdálenosti  $a_1 = a - d \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 90$  mm od středu čočky. Obraz vytvořený čočkou se přemístí do vzdálenosti  $a'_1$  a bude mít příčné zvětšení  $Z_1$ :

$$a'_1 = \frac{a_1 f}{a_1 - f} = 112,5 \text{ mm}, \quad Z_1 = -\frac{f}{a_1 - f} = -1,25.$$

**5 bodů**



**Obrázek 39:** Geometrické řešení, k řešení úlohy FO43A2-3.

- c) Přemístíme-li desku mezi čočku a obraz, jehož polohu a příčné zvětšení jsme vypočítali v úkolu a), paprsky se při průchodu deskou opět posunou o  $d - \frac{d}{n} = 10$  mm, tentokrát ale od čočky. Proto se i obraz vytvořený čočkou posune do vzdálenosti  $a' + d - \frac{d}{n} = 110$  mm od středu čočky, ale jeho příčné zvětšení  $Z = -1$  se tím nezmění. **4 body**

**Příklad č. 12: FO40A2-1: Objektiv a jeho ohniska** **[38,70 %]**

Objektiv je tvořen centrovanou soustavou dvou stejných tenkých spojek o ohniskové vzdálenosti  $f_1 = f_2 = 100$  mm. Vzájemná vzdálenost jejich středů je  $d = 50$  mm.

- Předmět umístíme do vzdálenosti  $a_1 = 75$  mm od první čočky objektivu. Určete polohu obrazu vytvořeného objektivem a jeho příčné zvětšení.
- Určete vzdálenost  $h_1$  předmětového ohniska objektivu od první čočky a vzdálenost  $h_2$  obrazového ohniska objektivu od druhé čočky.
- Určete ohniskovou vzdálenost objektivu.

**Řešení příkladu č. 12:**

- a) Při řešení úlohy budeme používat středoškolskou znaménkovou konvenci. Obraz vytvořený první čočkou objektivu je předmětem pro druhou čočku. Zobrazení bodu mimo optickou osu znázorňuje obrázek 40. Platí:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a'_1} = \frac{1}{f_1}, \quad \text{odkud } a'_1 = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1} = -300 \text{ mm.}$$

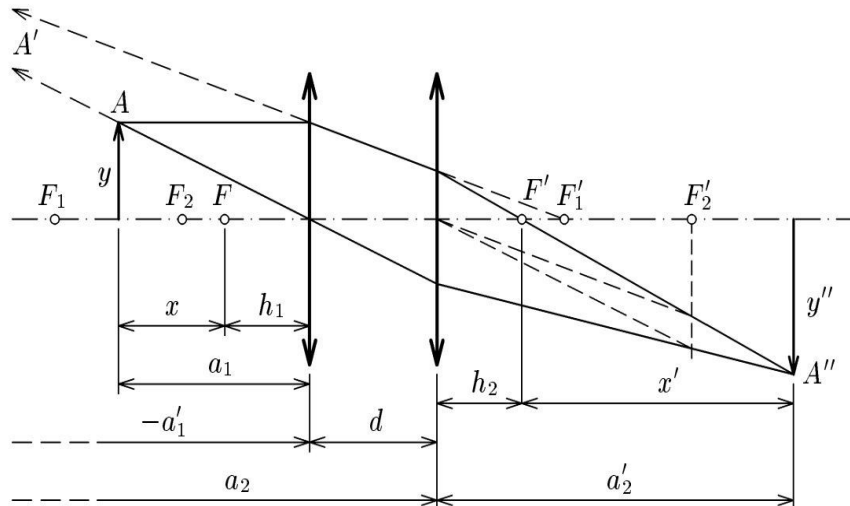
První čočka vytvoří zdánlivý obraz, který leží v předmětovém poloprostoru druhé čočky ve vzdálenosti  $a_2 = d - a'_1 = 350$  mm od druhé čočky. Dále platí

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a'_2} = \frac{1}{f_1}, \quad \text{odkud } a'_2 = \frac{a_2 f_1}{a_2 - f_1} = 140 \text{ mm.}$$

Celkové příčné zvětšení výsledného obrazu je součinem příčného zvětšení při prvním a druhém zobrazení:

$$Z = \frac{y''}{y} = \frac{y''}{y'} \cdot \frac{y'}{y} = Z_1 \cdot Z_2 = -\frac{a'_1}{a_1} \cdot \left(-\frac{a'_2}{a_2}\right) = -1,6.$$

Výsledný obraz je skutečný, převrácený a 1,6krát zvětšený. Leží ve vzdálenosti 140 mm od druhé čočky objektivu. **5 bodů**



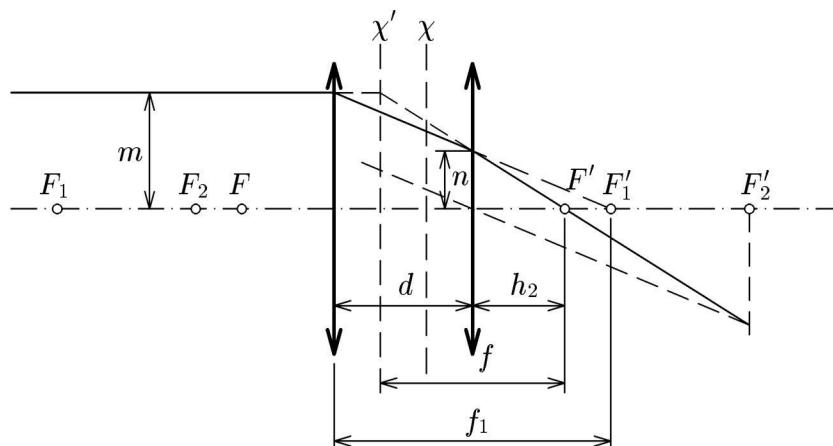
**Obrázek 40:** Geometrické řešení, k řešení úlohy FO40A2-1a.

- b) Vyjdeme opět z obrázku 40. Paprsky přicházející rovnoběžně s optickou osou láme první čočka do svého obrazového ohniska  $F'_1$  a druhá čočka do obrazového ohniska  $F'$  celé soustavy. Bod  $F'_1$  se tedy druhou čočkou zobrazuje do bodu  $F'$ . Platí:

$$\frac{1}{-(f_1 - d)} + \frac{1}{h_2} = \frac{1}{f_1}, \quad \text{odkud } h_2 = \frac{f_1(f_1 - d)}{2f_1 - d} = 33, \bar{3} \text{ mm.}$$

Vzhledem k souměrnosti objektivu k  $h_1 = h_2$ .

**2 body**



**Obrázek 41:** Geometrické řešení, k řešení úlohy FO40A2-1b.

- c) Použijeme zobrazovací rovnici čočky v Newtonově tvaru:

$$f^2 = x \cdot x', \quad \text{kde } x = a_1 - h_1 = 41, \bar{6} \text{ mm, } x' = a'_2 - h_2 = 106, \bar{6} \text{ mm.}$$



Z toho  $f = \sqrt{xx'} = 66,6 \text{ mm}$ .

Můžeme také vycházet z polohy hlavních rovin  $\chi, \chi'$  objektivu (obrázek 41), platí

$$\frac{n}{m} = \frac{h_2}{f} = \frac{f_1 - d}{f_1}, \quad \text{odkud } f = \frac{h_2 f_1}{f_1 - d} = 66,6 \text{ mm}.$$

**3 body**

**Příklad č. 13: FO41A2-2: Dvě tenké čočky**

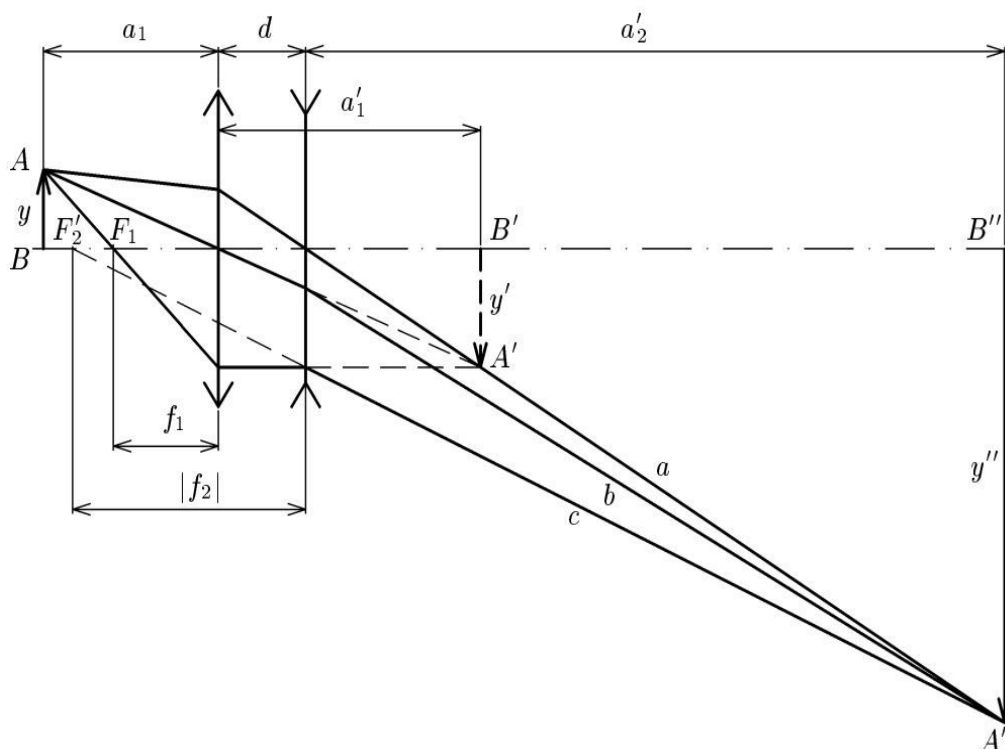
**[36,36 %]**

Dvě tenké čočky vzdálené od sebe 2,5 cm tvoří centrovanou optickou soustavu. Předmět vysoký 2,0 cm umístěný ve vzdálenosti 5,0 cm před první čočkou je celou soustavou zobrazen ve vzdálenosti 20,0 cm za druhou čočkou, kde vzniká převrácený skutečný obraz vysoký 12,0 cm. Určete ohniskové vzdálenosti obou čoček.

- Zadání pečlivě narýsujte na samostatný list papíru a úlohu vyřešte graficky užitím význačných paprsků. Řešení popište.
- Úlohu řešte početně.

**Řešení příkladu č. 13:**

- Grafické řešení úlohy pomocí význačných světelných paprsků je na obrázku 42. Nejprve pomocí paprsků  $a$  a  $b$  nalezneme pomocný obraz  $A_1$  a potom pomocí paprsku  $c$  ohniska  $F_1$  a  $F_2'$ . Z obrázku je zřejmé, že první čočka je spojka a druhá rozptylka. **5 bodů**



**Obrázek 42:** Geometrické řešení, k řešení úlohy FO41A2-2a.

- V početním řešení použijeme označení veličin vyznačené v obrázku 42. Z čočkové rovnice a vztahu pro výpočet zvětšení dostaneme soustavu rovnic

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1'} = \frac{1}{f_1}, \quad \frac{1}{d - a_1'} + \frac{1}{a_2'} = \frac{1}{f_2}, \quad \frac{y'}{y} = -\frac{a_1'}{a_1}, \quad \frac{y''}{y'} = -\frac{a_2'}{d - a_1'}.$$

kterou vyřešíme postupně:

$$\frac{y''}{y} = \frac{a'_1 a'_2}{a_1 (d - a'_1)}, \quad a'_1 = \frac{y'' a_1 d}{a'_2 y + y'' a_1} = 7,5 \text{ cm},$$

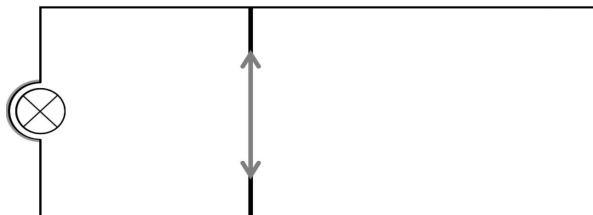
$$f_1 = \frac{a_1 a'_1}{a_1 + a'_1} = 3 \text{ cm}, \quad f_2 = \frac{(d - a'_1) a'_2}{d - a'_1 + a'_2} = -6,7 \text{ cm}.$$

5 bodů

**Příklad č. 14: FO60A3-2: Píst s čočkou**

[35,00 %]

Vodorovně ležící válec o objemu  $V = 2 \text{ l}$  je rozdělen na dvě části hladkým, pohyblivým pístem, v němž je umístěna tenká čočka, jejíž optický střed je v ose válce (obrázek 43). V levé části válce je plyn s jednoatomovými molekulami o atmosférickém tlaku  $p_0 = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ , v pravé části je plyn s dvouatomovými molekulami o stejném tlaku, jehož látkové množství je  $k$ -krát větší.



**Obrázek 43:** Nákres k zadání úlohy FO60A3-2.

Uprostřed levé základny je umístěna žárovka se žhaveným kovovým vláknem. Připojíme-li lampu na ideální zdroj napětí  $U_e = 4 \text{ V}$ , bude žárovkou procházet proud  $I = 0,32 \text{ A}$ , vlákno se rozžárí a zobrazí se jasně na stínítku. Velikost obrazu  $y_1 = 4 \text{ cm}$ . Obraz se ale postupně rozostří na světlou skvrnu, aby po určité době  $t$  vznikl opět ostrý obraz o velikosti  $y_2 = 1 \text{ cm}$ . Tepelná kapacita povrchu válce, pístu s čočkou, levé základny se žárovkou je ve srovnání s plynem zanedbatelně malá. energii elektromagnetického záření prošlého čočkou považujte za zanedbatelnou vzhledem k elektrické energii dodané do žárovky. Píst, čočku i válec považujte za dokonalé tepelné izolanty, s výjimkou pravého dna, které je dokonale tepelně vodivé a zajišťuje tak stálou teplotu v pravé části válce. Počáteční teplota plynu v obou částech nádoby je na počátku měření shodná.

- Jakou velikost  $y$  má vlákno žárovky?
- Určete hodnotu čísla  $k$  a vypočítejte, jaký tlak bude v levé a v pravé části nádoby, když na stínítku vznikne opět ostrý obraz vlákna žárovky.
- Jakou elektrickou energii spotřebuje žárovka a za jakou dobu  $t$  vznikne na stínítku opět ostrý obraz vlákna žárovky?

Předpokládejte, že veškeré teplo vydávané žhavým vláknem žárovky zahřeje plyn ve válci.

**Řešení příkladu č. 14:**

- Označme vzdálenost pístu od levé základny  $a$ , od pravé základny  $b$  a výšku válce  $l$ . Na počátku děje platí:

$$\frac{y_1}{y} = \frac{b}{a} \quad (8)$$

a po jeho skončení

$$\frac{y_2}{y} = \frac{b_1}{a_1}. \quad (9)$$

Ze zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}$$

a z rovnice  $a + b = a_1 + b_1$  zjistíme, že ostrý obraz podruhé vznikne, když bude  $a_1 = b$  a  $b_1 = a$ . Ze vztahů (8) a (9) plyne

$$y^2 = y_1 y_2 \frac{aa_1}{bb_1} = y_1 y_2, \quad \text{odkud } y = \sqrt{y_1 y_2} = 2,0 \text{ cm.}$$

**3 body**

- b) Označme  $V_1$  počáteční objem levé části a  $V_2$  počáteční objem pravé části nádoby,  $n_1$  látkové množství jednoatomového plynu v levé části nádoby a  $n_2$  látkové množství dvouatomového plynu v pravé části nádoby. Pro celkový objem platí

$$V = V_1 + V_2. \quad (10)$$

Protože poměr velikosti obrazu a předmětu je na počátku pokusu 2 : 1 a na konci pokusu 1 : 2 a průřez válce je stálý, je i poměr  $\frac{V_2}{V_1} = 2$ . V okamžiku vzniku druhého ostrého obrazu na stínítku bude objem levé části nádoby  $V_2$  a pravé části  $V_1$ . Protože tlak a teplota v levé i v pravé části nádoby byly na počátku stejné, bude ze stavové rovnice platit

$$k = \frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2}{n_1} = 2. \quad (11)$$

V pravé části nádoby se plyn izotermicky stlačil, tedy podle Boyle–Mariotteova zákona bude jeho konečný tlak

$$p = p_0 \frac{V_2}{V_1} = p_0 \frac{n_2}{n_1} = k p_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad (12)$$

stejný tlak bude i v levé části nádoby.

**2 body**

- c) Energie získaná z žárovky se spotřebuje na zvýšení vnitřní energie plynu v levé části nádoby a na práci vnějších sil při izotermickém stlačení v pravé části nádoby s využitím vztahů (10), (11) a (12):

$$Q = \Delta U + W' = \frac{3}{2} (pV_2 - p_0V_1) + p_0V_2 \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{3}{2} [k p_0 (V - V_1) - p_0V_1] + p_0 (V - V_1) \ln k$$

$$Q = \frac{3}{2} \left[ k p_0 \left( V - \frac{V}{k+1} \right) - p_0 \frac{V}{k+1} \right] + p_0 \left( V - \frac{V}{k+1} \right) \ln k = p_0 V \left[ \frac{3}{2} (k-1) + \frac{k \ln k}{k+1} \right]$$

$$Q = p_0 V \left[ \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \ln 2 \right] = 390 \text{ J.}$$

**3 body**

Pro tepelný výkon žárovky platí  $P = U \cdot I = \frac{Q}{t}$ , odkud

$$t = \frac{Q}{UI} = \frac{p_0 V}{UI} \left[ \frac{3}{2} (k-1) + \frac{k \ln k}{k+1} \right] = p_0 V \left[ \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \ln 2 \right] = 310 \text{ s.}$$

**2 body**

**Příklad č. 15: FO61A2-3: Barevná vada čočky**

[33,51 %]

V tabulce jsou uvedeny Fraunhoferovy čáry, jejich vlnové délky a indexy lomu lehkého a těžkého korunového skla jim příslušné.

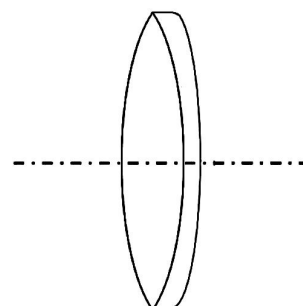
**Tabulka 3:** Tabulka k zadání úlohy FO61A2-3.

Fraunhoferova čára	A	B	C	D	E	F	G	H
Vlnová délka $\lambda_m$ [nm]	760,8	686,7	656,3	589,3	527,0	486,1	430,8	369,8
Index lomu lehkého skla $n_L$	1,510	1,512	1,513	1,515	1,519	1,521	1,527	1,531
Index lomu těžkého skla $n_T$	1,735	1,741	1,743	1,752	1,762	1,772	1,792	1,811

Barevná vada tenké, symetrické, dvojnásobně vypuklé spojky z lehkého korunového skla (obrázek 44), jejíž ohnisková vzdálenost pro červené světlo (čára C) je  $f_{SC} = 10$  cm, je kompenzována tenkou vypuklo-dutou rozptylkou z těžkého korunového skla, která těsně přiléhá ke spojce tak, aby ohniskové vzdálenosti soustavy pro červené světlo (čára C) a pro modré světlo (čára F) byly stejné.

Řešte vždy nejprve obecně, pak pro zadané hodnoty.

- Určete poloměry křivosti spojné čočky  $r_S$ .
- Určete ohniskovou vzdálenost rozptylky pro modré světlo  $f_{RF}$  (čára F).
- Určete vnější poloměr křivosti rozptylky  $r_R$ .

**Obrázek 44:** Dvojnásobně vypuklá spojka, k zadání úlohy FO61A2-3.**Řešení příkladu č. 15:**

- Pro ohniskovou vzdálenost tenké symetrické spojky v červeném světle  $f_{SC}$  platí:

$$\frac{1}{f_{SC}} = (n_{LC} - 1) \frac{2}{r_S}. \quad (13)$$

Odtud vyjádříme poloměr křivosti kulových ploch spojky

$$r_S = 2(n_{LC} - 1)f_{SC} = 10,3 \text{ cm.}$$

**2 body**

- Pro ohniskovou vzdálenost tenké spojky v modrém světle  $f_{SF}$  platí

$$\frac{1}{f_{SF}} = (n_{LF} - 1) \frac{2}{r_S}. \quad (14)$$

Porovnáním vztahů (13) a (14) odvodíme ohniskovou vzdálenost spojky pro modré světlo:

$$\frac{f_{SC}}{f_{SF}} = \frac{n_{LF} - 1}{n_{LC} - 1}, \quad \text{odkud } f_{SF} = f_{SC} \frac{n_{LC} - 1}{n_{LF} - 1}.$$

Protože rozptylka těsně přiléhá ke spojce, je poloměr křivosti její přední plochy až na znaménko shodný s poloměrem křivosti spojky. Pro ohniskovou vzdálenost rozptylky a červené světlo platí

$$\frac{1}{f_{RC}} = (n_{TC} - 1) \left( -\frac{1}{r_S} + \frac{1}{r_R} \right),$$

a pro modré světlo

$$\frac{1}{f_{RF}} = (n_{TF} - 1) \left( -\frac{1}{r_S} + \frac{1}{r_R} \right).$$

Obdobně jako u spojky odvodíme

$$f_{RF} = f_{RC} \frac{n_{TC} - 1}{n_{TF} - 1}.$$

Optická mohutnost soustavy pro červené světlo se musí rovnat optické mohutnosti soustavy pro světlo modré:

$$\frac{1}{f_{SC}} + \frac{1}{f_{RC}} = \frac{1}{f_{SF}} + \frac{1}{f_{RF}}.$$

Po dosazení za ohniskovou vzdálenost rozptylky ve světle červeném

$$f_{RC} = f_{RF} \frac{n_{TF} - 1}{n_{TC} - 1}$$

a za ohniskovou vzdálenost spojky ve světle modrém

$$f_{SF} = f_{SC} \frac{n_{LC} - 1}{n_{LF} - 1}$$

vyjádříme ohniskovou vzdálenost rozptylky v modrém světle:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_{SC}} + \frac{1}{f_{RF} \frac{n_{TF}-1}{n_{TC}-1}} &= \frac{1}{f_{SC} \frac{n_{LC}-1}{n_{LF}-1}} + \frac{1}{f_{RF}} \\ \frac{1}{f_{RF}} \left( 1 - \frac{n_{TC}-1}{n_{TF}-1} \right) &= \frac{1}{f_{SC}} \left( 1 - \frac{n_{LF}-1}{n_{LC}-1} \right) \\ \frac{1}{f_{RF}} \left( \frac{n_{TF}-n_{TC}}{n_{TF}-1} \right) &= \frac{1}{f_{SC}} \left( \frac{n_{LC}-n_{LF}}{n_{LC}-1} \right) \\ f_{RF} &= f_{SC} \left( \frac{\frac{n_{TF}-n_{TC}}{n_{TF}-1}}{\frac{n_{LC}-n_{LF}}{n_{LC}-1}} \right) = f_{SC} \frac{(n_{TF}-n_{TC})(n_{LC}-1)}{(n_{LC}-n_{LF})(n_{TF}-1)} = -24,1 \text{ cm.} \end{aligned}$$

**4 body**

c) Ze známé ohniskové vzdálenosti pro modré světlo

$$\frac{1}{f_{RF}} = (n_{TF} - 1) \left( -\frac{1}{r_S} + \frac{1}{r_R} \right),$$

kde  $r_S$  má stejnou velikost jako u spojky, nyní vyjádříme

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_R} &= \frac{1}{f_{RF}(n_{TF}-1)} + \frac{1}{r_S} = \frac{r_S + f_{RF}(n_{TF}-1)}{f_{RF}(n_{TF}-1)r_S}, \\ r_R &= \frac{f_{RF}(n_{TF}-1)r_S}{r_S + f_{RF}(n_{TF}-1)} = \frac{f_{SC} \frac{(n_{TF}-n_{TC})(n_{LC}-1)}{(n_{LC}-n_{LF})(n_{TF}-1)} (n_{TF}-1) 2(n_{LC}-1) f_{SC}}{2(n_{LC}-1) f_{SC} + f_{SC} \frac{(n_{TF}-n_{TC})(n_{LC}-1)}{(n_{LC}-n_{LF})(n_{TF}-1)} (n_{TF}-1)} \\ r_R &= \frac{2(n_{TF}-n_{TC})(n_{LC}-1) f_{SC}}{2(n_{LC}-n_{LF}) + (n_{TF}-n_{TC})} = 22,9 \text{ cm.} \end{aligned}$$

**4 body**

**Příklad č. 16: FO60A2-3: Dvě čočky****[27,88 %]**

Ve vzdálenosti  $a = 20$  cm od bodového všesměrového zdroje světla leží čočka o průměru  $d = 1$  cm s ohniskovou vzdáleností  $f_1 = 5$  cm. Za ní leží na stejné optické ose ve vzdálenosti  $b = 50$  cm od zdroje druhá spojná čočka o průměru  $D = 10$  cm s ohniskovou vzdáleností  $f_2 = 20$  cm. Nakreslete obrázek a určete:

- polohy obrazů zdroje vytvořených čočkami,
- v jaké vzdálenosti  $x$  za druhou čočkou musíme umístit stínítko, aby světelná stopa na něm vytvořená měla minimální průměr  $d_{min}$ ,
- jaký bude tento minimální průměr světelné stopy?

**Řešení příkladu č. 16:**

- Protože má první čočka menší průměr, bude se část světelných paprsků lámat na první čočce a pak i na druhé čočce, část paprsků se bude lámat jen na druhé čočce. Obraz vytvořený první čočkou bude ve vzdálenosti  $a'$ , pro kterou platí

$$a' = \frac{af_1}{a - f_1} = \frac{20}{3} \text{ cm.}$$

**1 bod**

Tento obraz je ve vzdálenosti

$$a_1 = b - a - a' = \frac{70}{3} \text{ cm}$$

před druhou čočkou, která vytvoří obraz ve vzdálenosti

$$a'_1 = \frac{a_1 f_2}{a_1 - f_2} = 140 \text{ cm}$$

za druhou čočkou.

**1 bod**

Průměr světelné stopy na druhé čočce označme  $d_1$ . Obraz vytvořený pouze druhou čočkou bude ve vzdálenosti

$$b' = \frac{bf_2}{b - f_2} = \frac{100}{3} \text{ cm}$$

za druhou čočkou.

**2 body**

- Průchod paprsků čočkami je na obrázku 45. Z podobnosti trojúhelníků plyne

$$\frac{d_{min}}{D} = \frac{x - b'}{b'}$$

$$\frac{d_1}{d} = \frac{b - a - a'}{a'}$$

$$\frac{d_{min}}{d_1} = \frac{a'_1 - x}{a'_1}$$

Z druhé rovnice můžeme vyjádřit  $d_1$ :

$$d_1 = \frac{b - a - a'}{a'} d = \frac{70}{3} \text{ cm.}$$

Dosazením za  $d_1$  z druhé rovnice do třetí

$$\frac{d_{min}}{\frac{b-a-a'}{a'} d} = \frac{a'_1 - x}{a'_1}$$

$$d_{min} = \frac{a'_1 - x}{a'_1} \cdot \frac{b - a - a'}{a'} d.$$

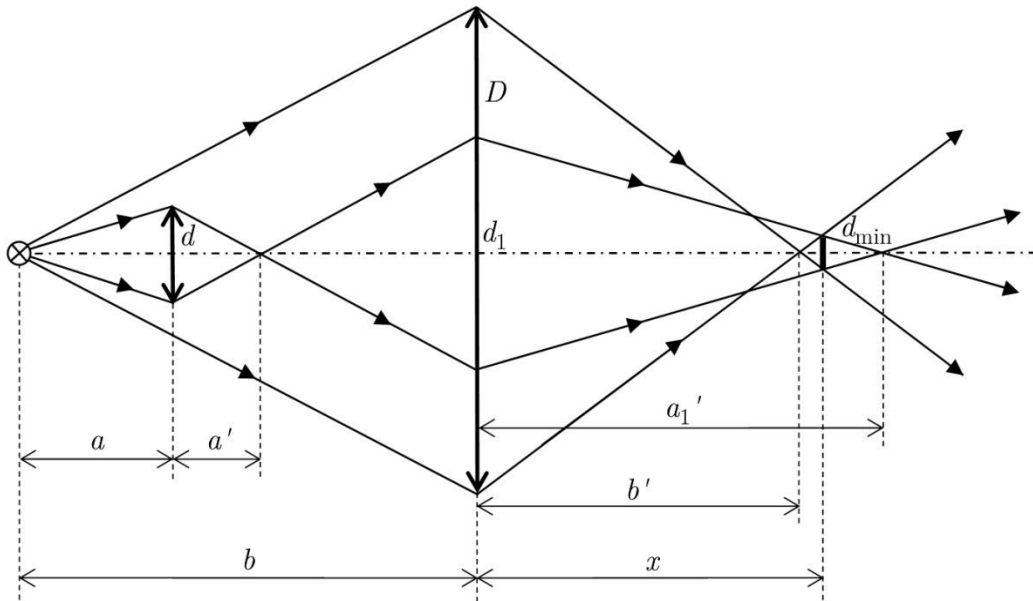
a po vyjádření  $d_{min}$  z první rovnice  $d_{min} = \frac{x-b'}{b'} D$  porovnáním dostaneme

$$\frac{x - b'}{b'} D = \frac{a'_1 - x}{a'_1} \cdot \frac{b - a - a'}{a'} d.$$

Po úpravě a číselném dosazení:

$$x = \frac{a'_1 b' [(b - a - a') d + D a']}{D a'_1 a' + (b - a - a') d b'} = 41,5 \text{ cm.}$$

Světelná stopa o nejmenším průměru vznikne 41,5 cm cm za druhou čočkou. **4 body**



**Obrázek 45:** Geometrické řešení, k řešení úlohy FO60A2-3.

c) Po číselném dosazení do první rovnice

$$d_{min} = \frac{x - b'}{b'} D = 2,45 \text{ cm.}$$

Nejmenší průměr světelné stopy na stínítku bude 2,45 cm.

**2 body**

**Příklad č. 17: FO64A2-2: Záporný index lomu**

**[23,43 %]**

V materiálové vědě byly vytvořeny materiály, které se chovají tak, jako by jejich index lomu byl záporný, tzv. *metamateriály*. Při přechodu světla z vakua do daného prostředí pak Snellův zákon místo obvyklého  $\sin \alpha = n \sin \beta$  nabývá tvaru  $\sin \alpha = |n| \sin \beta$  (viz obrázek 46).

Na optické ose tenké ploskovypuklé čočky s poloměrem  $r$  leží úsečka AB o délce  $d$  (obrázek 46). Vzdálenost bodu A od čočky je  $r$ , je tedy stejná jako poloměr křivosti čočky. Určete polohu a vlastnosti vzniklého obrazu, jestliže

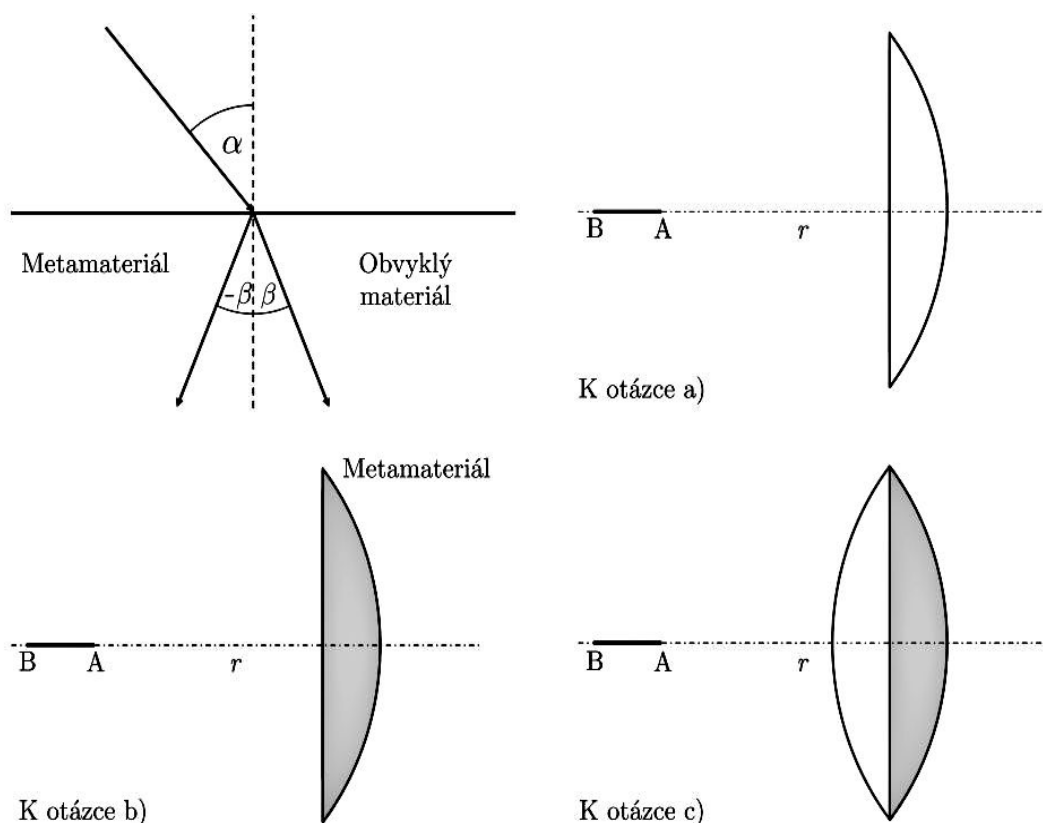
- je čočka zhotovena z materiálu o indexu lomu  $n_1$  ( $n_1 > 1$ ),
- zhotovena z metamateriálu o indexu lomu stejné velikosti, ale  $n_2 < -1$ ,

- c) vytvoříme novou čočku tak, že čočku z běžného materiálu a čočku z metamateriálu přiložíme ploskou stranou k sobě tak, aby vznikla dvojbypuklá čočka, a umístíme ji do stejné vzdálenosti.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty:  $n_1 = 1,5$ ,  $n_2 = -1,5$ ,  $r = 30$  cm,  $d = 4$  cm. Čočky jsou umístěny ve vzduchu, paprsky je možno považovat za paraxiální. Pro ohniskovou vzdálenost ploskovypuklé čočky s poloměrem křivosti  $r$  platí

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \frac{1}{r}.$$

Návod k části b): nakreslete si náčrtek a využijte toho, že pro malé úhly přibližně platí  $\tan \alpha \approx \alpha$ ,  $\sin \alpha \approx \alpha$  a  $\cos \alpha \approx 1$ .



**Obrázek 46:** Metamateriály, k zadání úlohy FO64A2-2.

### Řešení příkladu č. 17:

- a) Označme  $f_1$  ohniskovou vzdálenost čočky,  $a_1$  obrazovou vzdálenost bodu A a  $b_1$  obrazovou vzdálenost bodu B. Pro ohniskovou vzdálenost  $f_1$  ploskovypuklé čočky s poloměrem křivosti  $r$  platí

$$\frac{1}{f_1} = (n_1 - 1) \frac{1}{r}, \quad f_1 = \frac{r}{n_1 - 1} = 60 \text{ cm}.$$

Pro každý z bodů A, B napíšeme zobrazovací rovnici, po úpravě

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{a_1}, \quad \text{odkud } a_1 = \frac{r}{n_1 - 2} = -60 \text{ cm},$$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{r+d} + \frac{1}{b_1}, \quad \text{odkud } b_1 = \frac{r(r+d)}{(n_1 - 1)(r+d) - r} = -78,5 \text{ cm}.$$



Zvětšení úsečky je

$$Z_1 = -\frac{b_1 - a_1}{d} = 4,6.$$

Obraz je zdánlivý (před čočkou) a zvětšený.

**3 body**

- b) Nyní označíme  $f_2$  ohniskovou vzdálenost čočky,  $a_2$  obrazovou vzdálenost bodu A a  $b_2$  obrazovou vzdálenost bodu B. Pro ohniskovou vzdálenost  $f_2$  ploskovypuklé čočky s poloměrem křivosti  $r$  bez ohledu na znaménko indexu lomu platí stejný vztah (důkaz v dodatku).

$$\frac{1}{f_2} = (n_2 - 1)\frac{1}{r}, \quad f_2 = \frac{r}{n_2 - 1} = -12 \text{ cm.}$$

Nyní v zobrazovací rovnici pro tytéž body A, B zaměníme pouze indexy, po úpravě:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{a_2}, \quad \text{odkud } a_2 = \frac{r}{n_2 - 2} = -8,57 \text{ cm,}$$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{r+d} + \frac{1}{b_2}, \quad \text{odkud } b_2 = \frac{r(r+d)}{(n_2 - 1)(r+d) - r} = -8,87 \text{ cm.}$$

Zvětšení úsečky je

$$Z_2 = -\frac{b_2 - a_2}{d} = 0,075.$$

Obraz je zdánlivý (před čočkou) a zmenšený.

**3 body**

*Dodatek pro část b):* V obrázku 47 je ploskovypuklá čočka obklopená vzduchem. Pa-prsek rovnoběžný s optickou osou se láme do obrazového ohniska, lom je znázorněn současně pro kladný i záporný index lomu. Určíme ohniskovou vzdálenost  $f$  materiálu a ohniskovou vzdálenost  $f_m$  metamateriálu čočky. Pro paraxiální paprsky platí

$$\cos \alpha \approx 1, \quad (15)$$

$$\frac{h}{r} \approx \sin \alpha. \quad (16)$$

V klasické látce

$$\frac{h}{f} \approx \sin(\beta - \alpha). \quad (17)$$

V metamateriálu obrazové ohnisko leží v předmětovém prostoru, proto v souladu se znaménkovou konvencí je ohnisková vzdálenost záporná:

$$\frac{h}{f_m} \approx -\sin(\alpha + \beta). \quad (18)$$

Z rovnic (15), (16), (17) plyne

$$\frac{r}{f} \approx \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha}{\sin \alpha} \approx \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} - \cos \beta = n - 1,$$

odkud

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\frac{1}{r},$$

což je očekávaný výsledek. Z rovnic (15), (16), (18) plyne

$$\frac{r}{f_m} \approx \frac{-\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} = \frac{-\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha} \approx -1 - \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = -1 - |n|.$$

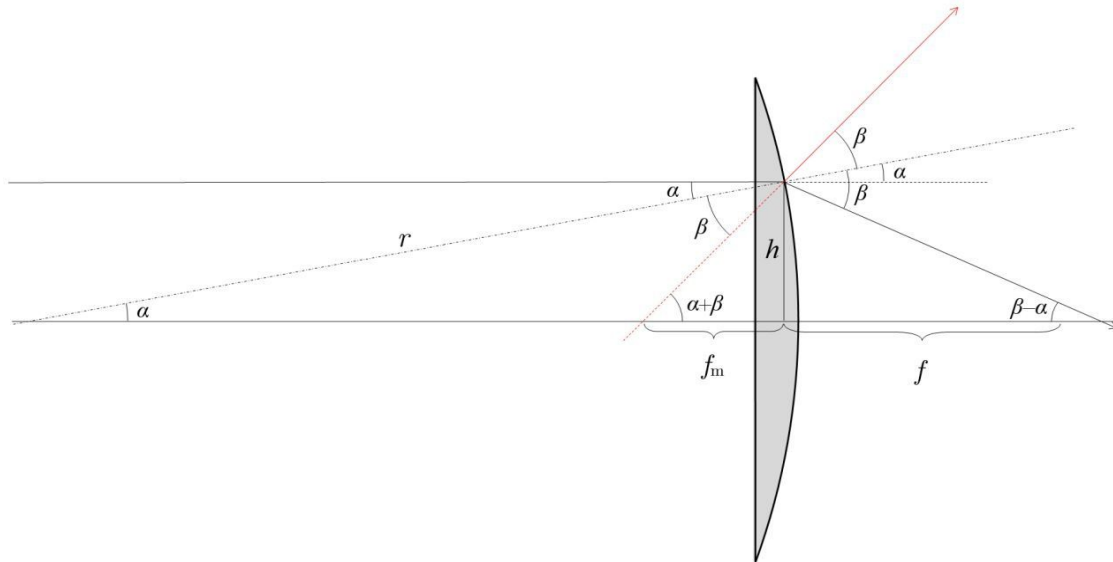
Pro záporný index lomu odstraníme absolutní hodnotu:

$$\frac{r}{f_m} \approx -1 - |n| = -1 + n, \quad \text{odkud } \frac{1}{f_m} = (n - 1)\frac{1}{r},$$

neboli i pro záporný index lomu platí stejný vztah:

$$\frac{1}{f_m} = (n - 1) \frac{1}{r},$$

v němž jsme podle zvyklosti přibližnou rovnost nahradili rovností.



**Obrázek 47:** Geometrické řešení, k řešení úlohy FO64A2-2b.

- c) Nyní označíme  $f$  ohniskovou vzdálenost čočky, a obrazovou vzdálenost bodu A a  $b$  obrazovou vzdálenost bodu B. Při spojení čoček je výsledná optická mohutnost rovna součtu optických mohutností jednotlivých čoček:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = (n_1 - 1) \frac{1}{r} + (n_2 - 1) \frac{1}{r} = \frac{n_1 + n_2 - 2}{r}.$$

Pro  $n_2 = -n_1$  dostaneme

$$\frac{1}{f} = -\frac{2}{r}, \quad f = -\frac{r}{2} = -15 \text{ cm}.$$

Indexy lomu stejné velikosti se vzájemně kompenzují, výsledná ohnisková vzdálenost závisí pouze na poloměru křivosti. Zobrazovací rovnice pro tytéž body A, B budou nyní bez indexů. Po úpravě

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{r} + \frac{1}{a}, \quad \text{odkud } a = -\frac{r}{3} = -10 \text{ cm},$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{r+d} + \frac{1}{b}, \quad \text{odkud } b = -\frac{r(r+d)}{3r+2d} = -10,41 \text{ cm}.$$

Zvětšení úsečky je

$$Z = -\frac{b-a}{d} = 0,10.$$

Obraz je zdánlivý (před čočkou) a zmenšený.

**4 body**

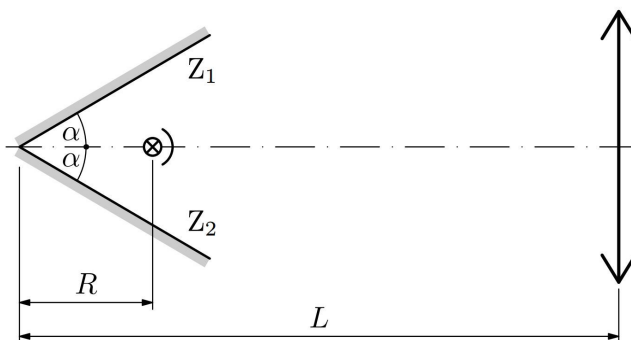
*Alternativní řešení této části úlohy je možné dohledat na oficiálních stránkách FO.*

**Příklad č. 18: FO53A2-2: Zrcadla s čočkou**

[22,54 %]

Dvě rovinná zrcadla  $Z_1, Z_2$  se vzájemně dotýkají v úsečce, která kolmo protíná optickou osu spojky o ohniskové vzdálenosti  $f = 80$  mm. Průsečík leží ve vzdálenosti  $L = 90$  mm od středu čočky a roviny zrcadel jsou od optické osy symetricky odchýleny o úhel  $\alpha = 30^\circ$ . Mezi zrcadly a čočkou je na její optické ose ve vzdálenosti  $R = 20$  mm od průsečnice rovin zrcadel umístěn bodový zdroj světla. Přímému průchodu světla k čočce brání malá clona (obrázek 48).

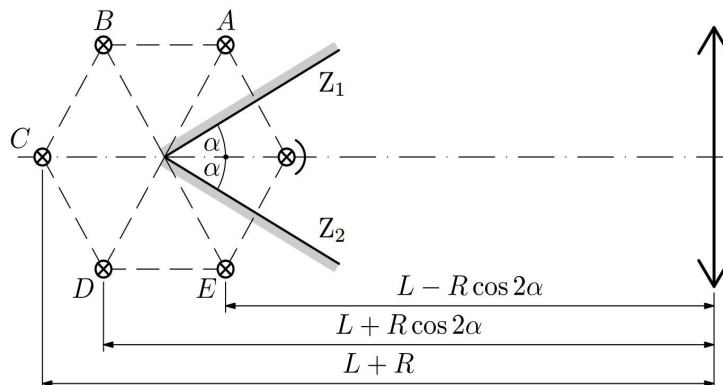
- Určete polohy všech zdánlivých obrazů zdroje světla vytvořených dvojicí zrcadel.
- Určete, kam tyto zdánlivé bodové zdroje zobrazí čočka.



**Obrázek 48:** Zobrazení situace k zadání úlohy FO53A2-2.

**Řešení příkladu č. 18:**

- Vznikne pět zdánlivých obrazů světelného zdroje rovnoměrně rozmístěných ve vzdálenosti  $R$  od průsečnice rovin zrcadel (obrázek 49). (O tom se můžeme snadno přesvědčit, jestliže mezi dvě kapesní zrcátka svírající úhel  $60^\circ$  umístíme malý předmět.) Obraz  $A$  vzniká odrazem světla na zrcadle  $Z_1$ , obraz  $E$  odrazem světla na zrcadle  $Z_2$ , obraz  $B$  vzniká zobrazením obrazu  $E$  zrcadlem  $Z_1$ , obraz  $D$  vzniká zobrazením obrazu  $A$  zrcadlem  $Z_2$ , obraz  $C$  vzniká zobrazením obrazu  $B$  zrcadlem  $Z_2$  a zobrazením obrazu  $D$  zrcadlem  $Z_1$ . **3 body**



**Obrázek 49:** Geometrické řešení, k řešení úlohy FO53A2-2.

- Body  $A$  a  $E$  leží ve vzdálenosti  $y = R \sin 2\alpha$  od optické osy. Jejich vzdálenost od čočky  $a_1 = L - R \cos 2\alpha = 80$  mm je rovna ohniskové vzdálenosti čočky. Obrazy vytvořené čočkou tedy budou ležet v nekonečnu ve směrech, které jsou od optické osy odchýleny o úhel  $\beta = \arctan \frac{R \sin 2\alpha}{f} \doteq 12,5^\circ$ . **2 body**

Body  $B$  a  $D$  leží také ve vzdálenosti  $y = R \sin 2\alpha$  od optické osy a ve vzdálenosti  $a_2 = L + R \cos 2\alpha = 100 \text{ mm} > f$  od čočky. Čočka tedy vytvoří jejich skutečné obrazy. Ze zobrazovací rovnice čočky a vztahu pro výpočet příčného zvětšení

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}, \quad Z = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{a-f}$$

plyne

$$a'_2 = \frac{a_2 f}{a_2 - f} = \frac{(L + R \cos 2\alpha) f}{L + R \cos 2\alpha - f} = 400 \text{ mm},$$

$$y'_2 = -\frac{f y}{a_2 - f} = \frac{f R \sin 2\alpha}{L + R \cos 2\alpha - f} = -69 \text{ mm}.$$

Obrazy bodů  $B$  a  $D$  budou ve vzdálenosti 400 mm od čočky a ve vzdálenosti 69 mm od optické osy v opačné polorovině. **3 body**

Bod  $C$  leží na optické ose ve vzdálenosti  $a_3 = L + R = 110 \text{ mm}$  od čočky. Jeho skutečný obraz vytvořený čočkou bude ležet na optické ose ve vzdálenosti

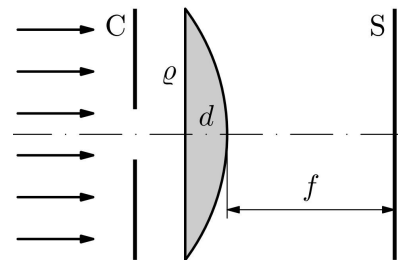
$$a'_3 = \frac{a_3 f}{a_3 - f} = \frac{(L + R) f}{L + R - f} = 293 \text{ mm}.$$

**2 body**

#### Příklad č. 19: FO50A2-3: Kondenzorová čočka

[19,53 %]

Ploskovypuklou čočku, která má uprostřed tloušťku  $d = 20 \text{ mm}$ , poloměr obvodové kružnice  $\varrho = 80 \text{ mm}$  a je vyrobena ze skla o indexu lomu  $n = 1,52$ , osvětlíme ze strany rovinné plochy svazkem paprsků rovnoběžných s optickou osou (obrázek 50).



- Pomocí clony  $C$  propustíme nejprve úzký svazek paprsků v těsné blízkosti optické osy a za čočku umístíme kolmo k optické ose stínítko. Jaká musí být jeho vzdálenost  $f$  od čočky, aby světelná skvrna vytvořená dopadajícími paprsky byla co nejmenší?
- Jaký poloměr  $\varrho_1$  bude mít osvětlená plocha na stínítku, jestliže clonu odstraníme, aniž bychom změnili polohu stínítka?

**Obrázek 50:** Ploskovypuklá kondenzorová čočka, k zadání úlohy FO50A2-3.

#### Řešení příkladu č. 19:

- Nejprve určíme poloměr  $R$  kulové plochy čočky. Z Eukleidovy věty o výšce plyne

$$\varrho^2 = (2R - d)d, \quad \text{odkud } R = \frac{\varrho^2 + d^2}{2d} = 170 \text{ mm}.$$

Paprsek přicházející ve vzdálenosti  $m \ll R$  od optické osy protíná optickou osu po průchodu čočkou ve vzdálenosti  $f$  od čočky (obrázek 51). Podle zákona lomu

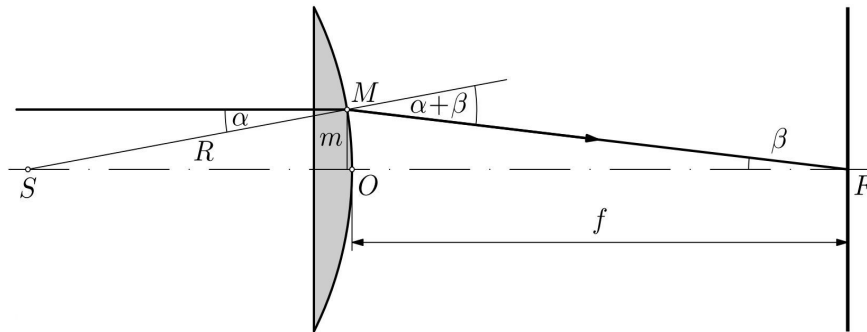
$$n = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \approx \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \approx \frac{\frac{m}{R} + \frac{m}{f}}{\frac{m}{R}} = \frac{\frac{1}{R} + \frac{1}{f}}{\frac{1}{R}}.$$

Z toho

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{f} = n \frac{1}{R}, \quad \text{odkud } f = \frac{R}{n-1} = 327 \text{ mm}.$$

V bodě  $F$  ve vzdálenosti  $f$  od čočky se na optické ose protnou všechny paprsky dopadající na čočku v malé vzdálenosti od optické osy. Sem tedy umístíme stínítko.

6 bodů

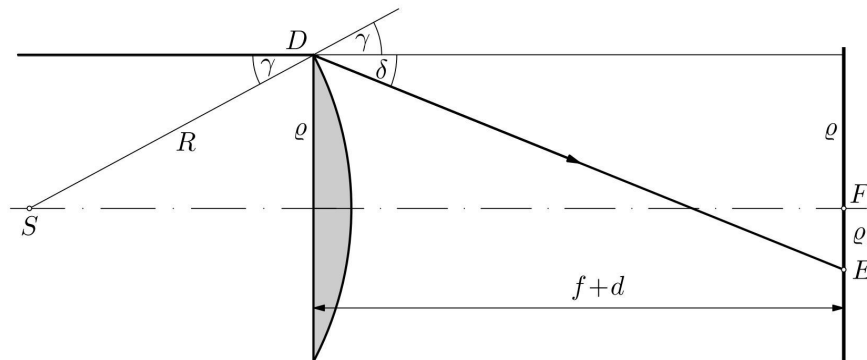


Obrázek 51: Geometrické řešení, k řešení úlohy FO50A2-3a.

- b) Po odstranění clony krajní paprsky protínají stínítko ve vzdálenosti  $\varrho_1$  od bodu  $F$  (obrázek 52). Platí

$$\begin{aligned} \gamma &= \arcsin \frac{\varrho}{R}, & \gamma &= 28,1^\circ, \\ \sin(\gamma + \delta) &= n \sin \gamma = \frac{n\varrho}{R}, & \delta &= \arcsin \frac{n\varrho}{R} - \gamma = 17,6^\circ. \\ \varrho_1 &= (f + d) \tan \delta - \varrho = 30,1 \text{ mm}. \end{aligned}$$

4 body



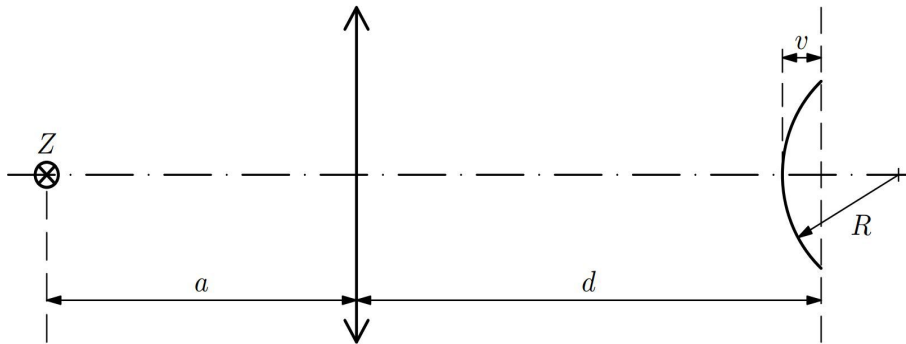
Obrázek 52: Geometrické řešení, k řešení úlohy FO50A2-3b.

**Příklad č. 20: FO58A2-2: Čočka a zrcadlo**

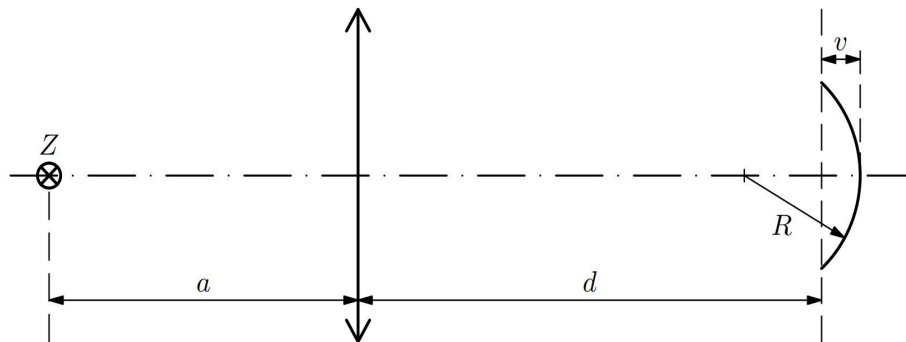
[15,35 %]

Na společné optické ose leží bodový zdroj světla, tenká spojná čočka s ohniskovou vzdáleností  $f = 20$  cm a vypuklé kulové zrcadlo tvořené kulovým vrchlíkem s poloměrem křivosti  $R = 6$  cm a výškou  $v = 2$  cm, které je umístěné ve vzdálenosti  $d = 30$  cm za čočkou (obrázek 53).

- V jaké vzdálenosti  $a$  před čočkou je zdroj světla, jestliže je poloha skutečného obrazu zdroje vytvořeného touto optickou soustavou totožná s polohou zdroje?
- V jaké vzdálenosti  $b$  před čočkou vznikne skutečný obraz zdroje, nahradíme-li vypuklé zrcadlo dutým zrcadlem o stejných parametrech (obrázek 54)?



Obrázek 53: Zobrazení situace k zadání úlohy FO58A2-2a.



Obrázek 54: Zobrazení situace k zadání úlohy FO58A2-2b.

**Řešení příkladu č. 20:**

Aby se paprsky vrátily zpět ke zdroji, musí po průchodu čočkou dopadnout buď do vrcholu zrcadla, nebo musí dopadnout na zrcadlovou plochu kolmo. Úloha má tedy dvě řešení.

**2 body**

1. Obraz zdroje po zobrazení čočkou leží ve vrcholu zrcadla.

- a) Pak podle zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{d-v} = \frac{1}{f} \quad \text{plyne} \quad a = \frac{f(d-v)}{d-v-f} = 70 \text{ cm.}$$

- b) Po obrácení zrcadla leží skutečný obraz zdroje vytvořený čočkou ve vzdálenosti  $a_1 = 2v$  před vrcholem zrcadla. Ze zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2v} = \frac{2}{R} \quad \text{určíme polohu jeho obrazu:} \quad a_1' = \frac{2vR}{4v-R} = 12 \text{ cm.}$$

Obraz vytvořený zrcadlem bude ve vzdálenosti 12 cm před vrcholem zrcadla a ve vzdálenosti  $d + v - a_1' = 20$  cm za čočkou, tedy v jejím ohnisku. Proto obraz vytvořený čočkou bude v nekonečnu.

**4 body**

2. Obraz zdroje po zobrazení čočkou leží ve středu křivosti zrcadla.

- a) Pak z

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{d+R-v} = \frac{1}{f} \quad \text{plyne} \quad a = \frac{f(d+R-v)}{d+R-v-f} = 49 \text{ cm.}$$

- b) Po obrácení zrcadla leží skutečný obraz vytvořený čočkou ve vzdálenosti  $a_1 = R - 2v$  za vrcholem zrcadla. Ze zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{a'_1} + \frac{1}{R - 2v} = \frac{2}{R} \quad \text{určíme polohu jeho obrazu:} \quad a'_1 = \frac{(R - 2v)R}{3R - 4v} = 1,2 \text{ cm.}$$

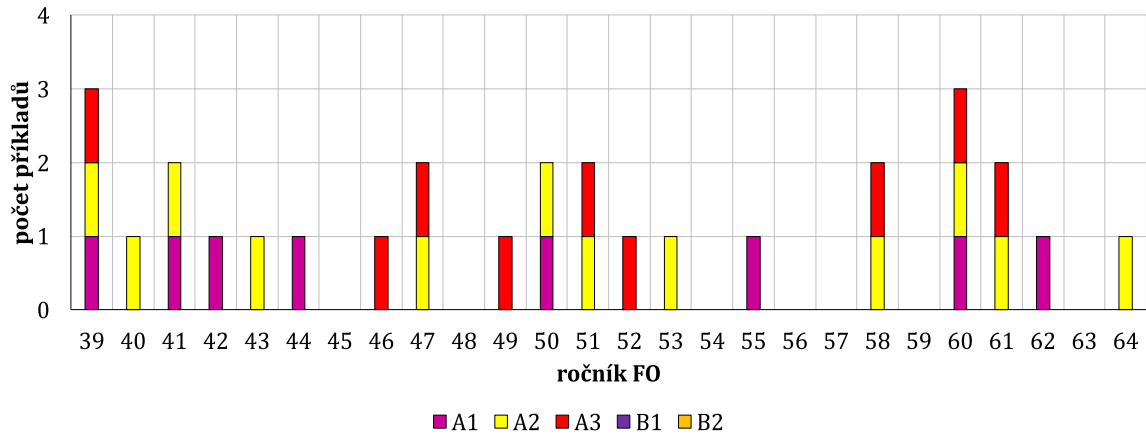
Obraz vytvořený zrcadlem bude ve vzdálenosti 1,2 cm před vrcholem zrcadla a ve vzdálenosti  $d + v - a'_1 = 30,8$  cm za čočkou. Ze zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{d + v - a'_1} = \frac{1}{f} \quad \text{dostaneme} \quad b = \frac{f(d + v - a'_1)}{d + v - a'_1 - f} = 57 \text{ cm.}$$

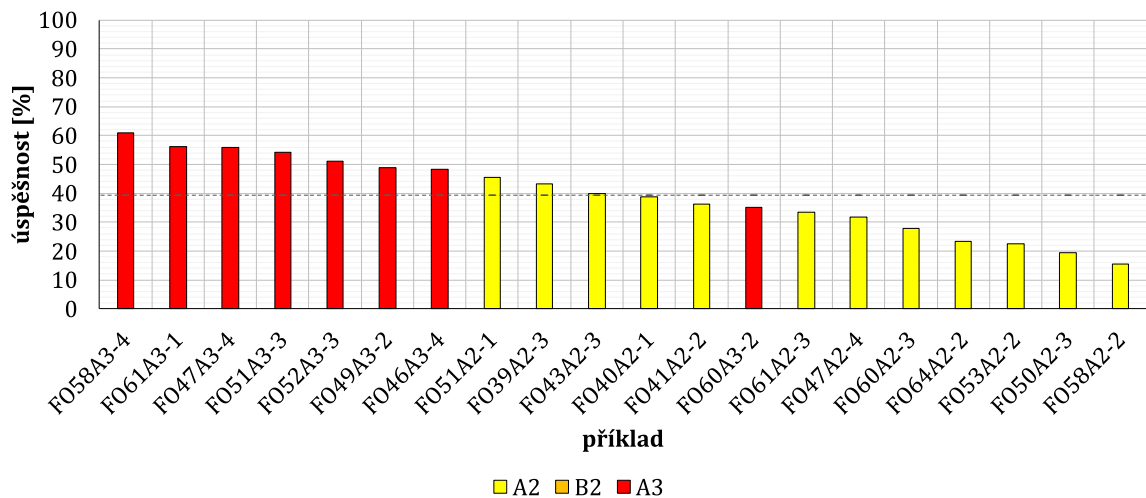
Obraz vytvořený čočkou při druhém průchodu paprsků bude ve vzdálenosti 57 cm před čočkou. **4 body**

### 4.2.3 Statistická úspěšnost příkladů

Příklady zaměřující se na zobrazování optickými soustavami jsou nejzastoupenějšími příklady v rámci optiky, tvoří 47,54 % všech příkladů této oblasti. Celkově čítá podkapitola dvacet devět příkladů zahrnující všechna kola kategorie A.



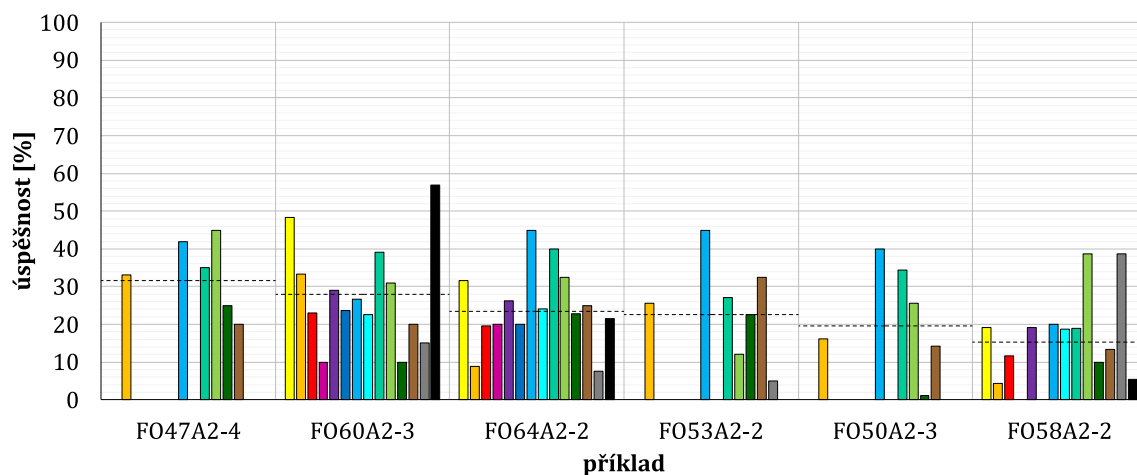
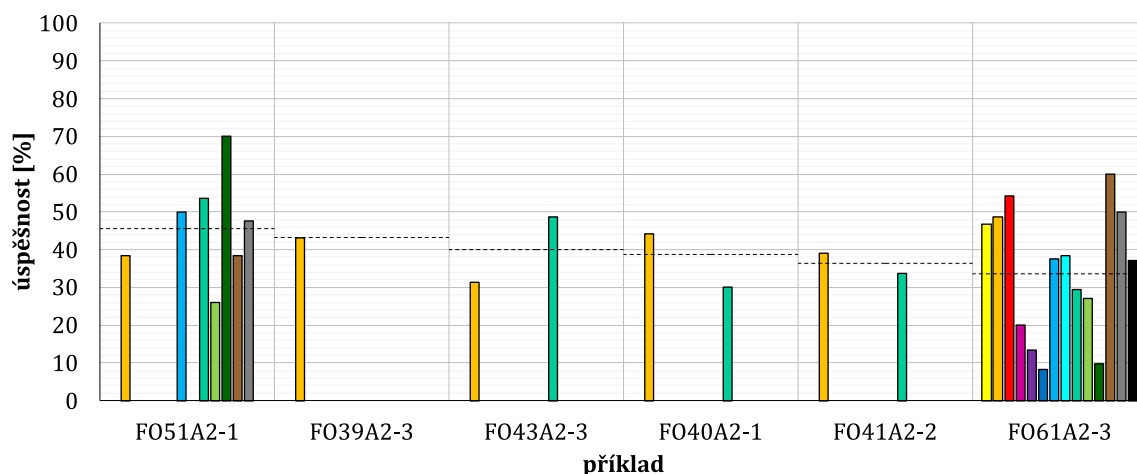
**Obrázek 55:** Zastoupení příkladů podkapitoly zaměřené na zobrazování optickými soustavami v jednotlivých ročnících a kolech Fyzikální olympiády.



**Obrázek 56:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladů zaměřených na zobrazování optickými soustavami.

Dle grafu na obrázku 55 se úlohy této podkapitoly vyskytují často, nejčastěji ve druhém kole. Postupová kola čítají dvacet jedna příkladů, což jsou téměř tři čtvrtiny příkladů podkapitoly. V ročnících 39 a 60 se příklady objevily ve všech třech kolech, naopak v sedmi ročnících se neobjevily vůbec. Tři příklady jsou navíc duplicitní, a to konkrétně FO39A1-2 a FO41A2-2, FO39A3-2 a FO41A1-4, FO61A1-5 a FO62A1-5.

Graf na obrázku 56 zobrazuje procentuální úspěšnost příkladů věnujících se zobrazování optickými soustavami. Z grafu je patrné, že úspěšnější jsou příklady z celostátních kol než z kol krajských. Nejúspěšnější příklad FO58A3-4 s názvem Kde byla čočka má úspěšnost 61,02 %, naopak nejméně úspěšný příklad FO58A2-2 s názvem Čočka a zrcadlo má úspěšnost pouhých 15,35 % a je tak nejméně úspěšným příkladem z celé optiky. Průměrná úspěšnost příkladů je 39,42 %. K příkladu FO39A3-2 bohužel není dostupná výsledková listina.



- |                      |                        |                     |                        |
|----------------------|------------------------|---------------------|------------------------|
| ■ Hlavní město Praha | ■ Jihočeský kraj       | ■ Jihomoravský kraj | ■ Karlovarský kraj     |
| ■ Kraj Vysočina      | ■ Královéhradecký kraj | ■ Liberecký kraj    | ■ Moravskoslezský kraj |
| ■ Olomoucký kraj     | ■ Pardubický kraj      | ■ Plzeňský kraj     | ■ Středočeský kraj     |
| ■ Ústecký kraj       | ■ Zlínský kraj         |                     |                        |

**Obrázek 57:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladů zaměřených na zobrazování optickými soustavami v jednotlivých krajích ČR.

Obrázek 57 ukazuje srovnání úspěšnosti v řešení příkladů v jednotlivých krajích. Především příklady starších ročníků opět nemají kompletní dostupné výsledkové listiny, tudíž je srovnání krajů velmi obtížné. U příkladu FO58A2-2 je v Karlovarském a Královéhradeckém



kraji úspěšnost 0 %. Pokud srovnáme mezi sebou alespoň čtyři příklady, které mají dostupné všechny výsledkové listiny, můžeme mezi úspěšnější zařadit Hlavní město Praha, které je u všech čtyř příkladů nad průměrem, naopak mezi méně úspěšné Karlovarský, Královéhradecký a Plzeňský kraj, které jsou vždy pod průměrem. Ve starších ročnících má velmi dobrou úspěšnost Liberecký kraj, ve kterém v ročnících, kde jsou dostupné listiny, nikdy nesoutěžilo více než deset žáků.

## 4.3 Energie světelného záření

### 4.3.1 Základní pojmy a vztahy

Světelné (optické) záření má svoji energii, kterou můžeme posuzovat dvěma typy veličin - radiometrickými a fotometrickými.

Radiometrické veličiny jsou užívány u všech typů elektromagnetického záření, nejen u záření, která vnímáme lidským okem. Popisují tedy záření všech vlnových délek. Využíváme je při popisu vyzařování energie tělesy a přenosu energie záření. Mezi základní radiometrické veličiny patří např. zářivý tok  $\Phi_e$ , zářivost  $I_e$ , intenzita vyzařování  $M_e$ , ozáření  $E_e$  a další, které jsou uvedeny v tabulce 4. Společně s veličinami jsou zde uvedeny také jejich jednotky. Pro tyto veličiny můžeme využít vztahů:

$$\Phi_e = \frac{\Delta Q_e}{\Delta t},$$

kde  $\Delta Q_e$  je energie, která prochází plochou za čas  $\Delta t$ ,

$$I_e = \frac{\Delta \Phi_e}{\Delta \Omega},$$

kde  $\Delta \Omega$  je prostorový úhel, do kterého je vyzařováno dané množství tepelného toku,

$$M_e = \frac{\Delta \Phi_e}{\Delta S},$$

kde  $\Delta S$  je plocha, která vyzařuje dané množství tepelného toku,

$$E_e = \frac{\Delta \Phi_e}{\Delta A},$$

kde  $\Delta A$  je plocha, na kterou dopadá dané množství zářivého toku. V souvislosti s intenzitou vyzařování je třeba zmínit pojem absolutně černé těleso, což je takové těleso, jehož povrch všechno záření pohltí, nic neodrazí zpět. Dle Stefan-Boltzmannova zákona je pro absolutně černé těleso intenzita vyzařování

$$M_{e0} = \sigma T^4,$$

kde  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$  je Stefan-Boltzmannova konstanta a  $T$  je absolutní teplota. Tento zákon ve své podstatě říká, že intenzita vyzařování velmi rychle roste s teplotou, a intenzita vyzařování je tím větší, čím větší je teplota tělesa.

V astronomii se můžeme setkat ještě s veličinou označovanou jako zářivý výkon  $L$ . Tato veličina má jednotku watt a představuje celkovou energii, která je za jednu sekundu vyzářena do všech možných směrů. Zářivý výkon lze vyjádřit vztahem

$$L = 4\pi r^2 P,$$

kde  $P$  je výkon záření dopadajícího kolmo na plochu  $1 \text{ m}^2$  ve vzdálenosti  $r$ .

**Tabulka 4:** Srovnání radiometrických a fotometrických veličin a jednotek, převzato z [35], str. 65.

RADIOMETRIE			FOTOMETRIE		
název	označení	jednotka	název	označení	jednotka
zářivý tok	$\Phi_e$	W	světelný tok	$\Phi$	lm
zářivost	$I_e$	$\text{W} \cdot \text{sr}^{-1}$	svítivost	$I$	cd
intenzita vyzařování	$M_e$	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$	intenzita osvětlení	$M$	$\text{lm} \cdot \text{m}^{-2}$
ozáření	$E_e$	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$	osvětlení	$E$	lx
intenzita záření	$E_{e0}$	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$	intenzita světla	$E_0$	lx
zář	$L_e$	$\text{W} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$	jas	$L$	$\text{cd} \cdot \text{m}^{-2}$
dávka ozáření	$H_e$	$\text{J} \cdot \text{m}^{-2}$	osvit	$H$	$\text{lx} \cdot \text{s}$

Fotometrické veličiny jsou využívány pouze při studiu elektromagnetického záření o vlnových délkách vnímatelných lidským okem. Mezi základní fotometrické veličiny patří např. světelný tok  $\Phi$ , svítivost  $I$ , intenzita osvětlení  $M$  a osvětlení  $E$ , které jsou společně s dalšími uvedeny v tabulce 4 i se svými jednotkami. Pro fotometrické využíváme následující vztahy:

$$\Phi = \frac{\Delta E_s}{\Delta t},$$

kde  $\Delta E_s$  je světelná energie, která prochází plochou za čas  $\Delta t$ ,

$$I = \frac{\Delta \Phi}{\Delta \Omega},$$

kde  $\Delta \Omega$  je prostorový úhel, do kterého je světlo vyzařováno,

$$M = \frac{\Delta \Phi}{\Delta S},$$

kde  $\Delta S$  je plocha, která vyzařuje dané množství světelného toku,

$$E = \frac{\Delta \Phi}{\Delta A},$$

kde  $\Delta A$  je plocha, na kterou dopadá dané množství světelného toku. Osvětlení plochy lze vyjádřit i pomocí svítivosti zdroje  $I$ , vzdálenosti plochy od zdroje  $r$  a úhlu  $\alpha$ , pod kterým světlo dopadá na tuto plochu:

$$E = \frac{I \cos \alpha}{r^2}.$$

### 4.3.2 Řešené příklady

#### **Příklad č. 21: FO49A3-3: Sluneční fotonové záření** [53,86 %]

Sluneční záření, které dopadá kolmo na  $1 \text{ m}^2$  rovinné plochy ve volném prostoru ve vzdálenosti 1 AU od středu Slunce, má výkon 1365 W. Slunce můžeme považovat za dokonale černé těleso, které pohlcuje veškeré elektromagnetické záření, které na ně dopadá, a vydává pouze záření vlastní. Podle Stefan-Boltzmannova zákona je intenzita vyzařování (tj. energie záření vystupujícího za 1 s z plochy  $1 \text{ m}^2$  povrchu tělesa) takového tělesa, jehož povrchová teplota je  $T$ ,

$$M_{e0} = \sigma T^4, \quad \text{kde } \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}.$$

Průměr sluneční fotosféry vidí pozorovatel na povrchu Země pod úhlem  $32'$ , poloměr Země je 6371 km,  $1 \text{ AU} = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}$ .

- a) Stanovte celkový zářivý výkon  $L$  Slunce.
- b) Určete teplotu  $T_s$  sluneční fotosféry.
- c) Určete energetický příjem slunečního záření dopadajícího na Zemi za jeden den a za jeden rok (365,25 dne).
- d) V současné době se hovoří o projektu, kdy by na Sahaře měla být instalována elektrárna ze solárních článků: předpokládejme, že na povrch Země dopadne po průchodu atmosférou 40 % záření, které se dostalo na hranici atmosféry. Dále budeme uvažovat, že existující solární články mají účinnost 12 %. Jak velký maximální výkon  $P_{max}$  by měly solární články s plošným obsahem  $1 \text{ km}^2$ ?

- e) Na oběžnou dráhu okolo Země vyšleme družici kulového tvaru tak, aby byla nepřetržitě ozářena Sluncem. Družice bude mít dobrou tepelnou vodivost a její nátěr bude mít vlastnosti blížíící se vlastnostem povrchu dokonale černého tělesa. Určete její teplotu  $T_z$ . Záření Země dopadající na družici zanedbejte.
- f) Určete teplotu  $T_m$  stejné družice obíhající okolo Marsu, je-li jeho střední vzdálenost od Slunce 1,52 AU.
- g) V jakých mezích se mění teplota družic Země a Marsu z úloh e) a f), je-li číselná výstřednost trajektorií obou planet po řadě  $\varepsilon_z = 0,017$ ,  $\varepsilon_m = 0,093$ ?

### Řešení příkladu č. 21:

- a) Celkový zářivý výkon Slunce je dán vztahem  $L = 4\pi a^2 P_1$ , kde  $a$  je vzdálenost rovinné plochy od Slunce,  $P_1$  je výkon slunečního záření dopadajícího kolmo na plochu  $1 \text{ m}^2$  ve vzdálenosti  $a$ . Po dosazení  $P_1 = 1,365 \text{ kW}$ ,  $a = 1 \text{ AU}$  dostaneme  $L = 3,84 \cdot 10^{26} \text{ W}$ .

**1 bod**

- b) Platí

$$L = 4\pi R_s^2 \sigma T_s^4 = \pi D^2 \sigma T_s^4 = 4\pi a^2 P_1,$$

kde  $R_s$  je poloměr Slunce,  $D$  jeho průměr a  $T_s$  teplota fotosféry. Z toho

$$T_s = \sqrt[4]{\frac{4P_1}{\sigma \left(\frac{D}{a}\right)^2}},$$

Přičemž  $\frac{D}{a} = 32' = 0,0093084 \text{ rad}$ . Číselně vychází  $T_s = 5770 \text{ K}$ .

**1 bod**

- c) Zářivý výkon dopadající na Zemi za 1 sekundu je dán vztahem

$$P = P_1 \cdot S = P_1 \cdot \pi R_z^2.$$

Potom  $W_{den} = P \cdot t_1 = P_1 \cdot \pi R_z^2 \cdot t_1$ , kde  $t_1 = 86400 \text{ s}$ .

Pro dané hodnoty je  $W_{den} = 1,5 \cdot 10^{22} \text{ J}$ ,  $W_{rok} = 365,25 \cdot W_{den} = 5,5 \cdot 10^{24} \text{ J}$ .

**1 bod**

- d) Maximální výkon solárních článků je

$$P_{max} = 1365 \cdot 0,4 \cdot 0,12 \cdot 1 \cdot 10^6 \text{ W} = 65,5 \text{ MW}.$$

**1 bod**

- e) Celkový výkon slunečního záření dopadajícího na družici Země je roven celkovému výkonu záření, které družice vyzařuje. Teplota  $T_z$  družice se určí ze vztahu

$$\pi R^2 P_1 = \sigma T_z^4 \cdot 4\pi R^2,$$

z čehož

$$T_z = \sqrt[4]{\frac{P_1}{4\sigma}} = 278,5 \text{ K}, \quad \text{tj. } t_z \approx 5^\circ \text{C}.$$

**2 body**

- f) Pro Mars můžeme psát  $\frac{P_{1m}}{P_1} = \frac{a^2}{a_m^2}$ . Analogicky jako v případě Země platí

$$T_m = \sqrt[4]{\frac{P_{1m}}{4\sigma}} = \sqrt[4]{\left(\frac{a}{a_m}\right)^2 \frac{P_1}{4\sigma}} = \sqrt{\frac{a}{a_m}} T_z.$$

Pro dané hodnoty je  $T_m = \sqrt{\frac{1}{1,52}} \cdot 279 \text{ K} = 226 \text{ K}$ , tj.  $t_m = -47^\circ \text{C}$ .

**2 body**

g) Pro Zemi v periheliu platí

$$r_p = a(1 - \varepsilon_z), \quad P_{1p} = \frac{P_1}{(1 - \varepsilon_z)^2}, \quad T_{1p} = \sqrt[4]{\frac{P_{1p}}{4\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \varepsilon_z}} T_z = 281 \text{ K.}$$

Obdobně v aféliu platí

$$r_a = a(1 + \varepsilon_z), \quad P_{1a} = \frac{P_1}{(1 + \varepsilon_z)^2}, \quad T_{1a} = \sqrt[4]{\frac{P_{1a}}{4\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon_z}} T_z = 276 \text{ K.}$$

Teplota povrchu družice Země se mění s ohledem na vzdálenost od Slunce v rozmezí od  $3^\circ$  do  $8^\circ$ .

Pro Mars v periheliu platí

$$r_{pm} = a_m(1 - \varepsilon_m), \quad P_{1pm} = \frac{P_{1m}}{(1 - \varepsilon_m)^2}, \quad T_{1pm} = \sqrt[4]{\frac{P_{1pm}}{4\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \varepsilon_m}} T_m = 237 \text{ K.}$$

Obdobně v aféliu platí

$$r_{am} = a_m(1 + \varepsilon_m), \quad P_{1am} = \frac{P_{1m}}{(1 + \varepsilon_m)^2}, \quad T_{1am} = \sqrt[4]{\frac{P_{1am}}{4\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon_m}} T_m = 216 \text{ K.}$$

Teplota družice Marsu se tedy mění v rozmezí od  $-57^\circ$  do  $-36^\circ$ .

**2 body**

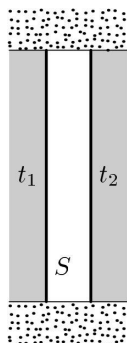
**Příklad č. 22: FO45A3-4: Tepelná izolace**

[48,30 %]

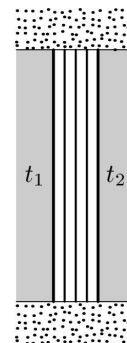
Dvě dokonale černé rovinné vzájemně rovnoběžné povrchy o plošném obsahu  $S = 2 \text{ m}^2$  jsou udržovány na stálých teplotách  $t_1 = 20^\circ\text{C}$  a  $t_2 = 120^\circ\text{C}$ . Mezi deskami je vakuum, jejich vzdálenost je malá v porovnání s jejich rozměry (obrázek 58).

- Jaké teplo  $Q_0$  přejde z teplejšího povrchu na chladnější za dobu  $\tau = 60 \text{ s}$ ?
- Abychom zmenšili přenos energie mezi oběma povrchy, vložíme mezi ně jako tepelnou izolaci tři rovnoběžné a vzájemně oddělené tenké dokonale černé a dokonale tepelně vodivé plechy, každý o plošném obsahu  $S$  (obrázek 59). Kolikrát se zmenší tok energie mezi oběma povrchy, a jaké teplo  $Q$  přejde za dobu  $\tau$ ?
- Jaké teploty budou mít jednotlivé plechy tvořící izolaci?

Stefanova-Boltzmannova konstanta má hodnotu  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ .



**Obrázek 58:** Desky s vakuum mezi nimi, k zadání úlohy FO45A3-4.



**Obrázek 59:** Desky s vodivými plechy mezi nimi, k zadání úlohy FO45A3-4.

**Řešení příkladu č. 22:**

- a) V úloze musíme počítat s absolutními teplotami  $T_1 = 293,15 \text{ K}$ ,  $T_2 = 393,15 \text{ K}$ . Podle Stefan-Boltzmannova zákona povrchy vyzařují s intenzitami

$$M_{e1} = \sigma T_1^4, \quad M_{e2} = \sigma T_2^4.$$

Celkový zářivý tok mezi povrchy je

$$\Phi_{e0} = S (M_{e2} - M_{e1}) = S\sigma (T_2^4 - T_1^4)$$

a z teplejšího povrchu na studenější přejde teplo

$$Q_0 = \Phi_{e0} \cdot \tau = S\sigma (T_2^4 - T_1^4) \tau = 1,12 \cdot 10^5 \text{ J.}$$

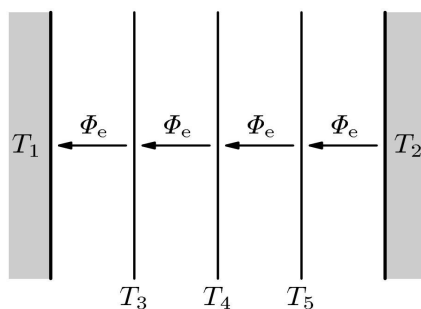
**3 body**

- b) Zářivý tok  $\Phi_e$  ve všech mezerách musí být stejný (viz obrázek 60):

$$\Phi_e = S\sigma (T_2^4 - T_5^4), \quad \Phi_e = S\sigma (T_5^4 - T_4^4),$$

$$\Phi_e = S\sigma (T_4^4 - T_3^4), \quad \Phi_e = S\sigma (T_3^4 - T_1^4),$$

tedy  $4\Phi_e = S\sigma (T_2^4 - T_1^4) = \Phi_{e0}$ . Zářivý tok se zmenší na  $\Phi_e = \frac{\Phi_{e0}}{4}$ , tedy čtyřikrát. Za dobu  $\tau$  přejde z teplejšího povrchu na studenější teplo  $Q = \frac{Q_0}{4} = 2,8 \cdot 10^4 \text{ J}$ . **4 body**



**Obrázek 60:** Zářivý tok v mezerách mezi tepelně vodivými plechy, k řešení úlohy FO45A3-4.

- c) Řešením soustavy rovnic

$$T_2^4 - T_1^4 = 4(T_2^4 - T_5^4), \quad T_2^4 - T_1^4 = 4(T_3^4 - T_1^4), \quad T_2^4 - T_1^4 = 4(T_4^4 - T_3^4)$$

dostaneme

$$T_5 = \sqrt[4]{\frac{3T_2^4 + T_1^4}{4}} = 375 \text{ K}, \quad t_5 = 102 \text{ }^\circ\text{C},$$

$$T_3 = \sqrt[4]{\frac{T_2^4 + 3T_1^4}{4}} = 328 \text{ K}, \quad t_3 = 54 \text{ }^\circ\text{C},$$

$$T_4 = \sqrt[4]{\frac{T_2^4 + T_1^4}{2}} = 354 \text{ K}, \quad t_4 = 80 \text{ }^\circ\text{C}.$$

**3 body**

**Příklad č. 23: FO44A2-3: Osvětlení duté polokoule**

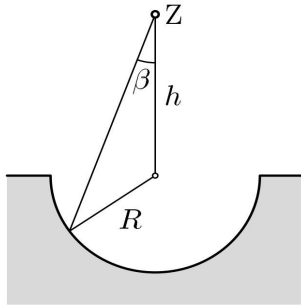
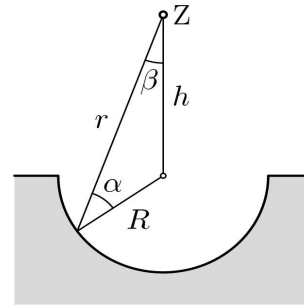
[38,37 %]

Nad středem polokoule o poloměru  $R$  je ve výšce  $h$  bodový zdroj  $Z$  o svítivosti  $I$  (obrázek 61).

- a) Odvoďte obecný vztah  $E = E(I, h, R, \beta)$  pro výpočet osvětlení jednotlivých bodů polokoule.
- b) Určete místa největšího osvětlení  $E_{max}$  a nejmenšího osvětlení  $E_{min}$  na polokouli, je-li  $h = R$ , a velikost osvětlení v těchto místech.
- c) Určete úhel  $\beta$ , kde osvětlení nabývá střední hodnoty z úlohy b), tj.

$$E_s = \frac{E_{min} + E_{max}}{2}.$$

- d) Kam bychom museli umístit zdroj  $Z$ , aby polokoule byla osvětlena rovnoměrně, a jaká by byla hodnota tohoto osvětlení?

Řešte obecně a pro hodnoty  $R = 1$  m,  $I = 200$  cd.**Obrázek 61:** Nákres situace, k zadání úlohy FO44A2-3.**Obrázek 62:** Nákres situace, k řešení úlohy FO44A2-3.**Řešení příkladu č. 23:**

- a) V obrázku 61 si označíme i další parametry (obrázek 62). Užitím sinové věty dostaneme

$$\frac{R}{\sin \beta} = \frac{h}{\sin \alpha}, \quad \text{odkud } \sin \alpha = \frac{h}{R} \sin \beta.$$

Dále platí

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2} \sin^2 \beta},$$

$$\frac{r}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{R}{\sin \beta}, \quad \text{odkud } r = \frac{R}{\sin \beta} \sin(\alpha + \beta).$$

Použitím součtového vzorce pro  $\sin(\alpha + \beta)$  a dosazením výše uvedených vztahů pro  $\sin \alpha$  a  $\sin \beta$  dostaneme

$$r = \frac{R}{\sin \beta} \left( \frac{h}{R} \sin \beta \cos \beta + \sin \beta \sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2} \sin^2 \beta} \right) = h \cos \beta + \sqrt{R^2 - h^2 \sin^2 \beta}.$$

Pro osvětlení platí  $E = \frac{I \cos \alpha}{r^2}$ . Po dosazení

$$E = \frac{I \sqrt{R^2 - h^2 \sin^2 \beta}}{R \left( h \cos \beta + \sqrt{R^2 - h^2 \sin^2 \beta} \right)^2}.$$

**5 bodů**

b) Je-li  $h = R$ , pak

$$E = \frac{IR\sqrt{1 - \sin^2 \beta}}{R \left( R \cos \beta + R\sqrt{1 - \sin^2 \beta} \right)^2} = \frac{I}{4R^2 \cos \beta}.$$

Nejmenší osvětlení je pro  $\beta = 0$ , tj.  $E_{min} = \frac{I}{4R^2} = 50 \text{ lx}$ . Největší osvětlení je pro  $\beta_{max} = 45^\circ$ , tj.  $E_{max} = \frac{I\sqrt{2}}{4R^2} = 70,7 \text{ lx}$ . **2 body**

c) Střední hodnota osvětlení  $E_s = \frac{1}{2} \left( \frac{I}{4R^2} + \frac{I\sqrt{2}}{4R^2} \right) = \frac{I}{4R^2 \cos \beta}$ , z čehož

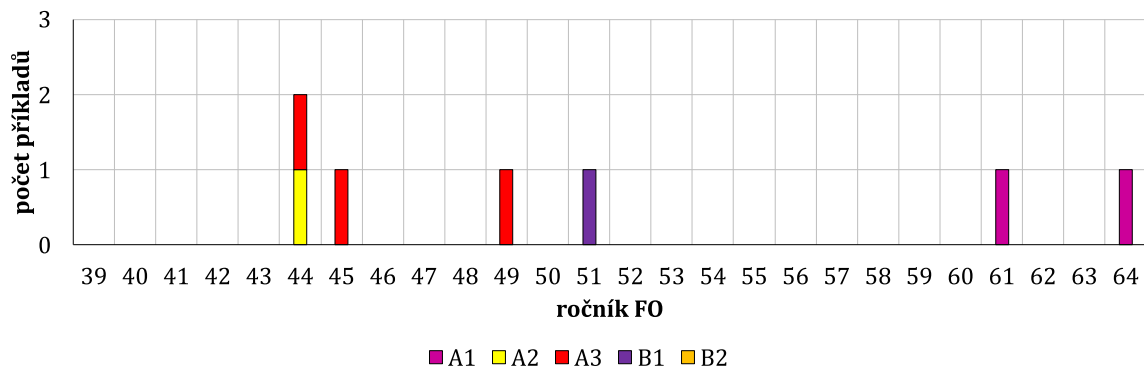
$$\cos \beta = 2(\sqrt{2} - 1), \quad \text{odkud } \beta \doteq 34^\circ.$$

**2 body**

d) Má-li být osvětlení rovnoměrně, musí být zdroj umístěn ve středu kulové plochy. Osvětlení plochy je pak  $E_R = \frac{I}{R^2} = 200 \text{ lx}$ . **1 bod**

### 4.3.3 Statistická úspěšnost příkladů

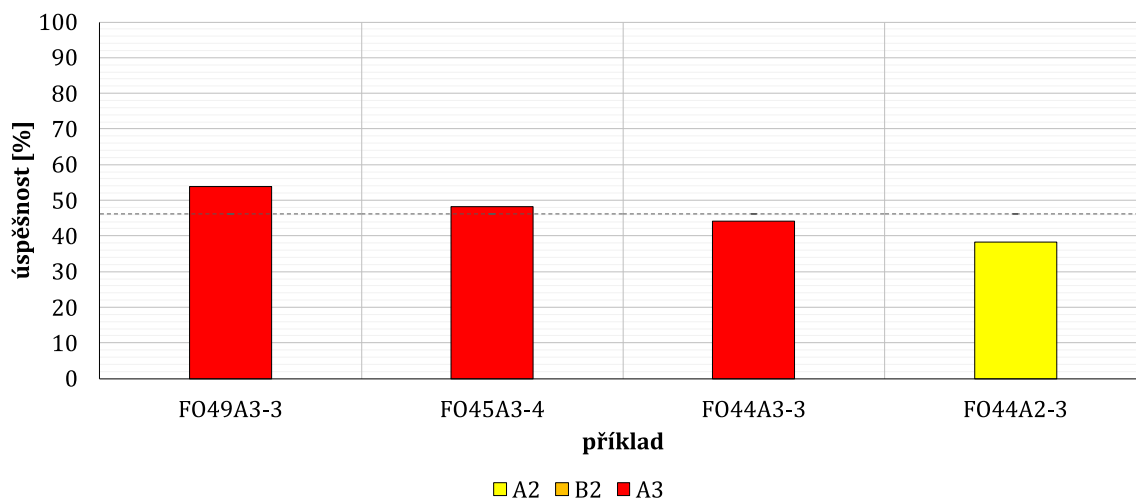
Třetí podkapitola je jedna z těch menších, obsahuje pouze sedm příkladů, ze kterých jsou čtyři postupové.



**Obrázek 63:** Zastoupení příkladů podkapitoly zaměřené na energie světelného záření v jednotlivých ročnících a kolech Fyzikální olympiády.

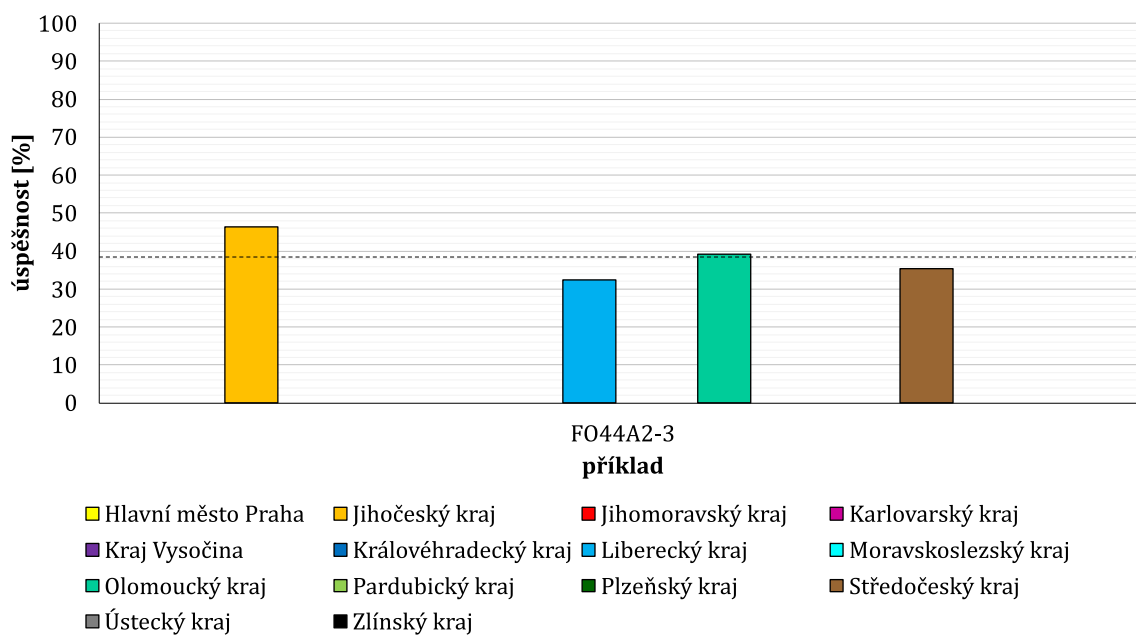
Příklady postupových kol se dle obrázku 63 objevily pouze ve starších ročnících, v aktuálnějších ročnících jsou pouze v prvním kole kategorie A. Velmi zajímavý a ojedinělý je příklad FO51B1-5, který je jediným příkladem z oblasti optiky v kategorii B a zabývá se satelity. Tento příklad není uveden ve sbírkové části, protože se jedná o příklad prvního kola, ke kterému nejsou dostupné výsledkové listiny a není proto možné vyhodnotit úspěšnost, ale je možné ho dohledat v archivu oficiálních stránek FO [1]. Všechny příklady této kapitoly jsou originální.





**Obrázek 64:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladů zaměřených na energii světelného záření.

Z postupových kol jsou tři příklady z celostátních a jeden příklad z krajských. Příklad z krajského kola je nejméně úspěšný (obrázek 64) s úspěšností 38,37 %. Dle obrázku 65 je nejméně úspěšným krajem Jihočeský kraj, naopak nejméně úspěšný Liberecký kraj.



**Obrázek 65:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladů zaměřených na energii světelného záření v jednotlivých krajích ČR.

## 4.4 Kvantová optika

### 4.4.1 Základní pojmy a vztahy

Kvantová optika je součástí kvantové fyziky a zabývá se jevy, při kterých se projevuje kvantová povaha světla. Mezi nejvýznamnější jevy kvantové optiky patří fotoelektrický jev, který objasnil Albert Einstein a získal za jeho vysvětlení Nobelovu cenu. Foton (světelné kvantum) má energii

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda},$$

kde  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  J·s je Planckova konstanta,  $f$  frekvence záření,  $c = 3 \cdot 10^8$  m·s<sup>-1</sup> rychlost světla ve vakuu a  $\lambda$  vlnová délka. Při fotoelektrickém jevu dochází k tomu, že elektron přijímá kvantum energie (foton), a tuto přijatou energii využívá k tomu, aby mohl vystoupit z kovu. Einsteinova rovnice vnějšího fotoelektrického jevu má poté tvar

$$E = W_v + E_k, \quad \text{po dosazení } hf = W_v + \frac{1}{2}m_e v^2,$$

kde  $W_v$  je práce potřebná pro uvolnění elektronu z kovu,  $E_k$  kinetická energie elektronu,  $m_e$  hmotnost elektronu a  $v$  rychlost elektronu po uvolnění z kovu.

Kromě Einsteina a Plancka se oblastí kvantové fyziky zabýval také Francouz Louis de Broglie, který mezi dualistické částice, tedy částice, které mají jak charakter vlnění, tak charakter částic, zařadil všechny volně se pohybující částice, které mají hybnost  $p$ . Vlnová délka takové částice je dána vztahem

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv},$$

kde  $m$  je hmotnost částice a  $v$  je velikost rychlosti částice.

### 4.4.2 Řešené příklady

#### Příklad č. 24: FO48A2-1: Fotony

[59,29 %]

Vysokotlaká sodíková výbojka o příkonu 400 W vyzařuje žluté monofrekvenční světlo o vlnové délce 590 nm a celkovém světelném toku 52 000 lm. Při světelné účinnosti 520 lm·W<sup>-1</sup> je tedy zářivý tok žlutého světla výbojky  $\Phi_e = 100$  W. Budeme předpokládat, že výbojka je vyrobena jako všesměrový zdroj, jehož zářivost je ve všech směrech stejná.

- Určete počet  $N_1$  fotonů žlutého světla vyzářených výbojkou za jednu sekundu.
- Určete počet  $N_2$  fotonů žlutého světla z výbojky, které dopadnou do zornice oka pozorovatele, který se dívá v noci na výbojku ze vzdálenosti  $d = 1$  km. Průměr zornice při nočním vidění je  $D = 7$  mm. Pohlcování a rozptyl světla atmosférou zanedbejte.
- Určete, v jaké vzdálenosti  $d'$  od Země by se musel nacházet pozorovatel, aby za jasné noci dopadl do jeho zornice za jednu sekundu průměrně jeden foton žlutého světla z výbojky.

Planckova konstanta  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  J·s.

#### Řešení příkladu č. 24:

- Energie fotonu žlutého světla sodíkové výbojky je

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = 3,37 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$

Výbojka vyzáří za jednu sekundu  $N_1 = \frac{\Phi_e}{E} = \frac{\Phi_e \lambda}{hc} = 3 \cdot 10^{20}$  s<sup>-1</sup> fotonů.

**3 body**

- b) Všechny fotony vyzářené výbojkou se ve vzdálenosti pozorovatele rozptýlí na kulovou plochu o poloměru  $d$ . Počet fotonů, které dopadnou do oka, je tolikrát menší, kolikrát menší je plošný obsah zornice než obsah uvedené kulové plochy. Platí

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\pi D^2}{4\pi d^2} = \frac{D^2}{16d^2}, \quad N_2 = \frac{N_1 D^2}{16d^2} = \frac{\Phi_e \lambda D^2}{16 h c d^2} = 9,1 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}.$$

4 body

- c) Označme  $N_3 = 1 \text{ s}^{-1}$ . Pak

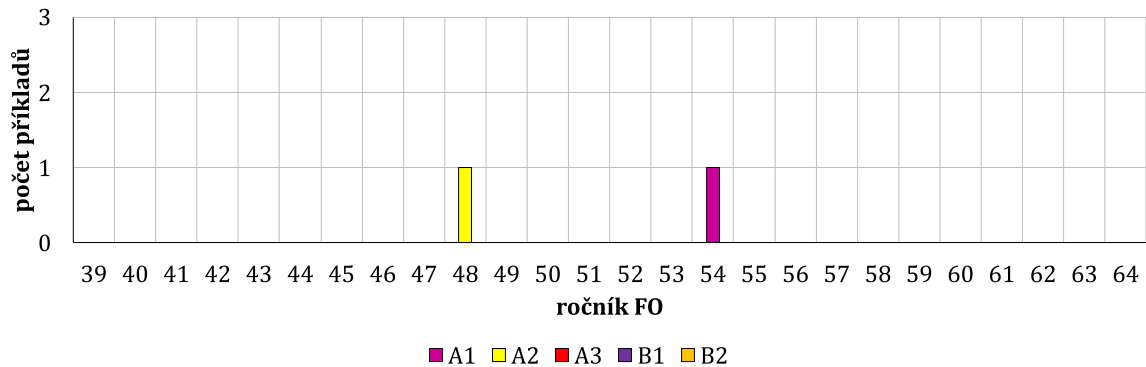
$$\frac{N_3}{N_1} = \frac{\pi D^2}{4\pi d'^2} = \frac{D^2}{16d'^2}, \quad d'^2 = \frac{D^2 N_1}{16 N_3},$$

$$d' = \frac{D}{4} \sqrt{\frac{N_1}{N_3}} = \frac{D}{4} \sqrt{\frac{\Phi_e \lambda}{h c N_3}} = 3 \cdot 10^7 \text{ m} \approx 4,7 R_Z.$$

3 body

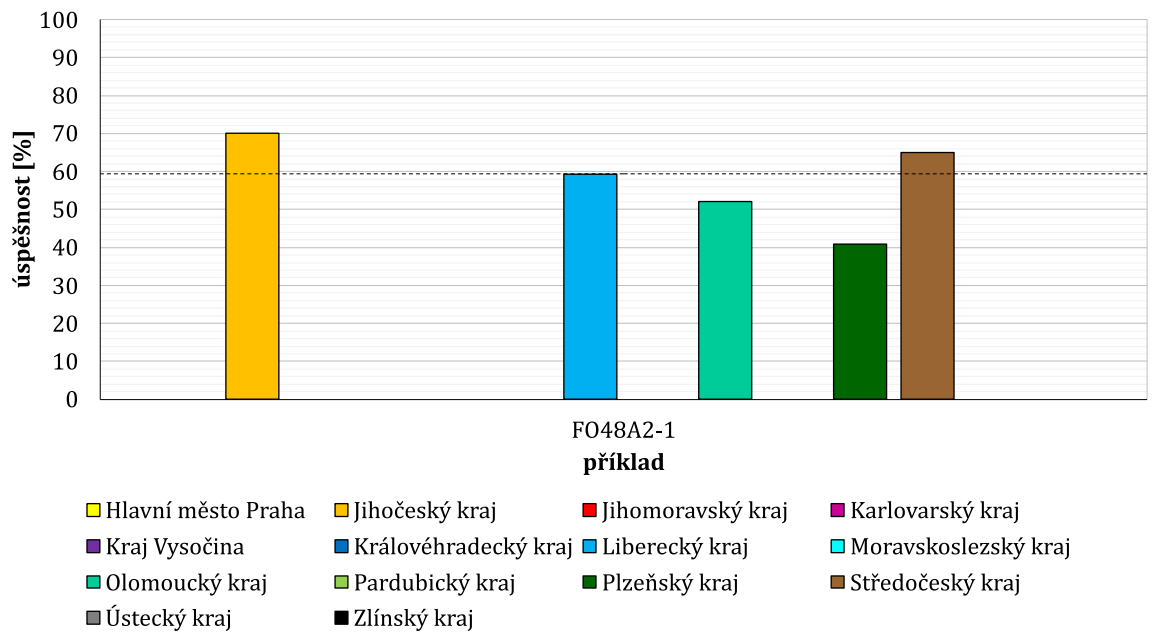
#### 4.4.3 Statistická úspěšnost příkladů

Oblast kvantové optiky je v olympiádě zastoupena nejméně, podkapitola čítá dva příklady, z toho jeden postupový. Příklady následující podkapitoly ale na tuto podkapitolu navazují.



**Obrázek 66:** Zastoupení příkladů podkapitoly zaměřené na kvantovou optiku v jednotlivých ročnících a kolech Fyzikální olympiády.

Výskyt příkladů je ve starších ročnících, konkrétně dle grafu na obrázku 66 v ročnících 48 a 54. Celkově příklady podkapitoly tvoří 3,28 % příkladů z optiky a jejich průměrná úspěšnost je rovna úspěšnosti jediného postupového příkladu FO48A2-1 (59,29 %). Dle dostupných výsledkových listin a grafu na obrázku 67 je nejúspěšnějším krajem Jihočeský, naopak nejméně úspěšný je kraj Plzeňský.



**Obrázek 67:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladů zaměřených na odraz a lom světla v jednotlivých krajích ČR.

## 4.5 Vlnová optika

### 4.5.1 Základní pojmy a vztahy

Vlnová optika se zabývá vlnovou povahou světla, zkoumá například jevy jako jsou rozklad světla (disperzi), skládání světla (interferenci), ohyb světla (difrakci) a polarizace světla. Jednotlivé obory optiky se vzájemně prolínají, proto při počítání následujících příkladů bude nutné využít vztahů, které byly uvedeny v předchozích částech sbírky, např. Snellova zákona, de Broglieho vztahu apod.

Mezi jevy vlnové optiky, kterými se zabývají příklady ve Fyzikální olympiádě nejčastěji, patří interference a difrakce. Interference je skládání světelných vln, které přicházejí z různých zdrojů do zkoumaného bodu. Vlnění se interferencí může jak zesílit, tak zeslabit, a na základě toho dochází ke vzniku tzv. interferenčního maxima, nebo interferenčního minima. Interferencí se již na počátku 19. století zabýval anglický fyzik Thomas Young, který provedl pokus, který prokázal, že světlo se chová jako vlnění. Youngův experiment spočívá v tom, že se nechá procházet úzký svazek světla dvěma malými otvory, přičemž na stínítku za těmito otvory je možné pozorovat interferenční obrazec. Pro interferenční maximum poté platí

$$\Delta l = k\lambda = 2k\frac{\lambda}{2}, \quad (19)$$

kde  $\Delta l$  je dráhový rozdíl (rozdíl optických drah),  $k = 0, 1, 2, \dots$  je řád interferenčního maxima a  $\lambda$  je vlnová délka. K interferenčnímu maximu dochází v případě, že je dráhový rozdíl roven sudému počtu půlvln, na stínítku interferenční maxima pozorujeme jako světlá místa. Naopak v případě, že je dráhový rozdíl roven lichému počtu půlvln, nastává interferenční minimum vyjádřené vztahem

$$\Delta l = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad (20)$$

a na stínítku interferenční minima pozorujeme jako tmavá místa. Tyto vztahy platí v případě, že při odrazu buď nenastane změna fáze, nebo nastane při obou odrazech – paprsky si zachovávají stejnou fázi. Pokud ale při jednom z odrazů nastane změna fáze a při druhém ne, dochází k posunu paprsků o  $\frac{\lambda}{2}$ . V takovém případě upravíme vztah (19) pro interferenční maximum na

$$\Delta l = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$$

a vztah (20) pro interferenční minimum na

$$\Delta l = 2k\frac{\lambda}{2}.$$

Pokud změna fáze nastane pouze při jednom odrazu, vztahy pro interferenční maximum a minimum jsou tedy přesně naopak než v případě, že změna fáze nenastane, nebo nastane při obou odrazech od tenké vrstvy. Rozdíl optických drah  $\Delta l$  můžeme také vyjádřit pomocí indexu lomu  $n$  a tloušťky vrstvy  $d$ :

$$\Delta l = 2nd.$$

K ohybu světla dochází v případě, že se světlo šíří i za překážkou do oblasti, které se říká geometrický stín – světlo se na šterbině ohýbá, nešíří se přímočaře. Za překážkou dochází k interferenci, světlo o vlnové délce  $\lambda$  je zesíleno a platí

$$b \sin \alpha = k\lambda,$$

kde  $b$  je mřížková konstanta (vzdálenost středů šterbin mřížky),  $\alpha$  je úhel, pod kterým se paprsky pohybují za šterbinou a  $k = 0, 1, 2, \dots$  je řád difrakce (řád příslušného maxima).

## 4.5.2 Řešené příklady

### Příklad č. 25: FO64A3-3: Ohyb a interference neutronů [72,84 %]

V roce 1994 byla poprvé demonstrována interference neutronů na dvojštěrbině. Vzdálenost štěrbin byla  $d = 0,126$  mm. Detektor, umístěný ve vzdálenosti  $l = 5$  m od dvojštěrbiny, byl schopen rozlišit vzdálenost mezi dvěma sousedními maximy, pokud byla větší než  $10 \mu\text{m}$ . Neutrony ze zdroje mají rychlost  $2,7 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ .

- a) Dokažte, že pro takto vysokou rychlost neutronů není rozlišovací schopnost zařízení dostatečná.

Pro zpomalení neutronů bylo použito kapalně deuterium. Rychlost neutronů tím byla zpomalena na průměrnou hodnotu  $0,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . Při každé srážce s jádrem deuteria ztrácí neutron 30 % své kinetické energie.

- b) Kolik takových srážek je zapotřebí k tomu, aby rychlost neutronu klesla pod  $0,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ? Jakou vzdálenost mezi maximem prvního a nultého řádu očekáváme pro tuto hodnotu rychlosti při měření?
- b) Z pomalých neutronů byl nakonec pro interferenci vybrán úzký svazek neutronů se stejnou hodnotou rychlosti, která je menší než  $0,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . Na interferenčním diagramu pak byla změřena vzdálenost mezi maximy třetího řádu  $440 \mu\text{m}$ . Jaké rychlosti neutronů to odpovídá?

Hmotnost neutronu  $m_n = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg, Planckova konstanta  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  J · s. Řešte nejprve obecně, pak pro číselné hodnoty.

### Řešení příkladu č. 25:

- a) Podle de Broglieho vztahu je vlnová délka neutronu

$$\lambda = \frac{h}{m_n v} = 1,47 \cdot 10^{-10} \text{ m.}$$

Pro ohybový úhel prvního maxima na dvojštěrbině platí:

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{d} \quad \text{a} \quad \tan \alpha = \frac{y}{l}.$$

Protože jde o malé úhly, kde  $\sin \alpha \simeq \tan \alpha$ , můžeme napsat

$$y \simeq l \frac{\lambda}{d} = 5,8 \mu\text{m} < 10 \mu\text{m}$$

a to je méně, než je rozlišovací schopnost měřicí aparatury.

**3 body**

- b) Po jedné srážce zůstane neutronu 70 % jeho energie, po  $n$  srážkách to bude

$$E_{k,n} = 0,7^n E_{k,0}.$$

Pro nejmenší počet srážek

$$\frac{1}{2} m_n v_n^2 = 0,7^n \frac{1}{2} m_n v^2,$$

odtud

$$0,7^n = \left(\frac{v_n}{v}\right)^2 = \left(\frac{0,8}{2,7}\right)^2, \quad n = \frac{\ln\left(\frac{v_n}{v}\right)^2}{\ln 0,7} = \frac{\ln\left(\frac{0,8}{2,7}\right)^2}{\ln 0,7} = 6,82.$$

Počet srážek tedy musí být nejméně 7.

Vzdálenost mezi maximy nultého a prvního řádu je stejná jako vzdálenost mezi dvěma sousedními maximy:

$$y_1 = \frac{l}{d}\lambda = \frac{l}{d} \frac{h}{m_n v} = 19,7 \mu\text{m} > 10 \mu\text{m},$$

takže je detektorem měřitelná.

**4 body**

- c) Vzdálenost mezi maximy třetího řádu odpovídá vzdálenosti  $y_3 = 220 \mu\text{m}$  mezi maximem nultého a třetího řádu. Z podmínky pro interferenci na dvojštěrbině

$$y_3 = k \frac{l}{d} \lambda_3 = k \frac{l}{d} \frac{h}{m_n v_3}$$

vyjádříme

$$v_3 = \frac{klh}{y_3 d m_n} = 0,21 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

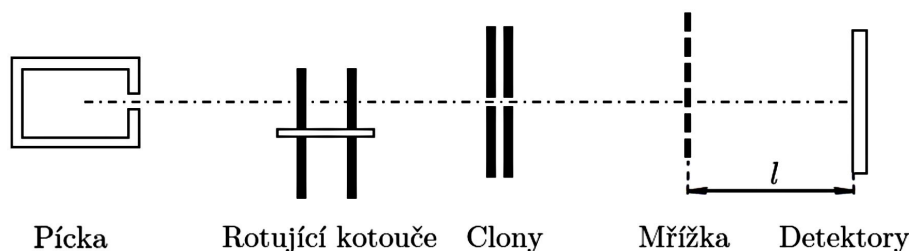
**3 body**

**Příklad č. 26: FO59A2-2: Ohyb a interference těžkých molekul [60,54 %]**

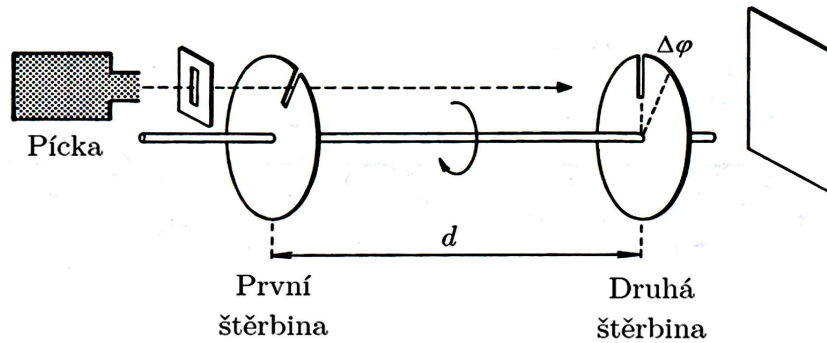
Už v roce 1999 byly prováděny pokusy s ohybem a interferencí molekul fullerenu. Jde o molekuly, které tvarem připomínají fotbalový míč a jsou složeny ze šedesáti atomů uhlíku. Molekuly C<sub>60</sub>, vyletující z pícky zahřáté na  $T = 920 \text{ K}$ , proletují nejprve filtrem tvořeným dvěma štěrbinami na dvou kotoučích, rotujících kolem společné osy (obrázky 68 a 69). Vzdálenost mezi kotouči je  $d = 0,2 \text{ m}$  a štěrbiny jsou navzájem posunuty o úhel  $\Delta\varphi = 10^\circ$ . Molekuly jsou pak usměrněny dvěma pevnými clonami na mřížku s mřížkovou konstantou  $b = 100 \text{ nm}$ . Detektory jsou umístěny ve vzdálenosti  $l = 1,25 \text{ m}$  za mřížkou.

- Jakou průměrnou rychlostí opouštějí molekuly fullerenu pícku? Průměrná rychlost molekul ideálního plynu závisí na termodynamické teplotě podle vztahu  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}$ , kde  $m_0$  je hmotnost molekuly.
- Jakou nejmenší frekvencí se musí otáčet osa s kotouči, aby proletěly oběma štěrbinami právě molekuly s průměrnou rychlostí?
- Určete de Broglieovu vlnovou délku molekuly fullerenu, pohybuje-li se průměrnou rychlostí  $\bar{v}$ . Určete vzdálenost maxima prvního řádu od maxima nultého řádu na stínítku s detektory.

Planckova konstanta  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ , atomová hmotnostní konstanta  $m_u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ , Boltzmannova konstanta  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .



**Obrázek 68:** Zobrazení situace I., k zadání úlohy FO59A2-2.



Obrázek 69: Zobrazení situace II., k zadání úlohy FO59A2-2.

**Řešení příkladu č. 26:**

- a) Průměrnou rychlost molekul určíme ze vztahu

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi 720m_u}} = 164 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

**2 body**

- b) Aby molekula fullerenu proletěla oběma štěrbinami, musí proletět mezi kotouči za stejnou dobu, za kterou se kotouče potočí o úhel  $\Delta\varphi$ . Pak

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi f} = \frac{d}{\bar{v}}, \quad \text{odkud } f = \frac{\bar{v}\Delta\varphi}{2\pi d} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi d} \sqrt{\frac{8kT}{\pi 720m_u}} = 23 \text{ Hz}.$$

**2 body**

- c) Vlnová délka fullerenu podle de Broglieho vztahu

$$\lambda = \frac{h}{m_0\bar{v}} = \frac{h}{720m_u} \sqrt{\frac{720\pi m_u}{8kT}} = h \sqrt{\frac{\pi}{5760kTm_u}} = 3,4 \cdot 10^{-12} \text{ m}.$$

**3 body**

Z podmínky pro maximum na mřížce:  $b \sin \alpha = k\lambda$  a protože pro malé úhly  $\tan \alpha = \frac{y}{l} \simeq \sin \alpha$ , bude pro vzdálenost  $y$  maxima prvního řádu od maxima nultého řádu platit

$$y = \frac{\lambda l}{b} = \frac{hl}{bm_0\bar{v}} = \frac{hl}{b} \sqrt{\frac{\pi}{5760kTm_u}} = 42 \text{ } \mu\text{m}.$$

**3 body**

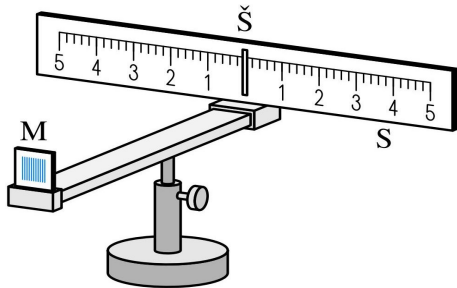
**Příklad č. 27: FO54A2-3: Mřížkový spektrometr [58,68 %]**

Jednoduchý mřížkový spektrometr je tvořen difrakční mřížkou a stupnicí, uprostřed které je tenká štěrbina rovnoběžná se štěrbinami mřížky (obrázek 70). Štěrbinu osvětlenou rtuťovou výbojkou pozorujeme pohledem přes mřížku (obrázek 71). Ve viditelné části spektra rtuťové výbojky jsou čtyři výrazné spektrální čáry: modrá, které přísluší vlnová délka  $\lambda_1 = 435,83 \text{ nm}$ , zelená s vlnovou délkou  $\lambda_2 = 546,07 \text{ nm}$  a dvě žluté s vlnovými délkami  $\lambda_3 = 576,96 \text{ nm}$  a  $\lambda_4 = 579,07 \text{ nm}$ . Na stupnici spektrometru se spektrální čáry zobrazují jako hlavní ohybová maxima prvního řádu.

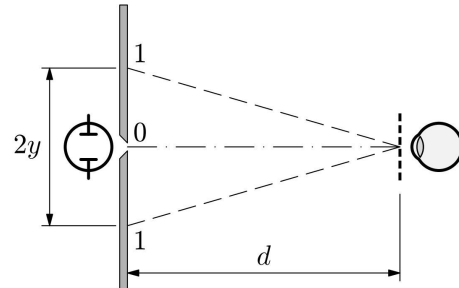
- a) Určete periodu mřížky  $b$  (vzdálenost středů sousedních štěrbin), jestliže vzdálenost mřížky od stupnice je  $d = 0,5 \text{ m}$  a zelená difrakční maxima prvního řádu s vlnovou délkou  $\lambda_2$  se zobrazují ve vzájemné vzdálenosti  $2y_2 = 284 \text{ mm}$ .



- b) V jaké vzájemné vzdálenosti  $2y_1$  se budou nacházet modrá difrakční maxima prvního řádu?
- c) Vlnové délky  $\lambda_3$  a  $\lambda_4$  se příliš neliší. Posud'te, zda tímto jednoduchým spektrometrem můžeme rozlišit ohybová maxima prvního řádu, která jim přísluší.



**Obrázek 70:** Mřížkový spektrometr, k zadání úlohy FO54A2-3.



**Obrázek 71:** Zobrazení situace, k zadání úlohy FO54A2-3.

**Řešení příkladu č. 27:**

- a) Hlavní maximum prvního řádu vidíme ve směru, jehož odchylka  $\alpha$  od optické osy splňuje podmínku  $b \sin \alpha = \lambda$ . Současně platí  $\tan \alpha = \frac{y}{d}$ . V našem případě dostaneme pro zelené interferenční maximum

$$\tan \alpha_2 = \frac{y_2}{d} = 0,284, \quad \text{odkud } \alpha_2 = 15,84^\circ.$$

Pak

$$b = \frac{\lambda_2}{\sin \alpha_2} = \frac{546,07 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{\sin 15,84^\circ} = 2,00 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$

**3 body**

- b) Pro odchylku  $\alpha_1$  směru, ve kterém vidíme modré hlavní maximum prvního řádu, platí

$$\sin \alpha_1 = \frac{\lambda_1}{b} = \frac{435,83 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{2,00 \cdot 10^{-6} \text{ m}} = 0,2179, \quad \text{odkud } \alpha_1 = 12,59^\circ.$$

Vzájemná vzdálenost obou hlavních maxim prvního řádu pro vlnovou délku  $\lambda_1$  je

$$2y_1 = 2d \tan \alpha_1 = 223 \text{ mm}.$$

**3 body**

- c) Aby se dala rozlišit srovnatelně intenzivní hlavní maxima prvního řádu pro blízké vlnové délky  $\lambda$  a  $\lambda + \Delta\lambda$ , musí počet  $N$  štěrbin mřížky splňovat podmínku

$$N > \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

V našem případě tedy musí platit

$$N > \frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_3} = 273.$$

Vzhledem k tomu, že naše mřížka má 500 štěrbin na jednom milimetru, je počet štěrbin, které se nacházejí před zornicí oka, dostatečný k tomu, abychom žluté spektrální čáry rtuti daným spektrometrem rozlišili.

**4 body**

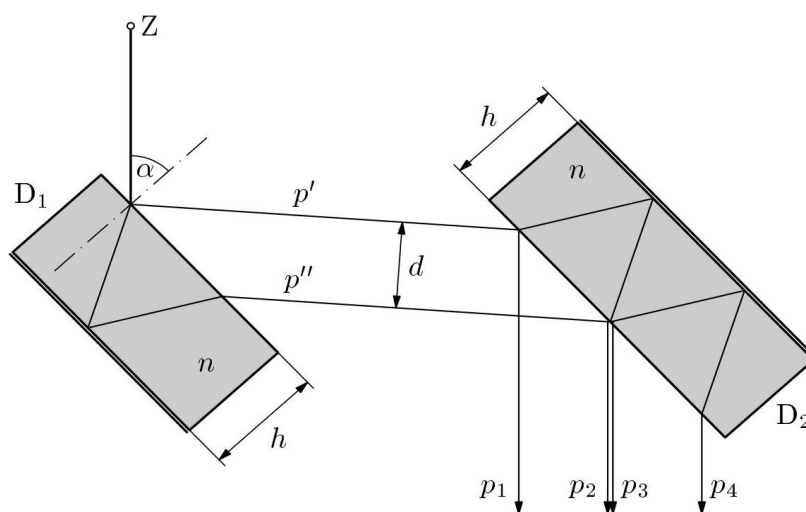
**Příklad č. 28: FO45A2-2: Interferometr**

[44,24 %]

Na obrázku 72 je zjednodušené schéma *Jaminova interferometru*. Základem přístroje jsou dvě přesné planoparalelní desky  $D_1$ ,  $D_2$  stejné tloušťky  $h$  vyrobené ze skla o indexu lomu  $n$ . Desky jsou téměř rovnoběžné a jejich odvrácené stěny jsou pokoveny. Paprsek přicházející ze zdroje světla  $Z$  a dopadající na první desku pod úhlem  $\alpha$  se od částečně odráží jako paprsek  $p'$ , částečně se láme do desky a po odrazu na pokovené stěně a dalším lomu vystupuje z desky jako paprsek  $p''$ . Na druhé desce z paprsků  $p'$  a  $p''$  stejným způsobem vzniknou čtyři paprsky  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  a  $p_4$ . Interferencí paprsků  $p_2$  a  $p_3$  vznikají interferenční jevy, které můžeme ovlivnit vložením různých překážek do cesty paprsků  $p'$  a  $p''$ .

- Pro dané veličiny  $h$  a  $n$  určete vzdálenost  $d$  paprsků  $p'$  a  $p''$  jako funkci úhlu  $\alpha$ .
- Nalezněte úhel  $\alpha = \alpha_m$ , pro který je vzdálenost  $d$  největší.

Řešte nejprve obecně, úlohu b) pak pro hodnoty  $h = 50$  mm,  $n = 1,52$ . Pro tyto hodnoty také vypočítejte největší dosažitelnou vzdálenost  $d = d_m$ .



**Obrázek 72:** Schéma Jaminova interferometru, k zadání úlohy FO45A2-2.

**Řešení příkladu č. 28:**

- Vyjdeme z vlastností trojúhelníků na obrázku 73 a ze zákona lomu. Platí

$$|AC| = 2h \tan \beta = 2h \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = 2h \frac{\frac{\sin \alpha}{n}}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}} = 2h \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}},$$

$$d = |CD| = |AC| \cos \alpha = 2h \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

**4 body**

- Dostali jsme funkci úhlu  $\alpha$ , která je v intervalu  $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$  spojitá, v bodech 0 a  $\frac{\pi}{2}$  má hodnotu 0 a uvnitř intervalu je všude kladná. Musí tedy v některém vnitřním bodě intervalu dosáhnout maxima. Určíme první derivaci  $d$  podle  $\alpha$  a položíme ji rovnu 0:

$$\frac{dd}{d\alpha} = h \frac{2 \cos 2\alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \sin 2\alpha \frac{\frac{1}{2}(-2 \sin \alpha \cos \alpha)}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}}{n^2 - \sin^2 \alpha}$$

$$\frac{dd}{d\alpha} = h \frac{4 \cos 2\alpha (n^2 - \sin^2 \alpha) + \sin^2 2\alpha}{2 (n^2 - \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Po úpravě dostaneme pro čitatele podmínku

$$4(1 - 2\sin^2 \alpha)(n^2 - \sin^2 \alpha) + 4\sin^2 \alpha(1 - \sin^2 \alpha) = 0$$

a po další úpravě dojdeme k bikvadratické rovnici

$$\sin^4 \alpha - 2n^2 \sin^2 \alpha + n^2 = 0.$$

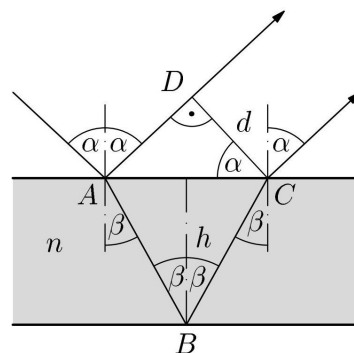
Protože  $n > 1$ , vyhovuje pouze kořen

$$\sin \alpha = \sin \alpha_m = \sqrt{n^2 - n\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Pro dané hodnoty vychází

$$\sin \alpha_m = 0,75526, \quad \alpha_m = 49,0^\circ,$$

a  $d_m = 37,5$  mm.



**4 body** **Obrázek 73:** Chod paprsků, k řešení FO45A2-2.

**2 body**

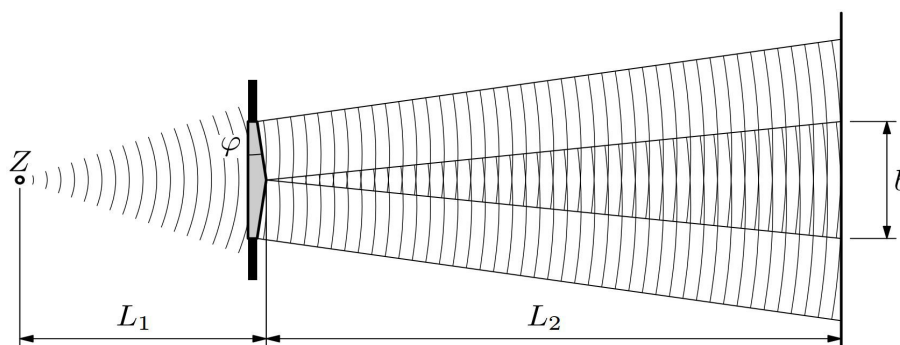
**Příklad č. 29: FO54A3-3: Fresnelův dvojhnanol**

**[31,40 %]**

Štěrbínový zdroj monochromatického světla o vlnové délce  $\lambda$  osvětluje ze vzdálenosti  $L_1$  souměrný tenký skleněný dvojhnanol vyrobený ze skla o indexu lomu  $n$  (obrázek 74). Obě poloviny dvojhnanolu mají stejný lámavý úhel  $\varphi$ . Lomem světla v hranolu vznikají dvě koherentní světelná vlnění, která spolu interferují na stínítku ve vzdálenosti  $L_2$  od hranolu v pruhu vymezeném paprsky procházejícími středem hranolu.

- Určete šířku  $b$  pruhu, kde dochází k interferenci.
- Určete šířku interferenčních proužků, které vzniknou na stínítku.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty  $\lambda = 546$  nm,  $n = 1,57$ ,  $\varphi = 1,0^\circ$ ,  $L_1 = 20$  cm,  $L_2 = 3$  m. Návod: Pro malé úhly můžete využít aproximaci  $\sin x \approx \tan x \approx x$ .



**Obrázek 74:** Náčrsek situace, k zadání úlohy FO54A3-3.

**Řešení příkladu č. 29:**

- Průchod paprsku hranolem s lámavým úhlem  $\varphi$  je znázorněn na obrázku 75. Procházející paprsek se odchýlí od původního směru o úhel

$$\delta = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - \varphi,$$

přičemž

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_2} = n.$$

Je-li lámavý úhel  $\varphi$  malý a paprsek prochází hranolem přibližně kolmo, můžeme psát

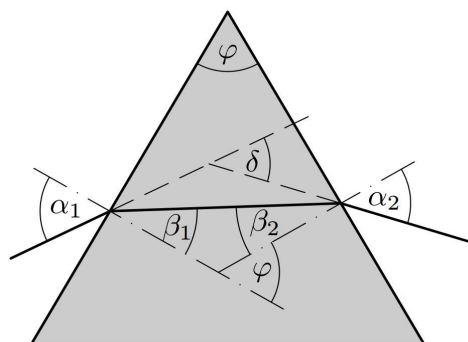
$$\alpha_1 \approx n\beta_1, \quad \alpha_2 \approx n\beta_2, \quad \delta \approx (n-1)\varphi.$$

Paprsky procházející těsně nad středem hranolu se odchýlí o úhel  $\delta$  dolů a paprsky procházející těsně pod středem se odchýlí o stejný úhel nahoru (obrázek 76). Na stínítku obě světelná vlnění interferují v pruhu šířky

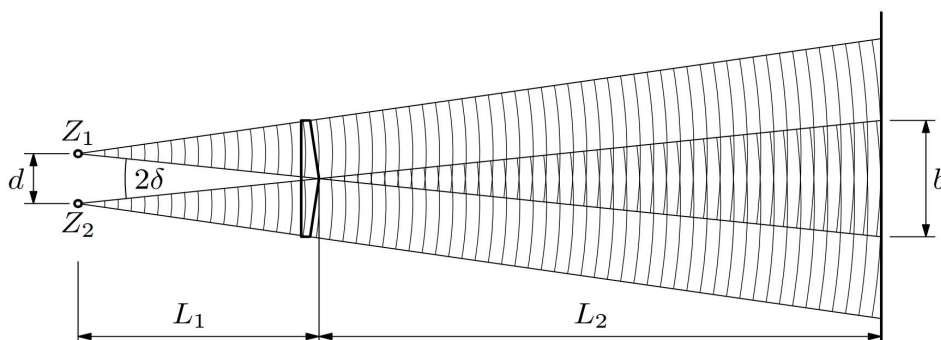
$$b = 2L_2 \tan \delta \approx 2L_2 \delta \approx 2L_2 \tan [(n-1)\varphi],$$

po dosazení  $b = 6 \text{ cm}$ .

**5 bodů**



**Obrázek 75:** Průchod paprsku hranolem, k řešení úlohy FO54A3-3.



**Obrázek 76:** Upravený obrázek ze zadání, k řešení úlohy FO54A3-3.

- b) Světelná vlnění vycházející z dvojhranolu se chovají, jako by vycházela ze dvou samostatných štěrbinových zdrojů  $Z_1$ ,  $Z_2$  nacházejících se ve vzdálenosti  $l = L_1 + L_2$  od stínítka a ve vzájemné vzdálenosti

$$d = 2L_1 \tan \delta \approx 2L_1 \tan [(n-1)\varphi].$$

Ve středu  $S$  stínítka se setkávají s nulovým dráhovým rozdílem (obrázek 77). V bodě  $P$  ve vzdálenosti  $y$  od středu stínítka je dráhový rozdíl  $\Delta l = l_2 - l_1$ . Platí

$$l_2^2 - l_1^2 = l^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2 - \left[l^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2\right] = 2yd.$$

Protože  $y \ll l$ , můžeme psát

$$l_2^2 - l_1^2 = (l_2 - l_1)(l_2 + l_1) \approx \Delta l \cdot 2l, \quad \Delta l \approx \frac{yd}{l}.$$

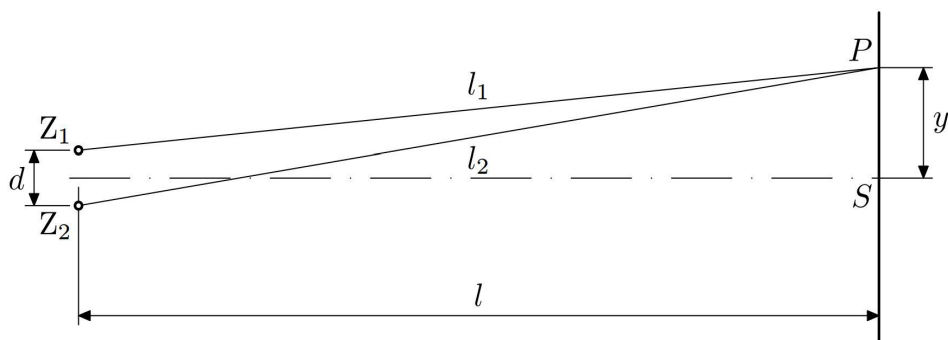
Interferenční maxima vzniknou v bodech stínítka, kde

$$\Delta l = \frac{yd}{l} = k\lambda, \quad \text{odkud } y = k \frac{\lambda l}{d}.$$

Šířka interferenčních proužků je rovna vzdálenosti sousedních maxim, tedy

$$\frac{\lambda l}{d} = \frac{\lambda(L_1 + L_2)}{2L_1 \tan [(n-1)\varphi]} = 0,44 \text{ mm}.$$

**5 bodů**



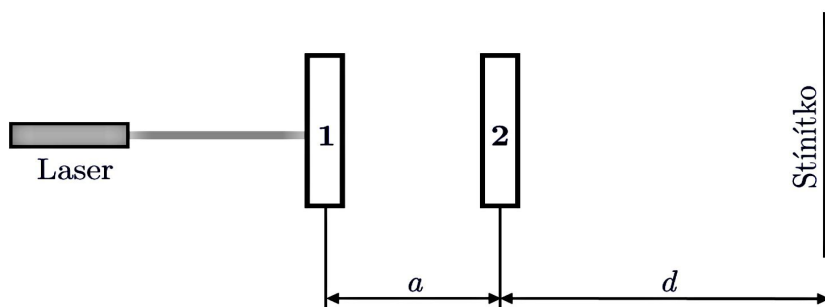
Obrázek 77: Zobrazení situace, k řešení úlohy FO54A3-3.

**Příklad č. 30: FO63A2-3: Dvě černé skříňky** [29,51 %]

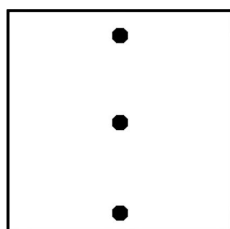
Laserový paprsek o vlnové délce  $\lambda = 600 \text{ nm}$  prochází dvěma tenkými černými skříňkami, mezi kterými je vzdálenost  $a = 1 \text{ m}$  a za kterými je ve vzdálenosti  $d = 2 \text{ m}$  stínítko o rozměrech  $5,5 \times 5,5 \text{ cm}$  (obrázek 78). Na stínítku se vytvoří obraz tří bodů, mezi kterými je vzdálenost  $x = 2 \text{ cm}$  (obrázek 79). Při posouvání stínítka doprava se tato vzdálenost zvětšuje. Vyměníme-li polohu černých skříňek, vznikne na stínítku obraz pěti bodů (obrázek 80), mezi kterými je vzdálenost  $y = 1 \text{ cm}$ . Při posouvání stínítka doprava se tato vzdálenost nemění.

- Co je v první a co je ve druhé černé skříňce? Určete vlastnosti těchto prvků.
- Co uvidíme na stínítku, změníme-li vzdálenosti na  $a = 2 \text{ m}$  a  $d = 1 \text{ m}$ ? Zvažte obě varianty poloh černých skříňek.
- Co uvidíme na stínítku ve všech těchto případech, bude-li vlnová délka laseru  $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$ ?

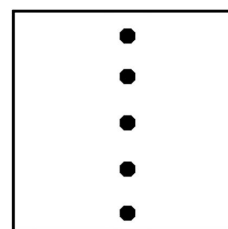
Rozměry černých skříňek nepřesahují rozměry stínítka. Pro malé úhly  $\tan \alpha \approx \sin \alpha$ .



Obrázek 78: Nákres situace, k zadání úlohy FO63A2-3.



Obrázek 79: Obraz tří bodů, k zadání úlohy FO63A2-3.



Obrázek 80: Obraz pěti bodů, k zadání úlohy FO63A2-3.

### Řešení příkladu č. 30:

- a) V první černé skříňce je spojná čočka. V druhé černé skříňce je optická mřížka. V prvním postavení čočka na obraz stínítka nemá vliv a při vzdalování stínítka se poloha maxim prvního řádu od maxima nultého řádu zvětšuje. Při záměně poloh čočky a mřížky se na stínítku zobrazí i maxima druhého řádu. Vzhledem k tomu, že se poloha maxim na stínítku při jeho posouvání nemění, leží mřížka v ohniskové rovině čočky a paprsky za čočkou jsou rovnoběžné. Ohnisková vzdálenost čočky je tedy 1 m. **3 body**

Ještě určíme mřížkovou konstantu mřížky. Protože  $\tan \alpha = \frac{x}{d} \simeq \sin \alpha$ , bude mřížková konstanta

$$b = \frac{k\lambda}{\sin \alpha} \simeq \frac{d\lambda}{x} = 60 \mu\text{m}.$$

**1 bod**

- b) Při posunutí mřížky tak, aby byla ve vzdálenosti  $a$  od stínítka a  $d$  od čočky, ohybový úhel  $\alpha$  zůstane stejný, stínítka bude ale v poloviční vzdálenosti a tedy i vzdálenost mezi maximy bude poloviční, budou vidět i maxima druhého řádu, proto na stínítku budou tři body ve vzájemné vzdálenosti 1 cm, tedy vzdálenosti odpovídající obrázku 80.

**1 bod**

Zaměníme-li polohu čočky a mřížky, bude se mřížka nacházet ve vzdálenosti  $d = 2f = 2$  m před čočkou. Na čočku dopadají právě maxima nultého a prvního řádu, odpovídající obrázku 79. Tyto tři paprsky se za čočkou sbíhají ve vzdálenosti  $2a = 2f = 2$  m. Stínítka je ve vzdálenosti  $a' = a = 1$  m za čočkou, budou na něm tedy zase jen maxima nultého a prvního řádu a obraz bude odpovídat obrázku 79.

**2 body**

- c) Při změně vlnové délky dopadajícího světla se zmenší vzdálenost mezi maximy nultého a prvního řádu v případě a) na  $x_1 = d \tan \alpha \simeq d \sin \alpha = \frac{d\lambda_1}{b} = 1,3$  cm. Maxima druhého řádu budou ve vzdálenosti  $x_2 = d \tan \alpha \simeq d \sin \alpha = \frac{dk\lambda_1}{b} = 2,7$  cm a na stínítku budou také zachycena. Místo tří bodů uvidíme tedy pět bodů, vzdálených od sebe 1,3 cm.

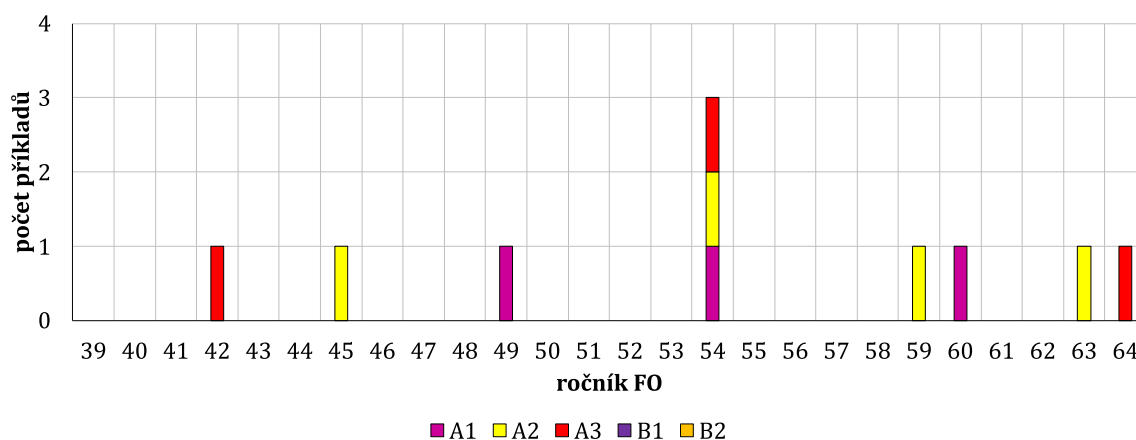
**1 bod**

Při záměně poloh čočky a mřížky se na stínítku zobrazí maxima druhého i třetího řádu, budeme tedy pozorovat sedm bodů, mezi nimiž bude vzdálenost  $x_3 = 0,7$  cm **1 bod**

Při změně polohy čočky a mřížky podle části b) bude na stínítku při pořadí čočka-mřížka vidět pět bodů ve vzájemné vzdálenosti  $x_1$ . Při pořadí mřížka-čočka budou body v poloviční vzájemné vzdálenosti. **1 bod**

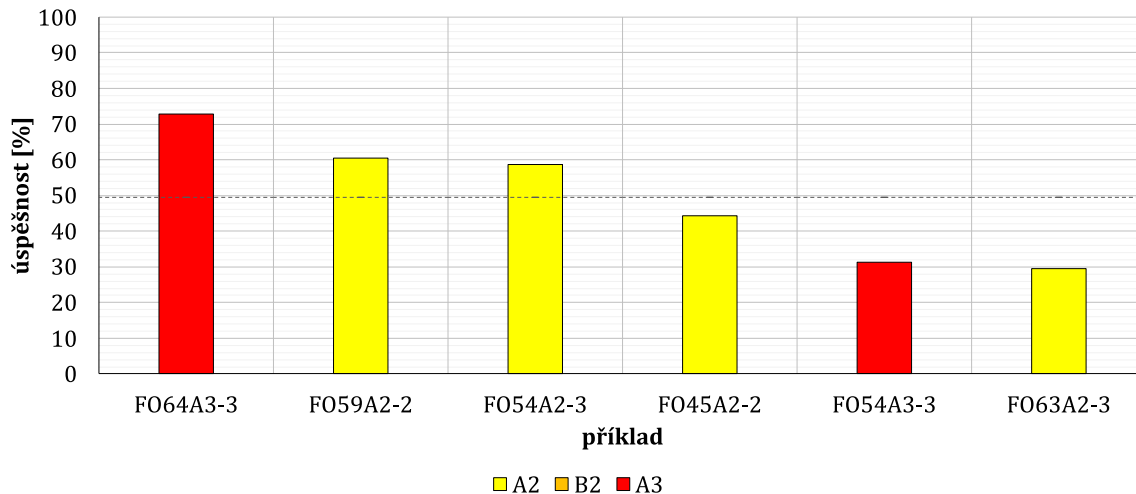
### 4.5.3 Statistická úspěšnost příkladů

Vlnová optika je poslední kapitolou a třetí nejrozsáhlejší podkapitolou zahrnující deset příkladů, což odpovídá procentuálnímu podílu 16,39 % všech příkladů optiky.



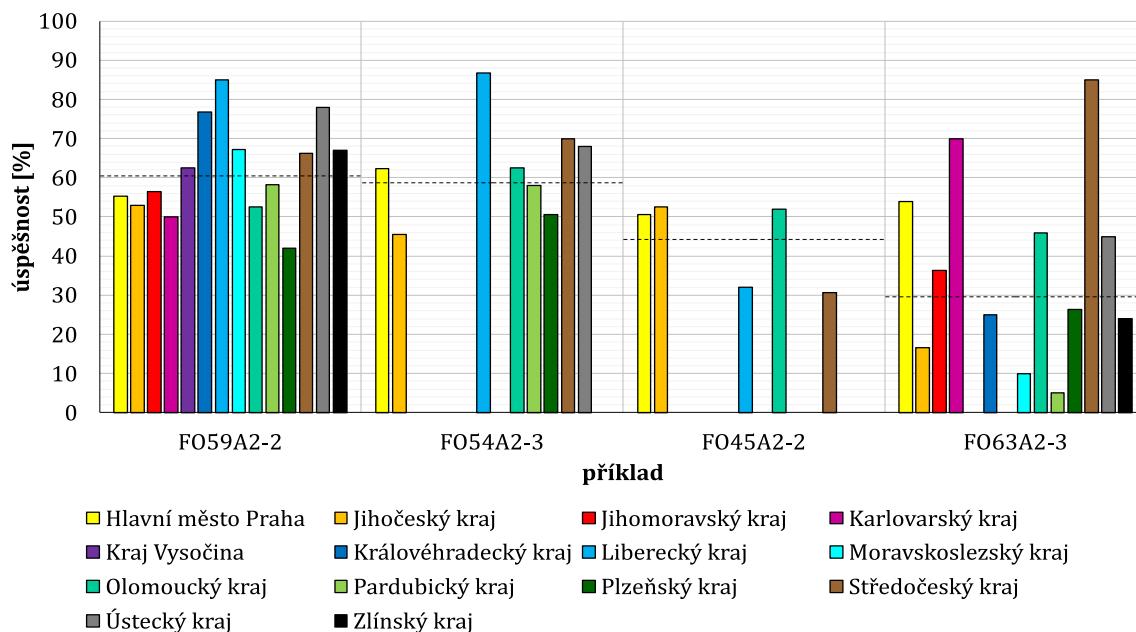
**Obrázek 81:** Zastoupení příkladů podkapitoly zaměřené na vlnovou optiku v jednotlivých ročnících a kolech Fyzikální olympiády.

Na obrázku 81 je zobrazen graf výskytu příkladů. Z deseti příkladů je z postupových kol sedm. Každé kolo kategorie A v minulosti mělo příklad věnovaný vlnové optice, v 54. ročníku byl na vlnovou optiku zaměřený dokonce vždy jeden příklad v každém kole. Všechny příklady jsou originální a navazují a prolínají se s podkapitolou Kvantová optika.



**Obrázek 82:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladů zaměřených na vlnovou optiku.

Úspěšnost příkladů je vykreslena v grafu na obrázku 82. Nejúspěšnějším příkladem je příklad FO64A3-3 s úspěšností 72,84 %, naopak nejméně úspěšný je příklad FO63A2-3 s úspěšností 29,51 %. Průměrná úspěšnost příkladů je 49,53 %. Ze sedmi postupových příkladů bohužel u jednoho není dostupná výsledková listina, a to u příkladu FO42A3-3, tento příklad proto nebyl vyhodnocen.



**Obrázek 83:** Procentuální úspěšnost u jednotlivých příkladech zaměřených na vlnovou optiku v jednotlivých krajích ČR.

V krajských kolech se objevily čtyři příklady, jejich srovnání je vyobrazeno v obrázku 83. V 63. ročníku v Libereckém kraji nebyl žádný soutěžící, v Kraji Vysočina je úspěšnost nulová, žádný soutěžící úlohu nevyřešil ani částečně. Mezi úspěšnější kraje se v rámci této kapitoly řadí Hlavní město Praha, Olomoucký kraj, Středočeský kraj a Ústecký kraj, naopak mezi méně úspěšné Pardubický a Plzeňský kraj.



# Závěr

Cílem diplomové práce bylo vytvořit tematicky členěnou sbírku fyzikální úloh z optiky, molekulové fyziky a termodynamiky z úloh kategorií A a B Fyzikální olympiády, a to od ročníku 39 do letošního 64. ročníku. Práce je členěna do dvou částí, obecné a příkladové.

První částí je obecná část, která se dále rozděluje na dvě kapitoly. První se věnuje analýze úloh Fyzikální olympiády v České republice. Nejprve jsou srovnávána zastoupení jednotlivých oblastí všech dvaceti šesti ročníků v rámci kategorií a kol. Pro přehlednost jsou všechna data vykreslena v grafech a v textu jsou pouze stručně popsána, popřípadě diskutována. Následně je proveden rozbor samotných úloh. U každé úlohy jsou vypočítány tři parametry – index obtížnosti, Pearsonův koeficient korelace a je provedena analýza nenormovaných odpovědí. Spočítané hodnoty jsou zpracovány v přehledných tabulkách a grafech, na základě kterých jsou porovnávány příklady mezi sebou, a je diskutováno, zda jsou příklady vyhovující či ne, popřípadě ve kterých parametrech nevyhovují. V rámci části Data ke zpracování vlastností testových úloh je také zhodnocení dostupnosti dat pro jednotlivé ročníky. Pro zajímavost je uveden rozbor úspěšnosti jednotlivých krajů v rámci krajských kol, který je navíc porovnán s bakalářskou prací, která se věnovala oblasti elektřiny a magnetismu [2]. Dle dostupných dat a vypočítaných hodnot např. existují kraje, které patří mezi nejlepší v jedné oblasti, ale v jiné naopak patří k nejméně úspěšným. Typickým příkladem je Liberecký kraj, který má nejvyšší úspěšnost v oblasti optiky, ale v oblasti molekulové fyziky a termodynamiky patří mezi nejhorší. Podobně je na tom Ústecký kraj, který, přestože patří v oblasti optiky k nejlepším, v oblastech molekulové fyziky a termodynamiky a elektřiny a magnetismu se řadí mezi slabší kraje. Naopak mezi nejlepšími kraji ve všech třech zkoumaných oblastech patří Hlavní město Praha. Co je důvodem rozdílné úspěšnosti krajů je otázkou, na kterou těžko odpovědět. Roli může hrát rozdílná kvalita škol v kraji, hustota osídlení, dostupnost výběrových škol.

Druhou kapitolou, jež je uvedena v rámci obecné části, je Analýza úloh Fyzikální olympiády v dalších zemích. Jedním z cílů práce bylo srovnání zastoupení úloh jednotlivých oblastí v úlohách FO u nás a ve dvou cizích zemích. Pro zajímavost byla vybrána jedna země, která má podobný systém jako ČR (Slovensko), a jedna země, která má systém odlišný (Finsko). U obou zemí byla základem pomoc členů tamní komise a dostupnost potřebných dat. Přestože na Slovensku je systém FO velmi podobný tomu našemu, zastoupení oblastí fyziky v úlohách olympiády se mírně liší. V kategorii A jsou v ČR zadávány více úlohy z mechaniky na úkor úloh z optiky a fyziky mikrosvěta a teorie relativity, naopak na Slovensku dávají přednost těmto oblastem na úkor mechaniky. V kategorii B se obě země liší více. Důvodem je především fakt, že v České republice se v této kategorii až na jedinou výjimku nezadávají příklady z optiky, zatímco na Slovensku počet úloh z optiky v posledních ročnících narůstá, a dokonce se objevují i příklady zaměřené na oblast fyziky mikrosvěta a teorie relativity. Kromě procentuálního zastoupení oblastí v rámci příkladů olympiády jsou zde i další drobné rozdíly, jako je například pokládání teoretických otázek v rámci slovenské FO, poznámky na konci příkladu, které žákům mají pomoci lépe pochopit zadání nebo také větší množství barevných fotografií. Ve Finsku je systém odlišný. První kolo (Finové kola nazývají stupni) se odehrává na školách ve dvou sériích (kategoriích) dle náročnosti. Čtyřicet nejlepších soutěžících z každé série obdrží dva tzv. trenérské dopisy, které jsou přípravou na

Seversko-Baltskou, Evropskou a Mezinárodní olympiádu. Obsahují různě náročné úlohy, ať už teoretické, výpočtové nebo experimentální, a je povoleno je diskutovat s přáteli, ostatními soutěžícími i učiteli. Součástí zadání těchto úloh jsou i zajímavé odkazy na studijní literaturu. Dohromady dvacet nejlepších řešitelů obou sérií pokračuje do třetího stupně. Tím je Seversko-Baltská olympiáda (NBPhO), která byla dříve pořádána pouze pro severské a baltské země, dnes se do ní ale může přihlásit i kterýkoli jiný stát. Soutěž trvá tři dny a počet zadávaných úloh se v každém ročníku liší. Dle srovnání úloh Seversko-Baltské a České fyzikální olympiády je zastoupení oblastí zhruba podobné (vezmeme-li v rámci ČR v potaz pouze kategorie A a B). Odlišnosti jsou patrné navíc i ve vizuální stránce zadání. Pět nejlepších Finů v rámci NBPhO je vybráno pro Mezinárodní fyzikální olympiádu. Pokud bych měla zhodnotit náročnost zadání všech tří zemí, tak u každé země bych našla náročnější úlohu, ale vybrané úlohy Seversko-Baltské olympiády se mi jeví jako nejobtížnější.

Třetí a čtvrtá kapitola jsou již součástí druhé části diplomové práce, příkladové. Každá kapitola zahrnuje jednu z oblastí a je dále členěna do několika podkapitol. Třetí kapitola se zabývá oblastí molekulové fyziky a termodynamiky a obsahuje šest podkapitol (Teplo a teplota, Plyny, Práce plynu, kruhový děj, Pevné látky, Kapaliny a Změny skupenství). Dohromady obsahuje třicet řešených příkladů z druhých kol kategorií A a B a třetího kola kategorie A. Čtvrtá kapitola tvořená úlohami z oblasti optiky také sestává z třiceti příkladů, které jsou rozděleny do pěti podkapitol (Odraz a lom světla, Zobrazování optickými soustavami, Energie světelného záření, Kvantová optika, Vlnová optika). Sběrka z optiky je tvořena pouze úlohami kategorie A, protože se až na jedinou výjimku tato oblast v kategorii B nevyskytuje. Všechny podkapitoly sbírkové části jsou vždy uvedeny teoretickým základem, který je tvořen základními teoretickými poznatky, vztahy, jednotkami, zákony a konstantami, které je vhodné si před samotným řešením příkladů připomenout. Následuje část věnovaná řešeným příkladům, které jsou seřazeny od nejjednodušších po nejnáročnější dle indexu obtížnosti. Ten je uveden v pravé části nadpisu příkladu. V levé části je číslo příkladu v rámci sbírky, specifické číselné označení v rámci fyzikální olympiády (obsahuje v tomto pořadí: ročník, kategorii, kolo, číslo příkladu), pomocí kterého je možné se orientovat na oficiálních stránkách FO, a název příkladu. Pro použití příkladu při výuce na střední škole (např. v semináři) je z mého pohledu dobré si dohledat příklad v analytické části práce a posoudit, zda má vyhovující parametry na využití, nebo je uveden spíše pro zajímavost. Pro zhodnocení je na konci podkapitoly ještě část nazvaná Statistická úspěšnost příkladů, kde je dle grafů možné zhodnotit zastoupení příkladů podkapitoly v rámci ročníků a jejich úspěšnost, a to i v rámci krajů (pokud jsou dostupné výsledkové listiny).

Jak již bylo řečeno, tato práce navazuje na práci bakalářskou, v níž byly analyzovány úlohy elektřiny a magnetismu. Téma diplomové práce jsem si vybrala záměrně, protože jsem v práci chtěla pokračovat a zpracovat i další oblasti fyziky. Sběrky úloh z olympiád by dle mého názoru mohla být velmi přínosnou součástí seminářů na středních školách, popř. by mohla posloužit jako sbírka úloh pro nadané žáky. Mám za to, že sbírka může být i vhodným pomocníkem pro učitele, ze které se dají čerpat příklady aktuálně probíraných témat, např. pro žáky, kteří snadno a rychle zvládají učivo a náplň hodin pro ně není dostačující. Doplněné základní pojmy na začátku podkapitol by poté mohly sloužit i jako studijní opora žákům, kteří by se potenciálně olympiády chtěli zúčastnit a připravovat se na ni sami.

# Literatura

- [1] FYZIKÁLNÍ, OLYMPIÁDA. *Archiv zadání a řešení*. [online, cit. 29. 7. 2023]. Dostupné také z: <http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/zadani-a-reseni>.
- [2] ŠLITROVÁ, Tereza. *Doplňující úlohy ze středoškolské fyziky*. Bakalářská práce. Olomouc: Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta, 2021.
- [3] CHRÁSKA, Miroslav. *Metody pedagogického výzkumu: Základy kvantitativního výzkumu*. Praha: Grada, 2007. ISBN 978-80-247-1369-4.
- [4] JEŘÁBEK, Ondřej; BÍLEK, Martin. *Teorie a praxe tvorby didaktických testů*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2010. ISBN 978-80-244-2494-1.
- [5] VAFKOVÁ, Lada. *Položková analýza v systému STATISTICA*. Bakalářská práce. Brno: Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, 2015 [online, cit. 29. 7. 2023]. Dostupné také z: [https://is.muni.cz/th/t350m/Plny\\_text\\_BP.pdf](https://is.muni.cz/th/t350m/Plny_text_BP.pdf).
- [6] MICHALCOVÁ, Jana. *Analýza vlastností souboru úloh vybraných ročníků Fyzikální olympiády*. Bakalářská práce. Olomouc: Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta, 2020 [online, cit. 17. 7. 2023]. Dostupné také z: [https://muj.optol.cz/~richterek/data/media/diplomky/bp\\_michalcova.pdf](https://muj.optol.cz/~richterek/data/media/diplomky/bp_michalcova.pdf).
- [7] FYZIKÁLNÍ, OLYMPIÁDA. *Výsledky*. [online, cit. 29. 7. 2023]. Dostupné také z: <https://osmo.fyzikalniolympiada.cz/public/history/>.
- [8] FYZIKÁLNÍ, OLYMPIÁDA. *Co je fyzikální olympiáda*. [online, cit. 2. 8. 2023]. Dostupné také z: <http://fyzikalniolympiada.cz/co-je-fo>.
- [9] VOLF, Ivo; KLUHAVEC, Daniel. *Čtyřicet let fyzikální olympiády*. [online, cit. 2. 8. 2023]. Dostupné také z: <http://fyzikalniolympiada.cz/dokumenty/40letFO.pdf>.
- [10] MINISTERSTVO ŠKOLSTVA VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU SLOVENSKEJ REPUBLIKY. *Organizační poriadok Fyzikálnej olympiády*. [online, cit. 29. 7. 2023]. Dostupné také z: [https://www.iuventa.sk/files/documents/2\\_olympiady/fo/org.%20por%20a%20pok/op%20fo%20k%20010118.pdf](https://www.iuventa.sk/files/documents/2_olympiady/fo/org.%20por%20a%20pok/op%20fo%20k%20010118.pdf).
- [11] URBAN, Michal. *Organizační řád Fyzikální olympiády*. [online, cit. 29. 7. 2023]. Dostupné také z: <http://fyzikalniolympiada.cz/dokumenty/organizacni-rad-fo.pdf>.
- [12] SLOVENSKÁ KOMISIA FYZIKÁLNEJ OLYMPIÁDY; IUVENTA. *62. ročník Fyzikálnej olympiády v školskom roku 2020/2021 kategória B, domáce kolo – texty úloh*. [online, cit. 2. 8. 2023]. Dostupné také z: [https://www.iuventa.sk/files/documents/2\\_olympiady/fo/62.%20ro%C4%8Dn%C3%ADk/s%C3%BA%C5%A5a%C5%BEEn%C3%A9%20%C3%BAloh%C5%A1enia/dk/f62dkbul21.pdf](https://www.iuventa.sk/files/documents/2_olympiady/fo/62.%20ro%C4%8Dn%C3%ADk/s%C3%BA%C5%A5a%C5%BEEn%C3%A9%20%C3%BAloh%C5%A1enia/dk/f62dkbul21.pdf).
- [13] ÚSTŘEDNÍ KOMISE FO. *Pravidla pro určování pořadí a úspěšných řešitelů FO*. [online, cit. 29. 7. 2023]. Dostupné také z: <http://fyzikalniolympiada.cz/dokumenty/pravidla-pro-urcovani-poradi.pdf>.
- [14] STRÁNKA FYZIKÁLNEJ OLYMPIÁDY. *Archív súborov príkladov z ročníkov*. [online, cit. 2. 8. 2023]. Dostupné také z: <http://www.kf.fpv.ukf.sk/fo/Archiv.htm>.

- [15] FYZIKÁLNA OLYMPIÁDA SLOVENSKEJ REPUBLIKY. *Archív úloh*. [online, cit. 2. 8. 2023]. Dostupné také z: <http://fo.uniza.sk/stare/>.
- [16] NÁRODNÝ INŠTITÚT VZDELÁVANIA A MLÁDEŽE. *Fyzikálna olympiáda*. [online, cit. 2. 8. 2023]. Dostupné také z: <https://www.iuventa.sk/olympiady-1/fyzikalna-olympiada/>.
- [17] ČÁP, Ivo; KONRÁD, Ľubomír. *Fyzika v zaujímavých riešených úlohách: Riešené úlohy Fyzikálnej olympiády kategórií A až D pre študentov stredných škôl 35.-63. ročník (1993-2022)*. Žilina: Jednota slovenských matematikov a fyzikov, 2022.
- [18] MAOL. *MAOL in English*. [online, cit. 4. 8. 2023]. Dostupné také z: <https://maol.fi/maol-in-english/>.
- [19] LUNTINEN, Miha; LÖYTÄINEN, Topi; MÄNTYSAARI, Heikki; LINDELL, Anssi. Lukiolaisten kansainväliset fysiikkakilpailut. *Arkhimedes*. 2022, roč. 2022, č. 3.
- [20] JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO. *Kilpailut ja valmennus*. 2020 [online, cit. 4. 8. 2023]. Dostupné také z: <https://www.jyu.fi/science/fi/fysiikka/opiskelu/suomen-fysiikan-olympiavalmennus/kilpailut-ja-valmennus>.
- [21] FYSIIKAN OLYMPIAVALMENNUS. *Avoim sarja 2022-2023: Kirje 1*. 2023 [online, cit. 4. 8. 2023]. Dostupné také z: <https://www.jyu.fi/science/fi/fysiikka/opiskelu/suomen-fysiikan-olympiavalmennus/valmennuskirjeet/kirjeet/kirje2023.pdf>.
- [22] FYSIIKAN OLYMPIAVALMENNUS. *Avoim sarja: Kirje 2*. 2023 [online, cit. 4. 8. 2023]. Dostupné také z: <https://www.jyu.fi/science/fi/fysiikka/opiskelu/suomen-fysiikan-olympiavalmennus/valmennuskirjeet/kirjeet/avoinsarjatoimenkirje2023.pdf>.
- [23] NORDIC-BALTIC PHYSICS OLYMPIAD; KALDA, Jaan. *About*. 2023 [online, cit. 4. 8. 2023]. Dostupné také z: <https://nbpho.ee/about/>.
- [24] NORDIC-BALTIC PHYSICS OLYMPIAD. *Rules*. 2023 [online, cit. 4. 8. 2023]. Dostupné také z: <https://nbpho.ee/rules/>.
- [25] NORDIC-BALTIC PHYSICS OLYMPIAD. *NBPhO 2023*. 2023 [online, cit. 4. 8. 2023]. Dostupné také z: <https://nbpho.ee/nbpho-2023/>.
- [26] NORDIC-BALTIC PHYSICS OLYMPIAD. *Nordic-Baltic physics olympiad 2023*. 2023 [online, cit. 4. 8. 2023]. Dostupné také z: [https://nbpho.ee/wp-content/uploads/2023/04/NBPhO\\_2023\\_problems.pdf](https://nbpho.ee/wp-content/uploads/2023/04/NBPhO_2023_problems.pdf).
- [27] NORDIC-BALTIC PHYSICS OLYMPIAD. *NBPhO 2003-2022*. 2022 [online, cit. 4. 8. 2023]. Dostupné také z: <https://nbpho.ee/archive/>.
- [28] VONDRA, Miroslav. *Cvičení k fyzice v kostce pro střední školy*. 1. vyd. Havlíčkův Brod: Fragment, 2000. ISBN 80-7200-379-8.
- [29] KRUŽÍK, Miroslav. *Sbírka úloh z fyziky*. 6. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1969.
- [30] BARTUŠKA, Karel. *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy IV*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-037-9.
- [31] SVOBODA, Emanuel; A, další. *Přehled středoškolské fyziky*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-307-3.
- [32] CHASÁK, Jan; ŠLITROVÁ, Tereza. *FYZIKA bez nervů*. 1. vyd. Rychnov nad Kněžnou: vydali vlastním nákladem autoři, 2017. ISBN 978-80-270-2401-8.
- [33] MAREČEK, Aleš; HONZA, Jaroslav. *Chemie pro čtyřletá gymnázia I*. 2. vyd. Brno: Proton, 1997. ISBN 80-902402-0-8.

- [34] HOLUBOVÁ, Renata. *Molekulová fyzika a termodynamika*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2012. ISBN 978-80-244-3299-1.
- [35] BAJER, Jiří. *Optika 1*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2015. ISBN 978-80-244-4532-8.
- [36] BAJER, Jiří. *Optika 2*. 1. vyd. Olomouc: chlup.net, 2018. ISBN 978-80-907098-0-5.