

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

URČOVÁNÍ MECHANICKÝCH CHARAKTERISTIK MATERIÁLŮ VÍCEVRSTVÝCH STRUKTUR S VYUŽITÍM METODY ZVUKOVÉ REZONANCE A MODÁLNÍ MKP ANALÝZY

DETERMINATION OF THE MECHANICAL PROPERTIES OF THE MULTILAYER STRUCTURE
MATERIALS WITH UTILIZATION OF THE SONIC RESONANCE METHOD AND MODAL FE
ANALYSIS

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

Bc. JÁN FODOR

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. OLDŘICH ŠEVEČEK, Ph.D.

Abstrakt

Práca sa zaoberá určovaním mechanických vlastností zložiek kompozitnej keramiky nepriamym spôsobom, konkrétne youngovým modulom pružnosti. Na základe rešeršnej štúdie bolo zistené, že existuje popísaný spôsob určovania elastických vlastností jednej, prípadne aj viacerých zložiek kompozitných viacvrstvých materiálov na základe experimentálnej modálnej analýzy a modálnej analýzy pomocou MKP, prípadne analytických vzťahov. Metóda pomocou MKP bola oskúšaná na keramickom lamináte, kde sa určoval youngov modul pružnosti jednej z jej zložiek. Okrem toho bola snaha určiť youngove moduly pružnosti oboch zložiek materiálu užitím prvých dvoch ohybových vlastných frekvencií. Nepodarilo sa dosiahnuť uspokojivých výsledkov. Citlivostná analýza ukázala, že vrstvy, ktorých youngov modul pružnosti sa určoval sú vzhľadom na svoju malú relatívnu hrúbku v porovnaní s hrúbkou laminátu a pre polohu v lamináte príliš citlivé na malé zmeny vstupných parametrov. Na základe tohoto boli v závere uvedené doporučenia pre vhodnú geometriu skúšobných telies.

Abstract

Thesis deals with determination of layerwise mechanical properties of composite ceramics by indirect method, namely Youngs modulus. Based on literature review, it was found that a method to determine elastic properties of one or more components of multi layered composites based on experimental modal analysis and finite element modal analysis, or analytical approach exists. Method based on FE modal analysis was applied to ceramic laminate, where it was attempt to determine youngs modulus of one component. Beyond that, it was attempt to determine Youngs moduli of both components using first two bending resonant frequencies. Results were unsatisfying. Sensitivity analysis showed that layers with unknown Youngs modulus were overly sensitive to small changes in input parameters due to their small relative thickness with respect to thickness of laminate and due to location in laminate. Based on this conclusion, recommendations were made with respect to suitable geometry of test specimens.

Klíčová slova

AMZ, ATZ, experimentálna modálna analýza, keramický laminát, MKP, modálna analýza, metóda postupných lineárnych aproximácií, zvuková rezonancia

Keywords

AMZ, ATZ, ceramic laminate, experimental modal analysis, FEA, finite element model updating, modal analysis, sonic resonance, impulse excitation technique

FODOR, J. *Určování mechanických charakteristik materiálů vícevrstevných struktur s využitím metody zvukové rezonance a modální MKP analýzy*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 63 s. Vedoucí Ing. Oldřich Ševeček, Ph.D.

Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Bc. Ján Fodor
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Inženýrská mechanika a biomechanika
Vedoucí práce:	Ing. Oldřich Ševeček, Ph.D.
Akademický rok:	2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Určování mechanických charakteristik materiálů vícevrstevných struktur s využitím metody zvukové rezonance a modální MKP analýzy

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Náplní práce bude sestavení metodiky pro určování elastických materiálových charakteristik jednotlivých komponent vícevrstevných struktur pomocí metody zvukové rezonance, která k jejich stanovení (u monolitických materiálů) využívá rázem vybuzenou první vlastní (ohybovou) frekvenci - měřenou na trámečkovém vzorku „libovolných“ rozměrů. Z této vlastní frekvence a rozměrů vzorku se následně (s využitím empirických vztahů daných příslušnou normou) stanoví hledané materiálové charakteristiky. Norma k této metodě je však definována pouze pro monolitický (homogenní) vzorek a nelze ji tak přímo použít v případě kompozitních (vícevrstevných) materiálů, kde jsou neznámé materiálové charakteristiky u jedné, případně více komponent. Cílem práce by tedy bylo navrhnout metodiku, která by umožnila využití rezonanční metody i pro stanovení mechanických charakteristik jednotlivých materiálů vícevrstevné struktury bez nutnosti připravovat monolitické vzorky všech přítomných materiálů. K řešení problematiky by byla využita reálná experimentální data (naměřená na keramických laminátech), dále (studentem navržená) parametrická modální analýza v MKP softwaru ANSYS, a pro jednoduché případy může být využito i analytického přístupu.

Cíle diplomové práce:

- 1) Provést rešerši v oblasti určování elastických charakteristik homogenních i vícevrstevných struktur pomocí nepřímých metod a zaměřit se na metodu zvukové rezonance.
- 2) Vytvořit nástroj pro výpočet vlastních frekvencí monolitického volného prizmatického nosníku a tyto vlastní frekvence verifikovat s experimentálně naměřenými daty na konkrétních vzorcích dostupnými v literatuře.
- 3) Vytvořit parametrický MKP model v systému ANSYS pro modální analýzu (výpočet vlastních

frekvencí) monolitické/vícevrstvé struktury a opět verifikovat jeho funkčnost jako v bodu 2.

4) Analyzovat vztah mezi vlastní frekvencí 2 komponentního laminátu a rozložením jednotlivých vrstev po jeho výšce (při zachování stejného objemového podílu komponent), dále vztah mezi objemovým podílem jednotlivých materiálových komponent a vlastní frekvencí vzorku, případně vztahy mezi dalšími parametry a vlastní frekvencí pro detailnější pochopení problému a možnosti definovat závěry obecnějšího charakteru.

5) Definovat metodiku jak s využitím metody zvukové rezonance, MKP modální analýzy (případně analytického řešení) a základních vztahů mechaniky kompozitů určit u vícevrstvé struktury neznámé elastické charakteristiky jedné z jejích komponent a ověřit funkčnost této metodiky porovnáním s reálnými charakteristikami.

Seznam literatury:

ANSYS Inc (2015), ANSYS Release 16.2 User's Manual, Swanson Analysis Sys. Inc, Pennsylvania.

ASTM E1875-08 (2013), Standard Test Method for Dynamic Young's Modulus, Shear Modulus, and Poisson's Ratio by Sonic Resonance.

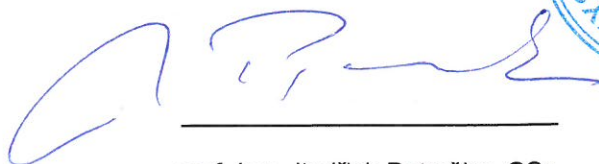
Dickson, R. W. and J. B. Wachtman (1971), An alumina standard reference material for resonance frequency and dynamic elastic moduli measurement. I. For use at 25 C , Journal of Research of the National Bureau of Standards Section A: Physics and Chemistry, 75A, 155.

Petyt, M. (2010), Introduction to Finite Element Vibration Analysis, 2nd ed., 518 pp., Cambridge University Press, New York, USA.

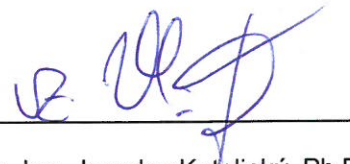
Qatu, M. S. (2004), Vibration of Laminated Shells and Plates, 409 pp., Elsevier, Amsterdam.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17.

V Brně, dne 4. 11. 2016



prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu



doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne pod vedením vedúceho diplomovej práce s použitím literatúry citovanej na konci.

Bc. Ján Fodor

Chcel by som poďakovať vedúcemu práce Ing. Oldřichovi Ševečkovi, Ph.D. za trpezlivosť, poskytnutý čas a cenné rady, Ing. Zdeňkovi Chlupovi, Ph.D. za experimentálne dáta a konzultácie a rodičom za plnú podporu počas štúdia.

Bc. Ján Fodor

Obsah

1 Úvod	3
2 Rešerš literatúry	4
2.1 ASTM Standard E1875-08 (2013)	4
2.2 Určovanie mechanických charakteristík nepriamymi metódami	5
2.3 Zisťovanie charakteristík jednotlivých zložiek materiálu	7
2.3.1 Použitie analytických vzťahov	7
2.3.2 Určovanie pomocou MKP a optimalizácie	8
3 Analýza úlohy	12
3.1 Systém podstatných veličín	12
3.2 Typ úlohy a voľba metódy riešenia	12
4 Teoretický úvod	14
4.1 Voľné priečne kmitanie nosníkov	14
4.2 Modálna analýza v MKP	16
4.3 Porovnanie analytického a MKP riešenia s referenčnými telesami	17
4.4 Experimentálna modálna analýza	18
4.5 Vplyv spôsobu zahrnutia hustoty materiálov	19
4.6 Vplyv zbytkových napätí	22
5 Určovanie youngovho modulu pružnosti	25
5.1 Analytický spôsob	25
5.2 Numerický prístup - ladenie mechanických sústav	25
5.2.1 Citlivostné koeficienty	27
5.2.2 Realizácia ladenia v APDL	28
5.2.3 Ukážkový príklad	29
6 Experimentálne dáta	33
7 Prezentácia výsledkov riešenia	35
7.1 Konvergencia siete vzhľadom na frekvenciu	35
7.2 Homogénne telesá - monolity	37
7.3 Laminát 3	39
7.3.1 Určenie youngovho modulu AMZ aj ATZ naraz užitím prvej a druhej ohybovej frekvencie	43
7.4 Vplyv počiatočných hodnôt modulov pružnosti	44
8 Analýza výsledkov	46
8.1 Neistoty a chyby	46
8.2 Citlivostná analýza	46
8.2.1 Vplyv meraných veličín na youngov modul AMZ pri užití prvej ohybovej frekvencie	48
8.2.2 Vplyv meraných veličín na youngov modul AMZ pri užití druhej ohybovej frekvencie	51

OBSAH

8.2.3	Citlivosti prvých 6 vlastných frekvencií na moduly pružnosti zložiek laminátu 3	52
9	Záver	55
10	Zoznam použitých skratiek a symbolov	60

1. Úvod

Určovanie mechanických charakteristík materiálov pomocou metódy experimentálnej modálnej analýzy patrí medzi nedeštruktívne metódy, využívajúce vzťah medzi mechanickými vlastnosťami materiálu a jeho modálnymi vlastnosťami. Využíva vzťah medzi tuhosťou telesa, ktorá je funkciou jeho elastických konštánt a vlastnými frekvenciami telesa. V spojení s parametrickou modálnou analýzou pomocou MKP a optimalizáciou, prípadne analytickými vzťahmi je to rozšírený spôsob určovania elastických vlastností materiálov. Niekedy je výhodnejšie používať takéto nedeštruktívne metódy namiesto deštruktívnych, napríklad v prípade, že skúšobné teleso musí byť aj po skúške použiteľné. Prípadne malé rozmery telesa nedovoľujú použiť iný typ skúšky.

Neštandardná situácia

V štandardoch ASTM je popísaná metodika určovania dynamického youngovho modulu pružnosti, modulu pružnosti v šmyku a poissonovho pomeru izotropného telesa - nosníka na základe experimentálnej modálnej analýzy (metódou zvukovej rezonancie) a analytických vzťahov s korekčnými faktormi pre rozmery skúšobného telesa. Takýmto spôsobom dostaneme v prípade materiálov zložených z viac zložiek len takzvané efektívne (niekedy nazývané inžinierske) hodnoty spomínaných elastických charakteristík skúšobného telesa ako celku. Nakoľko sú pre väčšinu praktických aplikácií dôležité práve efektívne hodnoty, je v literatúre určovaní charakteristík jednotlivých zložiek venovaná až na niekoľko výnimiek, napríklad [1], [2], malá pozornosť.

Formulácia a ciele riešenia úlohy

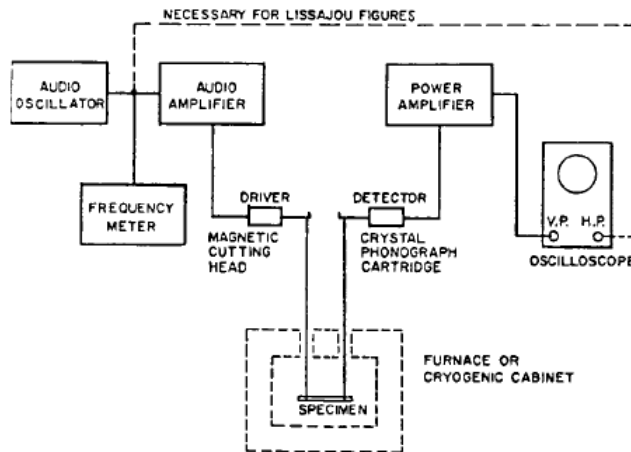
Na základe rešerše literatúry sa zadanie tejto práce nedá považovať za problém, lebo bolo zistené, že je algoritmus riešenia v podstate popísaný. Jednak analytickým spôsobom použitím bernoulliho teórie nosníka, tak aj numerickým spôsobom použitím dostupného MKP softvéru. Cieľom práce je overiť metodiku, prípadne ju rozšíriť o zistené závery, ako pomocou experimentálnej modálnej analýzy a modálnej MKP analýzy v SW ANSYS, prípadne analytických vzťahov určiť elastické charakteristiky jednej zložky bez nutnosti pripravovať monolitické skúšobné vzorky jeho jednotlivých vrstiev (zložiek). K riešeniu budú dostupné dáta namerané na reálnych keramických laminátoch.

2. Rešerš literatúry

2.1. ASTM Standard E1875-08 (2013)

Standard Test Method for Dynamic Young's Modulus, Shear Modulus, and Poisson's Ratio by Sonic Resonance [3]

Dokument ASTM¹ popisuje metódu určenia dynamického youngovho (v ďalšom bude dynamický modul pružnosti nazývaný modul pružnosti, budeme predpokladať, že rozdiely v ich hodnote sú pri izbových teplotách u keramiky riešenej v tejto práci zanedbateľné) modulu pružnosti, modulu pružnosti v šmyku a poissonovho pomeru pomocou zvukovej rezonancie a analytických vzťahov s korekčnými faktormi pre geometriu telesa. Špecificky je postup určený pre elastické, homogénne a izotropné materiály, v prípade kompozitov dostaneme hodnoty elastických konštánt bez informácie o jednotlivých komponentách, tie možno za určitých okolností dopočítať. Je možno merať za izbových, zvýšených aj kryogénnych teplôt. Ďalej sú v dokumente obsiahnuté informácie o doporučených rozmeroch skúšobných telies, umiestneniu podpôr pre jednotlivé tvary kmitu (prvý ohybový a prvý torzný), meracom aparáte a podobne. Pre konkrétne druhy materiálov sa pre bližšie informácie odkazuje na ďalšie štandardy



Obr. 2.1: Typický merací aparát [3]

Stručne pre výpočet elastických konštánt, obdĺžnikový prierez nosníka: Pre youngov modul platí

$$E = 0.9465 \frac{m f_f^2 L^3}{b t^3} T_1 \quad (2.1)$$

kde E [Pa] je youngov modul pružnosti, m [g] hmotnosť (nosníka), b [mm] šírka, L [mm] dĺžka, t [mm] hrúbka, f_f [Hz] - prvá vlastná ohybová frekvencia (flexural) a $T_1 = f(\mu, t/L)$ je korekčný faktor zahrňujúci vplyv rotačnej zotrvačnosti a šmyku, ktorý sa prejavuje vo zvýšenej miere úmerne s rastúcim pomerom hrúbky ku dĺžke nosníka tým, že znižuje vlastnú frekvenciu. V závislosti na rozmeroch a znalosti poissonovho pomeru buď zistíme E priamo, alebo pomocou iteratívneho výpočtu zahrňujúceho nástrel poissonovho

¹American Society for Testing and Materials International [4].

pomeru μ a výpočet modulu G . Modul pružnosti v šmyku pre obdĺžnikový prierez získame pomocou vzťahu

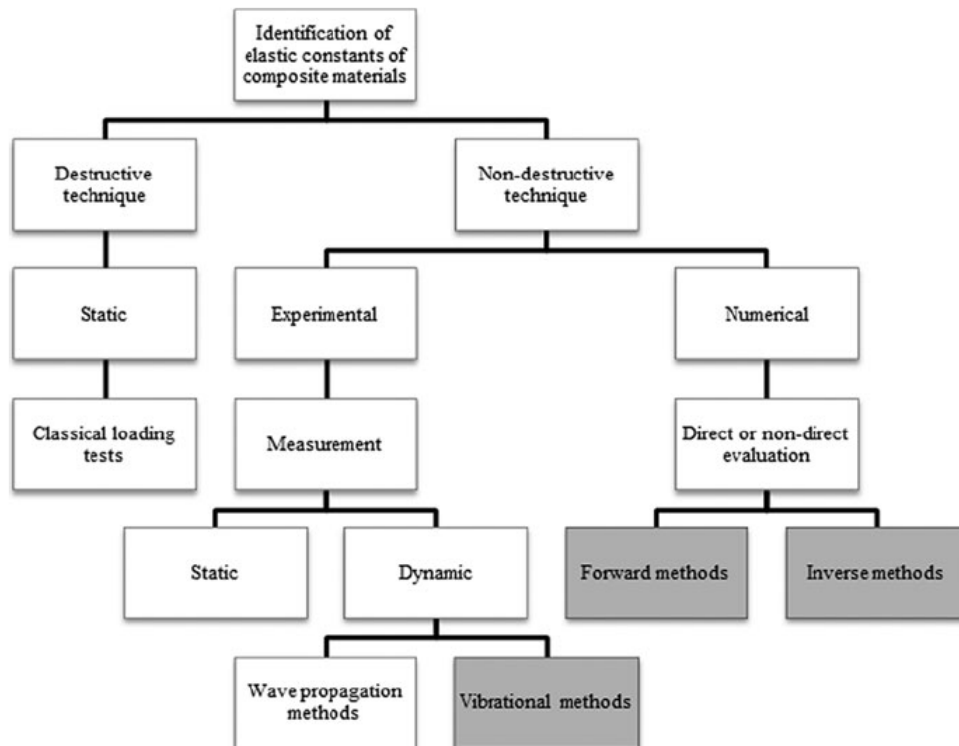
$$G = \frac{4Lm f_t^2}{bt} [B/(1 + A)] \quad (2.2)$$

kde G [Pa] je modul pružnosti v šmyku, f_t [Hz] prvá vlastná torzná frekvencia (torsional) a $A, B[t/b]$ sú korekčné faktory.

2.2. Určovanie mechanických charakteristík nepriamymi metódami

Rešerš dostupnej literatúry

Z hľadiska spôsobu zisťovania materiálových vlastností možno metódy ich určovania deliť rôznymi spôsobmi. Príklad takéhoto delenia je na obrázku 2.2. Z hľadiska trvalého poškodenia skúšobných telies existujú metódy deštruktívne a nedeštruktívne. Typickým príkladom deštruktívnej metódy je klasická jednoosá ťahová skúška, pri ktorej sa teleso natahuje až pokiaľ nedosiahne medzného stavu lomu. Ďalším príkladom môže byť skúška rázom v ohybe charpyho kladivom pre určenie lomovej húževnatosti. Nevýhodou týchto metód je zničenie skúšaného telesa, čo je niekedy nežiadúce. Medzi nedeštruktívne metódy patria statické metódy, v ktorých sa teleso zafažuje pod úroveň medze klzu. Ďalej dynamické metódy, tie možno deliť na rezonančné a na metódy založené na šírení vln skúšobným telesom.



Obr. 2.2: Metódy určovania materiálových vlastností) [5]

2.2. URČOVANIE MECHANICKÝCH CHARAKTERISTÍK NEPRIAMymi METÓDAMI

Rozsiahlu rešerš ohľadom určovania mechanických charakteristík materiálov so zameraním na elastické vlastnosti (aj) rezonančnými metódami možno nájsť napríklad v článkoch [5] a [6]. Možno urobiť záver, že častokrát metódy spočívajú v spojení experimentálnej modálnej analýzy a následnej optimalizácie parametrov modelu materiálu pomocou MKP. V anglickej literatúre sa niekedy nazývajú finite element model updating, mixed numerical-experimental techniques (MNETs), prípadne mixed numerical-experimental methods, teda zmiešané numericko-experimentálne metódy, techniky, prípadne iné podobné názvy.

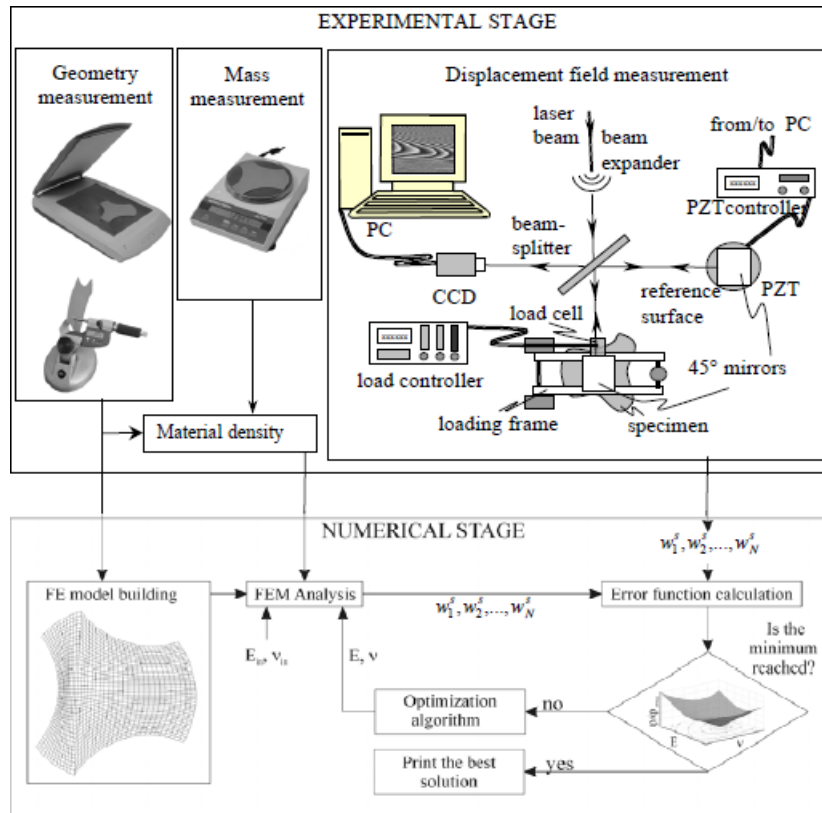
Jednoducho sa dajú popísať nasledovne: Z experimentálnej modálnej analýzy sa získajú vlastné frekvencie, prípadne aj tvary - dynamická odozva daných skúšobných telies. Nasleduje optimalizácia, ktorá má za cieľ vhodným pozmenením hodnôt materiálových parametrov zmenšiť rozdiel hodnôt vlastných frekvencií prípadne tvarov z experimentu a MKP simulácie. Inak povedané, je snaha o naladenie dynamického chovania diskretizovaného modelu na chovanie reálneho telesa zisteného z experimentu. Riešenie sa vykonáva dokiaľ rozdiely frekvencií prípadne tvarov (prípadne suma rozdielov a podobne) nepoklesnú pod stanovenú úroveň. Keď tak nastane, získajú sa z databázy modelov materiálu v MKP softvéri materiálové charakteristiky. Nutnosť použitia viacerých vlastných frekvencií a tvarov závisí na počte neznámych parametrov optimalizačnej úlohy, pretože napríklad izotropné telesá sa popisujú 2 nezávislými parametrami, ortotropné 4 (v prípade 2D úlohy a 9 v prípade 3D úlohy) a tak ďalej. Úloha sa obvykle rieši ako preurčená sústava rovníc. Na optimalizáciu sa okrem gradientných metód využívajú rôzne algoritmy. Príkladom môžu byť metóda odozvovej plochy [7], [8] a genetické algoritmy [9], [10]. Líšia sa svojimi princípmi, cieľ je ale ten istý - pomocou dynamickej odozvy získať materiálové parametre.

Uvedeným spôsobom sa zisťujú materiálové charakteristiky (najčastejšie elastické) jednozložkových materiálov aj kompozitov. V prípade kompozitov je záujmom väčšinou získať vlastnosti kompozitu ako celku, takzvané inžinierske konštanty, ale v princípe je možné určiť aj vlastnosti jednotlivých zložiek za splnení určitých podmienok pre počet vzoriek, geometrickú konfiguráciu ich vrstiev a počet meraných frekvencií a tvarov. Okrem samotných elastických charakteristík sa určuje aj tlmenie, napríklad [11].

Pomerne veľký počet článkov na určovanie elastických konštánt materiálov pochádza z Kalábrijskej univerzity. Budú uvedené niektoré príklady. V [12] zisťovali youngov modul pružnosti a poissonov pomer pre izotropné pravouhlé dosky pomocou približných vzťahov pre vlastné frekvencie voľne kmitajúcich dosiek podľa Warburtona [13], ktorý použil rayleighovu metódu. Pre vlastnú frekvenciu dosky uvažovali vzťah

$$f = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{D}{\rho t}} \frac{\lambda}{a^2} \quad (2.3)$$

kde $D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$ je ohybová tuhosť dosky, ρ hustota, t hrúbka a a veľkosť dlhšej strany dosky. Bezrozmerný faktor λ získali MKP simuláciami, užitím 8 uzlových kvadratických rovinných prvkov. Poissonov pomer získali ako pomer získaných vlastných frekvencií pomocou tabuľky. Osamostatnením D 2.3 sa získa vzťah pre youngov modul pružnosti. V [14] zisťovali elastické konštanty ortotropných dosiek ľubovoľného tvaru pomocou nedeštruktívneho statického testu. Snímali posuvy optickou metódou a pomocou genetického algoritmu sa na tieto deformácie snažili 'nafitovať' MKP model.

Obr. 2.3: *Statická skúška podľa [14]*

Youngov modul pružnosti a poissonov pomer pre tenké izotropné dosky ľubovoľného tvaru určovali v [15]. Použili SW MSC/Nastran pre MKP výpočty a Matlab pre optimalizáciu. Zistili, že pre presné určenie konštánt boli pre skúšané tvary telies potrebné prvé 4 vlastné frekvencie.

2.3. Zisťovanie charakteristík jednotlivých zložiek materiálu

2.3.1. Použitie analytických vzťahov

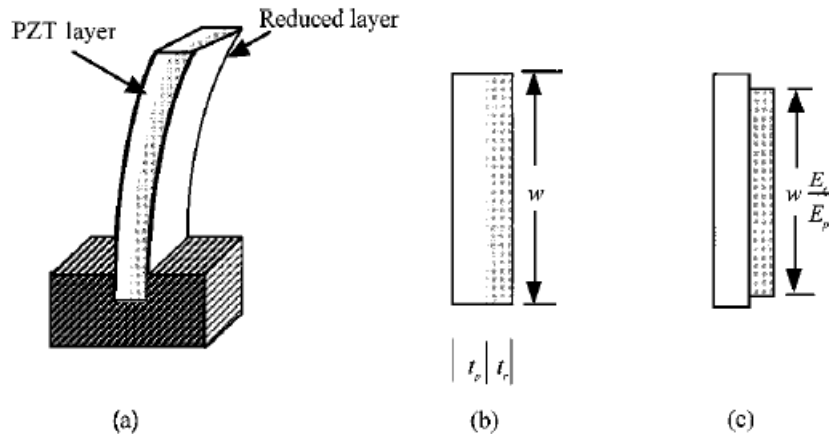
V literatúre sa dajú najčastejšie nájsť články, kde autori zisťovali youngov modul pružnosti pre prípady telies uvažovaných ako nosníky podľa bernoulliho teórie, ktoré boli zložené z vrstiev o 2 materiáloch, pričom chceli zistiť modul jedného z nich. Z experimentálne určenej frekvencie ohybového tvaru kmitu nosníka si analytickým vzťahom medzi frekvenciou a materiálými a geometrickými vlastnosťami vyjadrili jeho tuhosť, pričom ho upravili pre prípad kompozitných nosníkov. Tieto vzťahy budú bližšie rozobraté v ďalších kapitolách.

V [16] sa zaoberali určovaním modulu pružnosti povlakov kompozitnej keramiky dynamickou rezonančnou metódou a statickým prístupom - štvorbodovým ohybom. V dynamickom prístupe vychádzali zo vzťahov medzi modulom pružnosti a ohybovou frekvenciou, pričom vzťahy upravili uvažovaním priečného prierezu pozostávajúceho zo zložiek o

2.3. ZISŤOVANIE CHARAKTERISTÍK JEDNOTLIVÝCH ZLOŽIEK MATERIÁLU

rôznych moduloch pružnosti. Pre statický test použili kompozit: grafitový substrát a povlak karbidu kremíku (SiC). Pre dynamický test použili kompozity sklo+sklo, alumina (oxid hlinitý Al_2O_3)+sklo a grafit+ SiC . V prípade dynamického testu dosiahli dobrej zhody v porovnaní s (vopred) známymi vlastnosťami okrem prípadov, keď ako metódu spojenia vrstiev kompozitu sklo+sklo použili spekanie miesto lepidla (rozdielne teplotné rozťažnosti) a v prípade kompozitu grafit+ SiC z dôvodu zmeny hrúbky karbidu kremíku po dĺžke a šírke nosníka. Okrem toho, v prípade laminátu sklo+sklo pozorovali vplyv plošného podielu lepidla na rozhraní medzi vrstvami a podľa očakávania s jeho menším podielom klesal určený modul pružnosti meranej vrstvy z dôvodu porušenia predpokladov o dokonalom spojení vrstiev v teórii kompozitných nosníkov.

V [17] určovali youngov modul pružnosti redukovanej (elektromechanicky neaktívnej) vrstvy aktuátoru-nosníka podobným spôsobom ako v predošlom prípade užitím vzťahov pre komozitné nosníky. Modul pružnosti piezo vrstvy bol vopred známy. Použili dynamickú metódu a votknutý nosník vybudili pomocou elektromechanicky aktívnej piezo vrstvy nosníka. Počas výroby redukovanej vrstvy sa nosník v dôsledku nerovnomernej teplotnej rozťažnosti vrstiev zakrivil, to sa však zmiernilo ďalšími procesmi pri jeho príprave, zbytkové napätia poklesli, výsledná krivosť bola považovaná za zanedbateľnú a nosník bol uvažovaný ako rovný (priamy). Pre vyjadrenie kvadratického momentu prierezu kompozitu použili metódu ekvivalentného prierezu podľa obrázku 2.4



Obr. 2.4: Schéma aktuátoru RAINBOW (piezo a redukovaná vrstva) a ilustrácia metódy ekvivalentného prierezu [17]

2.3.2. Určovanie pomocou MKP a optimalizácie

Základný problém určovania materiálových parametrov pre telesá zložené z viacerých materiálov je ten, že z jedného skúšobného telesa vieme obvykle stanoviť len vlastnosti telesa ako celku, pričom vlastnosti vrstiev ostávajú neznáme. V prípade, že napríklad nepoznáme vlastnosti jednej vrstvy a ostatných áno, sa dajú vlastnosti neznámej vrstvy dopočítať spôsobom ako to urobili v článkoch zmienených vyššie. V prípade 2 a viac neznámych vrstiev je to o niečo komplikovanejšie. Tomuto problému sa podrobne venuje dizertačná práca: [1]. Pri hľadaní literatúry to bola nájdená ako jediná práca, ktorá sa dopodrobna zaoberá určením elastických vlastností jednotlivých vrstiev viacvrstvých materiálov. Autor v nej vypracoval metodiku, ktorá na základe rezonančných skúšok potrebného po-

čtu telies, ich MKP modelov a optimalizácie dokáže určiť elastické konštanty jednotlivých vrstiev. Dôležitý vzťah z jeho práce je

$$n_{konf} \geq n_{mat} \quad (2.4)$$

slovne: počet konfigurácií vrstiev musí byť rovný alebo väčší počtu neznámych materiálov. Ak teda máme napríklad materiál z 2 vrstiev (komponent) z 2 neznámych materiálov, pričom chceme určiť ich elastické konštanty, musí byť geometrická konfigurácia ich vrstiev rozdielna v tom zmysle, že pomery hrúbok vrstiev vzhľadom k celkovej hrúbke telesa sa musia líšiť. To sa dá docieľiť napríklad 2 sériami skúšobných telies z daných materiálov s rozdielnymi pomerni hrúbok vrstiev. Ďalšia možnosť sú 2 série skúšobných telies, s pôvodne rovnakým pomerom hrúbok vrstiev, pričom ale na jednu sériu pripevníme tretiu vrstvu so známymi vlastnosťami. Ďalšou (zrejmovou) možnosťou je mechanické odstránenie jednej vrstvy z jednej série, kde sa najskôr určia charakteristiky série s odstránenou vrstvou a potom s 2 vrstvami.

Ide o to, aby sa elastické konštanty jednotlivých vrstiev podieľali na celkovej tuhosti telesa a tým pádom na vlastných frekvenciách v rôznom pomere. To umožní zostaviť sústavu rovníc buď preurčenú (riešenie získané ako najlepšie priblíženie pomocou metódy najmenších štvorcov), alebo s jednoznačným riešením, ktorá sa rieši iteratívnym spôsobom. Sústava rovníc má obecnú tvar

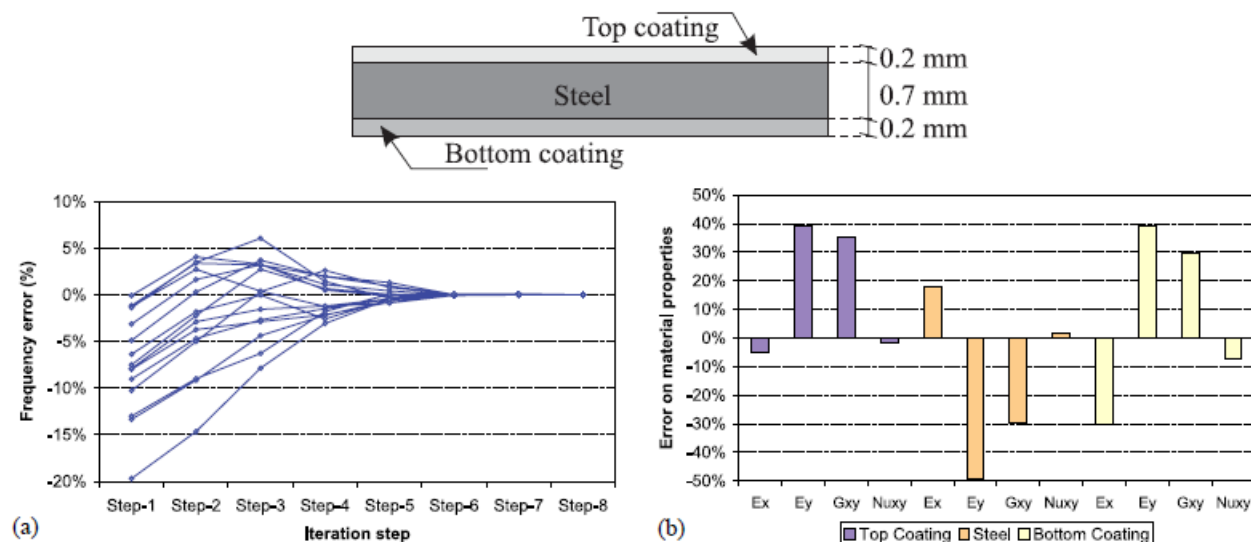
$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{S} \Delta \mathbf{p} \quad (2.5)$$

kde Δr sú relatívne rozdiely frekvencií experimentálnych a získaných výpočtom pomocou MKP, \mathbf{S} je matica citlivosti a Δp je vektor relatívnych zmien neznámych parametrov - elastických konštánt. Sústava rovníc sa rieši iteračne a má za cieľ minimalizovať reziduum - ľavú stranu, pričom sa tak získajú hodnoty neznámych parametrov - elastických konštánt \mathbf{p} .

Autor v prípade ortotropných materiálov (rovinná úloha) a telies tvaru dosky používal prvých 5 vlastných frekvencií s tvarom dosky takým, aby bolo prvých 5 vlastných frekvencií dostatočne citlivých na moduly pružnosti pozdĺžny E_1 , priečny E_2 , a na modul pružnosti v šmyku G_{12} a poissonov pomer μ_{12} . V prípade izotropných materiálov doporučuje prvú ohybovú a prvú torznú frekvenciu.

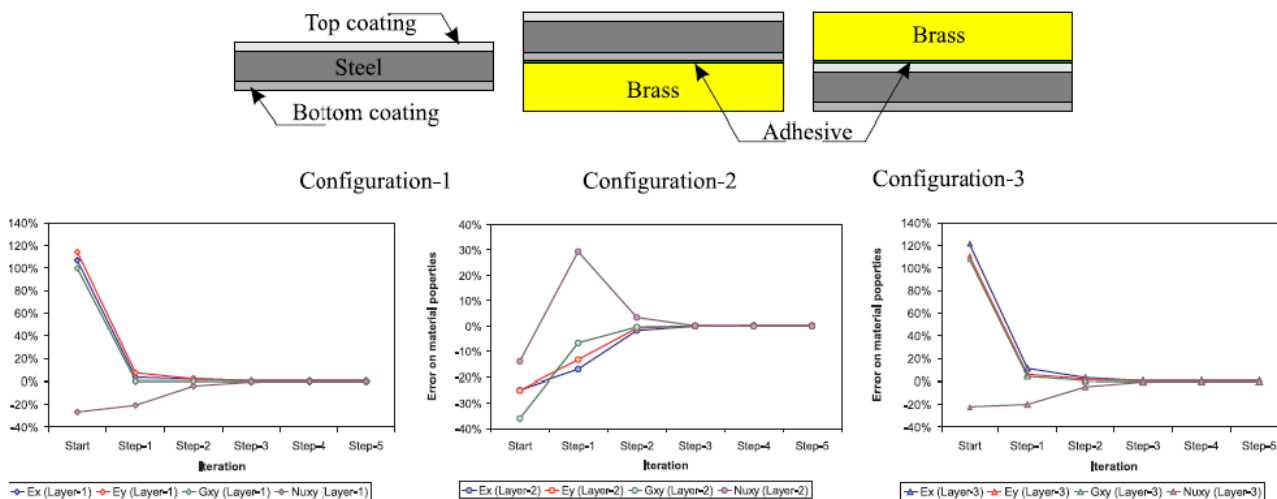
Nejednoznačnosť riešenia pomocou jedného tenkostenného telesa (jednej konfigurácie) je ilustrovaná na príklade z [18]. Autori v nej pomocou MKP modálnej analýzy telesa podľa obrázku 2.5 získali 'experimentálne' frekvencie. Pôvodne použité elastické konštanty (ortotropný materiál, rovinná úloha, 3 vrstvy \times 4 konštanty = 12 neznámych parametrov) telesa uvažovali ako neznáme a určovali ich pomocou ich vlastnej techniky zvanej 'resonalyzer', ktorou predtým používali na určovanie konštánt telesa ako celku, pričom využíva prvých 15 vlastných frekvencií telesa. Hodnoty konštánt vrstiev sa lišili od ich skutočnej hodnoty rádovo, pričom všetkých 15 vlastných frekvencií sa podarilo naladiť na pôvodné hodnoty.

2.3. ZISŤOVANIE CHARAKTERISTÍK JEDNOTLIVÝCH ZLOŽIEK MATERIÁLU



Obr. 2.5: Rovnaké frekvencie, rôzne elastické konštanty [18]

Potom použili závery vyjadrené nerovnicou 2.5 a použili metódu zo spomínanej auto-rovej dizertačnej práce, čím zároveň overili jej funkčnosť, obrázok 2.6.



Obr. 2.6: Správne určenie elastických konštant [18]

Ako ďalší príklad zisťovania vlastností zložiek materiálu je určovanie elastických konštant vlákna a matrice u FRP (fiber reinforced polymer) v [2]. Využili SW Abaqus a pomocou C++, využitím iteračného algoritmu (gradientná optimalizácia) určovali najprv vlastnosti len vlákien, len matrice a potom vlákien a matrice. Ako konečný prvok použili 8 uzlový C3D8R a vlákna modelovali pomocou prúťového prvku T3D2. Okrajové podmienky uvažovali 4×voľný Ako cieľovú funkciu na minimalizovanie použili rozdiely vo vybraných vlastných frekvenciách a vlastných tvaroch. Algoritmus neskúšali priamo na reálnych skúšobných telesách, ale ako 'experimentálne dáta' použili výsledky modálnej analýzy konečnoprvkového modelu s realisticky odhadnutými hodnotami vlastností vlákien a matrice. Využili rozdiely v citlivostiach jednotlivých frekvencií na zmeny parametrov vlákien a matrice. Do 'experimentálnych' frekvencií a tvarov zanesli rôzne hodnoty šumu, pričom to na konvergenciu a určené hodnoty parametrov nemalo významný vplyv. Okrem toho skúšali rôzne hodnoty počiatkových vstupných modulov vstupujúcich do výpočtu.

Svoju metódu neskôr rozšírili pre odhad tuhosti zahrnutej vo forme pružín do okrajových podmienok dosky [19].

Záver z rešerše článkov:

V literatúre sa dá najčastejšie stretnúť s rezonančnou metódou v spojení s MKP pre určovanie tzv. inžinierskych konštánt, ale existuje aj spôsob nájdania elastických konštánt jednotlivých vrstiev kompozitných materiálov, prípadne ich zložiek kompozitu.

3. Analýza úlohy

Entitou je obecné teleso tvaru nosníka alebo dosky zložené z viacerých vrstiev, v prípade praktického overenia funkčnosti metódy popísanej v práci je to keramický laminát tvaru nosníka.

3.1. Systém podstatných veličín

Geometria a topológia entity

Keramický laminát je teleso približne tvaru hranolu, zložené z vrstiev o rôznych mechanických vlastnostiach. Vrstvy sú uložené na sebe po hrúbke nosníka a sú pevne (bez prokluzu) spojené v procese ich výroby.

Väzby entity na okolie

Teleso je pri rezonančnej skúške položené na tenké podpory - vlákna, prípadne penovú podložku o nízkej tuhosti (nízkom module pružnosti) tak, aby aproximovali deformačné okrajové podmienky voľný-voľný.

Aktivácia entity

Teleso sa vybudí rázovým kladívkom, čo spôsobí jeho dynamickú odozvu - kmitanie telesa o jeho vlastných frekvenciách.

Ovplyvnenie entity okolím

Mechanické vlastnosti môžu byť teplotne závislé. Okrem toho, v keramických laminátoch sa môžu vyskytnúť výrazné (stovky megapascalov) zbytkové napätia vzniknuté v procese výroby. Budeme uvažovať izbovú teplotu, teda 'bežné podmienky'.

Vlastnosti entity

Z pohľadu výpočtového modelovania sú podstatné geometrické rozmery, hmotnosť a elastické vlastnosti. Všetky tieto vlastnosti priamo ovplyvňujú dynamickú odozvu telesa. Tieto veličiny sú obecné stochastické, ale budú uvažované ako deterministicky dané.

Procesy a stavy entity

Teleso koná kmitavý pohyb o vlastných frekvenciách, zložený z vlastných tvarov, ktorý s časom doznieva.

Prejavy entity do okolia

Kmitavým pohybom vyvoláva zvukové vlny, ktoré zachytí merací prístroj a analyzuje jeho dynamickú odozvu - frekvenčné spektrum.

3.2. Typ úlohy a voľba metódy riešenia

Typ úlohy

Jedná sa o nepriamu úlohu. Z prejavov entity - zmeranej vlastnej frekvencie sa určujú vlastnosti entity - youngov modul pružnosti.

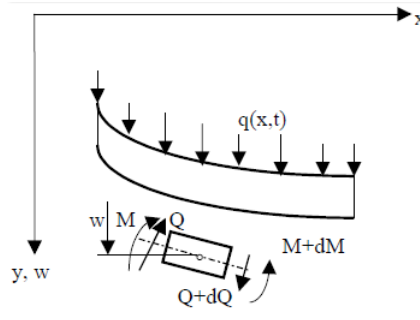
Voľba metódy riešenia úlohy

Prednostne bude za metódu riešenia úlohy vybraná parametrická modálna analýza pomocou MKP v programe ANSYS v spojení so spektrálnym ladením metódou postupných lineárnych aproximácií. Budú stručne popísané aj zjednodušené analytické možnosti riešenia.

4. Teoretický úvod

4.1. Voľné priečne kmitanie nosníkov

Uvažujme nosník podľa obrázku 4.1, uvažujme predpokladov podľa [20]. V ďalšom budeme predpokladať, že jeho priečný prierez bude obdĺžnik o rozmeroch $A = b \times t_{celk}$, kde b a t_{celk} sú šírka, respektíve celková výška (hrúbka) prierezu.



Obr. 4.1: priečne kmitajúci nosník a jeho voľňený prvok [20]

Pohybová rovnica voľného ($q(x,t) = 0$) priečného kmitania takéhoto nosníka, po úpravách vyjadrená v priehyboch, zanedbaním členov zohľadňujúcich vplyv rotačnej zotrvačnosti a šmyku má tvar

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial t^4} = 0 \quad (4.1)$$

kde D je ohybová tuhosť nosníku a ρA je hmotnosť na jednotku dĺžky. Ohybová tuhosť je daná ako súčin modulu pružnosti a kvadratického momentu prierezu

$$D = EJ_y = E \int_A z^2 dA \quad (4.2)$$

Priehyb nosníka $w(x,t)$ možno zapísať ako súčin 2 funkcií, času a polohy.

$$w(x,t) = T(t)W(x) \quad (4.3)$$

pričom

$$T(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) \quad (4.4)$$

$$W(x) = B_1 \sinh(px) + B_2 \cosh(px) + B_3 \sin(px) + B_4 \cos(px) \quad (4.5)$$

kde $p = \lambda/a$ (a je dĺžka nosníka) a ω je vlastná uhlová frekvencia harmonického pohybu. Konštanty B_1, B_2, B_3, B_4 získame z okrajových podmienok a A_1, A_2 z počiatočných podmienok. Pre n -tú vlastnú uhlovú frekvenciu platí vzťah

$$\omega_n = \left(\frac{\lambda_n^2}{a^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho A}} \quad (4.6)$$

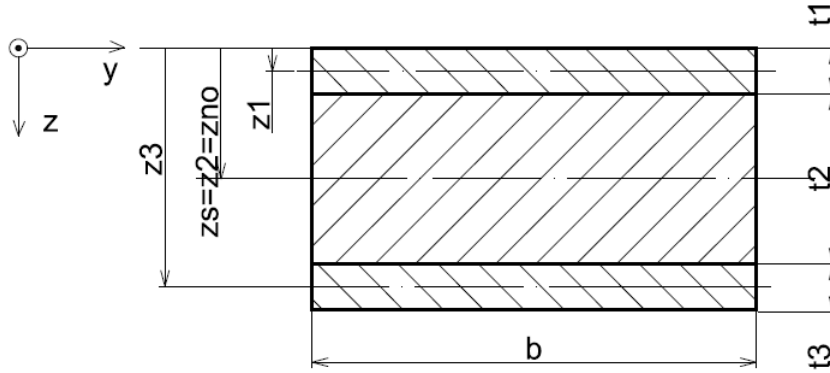
v ktorom λ_n je koreň frekvenčnej rovnice pre n -tú vlastnú frekvenciu. Pre okrajové podmienky nosníka voľný - voľný a prvú ohybovú frekvenciu platí $\lambda_1 = 4.73$.

Vzťah pre ohybovú tuhosť 4.2 platí len pre prípad homogénnych materiálov. V ďalšom vyjdeme z článku [22]. V prípade riešenia nosníkov s priečnym prierezom zloženým z viacerých vrstiev o rôznych tuhostiach môžu nastať tieto situácie:

1, vrstvy sú uložené symetricky vzhľadom k strednicovej ploche. Za strednicovú plochu berieme plochu prechádzajúcu geometrickým stredom prierezu a kolmú na smer priehybu nosníka. Poloha neutrálnej osi sa nemení, je stále totožná s polohou geometrického stredu prierezu z_s . Pre ohybovú tuhosť platí

$$D = b \sum_{i=1}^n E_i \left(\frac{t_i^3}{12} + t_i (z_i - z_s)^2 \right) \quad (4.7)$$

kde t_i sú hrúbky jednotlivých vrstiev a z_i sú súradnice geometrických stredov jednotlivých vrstiev. Tento vzťah dostaneme tak, že najprv určíme kvadratické momenty k osám prechádzajúcim stredmi jednotlivých vrstiev a potom ich pomocou steinerovej vety vyjadríme vzhľadom k neutrálnej ose.



Obr. 4.2: Symetrické vrstvenie

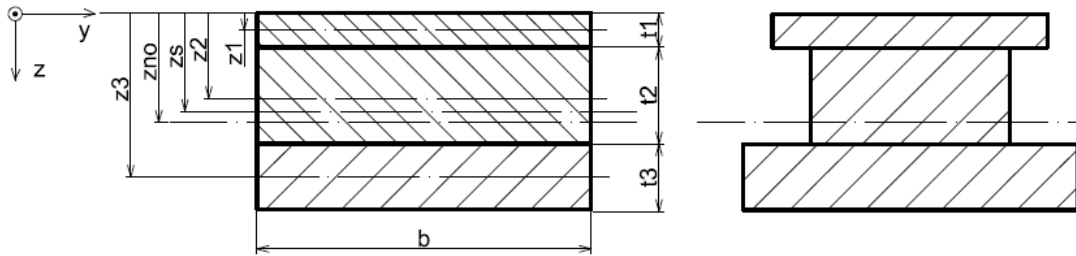
2, vrstvy nie sú uložené symetricky. Poloha neutrálnej osi nie je totožná s polohou geometrického stredu priečného prierezu. Pre určenie vlastnej ohybovej frekvencie je teda potrebné prepočítať polohu neutrálnej osi. Dá sa to rôznymi spôsobmi, napríklad takzvanou metódou ekvivalentnej plochy [24], obecnjšie v [22]. Princíp si možno predstaviť tak, že si vezmeme modul jednej vrstvy ako základný, pričom pomery modulov pružnosti vrstiev k základnému sú brané ako váhové koeficienty, ktorými sa prenasobia šírky daných vrstiev. Teda vznikne fiktívny priečny prierez o tuhosti ekvivalentnej pôvodnému s jedným modulom a vrstvami rôznej šírky. Poloha neutrálnej osi bude ťažiskom tohoto ekvivalentného prierezu

$$z_{no} = \frac{\sum_{i=1}^n E_i t_i z_i}{\sum_{i=1}^n E_i t_i} \quad (4.8)$$

Pre ohybovú tuhosť nosníka s využitím steinerovej vety a vzťahu 4.8 potom dostaneme

$$D = b \sum_{i=1}^n E_i \left(\frac{t_i^3}{12} + t_i (z_i - z_{no})^2 \right) \quad (4.9)$$

4.2. MODÁLNA ANALÝZA V MKP



Obr. 4.3: Nesymetricky vrstvený nosník a jeho ekvivalentný priečný prierez

Z vyššie uvedených vzťahov vyplýva, že okrem objemového podielu jednotlivých zložiek telesa z viacerých materiálov má na vlastnú frekvenciu vplyv aj ich poloha vrstvy voči neutrálnej ose, pričom vplyv je úmerný modulu pružnosti vrstvy a rastie so vzdialenosťou vrstvy od neutrálnej osy (youngov modul pružnosti je prenasobovaný kvadratickým momentom prierezu vrstvy vzhľadom k polohe neutrálnej osy).

4.2. Modálna analýza v MKP

Vlastné čísla a vlastné tvary

Uvažujme voľné netlmené kmitanie sústavy popísané sústavou pohybových rovníc v maticovom tvare

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

kde \mathbf{M} je matica hmotnosti a \mathbf{K} matica tuhosti. Pre výchylky predpokladáme harmonický pohyb $\mathbf{q} = \mathbf{u}e^{i\Omega t}$. Dosadením výchylek do pohybovej rovnice 4.11 a úpravami dostávame

$$(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M})\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.11)$$

Pre nenulové výchylky musí byť determinant výrazu v zátvorke rovný nule (nazýva sa frekvenčný determinant)

$$|\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M}| = 0 \quad (4.12)$$

To je splnené, pre hodnoty vlastných čísel (kvadrátov vlastných uhlových frekvencií) $\Omega_1^2, \dots, \Omega_n^2$, kde n je počet stupňov voľnosti sústavy. Každý vlastnej uhlovej frekvencii prináleží vlastný tvar vyjadrený vlastným vektorom. Veľkosť jeho zložiek môže byť ľubovoľná, pokiaľ sa zachovávajú pomery veľkostí jednotlivých zložiek. Preto sa vlastné vektory normujú, pričom sw ANSYS v základnom nastavení normuje podľa matice hmotnosti, čo je pre i -tý vektor vyjadrené ako

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i = 1 \quad (4.13)$$

Pohyb sústavy pre i -tý tvar kmitu je harmonickou funkciou času daný ako

$$\mathbf{q}_i(t) = \mathbf{v}_i (\sin \Omega_i t + \cos \Omega_i t) \quad (4.14)$$

4.3. Porovnanie analytického a MKP riešenia s referenčnými telesami

Vzťah 4.6 nezohľadňuje vplyv rotačnej zotrvačnosti a šmyku. V [21], ktorá je základom pre ASTM normu [3] je tabuľka s určenými youngovými modulmi pružnosti, poissonovými pomermi a modulmi pružnosti šmyku pre referenčné telesá o rozmeroch nosníka. Keby sme úlohu obrátili (autori uvádzajú, že rozdiel medzi statickým a dynamickým modulom pružnosti je 0.2 %) a na základe údajov z článku chceli určiť prvú vlastnú ohybovú frekvenciu nosníkov, v prípade nezahrnutia rotačnej zotrvačnosti a šmyku by sme dostali vlastné frekvencie o vyššej hodnote než je v článku uvedené. Pre nosníky A1, A2, A6, B1, B2, B6, C1, C2, C3, D1, D2 a D3 s pomerom dĺžky ku hrúbke približne 38/1 sú výsledky porovnávajúce MKP výpočet pomocou prvku SOLID186, analytický vzťah, analytický vzťah so zjednodušeným korekčným faktorom z [3] a referenčné frekvencie z článku. Korekčný faktor má tvar

$$T = 1 + 6.585(t/L)^2 \quad (4.15)$$

a úpravou vzťahu pre ohybovú frekvenciu dostaneme

$$\omega_{1kor} = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 + 6.585(t/L)^2}} \quad (4.16)$$

Poznámka: Pre vzťah medzi uhlovou frekvenciou $\omega [rads^{-1}]$ a frekvenciou vyjadrenou v hertzoch $[Hz] = [s^{-1}]$ platí

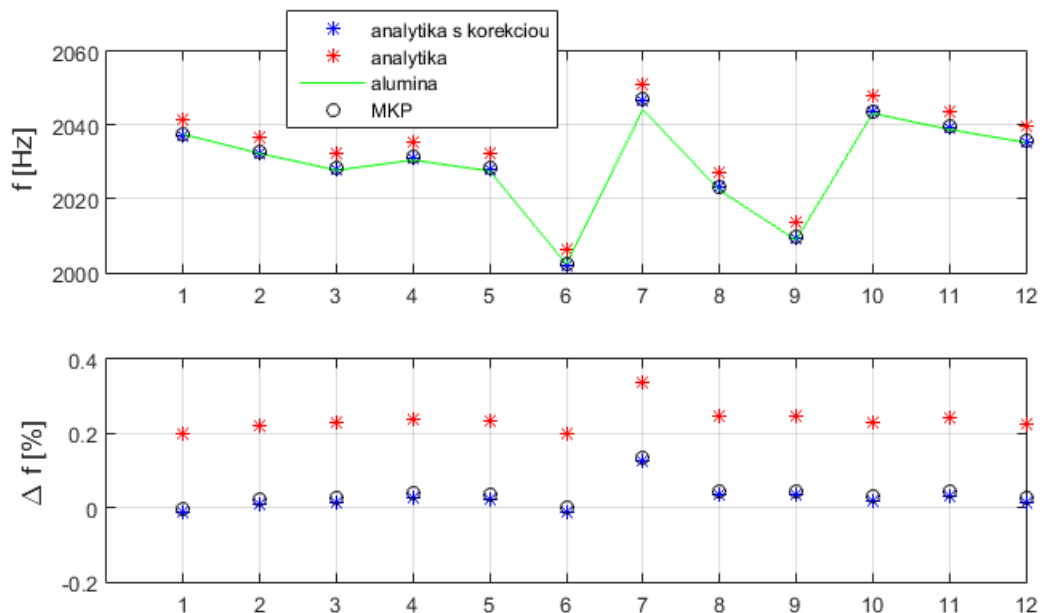
$$\omega = 2\pi f \quad (4.17)$$

Dáta z článku, analytické riešenie (f. an.), analytické riešenie s korekciou (f an. + kor.) a MKP riešenie je zhrnuté v tabuľke 4.1 a obrázku 4.4

ozn.	hmotn.	dĺžka	šírka	hrúbka	f článok	f an.	f an. + kor.	f MKP	E	μ
	g	cm	cm	cm	Hz	Hz	Hz	Hz	GPa	[-]
A1	20.52	12.70	1.27	0.32	2037.56	2041.58	2037.27	2037.51	390	
A2	20.47	12.70	1.27	0.32	2032.37	2036.86	2032.55	2032.81	386.9	0.23
A6	20.44	12.70	1.27	0.32	2027.82	2032.43	2028.14	2028.36	384.6	0.23
B1	20.49	12.70	1.27	0.32	2030.55	2035.43	2031.12	2031.36	386.3	0.23
B2	20.43	12.70	1.27	0.32	2027.62	2032.40	2028.10	2028.35	384.4	0.23
B6	20.25	12.70	1.27	0.32	2002.33	2006.32	2002.08	2002.32	372	0.23
C1	20.57	12.70	1.27	0.32	2044.29	2051.20	2046.85	2047.08	391.9	0.23
C2	20.41	12.70	1.27	0.32	2022.39	2027.37	2023.08	2023.29	380.8	0.23
C3	20.29	12.70	1.27	0.32	2008.83	2013.76	2009.51	2009.37	375.9	0.23
D1	20.56	12.70	1.27	0.32	2043.27	2047.94	2043.60	2043.87	391.9	0.23
D2	20.52	12.70	1.27	0.33	2038.87	2043.84	2039.51	2039.75	389.2	0.23
D3	20.50	12.70	1.27	0.32	2035.35	2039.96	2035.63	2035.87	386.9	0.23

Tabuľka 4.1: Dáta pre referenčné nosníky podľa [21]

4.4. EXPERIMENTÁLNA MODÁLNA ANALÝZA



Obr. 4.4: Porovnanie prvých ohybových vlastných frekvencií a relatívnych chýb. Alumina Al_2O_3 - dáta z článku [21]. Indexy 1-12 odpovedajú referenčným nosníkom postupne A1 až D3. Spodný obrázok je relatívny rozdiel voči referenčným dátam z článku.

4.4. Experimentálna modálna analýza

Ústav fyziky materiálov AVČR v Brne disponuje meracím zariadením IMCE HT1600, ktorý na základe vlastných frekvencií vyhodnocuje elastické vlastnosti materiálov podľa normy ASTM E 1876. Umožňuje meranie za izobových a zvýšených teplôt. Teleso položené na tenkých podporách umiestnených v miestach uzlových čiar vlastného tvaru sa vybudí rázovým kladívkom, prístroj sníma jeho dynamickú odozvu a vyhodnocuje jeho youngov modul pružnosti na základe prvej ohybovej frekvencie, modul pružnosti v šmyku a poissonov pomer v prípade prvej vlastnej torznej frekvencie. V tejto práci boli použité prvé dve ohybové frekvencie, pričom pri druhej sa teleso položené na podpory otočí o 90 stupňov okolo svojej pozdĺžnej osi.

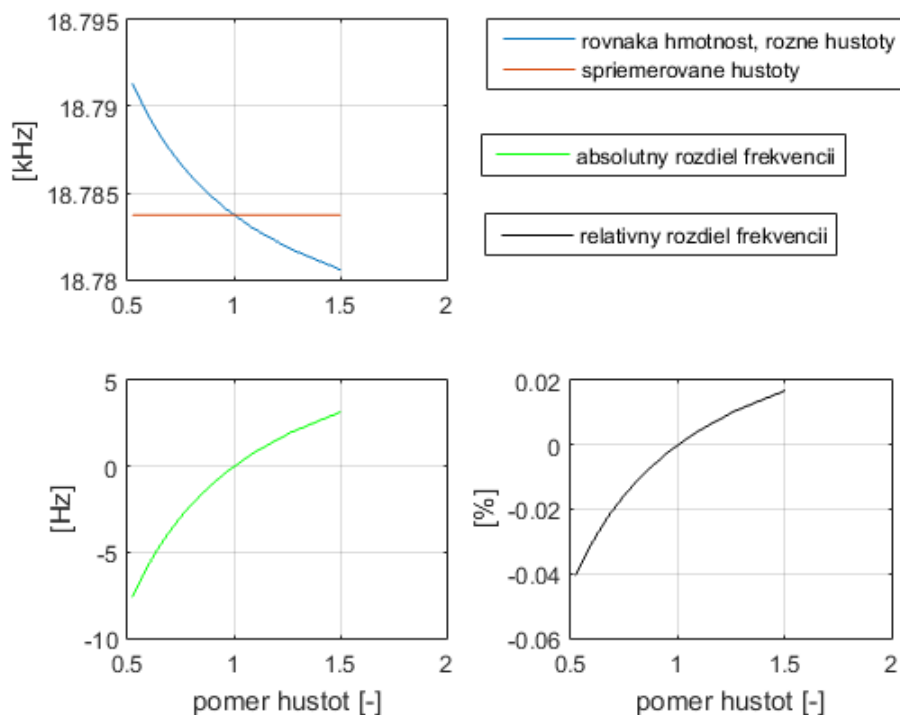


Obr. 4.5: Prístroj IMCE HT1600 [25]

4.5. Vplyv spôsobu zahrnutia hustoty materiálov

Laminát značí objekt tvorený z viacerých materiálov, obecné o rôznych vlastnostiach teda aj hustotách. Je viac možností, ako túto nerovnomernú hustotu do výpočtu zahrnúť. Jednou z nich je využitie hustôt oboch materiálov, ďalšou je použitie hustoty telesa ako celku. Je teda vhodné porovnať ako sa oba spôsoby prejavujú na určenej hodnote prvej vlastnej ohybovej frekvencie. Majme 2 telesá o rozmeroch z tabuľky 6.1 (prvé teleso odpovedá laminátu 3 a druhé laminátu P3). Oba lamináty sú tvorené 5 vrstvami približne rovnakej hrúbky a 4 tenkými vrstvami umiestnenými medzi hrubými. Vrstvenie je približne symetrické voči rovine prechádzajúcej geometrickým stredom telesa. Vzhľadom k náväznosti je vhodné porovnať vplyv pomerov hustôt práve pre geometriu skúšobných telies. Telesá sa líšia pomerom hrúbky ku dĺžke. Budeme predpokladať konštantnú hmotnosť, geometriu a elastické konštanty oboch telies, pričom pomer hustôt jednotlivých zložiek sa bude meniť tak, aby platil predpoklad o konštantnej hmotnosti. Budeme porovnávať vlastné frekvencie pri použití hustôt jednotlivých materiálov s použitím priemernej hustoty. Výsledky pre rôzne pomery hustôt sú zhrnuté v obrázkoch 4.6, 4.7 a tabuľkách 4.2 a 4.3. Prvá hustota v tabuľke odpovedá hrubším vrstvám (hustota 1), druhá odpovedá tenším vrstvám (hustota 2).

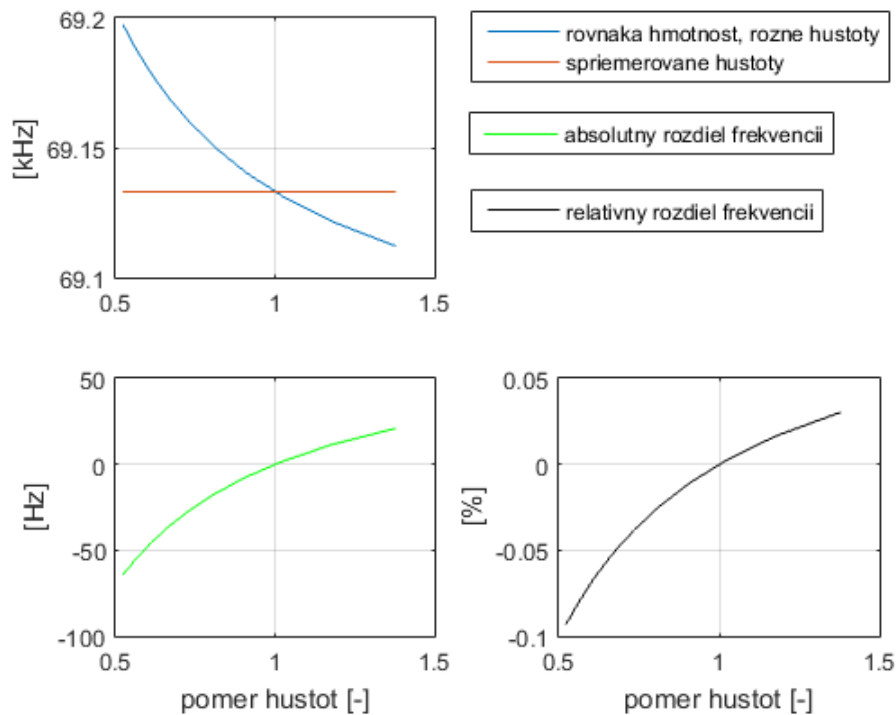
4.5. VPLYV SPÔSOBU ZAHRNUTIA HUSTOTY MATERIÁLOV



Obr. 4.6: Prvá ohybová vlastná frekvencia, rozdiel a relatívny rozdiel medzi použitím priemernej hustoty a hustoty jednotlivých zložiek laminátu pre rôzne pomery hustôt laminátu 3

hustota 1 [kg/m ³]	hustota 2 [kg/m ³]	priemer [kg/m ³]	pomer [-]	fr. oddelené [Hz]	fr. priemer [Hz]	rozdiel [Hz]	chyba [%]
3400	6500	3718	0.52	18791.3	18783.7	-7.6	-0.04
3450	6062	3718	0.56	18790.1	18783.7	-6.4	-0.03
3500	5625	3718	0.62	18788.9	18783.7	-5.2	-0.03
3550	5187	3718	0.68	18787.7	18783.7	-4.0	-0.02
3600	4750	3718	0.75	18786.5	18783.7	-2.8	-0.02
3650	4312	3718	0.84	18785.3	18783.7	-1.6	-0.01
3700	3875	3718	0.95	18784.1	18783.7	-0.4	-0.00
3750	3437	3718	1.09	18782.9	18783.7	0.8	0.00
3800	3000	3718	1.26	18781.7	18783.7	2.0	0.01
3850	2563	3718	1.50	18780.5	18783.7	3.2	0.02

Tabuľka 4.2: Laminát 3, pomer dĺžky ku hrúbke 12.35:1



Obr. 4.7: Prvá ohybová vlastná frekvencia, rozdiel a relatívny rozdiel medzi použitím priemernej hustoty a hustoty jednotlivých zložiek laminátu pre rôzne pomery hustôt laminátu P3

hustota 1 [kg/m ³]	hustota 2 [kg/m ³]	priemer [kg/m ³]	pomer [-]	fr. oddelené [Hz]	fr. priemer [Hz]	rozdiel [Hz]	chyba [%]
3400	6500.0	3603.7	0.52	69197.4	69133.0	-64.4	-0.09
3430	6073.6	3603.7	0.56	69187.9	69133.0	-54.9	-0.08
3460	5647.1	3603.7	0.61	69178.4	69133.0	-45.4	-0.07
3490	5220.7	3603.7	0.67	69168.9	69133.0	-35.9	-0.05
3520	4794.2	3603.7	0.73	69159.5	69133.0	-26.5	-0.04
3550	4367.8	3603.7	0.81	69150.0	69133.0	-17.0	-0.02
3580	3941.3	3603.7	0.91	69140.5	69133.0	-7.5	-0.01
3610	3514.9	3603.7	1.03	69131.0	69133.0	2.0	0.00
3640	3088.5	3603.7	1.18	69121.6	69133.0	11.4	0.02
3670	2662.0	3603.7	1.38	69112.1	69133.0	20.9	0.03

Tabuľka 4.3: Laminát P3, pomer dĺžky ku hrúbke 5.6:1

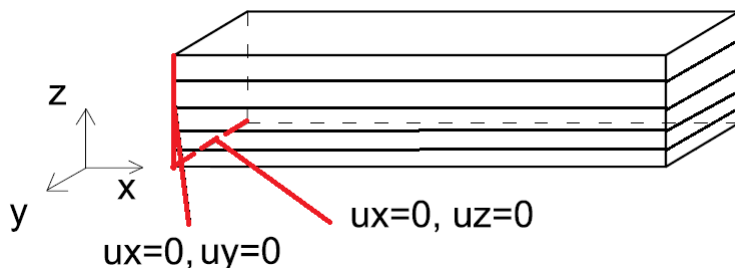
Ako možno vidieť, v prípade nižšej hodnoty pomeru dĺžky ku hrúbke je chyba pri použití priemernej hustoty vyššia než v prípade nižšieho pomeru dĺžky ku hrúbke. Dá sa to vysvetliť vplyvom rotačnej zotrvačnosti, ktorej vplyv na vlastnú frekvenciu je úmerný práve tomuto pomeru. Pri takomto krátkom lamináte je lepšie použiť hustoty jednotlivých zložiek, pokiaľ sú k dispozícii. Pri telese s vyšším pomerom dĺžky ku hrúbke je rozdiel vo frekvenciách zanedbateľný, nakoľko reálny laminát s ktorým sa bude v tejto práci nakoniec pracovať má pomer hustôt približne 0.9/1 a bude používaná hustota telesa ako celku získaná z merania rozmerov a hmotnosti. Okrem toho, hustoty jednotlivých zložiek laminátu nemusia byť vždy k dispozícii.

4.6. Vplyv zbytkových napätí

Laminát sa vyrába spôsobom, pri ktorom sa z teploty približne 1200 stupňov celzia ochladzuje na izbovú teplotu, pričom súčinitele teplotnej rozťažnosti vrstiev AMZ a ATZ (pojmy AMZ a ATZ sú bližšie popísané v kapitole 6) sa líšia približne o $2 \cdot 10^{-6} K^{-1}$. Tak sa do neho vnesú napätia ťahové do hrubých vrstiev ATZ a tlakové do tenkých vrstiev AMZ. Zbytkové napätia majú za účel znížiť krehkosť keramiky. Pri veľkých hodnotách tlakových napätí v tenkých vrstvách sa na jeho okrajoch tvoria povrchové trhliny (na okrajoch tenkých vrstiev dochádza k lokálnej redistribúcii napätia a napätia sú ťahové, vnútri vrstiev sú napätia tlakové) [26].

Na ukážku použijeme laminát 3 (tab. 6.1). Model materiálu pre jednotlivé vrstvy bude lineárne elastický a izotropný. Na zahrnutie zbytkových napätí potrebujeme predriešiť statickú úlohu. Pre ATZ nastavíme súčiniteľ teplotnej rozťažnosti blízky nule ($2 \cdot 10^{-14} K^{-1}$) s pre AMZ nastavíme súčiniteľ teplotnej rozťažnosti na hodnotu $2 \cdot 10^{-6} K^{-1}$, teda nezaujímajú nás skutočné hodnoty ale len ich rozdiel vzhľadom na modelovanie zbytkovej napätosti. Na následnú modálnu analýzu využijeme procedúru ANSYSu, ktorá sa volá 'linear perturbation' ([27] kapitola 9). Týmto sa to matice tuhosti konečnoprvkového modelu zahrnú ďalšie matice, konkrétne pre náš prípad do bude napäťová matica tuhosti v prípade malých deformácií a pozmenená matica tuhosti (pre deformovanú geometriu) spolu s napäťovou maticou tuhosti v prípade zapnutia veľkých deformácií.

Postup bude teda nasledovný: Najskôr vyriešime modálnu analýzu s okrajovými podmienkami voľný-voľný a bez uvažovania zbytkových napätí pre porovnanie výsledkov. Následne vyriešime statickú analýzu s tým, že vložíme zaťaženie teplotou a zaväzbíme teleso podľa obr. 4.8, aby sa mohla vykonať statická analýza. Napäťovú maticu tuhosti z nej použijeme v následnej modálnej analýze s tým, že použijeme príkaz 'perturb,modal,,nokeep', ktorý zmaže okrajové podmienky zo statickej analýzy, ktoré teleso jednoznačne zaväzbili v priestore a následne použijeme príkaz 'solve,elform', ktorý vytvorí novú maticu tuhosti modelu obsahujúcu v sebe aj napäťovú maticu tuhosti. Okrem toho vyriešime aj variantu s veľkými deformáciami (nlgeom,on). S takto pozmenenou maticou tuhosti sa následne vyrieši modálna analýza znovu s okrajovými podmienkami voľný - voľný. Úloha je riešená aj pre prípad zapnutia veľkých deformácií, ktorý používa maticu tuhosti z deformovanej konfigurácie. Tým sa postihne mierne zakrivenie nosníka, keď pri MKP výpočte dosiahol priehyb v smere hrúbky 1% hrúbky telesa, ale zároveň je do výpočtu vnesená chyba z dôvodu zmeny rozmerov telesa voči zmeraným.



Obr. 4.8: Zamedzenie posuvov tak, aby minimálne bránili deformácii spôsobenej teplotou

Výsledky modálnej analýzy pre prvé 2 vlastné ohybové frekvencie sú zhrnuté v tabuľke 4.4, youngove moduly pružnosti sú uvažované 390 GPa pre ATZ a 250 GPa pre AMZ.

-	ohyb 1	rozdiel	ohyb 2	rozdiel
-	[Hz]	[%]	[Hz]	[%]
bez zb. napätí	17779.7	-	21003.4	-
so zb. napätiami malé def.	17778.9	-0.00	21003.4	0.00
so zb. napätiami veľké def.	17776.8	-0.02	21003.7	0.00

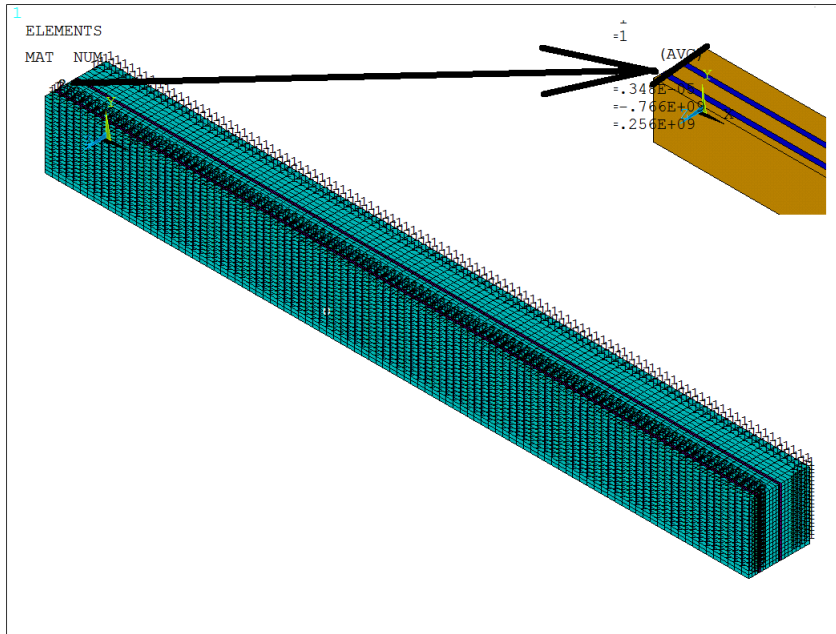
Tabuľka 4.4

Z uvedeného vyplýva, že u laminátu 3 nemajú zbytkové napätia významný vplyv na vlastnú frekvenciu. Obdobnú úlohu riešili aj v článku [28] pre prípad keramických laminátov obdobných použitým v tejto práci (vrstvy keramiky alumina A a alumina zirconia AZ), kde uvádzajú, že zbytkové napätia nemajú vplyv na vlastnú frekvenciu. Porovnávali riešenie pomocou MKP, kde použili youngove moduly pružnosti získané na monolitických vzorkoch pred výrobou laminátu a výsledky z rezonančných skúšok laminátov, pričom dosahovali dobrej zhody vo frekvenciách.

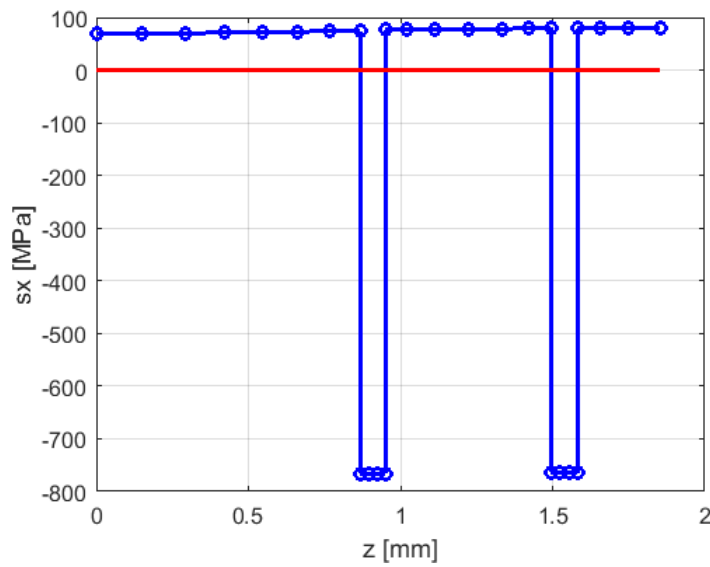
Dalo by sa to vysvetliť aj úvahou, že tuhosť a tým pádom aj vlastná frekvencia sú kontrolované celkovou axiálnou silou v priereze telesa (napr. gitarová struna). Tá ale musí byť v súčte nulová z dôvodu zachovania statickej rovnováhy (obr. 4.8, na teleso nepôsobia pri zanedbaní gravitácie žiadne vonkajšie sily). V prípade významného zakrivenia telesa z dôvodu nesymetricky uložených vrstiev a nízkeho pomeru hrúbky voči dĺžke by bola situácia iná, nakoľko by sa zmenila geometria telesa a nemohlo by sa uvažovať ako priamy nosník.

Na ukážku stavu napätosti pri použití rozdielnych súčiniteľov teplotnej rozťažnosti a teplôt uvedených na začiatku podkapitoly je pre laminát 3 vymodelované teleso s použitím trojnásobnej symetrie (zaväzbenie telesa v priestore) pomocou prvku SOLID185, na obrázku 4.9 je náznak cesty pre vyhodnotenie napätosti a na obrázku 4.10 je znázornený priebeh axiálnych napätí (smer osi x) po výške prierezu v strede dĺžky a šírky telesa. Možno na ňom vidieť výrazné pole tlakového napätia vo tenkých vrstvách dosahujúce hodnôt takmer 800 MPa.

4.6. VPLYV ZBYTKOVÝCH NAPÄTÍ



Obr. 4.9: Axiálne napätia v lamináte pri použití trojnásobnej symetrie



Obr. 4.10: Priebeh axiálnych napätí v lamináte pri použití trojnásobnej symetrie

5. Určovanie youngovho modulu pružnosti

5.1. Analytický spôsob

Obdĺžnikový prierez

Zo vzťahu pre vlastnú frekvenciu 4.6 si osamostatníme ohybovú tuhosť nosníka. Za frekvenciu dosadíme frekvenciu získanú rezonančnou skúškou a dostaneme

$$D = \frac{(2\pi f_{exp})^2 a^4 b \sum_{i=1}^n \rho_i t_i}{4.73^4} \quad (5.1)$$

a po menších úpravách

$$D = \frac{f_{exp}^2 a^4 b \sum_{i=1}^n \rho_i t_i}{12.679} \quad (5.2)$$

Symbody ρ_i a t_i odpovedajú hustotám a hrúbkam jednotlivých vrstiev priečného prierezu. Rozdiely v hustotách síce možno vo väčšine prípadov zanedbať a uvádzať len priemernú hustotu, ale pre kompletnosť je uvedená takáto formulácia. Ohybová tuhosť je funkciou modulov pružnosti a rozmerov priečného prierezu nosníka, kombináciou 4.8 ,4.9 a 5.2 dostaneme

$$\sum_{i=1}^n E_i \left[\frac{t_i^3}{12} + t_i \left(z_i - \frac{\sum_{i=1}^n E_i t_i z_i}{\sum_{i=1}^n E_i t_i} \right)^2 \right] = \frac{f_{exp}^2 a^4 \sum_{i=1}^n \rho_i t_i}{12.679} \quad (5.3)$$

v prípade jedného neznámeho modulu pružnosti dostaneme nelineárnu rovnicu, ktorú je možno riešiť napríklad v SW Matlab a podobne. Obdobne postupovali v článkoch [16] a [17]. Uvedené vzťahy nezohľadňujú rozdiely medzi poissonovými pomermi jednotlivých vrstiev, ale budeme uvažovať, že poissonove pomery sú približne rovnaké a túto skutočnosť zanedbáme. Obecnejšie sú vzťahy pre ohybové tuhosti kompozitných nosníkov z anizotropných vrstiev popísané napríklad v [23]. V tom spočíva výhoda použitia MKP, ktoré uvedené nedostatky odstraňuje. Okrem toho, v prípade reálneho laminátu (ďalej v texte) bola dosiahnutá nízka presnosť aj pri použití MKP, takže sa dá očakávať, že analytické vzťahy by na tom boli ešte horšie.

5.2. Numerický prístup - ladenie mechanických sústav

Táto podkapitola je spracovaná na základe [1], [20] a [29]. Ladenie má za cieľ dostať vlastné frekvencie a vlastné vektory sústavy na požadované hodnoty pomocou zmien geometrie, hmotnosti, tuhosti a podobne. Ladenie sa dá inak chápať ako optimalizačná úloha. Parametre, ktorými ladíme, sa nazývajú ladiace parametre. Vektorovo zapísané

$$\mathbf{p} = \{p_1, \dots, p_j \dots, p_s\}^T \quad (5.4)$$

5.2. NUMERICKÝ PRÍSTUP - LADENIE MECHANICKÝCH SÚSTAV

Vektor naladenia zahrňuje vlastné čísla a vlastné tvary, u konzervatívnej sústavy má tvar

$$\mathbf{l}(\mathbf{p}) = \{\Omega_1^2 = \lambda_1, \dots, \Omega_i^2 = \lambda_i, \dots, \Omega_r^2 = \lambda_r, v_1^T, \dots, v_i^T, \dots, v_r^T\}^T \quad (5.5)$$

Ďalej zmienená metóda ladenia sa nazýva metóda postupných lineárnych aproximácií. Bola vybraná preto, lebo sa dá jednoducho naprogramovať a vzhľadom na jednoduchosť úlohy sa dá dopracovať k výsledku v priebehu pár iterácií. Ladené parametre budú vlastné čísla $\Omega_i^2 = \lambda = l_i$, pôjde teda o spektrálne ladenie. Predpokladajme, že $\mathbf{l}(\mathbf{p})$ možno v okolí bodu \mathbf{p}_0 rozvinúť do taylorovej rady, pričom členy s mocninou 2 a viac zanedbáme (lineárna aproximácia). Pre i -tý ladený parameter možno písať

$$l_i = l_{i(0)} + \sum_{j=1}^s \frac{\partial l_i}{\partial p_j} (p_j - p_{j(0)}) \quad (5.6)$$

a menšími úpravami dostaneme

$$\frac{l_i - l_{i(0)}}{l_{i(0)}} = \sum_{j=1}^s \left[\frac{\partial l_i}{\partial p_j} \frac{p_{j(0)}}{l_{i(0)}} \right] \frac{p_j - p_{j(0)}}{p_{j(0)}} \quad (5.7)$$

V takto zapísanom tvare ide o relatívnu zmenu ladenej veličiny, vzhľadom k relatívnej zmene ladiaceho parametru. Výraz v hranatej zátvorke možno chápať ako mieru zmeny ladenej veličiny na zmenu ladeného parametra - citlivostný koeficient s_{ij} , v tejto podobe sa nazýva relatívny normalizovaný citlivostný koeficient (prenásobenie členom $\frac{p_{j(0)}}{l_{i(0)}}$)

$$s_{ij} = \frac{\partial l_i}{\partial p_j} \frac{p_{j(0)}}{l_{i(0)}} \quad (5.8)$$

kde index ij vyjadruje citlivosť i -tej ladenej veličiny na zmenu j -teho parametra. Ich zoskupením môžeme získať obecnú obdĺžnikovú maticu citlivosti rozmeru $[r \times s]$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} s_{11} & \dots & s_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{r1} & \dots & s_{rs} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Vzhľadom na úpravy bude rovnica 5.6 vyjadrená v maticovej podobe ako

$$\Delta \mathbf{l} = \mathbf{L} \Delta \mathbf{p} \quad (5.10)$$

kde

$$\Delta \mathbf{l} = \left\{ \frac{l_1 - l_{10}}{l_{10}}, \dots, \frac{l_i - l_{i0}}{l_{i0}}, \dots, \frac{l_{ri} - l_{r0}}{l_{r0}} \right\}^T \quad (5.11)$$

$$\Delta \mathbf{p} = \left\{ \frac{p_1 - p_{10}}{p_{10}}, \dots, \frac{p_j - p_{j0}}{p_{j0}}, \dots, \frac{p_{si} - p_{s0}}{p_{s0}} \right\}^T \quad (5.12)$$

Z rovnice 5.10 si vyjadríme $\Delta \mathbf{p}$

$$\Delta \mathbf{p} = (\mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^T \Delta \mathbf{l} = \mathbf{L}^L \Delta \mathbf{l} \quad (5.13)$$

5. URČOVANIE YOUNGOVHO MODULU PRUŽNOSTI

kde \mathbf{L}^L je ľavá pseudoinverzná matica. V prípade, že \mathbf{L} je štvorcová matica, pseudoinverzná matica rovná matici inverznej \mathbf{L}^{-1} . Rovnicu 5.13 riešime iteračne. Pre j -tý parameter možno písať

$$p_{j(n+1)} = p_{j(n)} + (p_j)_n \sum_{i=1}^r s_{ji(n)}^L \frac{l_i^* - l_{i(n)}}{l_{i(n)}} \quad (5.14)$$

kde (n) vyjadruje iteračný krok, $s_{ji(n)}^L$ je prvok pseudoinverznej matice a l_i^* je požadovaná hodnota parametru naladenia. V prípade preurčenej sústavy rovníc rovnica nemá riešenie a dostávame jeho najlepšie možné priblíženie. Ladenie začneme tým, že urobíme hrubý odhad hodnôt ladiacich parametrov $p_{j(1)}$, ktoré použijeme v prvom iteračnom cykle. Ďalej stanovíme kritérium ukončenia výpočtu, napríklad

$$\sum_{i=1}^r \left| \frac{l_i^* - l_{i(n)}}{l_i^*} \right| \leq \epsilon_l \quad (5.15)$$

Na konci každého iteračného kroku testujeme splnenie nerovnosti 5.15. Keď táto situácia nastane, ukončíme výpočet. Ďalším možným kritériom je malá zmena sumy všetkých ladiacich parametrov medzi 2 iteračnými krokmi

$$\sum_{j=1}^s \left| \frac{p_{j(n+1)} - p_{j(n)}}{p_{j(n)}} \right| \leq \epsilon_p \quad (5.16)$$

Prípadne ho možno pri pomalej konvergencii (alebo ne-konvergencii) ukončiť prekročením maximálneho počtu dovolených iteračných krokov. Výstupom - riešením sú hodnoty ladiacich parametrov - v našom prípade elastických konštánt.

5.2.1. Citlivostné koeficienty

V matici citlivosti \mathbf{L} vystupujú koeficienty, ktoré sú parciálnymi deriváciami. Podrobné odvodenie ich tvaru pre dynamické sústavy možno nájsť napríklad v [20]. Pre citlivosť vlastného čísla ($\lambda_i = l_i$) platí

$$\frac{\partial l_i}{\partial p_j} = \mathbf{v}_i^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} + l_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \right) \mathbf{v}_i \quad (5.17)$$

kde \mathbf{K} je matica tuhosti, \mathbf{M} matica hmotnosti a \mathbf{v} odpovedá vlastnému vektoru pre i -tú vlastnú frekvenciu. Pri takejto definícii citlivostného koeficientu je teda nutný prístup do matice tuhosti a vektoru odpovedajúceho vlastnému tvaru telesa (matica hmotnosti sa zmenou elastických konštánt materiálu nemení). Ak derivácie nahradíme doprednými diferenciami, dostaneme

$$\frac{\partial l_i}{\partial p_j} \approx \mathbf{v}_i^T \left(\frac{\mathbf{K}(p_j + \Delta p_j) - \mathbf{K}(p_j)}{\Delta p_j} \right) \mathbf{v}_i \quad (5.18)$$

SW Ansys disponuje skupinou príkazov APDL Math (4.7. APDL Math [27]), ktorá umožňuje pomerne pohodlne pracovať s maticami MKP modelu. Matica tuhosti je uložená v súbore *.full* a vlastné vektory normované podľa matice hmotnosti (defaultné nastavenie modálnej analýzy) v súbore *.mode* z ktorých sa dajú 'vytiahnuť'. Z modálnej analýzy v

5.2. NUMERICKÝ PRÍSTUP - LADENIE MECHANICKÝCH SÚSTAV

n -tom kroku získame maticu tuhosti a vlastné tvary, pričom pre citlivosť i -tej frekvencie na j -ty parameter použijeme maticu tuhosti pre mierne pozmenenú hodnotu tohoto parametra. Na to stačí v */solu* nastaviť lineárne-elastickú statickú analýzu (nepotrebuje maticu hmotnosti) a použiť príkaz *wr.full*, ktorý zastaví riešenie po sformovaní a exportovaní matice tuhosti do *.full* súboru. Problémom je, že pri tomto spôsobe výpočet niekedy nekonvergoval a okrem toho časová úspora nebola významná.

Ďalšou možnosťou získania citlivostného koeficientu je vyriešenie celého modelu pre mierne pozmenenú hodnotu parametra. Použitím dopredných diferencií dostaneme

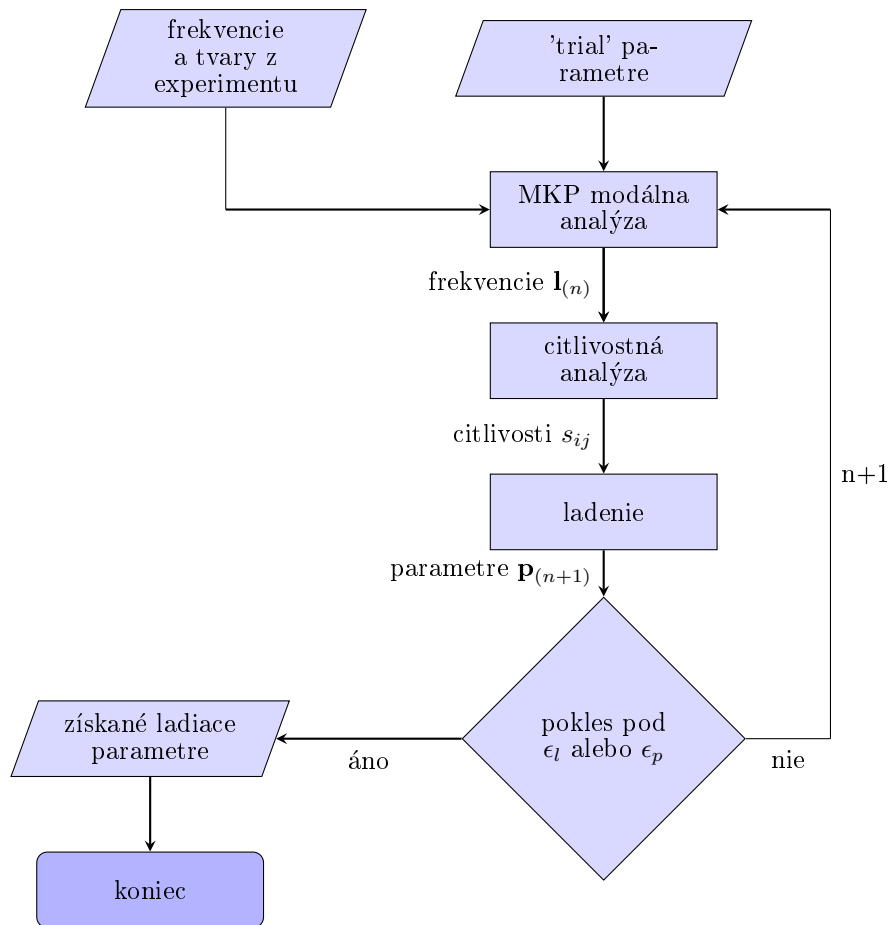
$$\frac{\partial l_i}{\partial p_j} \approx \frac{l_i(p_j + \Delta p_j) - l_i(p_j)}{\Delta p_j} \quad (5.19)$$

kde Δp_j je hodnota mierne pozmenená hodnota ladiaceho parametru. Takýto spôsob je jednoduchý na implementáciu, jeho úskalie ale spočíva v nutnosti riešenia MKP modelu pre získanie daného citlivostného koeficientu.

5.2.2. Realizácia ladenia v APDL

Bolo vytvorených niekoľko jednoduchých makier pre 2D prípad s použitými kvadratickými prvkami SHELL281 (layered keyoption), v ktorých je metóda postupných lineárnych aproximácií naprogramovaná. Jedno z nich je vstupné makro, do ktorého sa zadajú potrebné vstupné údaje o telesách, ako geometria, frekvencie, štartovacie hodnoty modulov pružnosti, hustoty a podobne. Ich princíp je znázornený na obr. 5.1 uvedenom nižšie. Sú ale použiteľné len pre tenkostenné telesá, a ich funkčnosť ukázaná len na ukázkovom príklade.

5. URČOVANIE YOUNGOVHO MODULU PRUŽNOSTI

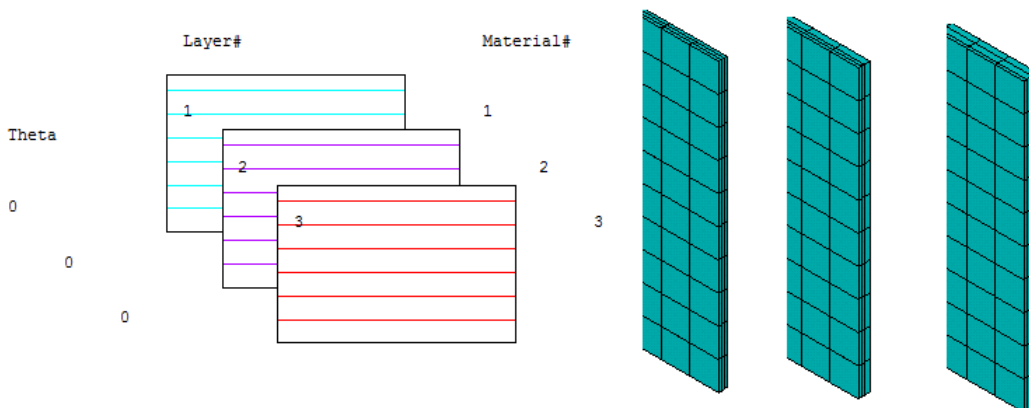


Obr. 5.1: Schéma popisujúca činnosť makier. Obdobný algoritmus sa používa prakticky vo všetkých prípadoch iteračných spôsobov získavania elastických konštánt založených na deriváciách - citlivostných koeficientoch

5.2.3. Ukážkový príklad

Tento príklad má za cieľ ilustrovať spôsob určenia youngovho modulu pružnosti viacerých vrstiev telesa naraz užitím prvej ohybovej frekvencie. Sú dané 3 telesá z 3 materiálov o moduloch pružnosti $E_{(1)}$, $E_{(2)}$ a $E_{(3)}$, pričom hrúbky ich vrstiev sú v rôznom pomere vzhľadom k celkovej hrúbke telesa (3 rozdielne konfigurácie) podľa obrázku 5.2 a tabuľky 5.1. Najprv bola spočítaná vlastná frekvencia pre každé teleso užitím 'skutočných hodnôt' modulov pružnosti - imitácia rezonančnej skúšky. Tieto frekvencie boli potom použité ako experimentálne, ku ktorým je sa treba dopracovať počas ladenia.

5.2. NUMERICKÝ PRÍSTUP - LADENIE MECHANICKÝCH SÚSTAV

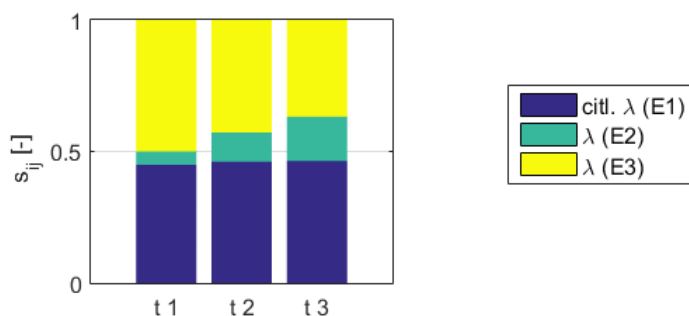


Obr. 5.2: 3 tenkostenné telesá o rôznych hrúbkach vrstiev

teleso	dĺžka	šírka	tloušťka 1	tloušťka 2	tloušťka 3	frekvencia ohyb
-	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[Hz]
1	100	50	0.5	0.5	0.5	875.5
2	100	50	1	0.5	0.5	1128
3	100	50	1	1	0.5	1842.9

Tabuľka 5.1: rozmery a frekvencie fiktívnych telies, hustota $\rho = 6000\text{kgm}^{-3}$, poissonov pomer $\mu = 0.22$

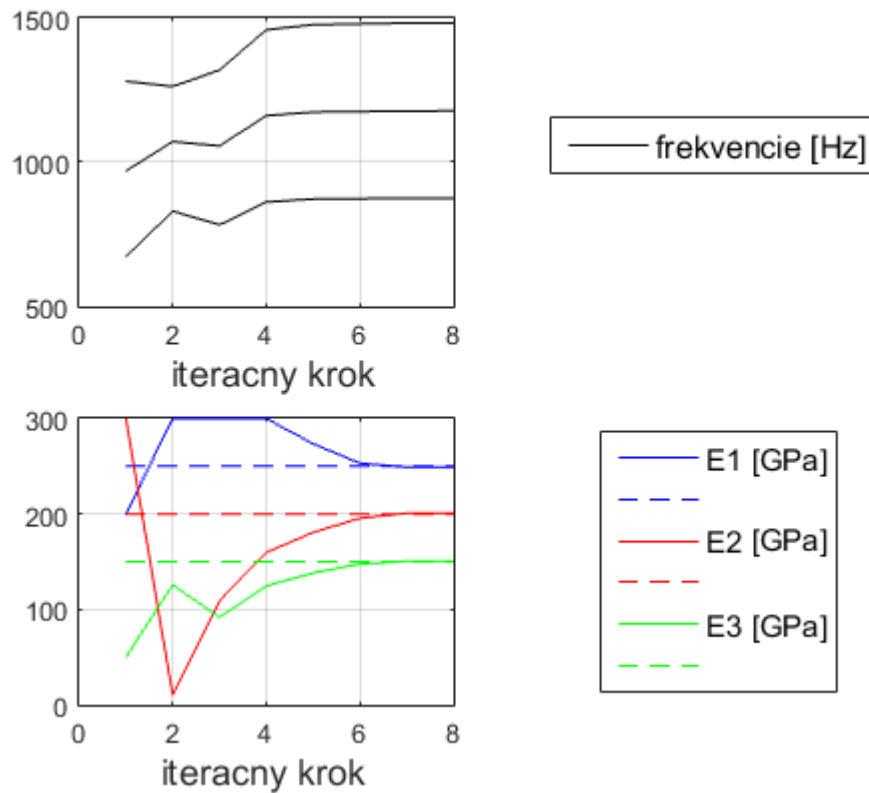
Rozdielne pomery hrúbok spôsobujú rozdielnu závislosť vlastných frekvencií na moduloch pružnosti jednotlivých vrstiev daných telies. To robí citlivostnú maticu \mathbf{L} regulárnou, rieši sa teda iteratívne sústava 3 rovníc o 3 neznámých, pričom existuje jednoznačné riešenie.



Obr. 5.3: Citlivostné koeficienty frekvencií na moduly pružnosti vrstiev, t_1 , t_2 , t_3 : teleso 1, 2, 3, farby odpovedajú modulom pružnosti jednotlivých vrstiev telies

Boli použité počiatočné hodnoty podľa tabuľky 5.2 a nastavený interval hodnôt, v ktorom sa riešenie očakáva, konkrétne spodná hranica 50 GPa a vrchná hranica 300GPa. Výsledky sú zhrnuté v tabuľke a na obrázku nižšie. Odchýlky v desatinách GPa sú spôsobené zaokrúhlením hodnôt vlastných frekvencií, vzhľadom ku ktorým sa sústava ladila.

5. URČOVANIE YOUNGOVHO MODULU PRUŽNOSTI



Obr. 5.4: Konvergencia ku skutočným hodnotám

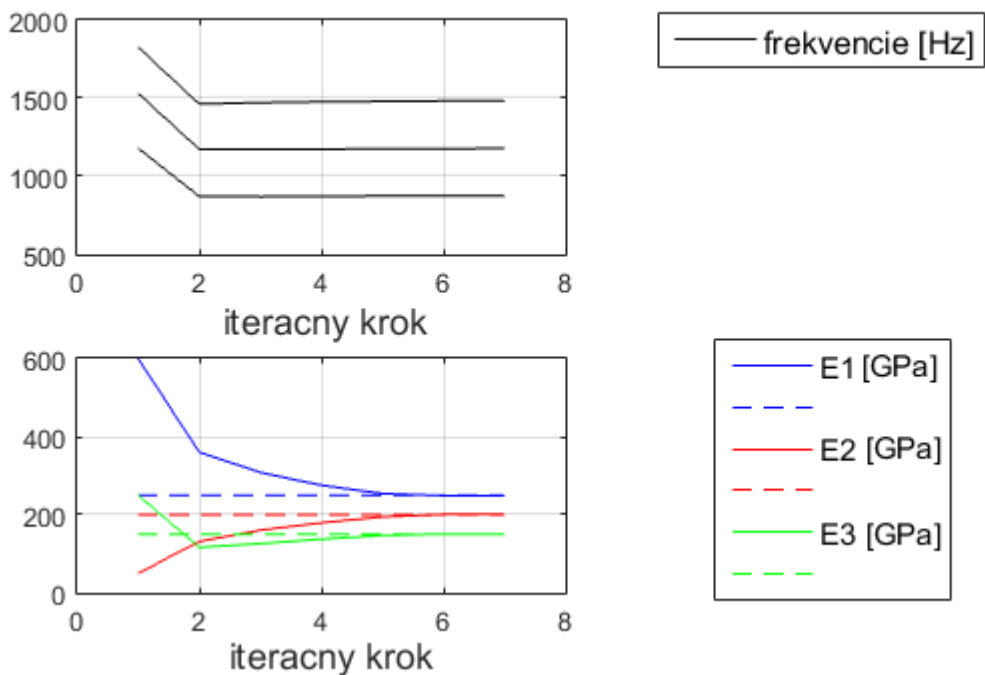
materiál	E nástrel [GPa]	E skut [GPa]	E vypočítané	rozdiel E [%]
1	200	250	249.2	-0.3
2	300	200	200.8	+0.4
3	50	150	150.4	+0.3

Tabuľka 5.2: počiatkové, skutočné a výsledné hodnoty

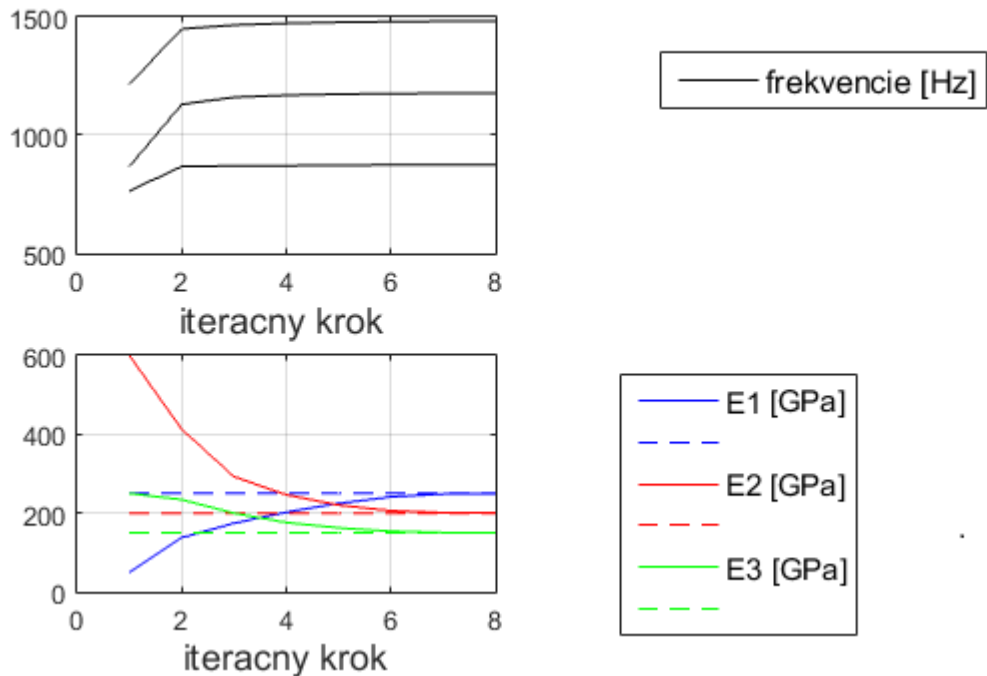
V prípade reálnych keramických laminátov nastali problémy okrem iného aj v tom, že telesá nebolo možné modelovať ako rovinné, tieto makrá sú teda pre reálnu úlohu nepoužiteľné.

Okrem toho boli makrá vyskúšané pre rôzne počiatkové hodnoty modulov pružnosti a dopracovali sa ku rovnakým hodnotám, obrázky 5.5 a 5.6.

5.2. NUMERICKÝ PRÍSTUP - LADENIE MECHANICKÝCH SÚSTAV



Obr. 5.5: Konvergencia ku skutočným hodnotám pre počiatočné hodnoty youngových modulov pružnosti 600/50/250 GPa



Obr. 5.6: Konvergencia ku skutočným hodnotám pre počiatočné hodnoty youngových modulov pružnosti 50/600/250 GPa

6. Experimentálne dáta

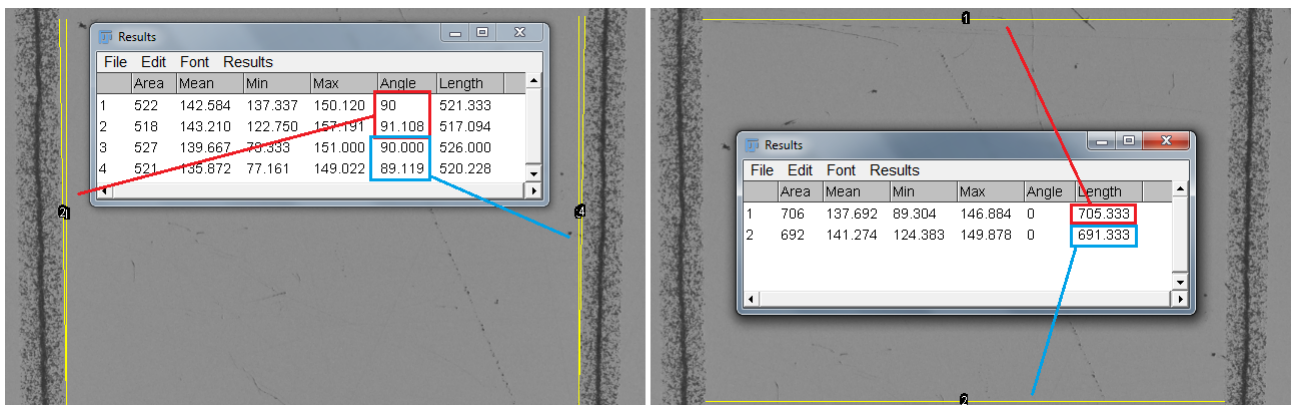
Ústav fyziky materiálov AVČR poskytol skúšobné vzorky, ktorých údaje sú zhrnuté v tabuľke 6.1. Autorovi boli poskytnuté geometrické rozmery, snímky z mikroskopu, hmotnosť a hustoty telies. Frekvencie a moduly pružnosti boli určené na prístroji IMCE HT1600. Frekvencia oop (out of plane - výchylky kolmo na rovinu vrstiev) znamená prvý ohybový tvar kmitu, inp (in plane - výchylky v smere roviny vrstiev) je druhý ohybový tvar kmitu. Autorovi ostalo za úlohu zmerať podľa fotiek z mikroskopu hrúbky jednotlivých vrstiev. Všetky dáta sú uvedené v prílohe.

	dĺžka	šírka	hrúbka	hmotnosť	frekvencia oop	frekvencia inp
teleso	[mm]	[mm]	[mm]	[g]	[Hz]	[Hz]
AMZ 1	42.83	4.061	3.825	2.9602	15525.3	16499.7
ATZ 2	42.76	4.795	3.174	2.6262	17188.5	25292.8
laminát 3	42.77	4.043	3.400	2.4035	17950.2	21133.3
AMZ 4	49.41	4.015	3.683	3.2394	11135.9	11822.7
laminát P3	24.53	4.482	4.389	1.9506	65499.3	66939.2
laminát P16	20.61	4.225	4.376	1.5347	89655.1	86904

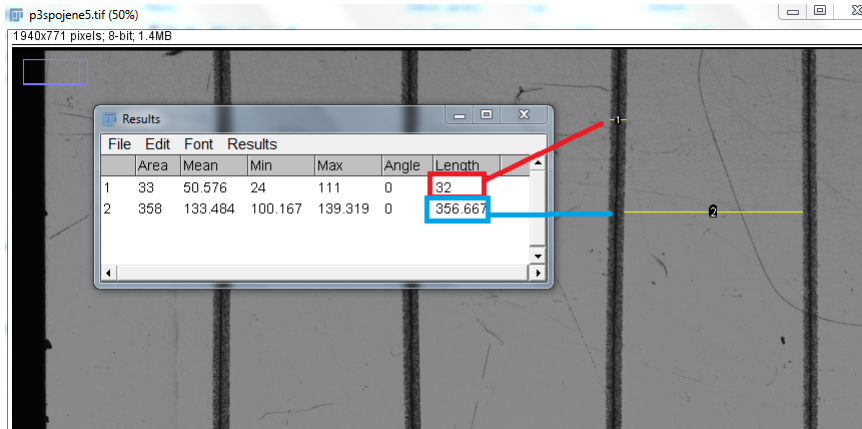
Tabuľka 6.1: Skúšobné telesá (vzorky). Pre všetky materiály je uvažovaná hodnota poissonovho pomeru $\mu=0.275$. Hrúbky zmerané mikrometrom.

Súbor dát obsahuje 2 telesá z materiálu AMZ (Alumina monoclinic zirconia), 1 teleso z ATZ (Alumina tetragonal zirconia) a 3 lamináty pozostávajúce z 5 vrstiev ATZ a 4 tekých vrstiev AMZ, zhruba pravidelne rozmiestnených po hrúbke laminátu. Hrúbky jednotlivých vrstiev boli zmerané spôsobom pozostávajúcim zo snímkov získaných mikroskopom a následne spracovaných vo voľne dostupnom softvéri ImageJ, distribúcia Fiji [30].

Pri pohľade na snímky z mikroskopu je zrejmé, že geometria vrstiev vykazuje určité nepravidelnosti, čo môže ovplyvniť vhodnosť modelu geometrie idealizovaného ako štvorboké hranoly ležiace na sebe (obr.6.1).



Obr. 6.1: geometrické nepresnosti vo vrstvení laminátu P3

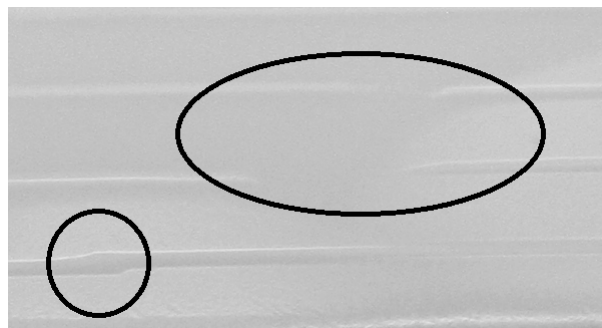


Obr. 6.2: Malá relatívna hrúbka vrstiev AMZ voči vrstvám ATZ

Lamináty P3 a P16 museli byť nakoniec z určovania vylúčené. Pri pokuse o určenie modulu pružnosti tenkej vrstvy AMZ dosahovali výsledky nereálnych hodnôt. Namerané hrúbky vrstiev sa po sčítaní významne líšili od hodnoty hrúbky zmeranej mikrometrom. Tento problém sa nepodarilo odstrániť ani po opakovaných meraniach. Bolo nutné si spomínané skúšobné vzorky prehliadnuť ešte raz, pričom boli odhalené významné porušenia predpokladov o geometrickom tvare telesa ako hranole, pomocou ktorého bola idealizovaná jeho geometria. Steny ležiace oproti sebe neboli rovnobežné, stena podstáv nebola kolmá na bočné steny a hrúbka vrstiev AMZ sa viackrát menila skokovo po dĺžke telesa, niekde sa vrstva AMZ úplne strácala (obrázok 6.3). Bolo by potrebné vytvoriť podrobný model geometrie, ktorý tieto skutočnosti zohľadňuje, to ale z časových dôvodov nie je možné. Ako jediný relatívne použiteľný sa ukázal laminát 3. Geometrické údaje sú zhrnuté, spolu s rozdielmi hodnôt z mikrometra a mikroskopu v tabuľke 6.2

laminát	hrúbky vrstiev [μm] + súčet mikroskop										mikrometer	rozdiel
	1	2	3	4	5	6	7	8	9			
P3	774	75	787	73	870	71	816	66	775	4309	4389	-80
P16	764	73	831	73	835	75	829	72	739	4292	4376	-88

Tabuľka 6.2



Obr. 6.3: Nepresnosti v geometrii pre laminát P16

Nakoniec teda boli v práci využité len monolitické vzorky AMZ a ATZ a laminát 3 zložený z tenkých vrstiev AMZ a hrubých vrstiev ATZ.

7. Prezentácia výsledkov riešenia

Vstupné údaje

Ako vstupné údaje poslúžili geometrické rozmery získané mikrometrom a snímok mikroskopu, hmotnosť, v prípade uvažovania známeho youngovho modulu pružnosti jeho hodnota a vlastné frekvencie, podľa kapitoly 6.

Model materiálu

Všetky telesá v tejto kapitole boli modelované ako lineárne elastické a izotropné, v prípade laminátu boli s obdobným modelom materiálu uvažované jeho vrstvy. Pre všetky materiály bol uvažovaný poissonov pomer $\mu = 0.275$. Hustota bola získaná ako podiel hmotnosti telesa a objemu získaného z merania dĺžky, šírky a hrúbky.

Model geometrie a okrajových podmienok

Geometria telies bola modelovaná pomocou hranolu (APDL príklad block), vrstvy boli uvažované ako dokonalo spojené bez možnosti vzájomného prokluzu. Toto spojenie bolo realizované pomocou couplingu uzlov siete na rozhraní vrstiev (APDL príkaz cpintf). Vzhľadom na skutočnosť, že modelujeme voľné kmitanie bez obmedzenia deformácie telesa, neboli predpísané žiadne okrajové podmienky okrem symetrie vzhľadom na prvý a druhý ohybový tvar kmitu. Vzhľadom k záverom z predchádzajúceho textu nebudeme v prípade laminátu uvažovať zbytkové napätia vzniknuté pri jeho výrobe.

Nastavenie riešiča

Na modálnu analýzu bola použitá metóda Block Lanczos (modopt,lanb), teda nebolo uvažované tlmenie.

Algoritmus riešenia

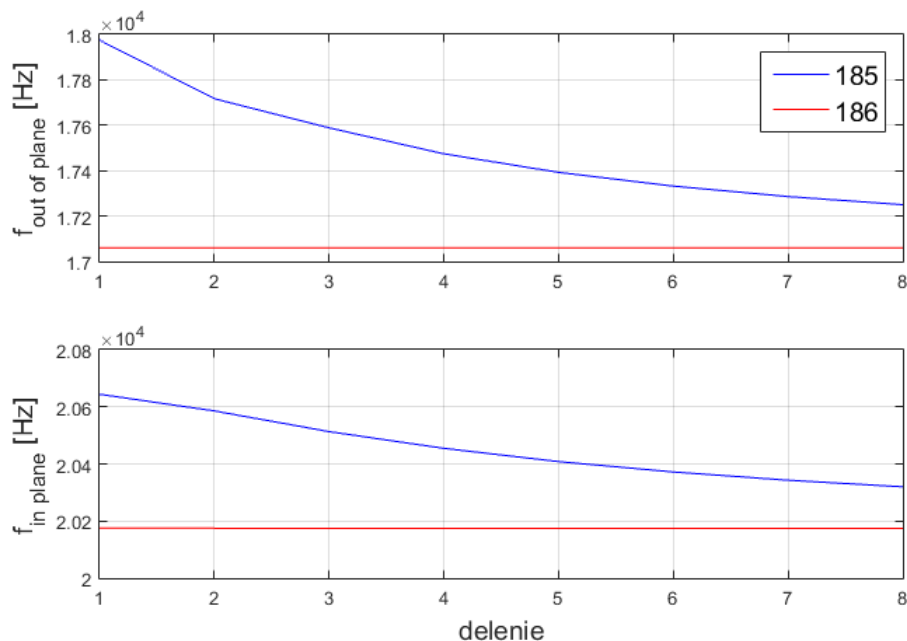
Pre ladenie bol použitý algoritmus (ladenie mechanických sústav) obdobný uvedenému v kapitole 5 s tým rozdielom, že sa ladilo vzhľadom k vlastnej frekvencii a nie ku kvadrátu vlastnej uhlovej frekvencie.

7.1. Konvergencia siete vzhľadom na frekvenciu

Boli použité rozmery odpovedajúce nameraným na lamináte 3 (tabuľka 7.7), pričom moduly pružnosti boli zvolené orientačne, nakoľko cieľom bolo len skúmať konvergenciu siete s ohľadom na frekvenciu. Najskôr bol vyskúšaný 8 uzlový prvok SOLID185. Aj napriek postupnému zhusťovaniu siete hodnoty vlastných frekvencií konvergovali len pomaly. Z hľadiska rozdielu frekvencií oproti experimentu by bola síce odchýlka pomerne malá, je však potreba ju 'stlačiť' čo najnižšie, aby sa čo najviac eliminovala chyba v numericky spočítaných frekvenciách. Toto je zhrnuté v obrázkoch a tabuľkách uvedených nižšie. Vzhľadom

7.1. KONVERGENCIA SIETE VZHLADOM NA FREKVENCIU

na vlastné tvary prvej a druhej ohybovej frekvencie bola použitá symetria a modelovaná len polovica telesa.



Obr. 7.1: konvergenzie siete pre prvú (in plane) a druhú (out of plane) ohybovú frekvenciu

V tabuľke nižšie znamená oop (out of plane) prvú ohybovú frekvenciu a inp (in plane) druhú ohybovú frekvenciu, jednotlivé stĺpce 2 až 5 odpovedajú počtu delení po hrúbke vrstvy ATZ respektíve AMZ.

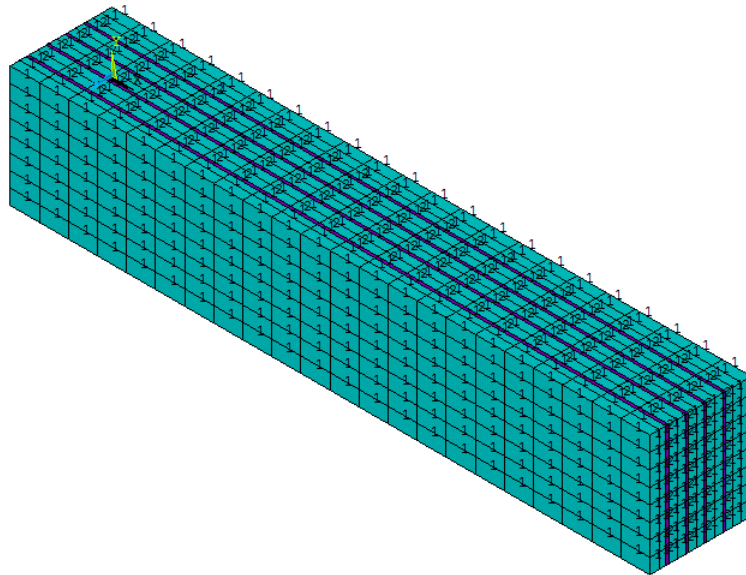
	delenie dĺžka	delenie šírka	delenie ATZ	delenie AMZ	frekvencia oop [Hz]	rozdiel [%]	frekvencia inp [Hz]	rozdiel [%]
1	12	3	1	1	17975.1		20644.1	
2	14	4	1	1	17717.0	-1.436	20585.7	-0.283
3	16	5	2	1	17588.6	-0.725	20513.2	-0.352
4	18	6	2	1	17474.3	-0.650	20454.6	-0.286
5	20	7	2	1	17392.5	-0.468	20408.3	-0.227
6	22	8	2	1	17331.9	-0.348	20371.8	-0.179
7	24	9	2	1	17285.8	-0.266	20343.0	-0.142
8	26	10	2	1	17250.0	-0.207	20319.9	-0.113

Tabuľka 7.1: konvergenzie siete pre SOLID185 s relatívnym rozdielom voči predchádzajúcemu deleniu

7. PREZENTÁCIA VÝSLEDKOV RIEŠENIA

	delenie dĺžka	delenie šírka	delenie ATZ	delenie AMZ	frekvencia oop [Hz]	rozdiel [%]	frekvencia inp [Hz]	rozdiel [%]
1	12	3	1	1	17059.93		20175.16	
2	14	4	1	1	17059.91	-0.0001	20174.85	-0.0016
3	16	5	2	1	17059.89	-0.0001	20174.75	-0.0005
4	18	6	2	1	17059.88	-0.0000	20174.72	-0.0001
5	20	7	2	1	17059.88	-0.0000	20174.71	-0.0001
6	22	8	2	1	17059.88	-0.0000	20174.70	-0.0000

Tabuľka 7.2: konvergenzie siete pre SOLID186 s relatívnym rozdielom voči predchádzajúcemu deleniu



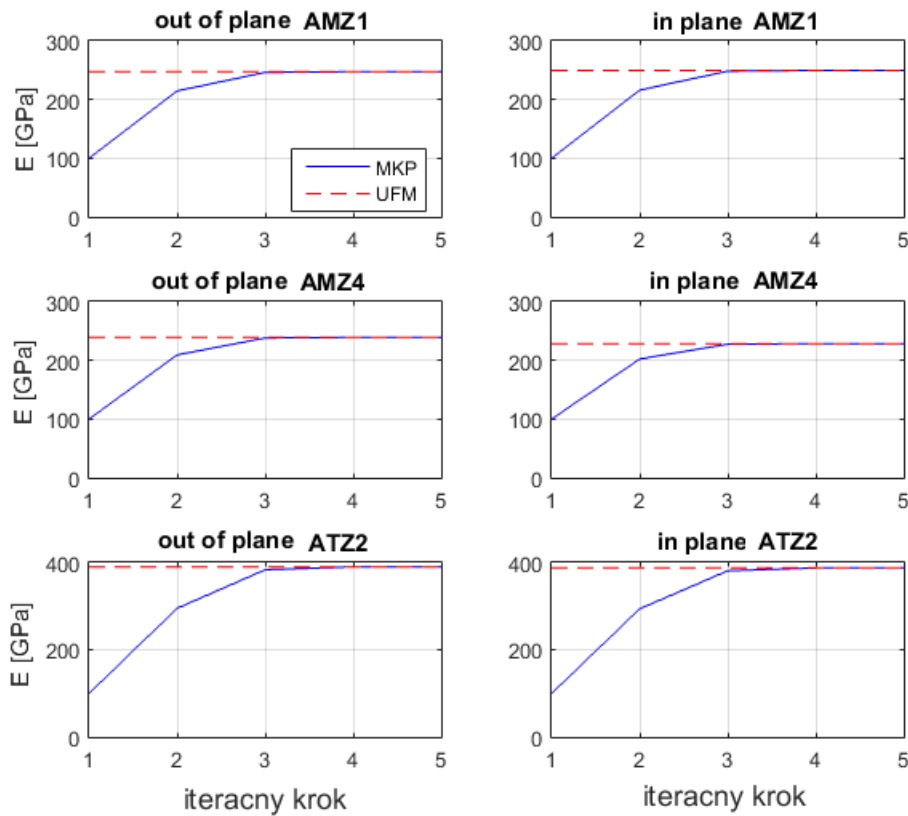
Obr. 7.2: Sieť pre model geometrie s využitím polovičnej symetrie

Nakoniec bolo zvolené delenie 22/8/2/1 v prípade polovičnej symetrie modelu a 22/4/2/1 v prípade štvrtinového modelu, s ktorým sa uvažovalo v prípade uvažovania len prvej ohybovej frekvencie a prvok SOLID186.

7.2. Homogénne telesá - monolity

Najprv bolo iteračné makro skúšobne overené na monolitických vzorkách keramiky (AMZ 1, AMZ 4, ATZ 2) z tabuľky 6.1. Hodnoty modulov pružnosti zistených pomocou MKP boli porovnané s hodnotami určenými na prístroji IMCE HT1600. Bol použitý prvok SOLID186 s delením dĺžka/šírka/hrúbka 25/5/5 pre AMZ a 25/5/4 pre ATZ, a bola použitá polovičná symetria (dĺžka).

7.2. HOMOGENNÉ TELESÁ - MONOLITY



Obr. 7.3: Youngov modul pružnosti, porovnanie MKP a dát z experimentu (ÚFM) pre monolity

teleso	frekvencia [Hz]	E_{ufm} [GPa]	E_{MKP} [GPa]	rozdiel [GPa]
AMZ 1	15525.3	247.8	246.5	-1.3
AMZ 4	11135.9	239.2	237.6	-1.6
ATZ 2	17188.5	390.2	389.0	-1.2

Tabuľka 7.3: Zhrnutie výsledkov pre out of plane frekvenciu

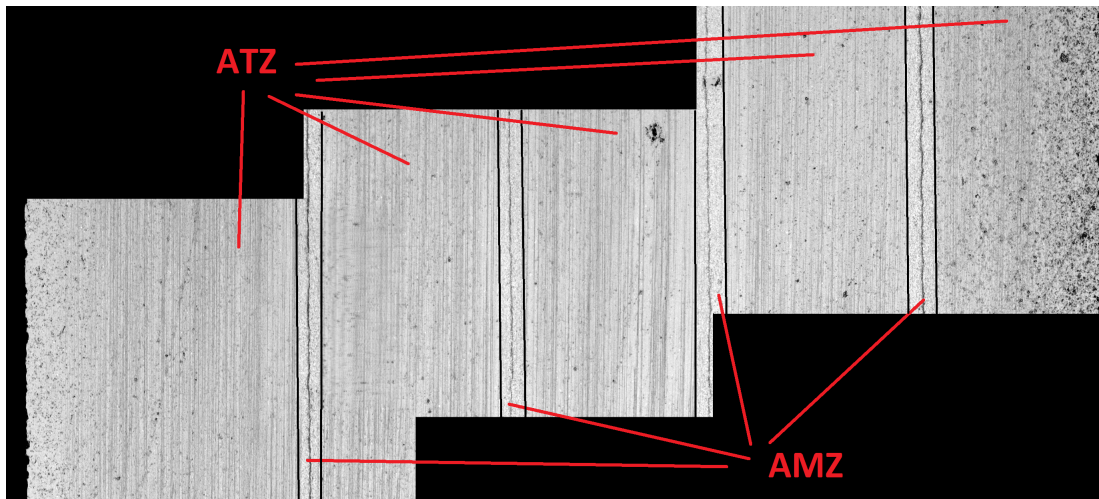
teleso	frekvencia [Hz]	E_{ufm} [GPa]	E_{MKP} [GPa]	rozdiel [GPa]
AMZ 1	16499.7	249.6	248.7	-0.9
AMZ 4	11822.7	228.5	226.9	-1.6
ATZ 2	25292.8	387.7	386.6	-1.1

Tabuľka 7.4: Zhrnutie výsledkov pre in plane frekvenciu

Z tabuliek 7.3 a 7.4 možno vidieť, že bolo dosiahnuté dobrej zhody. Mierne nižšia hodnota získaná pomocou MKP môže byť spôsobená iným spôsobom zahrnutia hustoty, keď dáta z ÚFM počítali s hustotou získanou pomocou archimédovho zákona, zatiaľ čo hustota bola do MKP zadaná ako podiel hmotnosti a geometrických rozmerov monolitických telies. Okrem toho pri telese AMZ 4 možno vidieť pomerne výrazný rozdiel v module pružnosti pri otočení telesa o 90 stupňov.

7.3. Laminát 3

Pri lamináte 3 bola situácia o niečo priaznivejšia, ale aj tu sa ukázala nerovnomernosť hrúbok a problémy pri meraní celkovej hrúbky. Dáta z mikroskopu obsahovali snímky pri 120, 240 a 2400 násobom zväčšení. Pri 120 násobnom zväčšení bol problém určiť správnu hrúbku tenkých vrstiev AMZ, 240 a 2400 násobné zväčšenia zas poskytnú údaje len o časti laminátu, pričom hrúbky sa po dĺžke menia. Nakoniec boli použité dáta zo 2400 a 240 násobného zväčšenia, 120 násobného zväčšenia a priemer z nich. Boli vykonané 2 spôsoby určovania modulov pružnosti. V prvom bol modul hrubej vrstvy ATZ považovaný za známy, a moduly ATZ boli určované samostatne pre prvú a druhú ohybovú frekvenciu. Pri druhom spôsobe bol predpoklad, že modul pružnosti ani jednej z vrstiev nepoznáme a bol pokus o určenie charakteristík oboch vrstiev naraz užitím prvej a druhej ohybovej frekvencie.



Obr. 7.4: Orientačne naznačené vrstvy laminátu 3 pri 120 násobnom zväčšení, vo vrstvách AMZ možno vidieť povrchové trhliny z dôvodu vysokých hodnôt ťahových napätí na povrchu, vo vnútri vrstiev sú napätia naopak tlakové

Určenie youngovho modulu AMZ pri známom module ATZ

Použitie prvej ohybovej frekvencie

Problém je, že relatívne malý objemový podiel AMZ robí jeho vplyv na frekvenciu nízky, na čo sa dá opačne hľadieť ako vysokú citlivosť hodnoty jeho modulu na frekvenciu, ako aj všetky ostatné vstupy. Toto bude o niečo bližšie rozobraté v odstavcoch o pár podkapitol ďalej, tu bude ukázaný len vplyv modulu ATZ pri jeho niektorých zvolených hodnotách a tiež vplyv hrúbky vrstiev.

Ak sa zameriame čisto len na vplyv youngovho modulu ATZ pri použití out of plane frekvencie a hrúbok získaných zo snímok z mikroskopu získaných pri 240 a 2400 násobnom zväčšení, dostaneme nasledujúce hodnoty zhrnuté v tabuľke nižšie.

7.3. LAMINÁT 3

známy modul ATZ	rozdiel	určený modul AMZ	rozdiel	rozdiel
[GPa]	[%]	[GPa]	[GPa]	[%]
385	-1.28	343	+79	+28.4
388	-0.5	298	+31	+11.6
390	-	267	-	-
392	0.5	238	-29	-10.8
395	1.28	195	-72	-26.9

Tabuľka 7.5: Závislosť hodnoty E_{AMZ} na hodnote E_{ATZ}

Teda len pol percentná chyba v moduloch pružnosti vrstiev ATZ, ktorý predpokladáme za známy spôsobí 11 percentnú chybu v module AMZ, čo je rovné až 30 GPa do kladných aj záporných odchýliek. Okrem toho podľa rezonančných skúšok monolitov AMZ je analogicky interval pre modul ATZ ± 2 GPa nereálne nízky, a teda hodnoty pre AMZ veľmi pravdepodobne nebudú odpovedať realite. Pri hodnotách modulu ATZ v intervale ± 5 GPa sa dostaneme na interval $+ 28$ resp. -27 percent, respektíve zhruba 70 GPa. Takýto rozptyl hodnôt teda znemožňuje presné určenie modulu pružnosti v ťahu AMZ vrstiev pri ich danej relatívnej hrúbke.

Ďalším problémovým parametrom je hrúbka telesa, resp. hrúbka jednotlivých vrstiev. Merané dáta z ÚFM totiž obsahovali meranie celkovej hrúbky na 3 miestach laminátu, pričom z 2 sa dali vyčítať hrúbky jednotlivých vrstiev. Aj tu sa hrúbky líšili, okrem toho boli o niečo nižšie než hrúbka zmeraná mikrometrom. Mikroskop pravdepodobne dostatočne nezachytil okraje vzorku, nastala chyba autora práce v spracovaní poskytnutých snímok, prípadne bola meraná hrúbka v mieste s jej s najnižšou hodnotou. Preto boli spočítané rôzne varianty. Pre hrúbku spočítanú zo snímok so zväčšením 240x a 2400x, hrúbku spočítanú zo snímok so zväčšením 120x a pre priemernú hodnotu hrúbky z nich. Okrem toho boli spočítané varianty pre korekciu celkovej hrúbky a korekciu okrajov na priemernú hrúbku získanú mikrometrom (korekcia okraj, korekcia celková), rozmery sú v tabuľke 7.7. Okrem toho aj samotná hrúbka zistená mikrometrom sa pomerne dosť líšila po dĺžke telesa. Lepšie povedané, zdá sa, že sa moc nelíši, ale vzhľadom na túto úlohu je to pomerne dosť. Pre všetky varianty je uvažovaný modul pružnosti ATZ vrstiev 390 GPa.

	1	2	3	priemer
šírka [mm]	4.042	4.043	4.045	4.043
hrúbka [mm]	3.376	3.406	3.419	3.400
rozdiel hrúbky voči priemeru [%]	-0.7	+0.2	+0.6	-

Tabuľka 7.6: Šírky a hrúbky zmerané mikrometrom pri lamináte 3

Nižšie sú zhrnuté namerané hrúbky pre všetky uvedené varianty. Ako jednotky sú použité mikrometre.

7. PREZENTÁCIA VÝSLEDKOV RIEŠENIA

vrstva	240 2400	korekcia okraj	korekcia celková	120	kor. okr.	kor. celk.
-	$[\mu m]$	$[\mu m]$	$[\mu m]$	$[\mu m]$	$[\mu m]$	$[\mu m]$
1	852	861	856	868	885	876
2	83	83	83	83	83	83
3	550	550	539	545	545	551
4	82	82	83	90	90	90
5	536	536	539	542	542	548
6	87	87	88	88	88	89
7	573	573	576	552	552	558
8	94	94	95	94	94	95
9	526	535	528	504	521	510
celkovo	3382	3400	3400	3365	3400	3400
rozdiel	-18		-	-35	-	-
rozdiel [%]	-0.5	-	-	-1	-	-

Tabuľka 7.7: Hrúbky získané zo snímok z mikroskopu pri 240 a 2400 násobnom zväčšení a hrúbky získané pri 120 násobnom zväčšení spolu s korekciami

vrstva	priemer	korekcia okaj	korekcia celková
-	$[\mu m]$	$[\mu m]$	$[\mu m]$
1	860	873	867
2	83	83	83
3	547	547	552
4	86	86	87
5	539	539	543
6	87	87	88
7	562	562	567
8	94	94	95
9	515	528	519
celkovo	3374	3400	3400
rozdiel	-26	-	-
rozdiel [%]	-0.7	-	-

Tabuľka 7.8: Hrúbky získané zo snímok z mikroskopu ako priemerné hodnoty, plus korekcie na priemernú hrúbku

Výsledky pre získané moduly pružnosti AMZ vrstvy sú zhrnuté nižšie, a ich rozptyl (v tomto prípade ním nie je myslený štatistický ukazovateľ) je neúmerne veľký

7.3. LAMINÁT 3

stanovenie hrúbok / hrúbky	E_{AMZ}
-	[GPa]
mikroskop 240 2400	267
korekcia okrajov 240 2400	175
korekcia celková 240 2400	178
mikroskop 120	365
korekcia okrajov 120	182
korekcia celková 120	182
mikroskop priemer	327
korekcia okrajov z priemeru	186
korekcia celá hrúbka z priemeru	185

Tabuľka 7.9: Moduly pružnosti AMZ vrstvy získané pre rôzne stanovené hrúbky vrstiev užitím out of plane frekvencie, $E_{ATZ}=390$ GPa

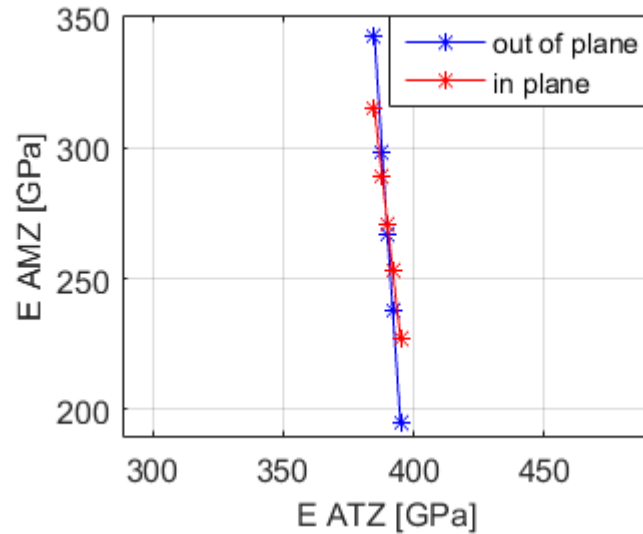
Použitie druhej ohybovej frekvencie

Pri druhej ohybovej frekvencii (in plane) sa problémy s hrúbkou prejavili v o niečo menšej miere. Vplyv modulu pružnosti ATZ vrstiev ostáva podľa očakávania naďalej vysoký, aj keď jeho vplyv je tiež nižší v porovnaní s out of plane frekvenciou. Výsledky sú znovu zhrnuté v tabuľkách uvedených nižšie.

známy modul ATZ	rozdiel	určený modul AMZ	rozdiel	rozdiel
[GPa]	[%]	[GPa]	[GPa]	[%]
385	-1.28	315	+44	+16.2
388	-0.5	289	+18	+6.6
390	-	271	-	-
392	0.5	253	-18	-6.6
395	1.28	227	-44	-16.2

Tabuľka 7.10: Vplyv hodnoty E modulu AMZ v závislosti na E module ATZ pri in plane frekvencii, použitá hrúbka zmeraná zo 2400 a 240 násobného zväčšenia bez korekcie

Graficky je závislosť modulu pružnosti AMZ vrstiev na moduloch pružnosti ATZ vrstiev ukázaná na (obr. 7.5). V Matlabe je použité 'axis('equal')' pre zdôraznenie zlej podmienenosti úlohy pre oba prípady.



Obr. 7.5: Závislosť určeného youngovho modulu AMZ na module pružnosti ATZ vrstiev

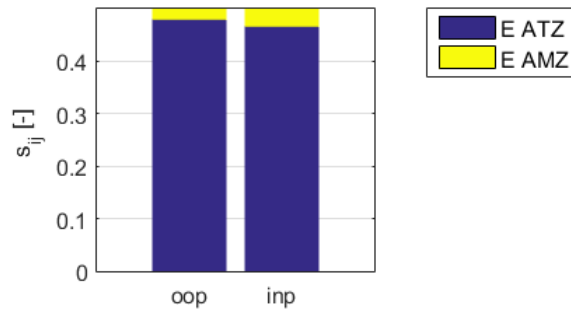
stanovenie hrúbok / hrúbky	E_{AMZ}
-	[GPa]
mikroskop 240 2400	271
korekcia okrajov 240 2400	252
korekcia celková 240 2400	251
mikroskop 120	294
korekcia okrajov 120	255
korekcia celková 120	255
mikroskop priemer	284
korekcia okrajov z priemeru	255
korekcia celá hrúbka z priemeru	255

Tabuľka 7.11: Moduly pružnosti AMZ vrstvy získané pre rôzne stanovené hrúbky vrstiev užitím *in plane* frekvencie, $E_{ATZ}=390$ GPa

7.3.1. Určenie youngovho modulu AMZ aj ATZ naraz užitím prvej a druhej ohybovej frekvencie

Vzhľadom nato, že prvá a druhá ohybová frekvencia je rôzne citlivá na youngové moduly pružnosti AMZ a ATZ, je v princípe možné určiť vlastnosti oboch materiálov z jedného telesa použitím práve týchto 2 vlastných frekvencií. Takýto spôsob je ale zle podmienený, ako ukazuje obrázok 7.6, a výsledky sú podľa očakávania znovu neuspokojivé.

7.4. VPLYV POČIATOČNÝCH HODNÔT MODULOV PRUŽNOSTI



Obr. 7.6: Bezrozmerná citlivosť prvej a druhej ohybovej frekvencie na youngove moduly pružnosti ATZ a AMZ, získané z poslednej iterácie riešenia pre stanovenie hrúbky z mikroskopu pri 240 a 2400 násobnom zväčšení.

frekvencia	ATZ	AMZ	celkovo
out of plane	0.477	0.023	0.500
in plane	0.462	0.037	0.499

Tabuľka 7.12: Bezrozmerná citlivosť prvej a druhej ohybovej frekvencie na youngove moduly pružnosti ATZ a AMZ - číselne.

Nižšie sú v tabuľke zhrnuté výsledky pre rôzne varianty stanovenia hrúbok.

stanovenie hrúbok / hrúbky	E_{ATZ}	E_{AMZ}
-	[GPa]	[GPa]
mikroskop 240 2400	390	277
korekcia okraju 240 2400	378	360
korekcia cele 240 2400	378	360
mikroskop 120	402	191
korekcia okraju 120	379	352
korekcia cele 120	379	352
mikroskop priemer	397	225
korekcia okrajov z priemeru	378	361
korekcia celá hrúbka z priemeru	379	352

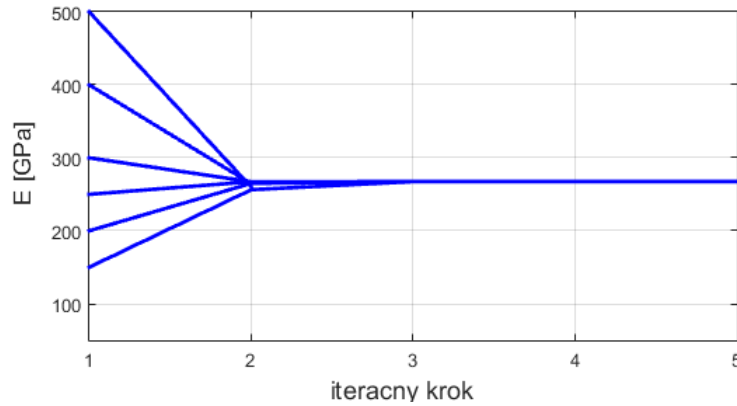
Tabuľka 7.13: Moduly pružnosti ATZ a AMZ vrstiev laminátu pri užití prvých 2 ohybových frekvencií

Ako možno vidieť, pre vrstvy ATZ bola zhoda v porovnaní s monolitickým vzorkom vyššia než v prípadoch AMZ vrstiev ktorých moduly pružnosti opäť dosahovali nerealistických hodnôt.

7.4. Vplyv počiatočných hodnôt modulov pružnosti

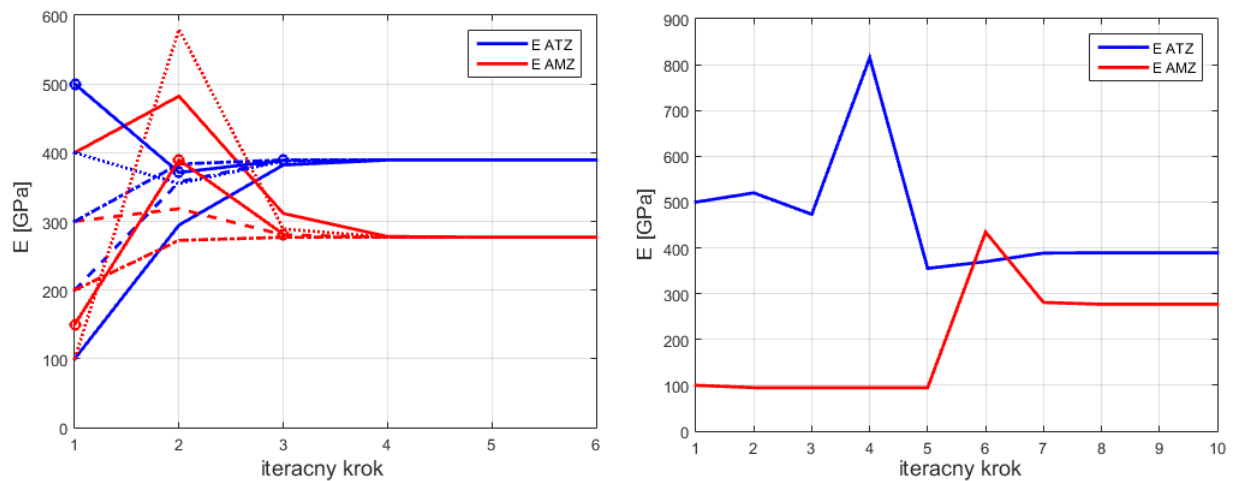
Pri jednej neznámej (AMZ) sa hodnota výsledného youngovho modulu pružnosti ustálila po treťom iteračnom kroku. Použité vstupné hodnoty hrúbok sú získané z kombinácie snímok z mikroskopu so zväčšením 2400 a 240 uvažovaním modulu pružnosti ATZ vrstvy 390 GPa (obr. 7.7).

7. PREZENTÁCIA VÝSLEDKOV RIEŠENIA



Obr. 7.7: Konvergencia hodnoty modulu pružnosti AMZ vrstiev pre rôzne poč. podmienky

Pri počiatkovej hodnote 500 GPa pre ATZ a 100 GPa pre AMZ výpočet konvergoval pomaly, a bolo treba nastaviť spodnú hranicu pre AMZ (95 GPa), lebo po prvej iterácii sa dostávala hodnota modulu pružnosti do záporných čísel (obr.7.8 vpravo).



Obr. 7.8: Konvergencia hodnoty modulu pružnosti ATZ a AMZ vrstiev pre rôzne poč. podmienky

8. Analýza výsledkov

Z výsledkov v predchádzajúcej kapitole je zrejmé, že sú neuspokojivé. Tu bude rozobratá časť dôvodov. Určovanie elastických konštánt nepriamym spôsobom je založené na tom, akou mierou neznáme konštanty na meranú veličinu, v tomto prípade vlastné frekvencie, vplývajú. Čím menší vplyv majú na vlastnú frekvenciu, tým väčší vplyv má na ich správne určenie frekvencia a tým pádom aj všetky ostatné merané veličiny. Hodnoty predovšetkým youngovho modulu pružnosti AMZ vrstiev dosahovali príliš veľkého rozptylu. V ďalšom budeme predpokladať, že modul pružnosti ATZ je 390 GPa a modul pružnosti AMZ vrstiev je 250 GPa (hodnota modulu pružnosti získaného na konci iteračného riešenia).

8.1. Neistoty a chyby

Ako merané veličiny do výpočtu vstupujú geometrické rozmery skúšobných telies, teda dĺžka, šírka a hrúbky jednotlivých vrstiev. Ďalej merané rezonančné frekvencie, hmotnosť (prípadne hustoty), v prípade vlastností známej vrstvy aj elastické charakteristiky tejto vrstvy. Hodnoty týchto veličín nie je samozrejme možné poznať s dokonalou presnosťou a ich merané hodnoty sú zaťažené chybou. Chyby možno deliť podľa charakteru na náhodné a systematické. Systematická chyba ostáva konštantná počas opakovaných meraní, náhodná sa mení nepredvídateľným spôsobom. Spoločne ich vyjadrujeme parametrom zvaným neistota merania. Neistoty v priamo meraných veličinách sa prejavujú aj vo veličinách z nich odvodených. Na neistote sa vstupné parametre podieľajú rôznou mierou, ktorá je vyjadrená prevodovými (citlivostnými) koeficientmi. V ďalšom sa obmedzíme práve na vyjadrovanie citlivostných koeficientov, takzvaných lokálnych citlivostí.

8.2. Citlivostná analýza

V [31] vychádzajúcom z ASTM štandardu pre určovanie modulu pružnosti je popísané určovanie neistoty v prípade telies z 1 materiálu. Prevodové koeficienty sú vyjadrené analyticky ako parciálne derivácie nepriamo meranej veličiny vzhľadom k priamo meraným veličinám

$$\frac{\partial E}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(0.9465 \frac{m f_f^2 a^3}{b t^3} T_1 \right) \quad (8.1)$$

Napríklad pre vplyv prvej ohybovej frekvencie dostávame

$$\frac{\partial E}{\partial f_f} = \frac{\partial}{\partial f_f} \left(0.9465 \frac{m f_f^2 a^3}{b t^3} T_1 \right) = \frac{2E}{f_f} \quad |s_{Ef}| = 2 \quad (8.2)$$

Obdobne by sme dostali citlivostné koeficienty pre ostatné merané veličiny, hmotnosť m , šírku b , dĺžku a a hrúbku t .

$$\frac{\partial E}{\partial m} = \frac{E}{m} \quad |s_{Em}| = 1 \quad \frac{\partial E}{\partial b} = \frac{-E}{b} \quad |s_{Eb}| = 1 \quad (8.3)$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \frac{3E}{a} \quad |s_{Ea}| = 3 \quad \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{-3E}{t} \quad |s_{Et}| = 3 \quad (8.4)$$

V prípade, že teleso je zložené z viacerých materiálov, nie je obecné možné si neznámu vyjadriť explicitne, vzhľadom na nelineárnu rovnicu 5.3.

Chyby v určenej vlastnej frekvencii možno deliť na chyby pri jej samotnom meraní a chyby konečnoprvkového modelu spočívajúce v tom, že je zostavený z chybného modelu geometrie (v prípade hrúbok bez korekcií na priemernú hrúbku) prípadne chybného modelu materiálu (hmotnosť, modul pružnosti vrstiev, ktorý predpokladáme za známy). Všetky tieto chyby sa podieľajú na nesprávnom určení neznámeho modulu pružnosti.

Pre lepšiu predstavivosť sa to dá ilustrovať nasledujúco: Do modelu geometrie budeme vstupovať s nesprávne určenou (vyššou) dĺžkou, čo sa prejaví na nižšej tuhosti telesa použitého pri ladení oproti skutočnému experimentálnemu telesu. Vzhľadom nato, že model spektrálne ladíme pomocou neznámeho modulu pružnosti, tento neznámy parameter musí kompenzovať nižšiu tuhosť a dostaneme tým jeho vyššiu hodnotu než má v skutočnosti. Frekvencia je ale málo citlivá na jeho zmeny z dôvodu malého objemového podielu a polohy AMZ vrstiev, čím sa chyba ešte násobí. Obdobne si to modul pružnosti AMZ vrstiev 'odnesie' pri nesprávne priradenom module pružnosti ATZ vrstiev a pri všetkých ostatných parametroch.

Nasledujúci postup je obcejšie v maticovej podobe pre väčšie množstvo parametrov popísaný v [32] alebo [33]. Pre prípad vplyvu modulu pružnosti ATZ (pri predpoklade jeho poznania) na určený modul AMZ vrstiev a pre vplyv dĺžky dostaneme

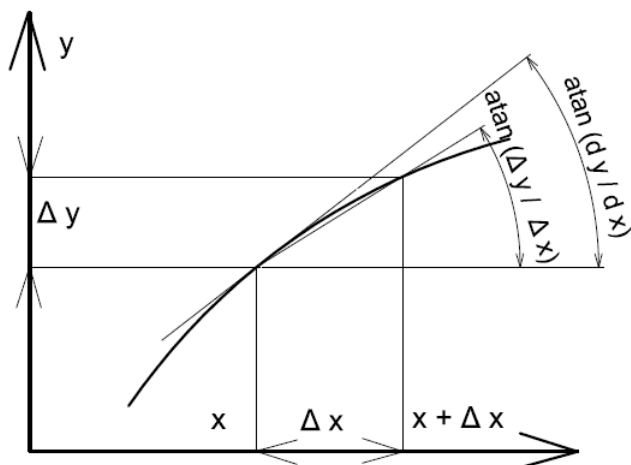
$$s_{EAMZ(EATZ)} = -\frac{s_{frekv(EATZ)}}{s_{frekv(EAMZ)}} \approx -\frac{\frac{\Delta f}{\Delta E_{ATZ}} \frac{E_{ATZ}}{f}}{\frac{\Delta f}{\Delta E_{AMZ}} \frac{E_{AMZ}}{f}} = -\frac{\Delta E_{AMZ}}{\Delta E_{ATZ}} \frac{E_{ATZ}}{E_{AMZ}} \quad (8.5)$$

$$s_{EAMZ(dlzka)} = -\frac{s_{frekv(dlzka)}}{s_{frekv(EAMZ)}} \approx -\frac{\frac{\Delta f}{\Delta dlzka} \frac{dlzka}{f}}{\frac{\Delta f}{\Delta E_{AMZ}} \frac{E_{AMZ}}{f}} = -\frac{\Delta E_{AMZ}}{\Delta dlzka} \frac{dlzka}{E_{AMZ}} \quad (8.6)$$

Obdobne by sa dali vyjadriť vzťahy pre ostatné parametre. Takto vyjadrené citlivostné koeficienty možno interpretovať napríklad ako n-percentnú zmenu parametru v čitateli na 1-percentnú zmenu parametru v menovateli. Teda ak bude chyba v meraní dĺžky 1 % a citlivostný koeficient má hodnotu 10, bude podľa vzťahu 8.6 chyba v určení modulu pružnosti AMZ vrstvy 10 %. To je aj hlavná výhoda takejto bezrozmernej definície koeficientov, dajú sa dobre interpretovať.

ANSYS vo svojej klasickej verzii postupne odstraňuje moduly z užívateľského rozhrania, ako aj optimalizačný, preto je citlivostná analýza ručne napísaná v prostredí APDL. Budeme používať dopredné diferencie, obrázok 8.1. Hodnota takto určeného koeficientu závisí na dĺžke diferenčného kroku, pretože závislosti medzi parametrami sú obecné nelineárne. Pri veľkom kroku sa nesprávne postihuje nelineárna závislosť, pri príliš malom kroku sa môžu vyskytnúť numerické chyby. Pri skúšaní rôznych dĺžok kroku sa ako vhodný ukázal relatívny krok 0.001, čo je v dobrej zhode s [1]. Kritériom bola stabilita hodnoty citlivostného koeficientu pre dĺžky kroku v okolí (0.01, 0.005, 0.0005).

8.2. CITLIVOSTNÁ ANALÝZA

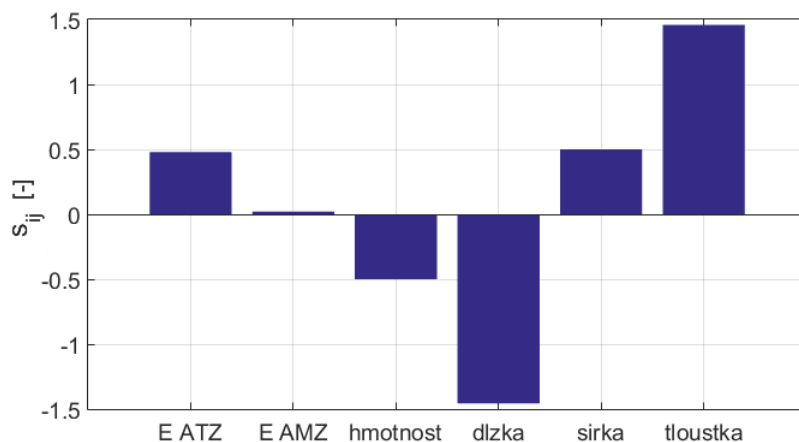


Obr. 8.1: Dopredné diferencie a chyba voči derivácii

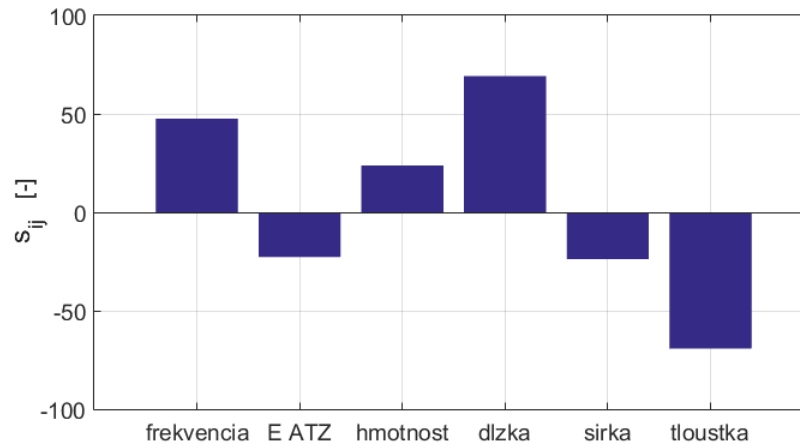
8.2.1. Vplyv meraných veličín na youngov modul AMZ pri užití prvej ohybovej frekvencie

Nižšie je na obrázkoch vyjadrený vplyv jednotlivých vstupov na vlastnú frekvenciu. Uvažujeme youngov modul pružnosti 390/250 GPa pre ATZ/AMZ. Vplyv AMZ je len o niečo vyšší než 0.02, teda prakticky žiadny (1 značí 1 percentný nárast i-tého parametra na 1 percentný nárast j-tého parametra pri lineárnej závislosti, teda pre koeficient 0.02 znamená, že 1 percentný nárast modulu pružnosti AMZ vrstiev sa prejaví iba 0,02 percentným nárastom vlastnej frekvencie). Problematické je, že nízka citlivosť modulu pružnosti AMZ je člen, ktorého prevrátenou hodnotou sa pre násobujú všetky citlivosti v prípade, že chceme získať citlivosť modulu pružnosti AMZ vrstiev na frekvenciu, geometriu a modul ATZ vrstiev. Dostaneme tým neúmerne vysokú citlivosť vzhľadom na všetky vstupné veličiny.

Uvažovať celkovú hrúbku nie je úplne korektné, lebo tá sa skladá z hrúbok AMZ aj ATZ vrstiev, ale v prípade citlivostného koeficientu vzhľadom na hrúbku budeme zjednodušene predpokladať, že x-násobne nesprávne určená celková hrúbka bude daná súčtom x-násobne nesprávne určených hrúbok AMZ a x-násobne nesprávne určených hrúbok ATZ vrstiev.



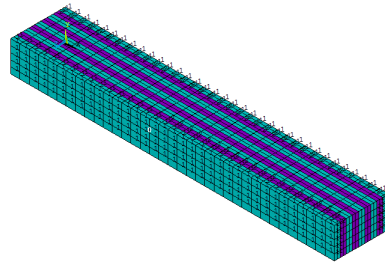
Obr. 8.2: Bezrozmerné citlivosti prvej ohybovej frekvencie na parametre vstupujúce do výpočtu



Obr. 8.3: Bezrozmerné citlivosti modulu pružnosti AMZ vrstiev na parametre vstupujúce do výpočtu

Z obrázku 8.3 možno vidieť napríklad to, že 1 percentná chyba v zmeranej vlastnej frekvencii spôsobí takmer 50 percentnú chybu v určenom module pružnosti AMZ vrstiev, pričom chybné zmeranie ostatných veličín sa takisto prejaví v chybe v určení modulu pružnosti neúmerne vysokým spôsobom.

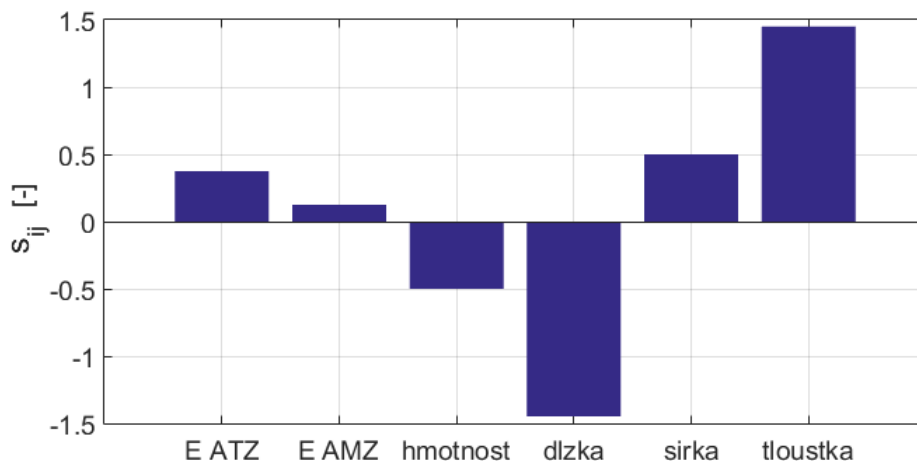
O niečo priaznivejšia situácia by nastala napríklad v prípade, keby vrstvy AMZ tvorili vyšší objemový podiel z celkového objemu telesa. Na obrázkoch nižšie je táto situácia ukázaná pre prípad, že všetky vrstvy sú rovnako hrubé (400 mikrometrov). Dĺžka, šírka a hmotnosť sú identické s laminátom 3.



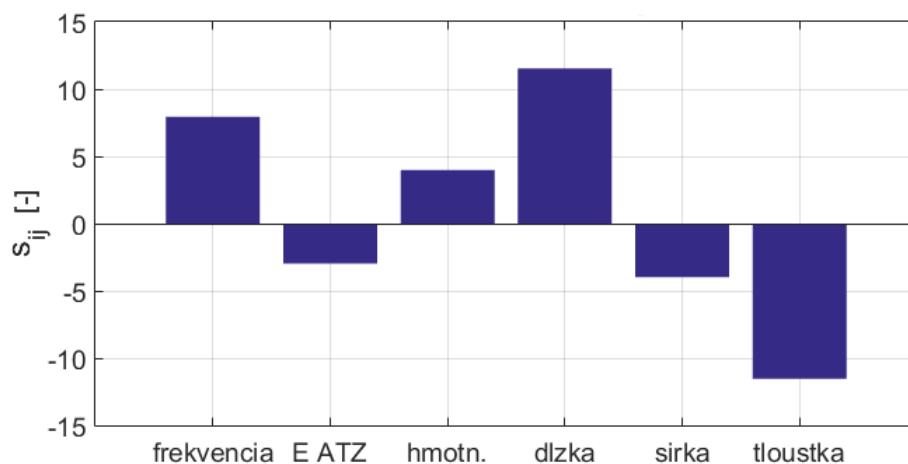
Obr. 8.4: ATZ(modrá farba), AMZ (fialová), objemový podiel AMZ 4/9

Zvýšila by sa citlivosť vlastnej frekvencie na modul AMZ vrstiev čo by sa pozitívne prejavilo aj v citlivostiach vrstiev na vstupy, ako ukazuje obrázok 8.6. To ale neodpovedá reálnym dátam.

8.2. CITLIVOSTNÁ ANALÝZA



Obr. 8.5: Citlivosti vlastnej frekvencie na parametre pre prípad podľa obrázku 8.4



Obr. 8.6: Citlivosti určeného modulu pružnosti AMZ vrstiev pre prípad podľa obrázku 8.4

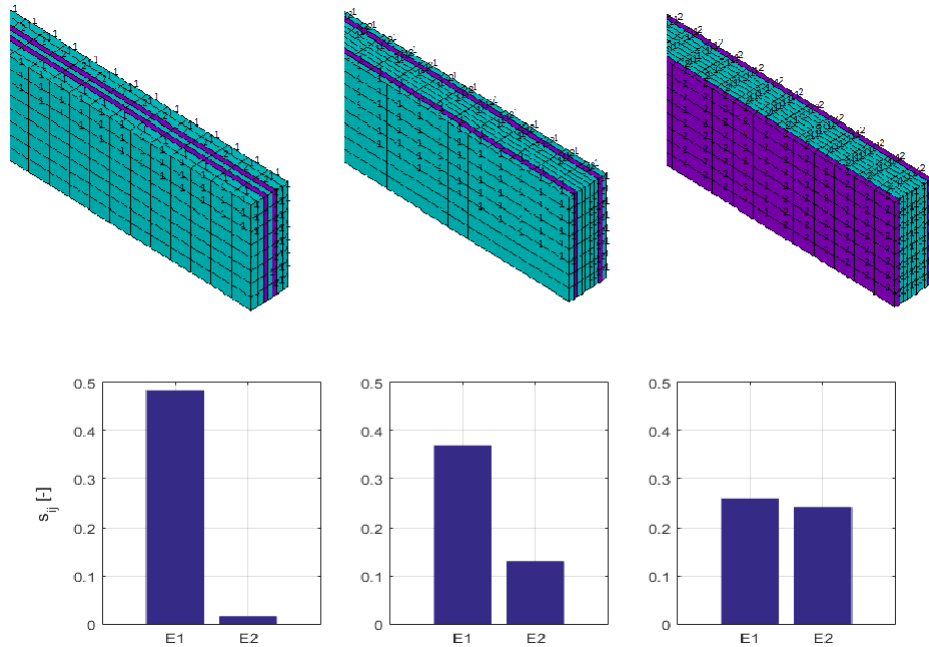
Na obr. 8.7 sú 3 rôzne polohy materiálu 2. Hrúbky jednotlivých vrstiev sú:

prípado 1: 600, 200, 200, 200, a 600 mikrometrov

prípado 2: 200, 200, 1000, 200 a 200 mikrometrov

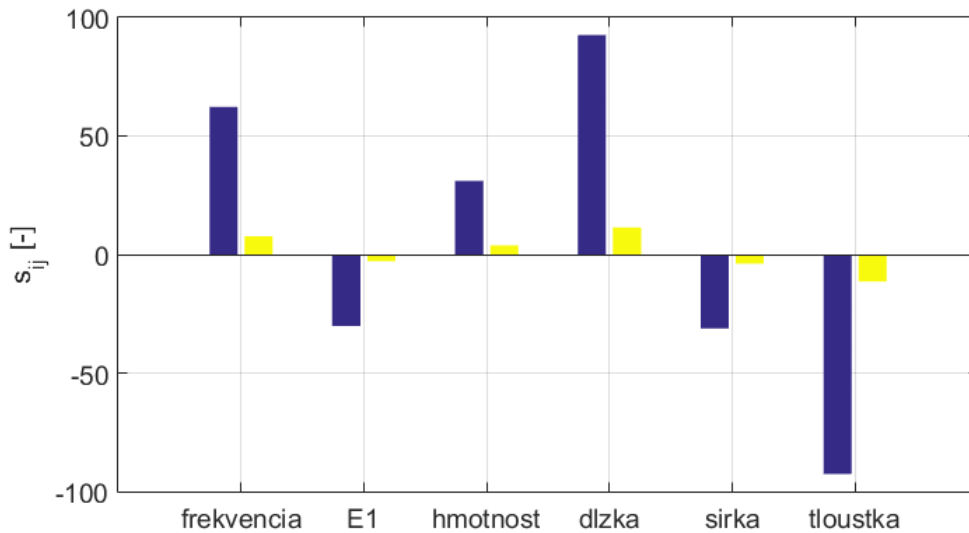
prípado 3: 200, 1400 a 200 mikrometrov

Je zrejmé, že s zvyšujúcou sa vzdialenosťou od neutrálnej osy narastá vplyv jeho modulu pružnosti na vlastnú frekvenciu. Vyplýva to aj z analytických vzťahov pre ohybové kmitanie nosníka (vzťahy 4.7 a 4.9), kde je modul pružnosti prenasobovaný kvadratickým momentom prierezu vrstvy vzhľadom k neutrálnej ose. Teda okrem samotného objemového podielu je podstatná aj poloha zložiek laminátu. V prípade telesa použitého ako zdroj experimentálnych dát sú vrstvy neznámeho AMZ zhruba uprostred, pričom okraje laminátu boli tvorené hrubými vrstvami ATZ. Ich rozmiestnenie podľa nižšie uvedeného prípadu by takisto znížilo chybu.



Obr. 8.7: Citlivosť ohybovej frekvencie na moduly pružnosti pre 3 rôzne polohy materiálu s modulom $E_2=250$ GPa, $E_1=300$ GPa

Nižšie sú vyjadrené citlivosti pre prípady 1 (modrá) a 2 (žltá) a je vidieť, že rozdiel je výrazný.



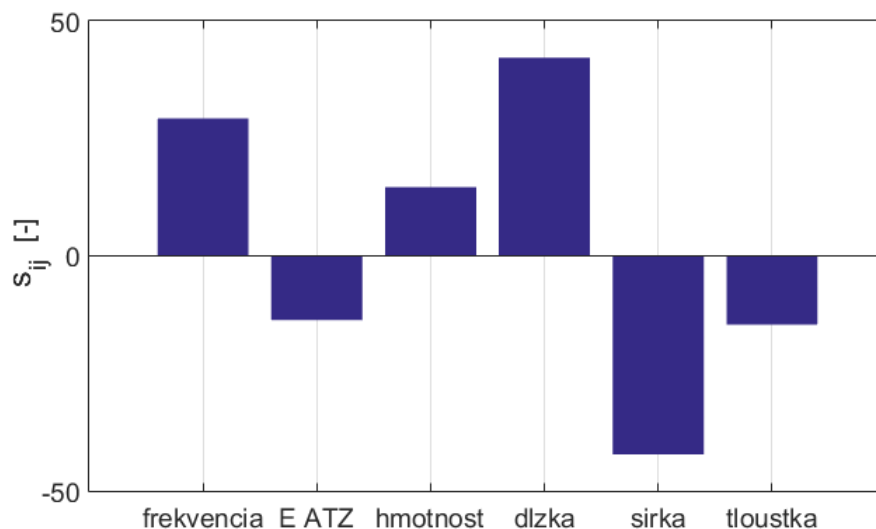
Obr. 8.8: Citlivostné koeficienty určeného E_2 vzhľadom na parametre pre prípady 1 a 2

8.2.2. Vplyv meraných veličín na youngov modul AMZ pri užití druhej ohybovej frekvencie

Hrúbka je ako rozmer najviac problémová. Keby sa použila namiesto prvej ohybovej frekvencie druhá, kmitanie v tomto prípade nastáva kolmo na smer prvej ohybovej frekvencie. V tom prípade sa síce zníži citlivosť neznámeho modulu pružnosti na hrúbku, ale narastie vplyv šírky. Tá je ale podľa dostupných dát z merania menej nepravidelná (tab. 7.6).

8.2. CITLIVOSTNÁ ANALÝZA

Taktiež vplyv AMZ na vlastnú frekvenciu je v tomto prípade o niečo vyšší, konkrétne hodnoty bezrozmerných citlivostí sú 0.465 a 0.034 (pri out of plane to bolo 0.021, čiže nárast o približne 1/3).

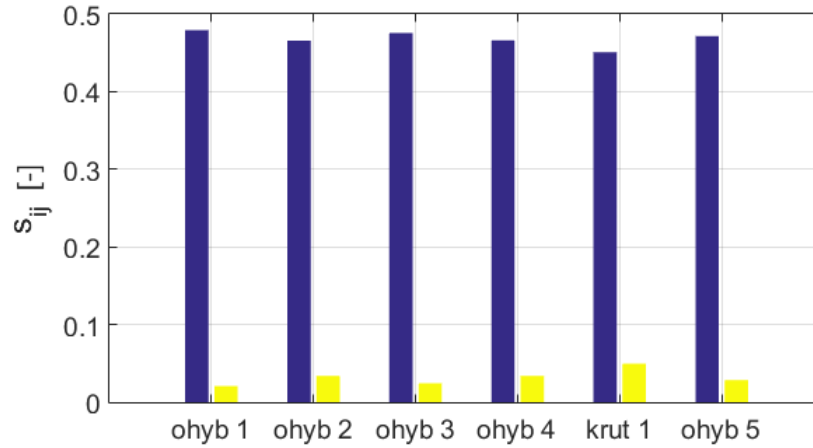


Obr. 8.9: Bezrozmerné citlivosti modulu pružnosti AMZ vrstiev na parametre vstupujúce do výpočtu pri druhej ohybovej frekvencii

Vplyv šírky a hrúbky sa v tom prípade 'otočí'. To aj odpovedá spočítaným výsledkom, keď pri in plane frekvencii bol rozptyl hodnôt E modulu AMZ nižší.

8.2.3. Citlivosti prvých 6 vlastných frekvencií na moduly pružnosti zložiek laminátu 3

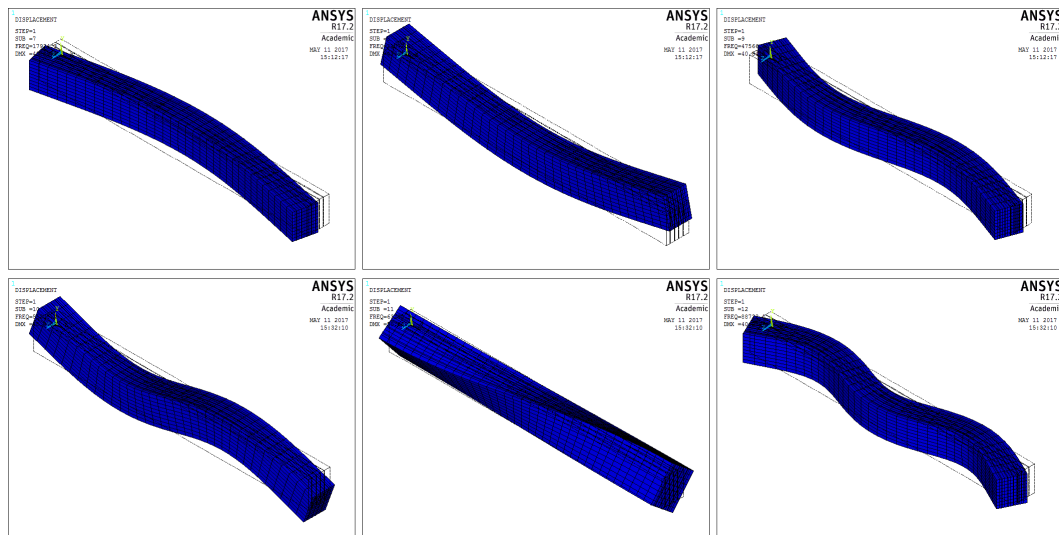
Ako je možno vidieť z obrázku 8.10, modul pružnosti AMZ vrstvy nemá významný vplyv na žiadnu z prvých 6 vlastných frekvencií, pričom najmenej nepriaznivá situácia je pre prvú torznú frekvenciu. Aj pri nej je však citlivosť vlastnej frekvencie na zmenu modulu pružnosti AMZ vrstiev len päťpercentná. Aj napriek tomu by sa pomerne významne znížil vplyvy chýb v určení všetkých meraných veličín vstupujúcich do výpočtu (obr. 8.12).



Obr. 8.10: Bezrozmerné citlivostné koeficienty pre prvých 6 vlastných frekvencií vzhľadom k modulom pružnosti ATZ a AMZ vrstiev laminátu

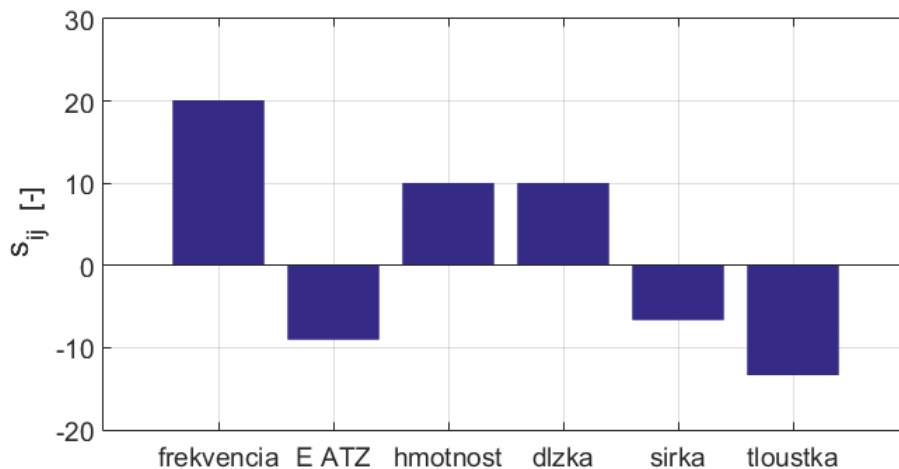
tvar	ATZ	AMZ
ohyb 1 (out of plane)	0.479	0.021
ohyb 2 (in plane)	0.466	0.034
ohyb 3 (out of plane)	0.476	0.024
ohyb 4 (in plane)	0.466	0.034
krut 1	0.450	0.05
ohyb (out of plane) 5	0.471	0.029

Tabuľka 8.1: Citlivosti prvých 6 vlastných frekvencií na moduly pružnosti zložiek laminátu

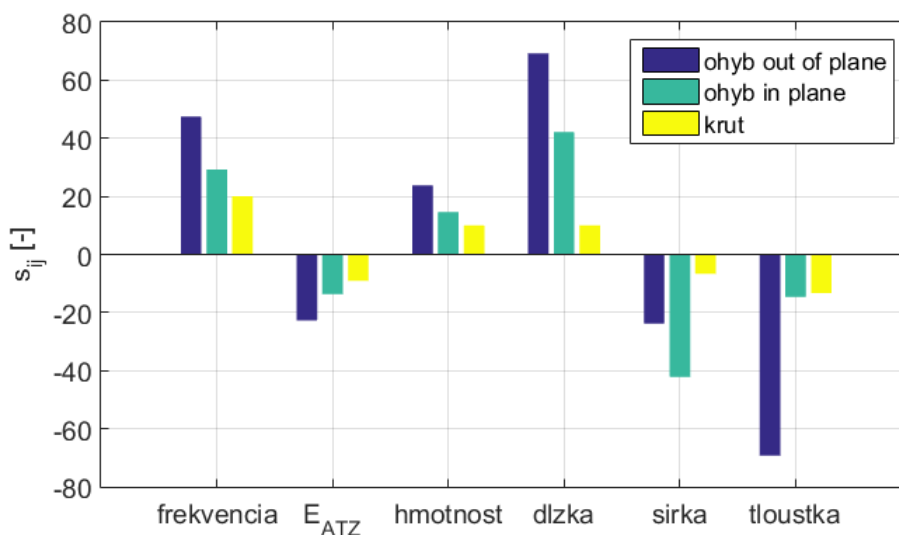


Obr. 8.11: Prvých 6 vlastných tvarov pre laminát 3

8.2. CITLIVOSTNÁ ANALÝZA



Obr. 8.12: Citlivostné koeficienty pre E_{AMZ} pri torznej frekvencii



Obr. 8.13: Citlivostné koeficienty pre E_{AMZ} vzhľadom na parametre pri prvých 2 ohybových a torznej frekvencii - porovnanie

Dá sa teda zhodnotiť, že youngov modul pružnosti AMZ vrstiev laminátu 3 je s rozumnou a prakticky využiteľnou presnosťou len ťažko určiteľný, pričom prekvapujúco sa ako najviac perspektívna ukazuje prvá torzná frekvencia, ktorá by dávala mierne lepšie výsledky než druhá ohybová frekvencia v najproblematickejších parametroch, E_{ATZ} a hrúbke. Úloha je naďalej zle podmienená, hlavne preto, že presne nepoznáme modul pružnosti ATZ vrstiev a hodnota citlivostného koeficientu preň je stále vysoká, konkrétne -10 a pre prípad hrúbky je citlivostný koeficient prakticky rovnaký. V FFT zázname bolo vidieť malý peak pravdepodobne torznej frekvencie o hodnote 66190 Hz. Pri skúšaní teleso naladiť na torznú frekvenciu dosahovali hodnoty modulu pružnosti AMZ nerealistických čísel.

9. Záver

Cieľom tejto práce bolo popísať spôsob určenia elastických konštánt jednotlivých vrstiev viacvrstvých štruktúr - keramických laminátov. Určovanie bolo obmedzené na youngov modul pružnosti. Prvá časť bola zameraná na rešerš dostupnej literatúry a z nej vyvodené závery. Bolo zistené, že metodika pre zisťovanie elastických konštánt jednotlivých vrstiev viacvrstvých telies z rôznych materiálov existuje. Ďalej boli uvedené možnosti jednak analytického výpočtu na základe teórie ohybového kmitania bernoulliho nosníka, ako aj určovania pomocou ladenia a MKP, pomocou ktorého sa youngov modul pružnosti nakoniec určoval. Bol uvedený ilustračný príklad s tromi fiktívnymi telesami z 3 materiálov, v ktorom sa určili všetky 3 neznáme moduly pružnosti.

Ďalej boli určené moduly pružnosti monolitických vzoriek ATZ a AMZ, pričom hodnoty získané pomocou MKP a prístroja IMCE HT1600 umiestnenom v priestoroch ÚFM AVČR boli v dobrej zhode. Pre laminát zložený z vrstiev AMZ a ATZ bol pokus o určenie modulu pružnosti tenkých AMZ vrstiev, pričom sa nepodarilo uspokojivo určiť jeho hodnotu. Obdobne tomu bolo pri pokuse o určenie modulov pružnosti oboch vrstiev laminátu užitím prvých dvoch vlastných frekvencií laminátu. Jedine pri použití druhej ohybovej frekvencie sa jeho hodnoty blížili hodnotám nameraným na monolitických vzorkoch pri korekcii hrúbky na priemernú hodnotu získanú mikrometrom.

Následná citlivostná analýza ukázala, že malý objemový podiel AMZ vzhľadom k celkovému objemu telesa a poloha jeho vrstiev v lamináte robí určovanie jeho youngovho modulu veľmi problematické z dôvodu vysokej citlivosti prakticky na všetky veličiny, na ktorých jeho hodnota závisí. Predovšetkým sa ako problémová ukázala hrúbka laminátu, hrúbky jednotlivých vrstiev a youngov modul ATZ vrstiev laminátu. Úloha bola zle podmienená, teda malé rozdiely vo vstupných parametroch vyvolali rádovo vyššie rozdiely v určenom youngovom module pružnosti.

Okrem zlej podmienenosti úlohy ale treba priznať aj autorove problémy pri stanovovaní hrúbok jednotlivých vrstiev a celkovej hrúbky telesa z poskytnutých snímok z mikroskopu.

Z uvedeného vyplýva, že určovanie elastických konštánt jednotlivých zložiek laminátu je za určitých okolností pomerne problematické a doporučenie by sa dalo zhrnúť tak, že pre presnejšie určenie je potrebný vyšší objemový podiel neznámych vrstiev, prípadne ich poloha ďalej od neutrálnej osi, aby sa zvýšila citlivosť vlastnej frekvencie na neznáme elastické konštanty a tým znížila citlivosť určovaných hodnôt elastických konštánt na hodnoty ostatných meraných, prípadne známych veličín vstupujúcich do výpočtu. Je vhodné si nájsť takú vlastnú frekvenciu, ktorá je pre príslušný neznámy parameter najviac citlivá. A samozrejme je vhodný väčší počet vhodných skúšobných telies.

Literatúra

- [1] LAUWAGIE, Tom. *Vibration-Based Methods for the Identification of the Elastic Properties of Layered Materials*. Leuven (Heverlee), 2005. Katholieke Universiteit Leuven.
- [2] MISHRA, Asim Kumar a Sushanta CHAKRABORTY. Development of a finite element model updating technique for estimation of constituent level elastic parameters of FRP plates. *Applied Mathematics and Computation* [online]. 2015, **2015**(258), 84–94 [cit. 2017-03-16]. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2015.02.003>. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300315001551>
- [3] *ASTM E1875-08: Standard Test Method for Dynamic Young's Modulus, Shear Modulus, and Poisson's Ratio by Sonic Resonance*. Philadelphia: American Society for Testing and Materials, 2013.
- [4] *ASTM International - Standards and Publications* [online]. [cit. 2017-02-03]. Dostupné z: <https://www.astm.org/Standard/standards-and-publications.html>
- [5] TAM, Jun Hui, Zhi Chao ONG, Zubaidah ISMAIL, Bee Chin ANG a Shin Yee KHOO. Identification of material properties of composite materials using nondestructive vibrational evaluation approaches: A review. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2016, , 1-16. DOI: 10.1080/15376494.2016.1196798. ISSN 1537-6494. Dostupné také z: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/15376494.2016.1196798>
- [6] PAGNOTTA, Leonardo. Recent progress in identification methods for the elastic characterization of materials. *International Journal of Mechanics* [online]. 2008, **2008**(4), 129-140 [cit. 2017-02-25]. Dostupné z: <http://www.naun.org/main/NAUN/mechanics/m-33.pdf>
- [7] Chao-Shui Chang, Shun-Fa Hwang. Determination of elastic constants of materials by vibration testing. *Composite Structures* [online]. 2000, (2000), 183–190 [cit. 2017-02-25]. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822399001324>
- [8] RIKARDS, R, A CHATE a G GAILIS. Identification of elastic properties of laminates based on experiment design. *International Journal of Solids and Structures* [online]. 2001, **2001**(38), 5097–5115 [cit. 2017-02-28]. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768300003498>
- [9] HWANG, Shun-Fa, Jen-Chih WU a Rong-Song HE. Identification of effective elastic constants of composite plates based on a hybrid genetic algorithm. *Composite Structures*. 2009, **90**(2), 217-224. DOI: 10.1016/j.compstruct.2009.03.021. ISSN 02638223. Dostupné také z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0263822309000968>
- [10] EREMIN, A.A., E.V. GLUSHKOV, N.V. GLUSHKOVA a R. LAMMERING. Evaluation of effective elastic properties of layered composite fiber-reinforced plastic plates by piezoelectrically induced guided waves and laser Doppler vibrometry. *Composite Structures* [online]. 2015, **2015**(125), 449–458 [cit. 2017-02-25]. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822315001051>

- [11] MATTER, Marco, Thomas GMÜR, Joël CUGNONI a Alain SCHORDERET. Numerical-experimental identification of the elastic and damping properties in composite plates. *Composite Structures* [online]. 2009, **90**(2), 180–187 [cit. 2017-02-28]. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822309000671>
- [12] ALFANO, Marco a Leonardo PAGNOTTA. Determining the elastic constants of isotropic materials by modal vibration testing of rectangular thin plates. *Journal of Sound and Vibration* [online]. 2006, **2006**(223), 426–439 [cit. 2017-02-25]. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X05007169>
- [13] WARBURTON, G. B. The Vibration of Rectangular Plates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*. 1954, , 371-384.
- [14] BRUNO, Luigi a a kol. Elastic characterization of orthotropic plates of any shape via static testing. *International Journal of Solids and Structures* [online]. 2008, **45**(3-4), 908–920 [cit. 2017-02-26]. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768307003721>
- [15] PAGNOTTA, Leonardo a Giambattista STIGLIANO. Elastic characterization of isotropic plates of any shape via dynamic tests: Theoretical aspects and numerical simulations. *Mechanics Research Communications* [online]. 2008, **35**(6), 351–360 [cit. 2017-03-16]. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechrescom.2008.03.008>. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0093641308000414>
- [16] CHIU, Chin-Chen a Eldon D. CASE. Elastic modulus determination of coating layers as applied to layered ceramic composites. *Materials Science and Engineering: A* [online]. 1991, **1991**(132), 39-47 [cit. 2017-03-16]. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0921-5093\(91\)90359-U](http://dx.doi.org/10.1016/0921-5093(91)90359-U). Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/092150939190359U>
- [17] WANG, Qing-Ming a L. Eric CROSS. Determination of Young's modulus of the reduced layer of a piezoelectric RAINBOW actuator. *Journal of Applied Physics* [online]. 1998, **1998**(83), - [cit. 2017-03-16]. DOI: <http://dx.doi.org/10.1063/1.367364>. Dostupné z: <http://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.367364>
- [18] LAUWAGIE, T., H. SOL, W. HEYLEN a G. ROEBBEN. Determination of the in-plane elastic properties of the different layers of laminated plates by means of vibration testing and model updating. *Journal of Sound and Vibration* [online]. 2004, -(3–5), 529–546 [cit. 2017-03-18]. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2003.05.023>. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X03010599>
- [19] MISHRA, Asim Kumar a Sushanta CHAKRABORTY. Inverse detection of constituent level elastic parameters of FRP composite panels with elastic boundaries using finite element model updating. *Ocean Engineering* [online]. 2016, **2016**(111), 358–368 [cit. 2017-03-16]. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.oceaneng.2015.11.003>. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029801815006162>
- [20] SLAVÍK, Jaromír. *Počítačové metody mechaniky I*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2003. ISBN 80-214-2311-0.

LITERATÚRA

- [21] DICKSON, R. W.; WACHTMAN, J. B. An Alumina Standard Reference Material for Resonance Frequency and Dynamic Elastic Moduli Measurement I. For Use at 25 C. *Journal of Research of the National Bureau of Standards—A. Physics and Chemistry*, 1971, 75.3: 155-162.
- [22] FERGUSON, A.T. a a kol. Modeling and design of composite free-free beam piezoelectric resonators. *Sensors and Actuators A: Physical* [online]. 2005, -(1), 63-69 [cit. 2017-03-04]. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0924424704005400>
- [23] KAW, Autar K. *Mechanics of composite materials*. 2nd ed. Boca Raton, FL: Taylor, 2006. Mechanical engineering series (Boca Raton, Fla.), v. 29. ISBN 978-0849313431.
- [24] *MECHANICS - THEORY* [online]. [cit. 2017-03-04]. Dostupné z: <http://www.ecourses.ou.edu/cgi-bin/ebook.cgi>
- [25] High temperature impulse excitation technique IMCE HT1600. *IMP* [online]. [cit. 2017-03-24]. Dostupné z: <http://www.ipm.cz/facilities.html>
- [26] BERMEJO, R, C BAUDIN, R MORENO, L LLANES a A SANCHEZHERENCIA. Processing optimisation and fracture behaviour of layered ceramic composites with highly compressive layers. *Composites Science and Technology* [online]. 2007, **67**(9), 1930-1938 [cit. 2017-05-14]. DOI: 10.1016/j.compscitech.2006.10.010. ISSN 02663538. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0266353806003988>
- [27] *ANSYS Academic Research, Release 17.2, Help System, ANSYS, Inc.*
- [28] LAMBRINOU, K., T. LAUWAGIE, F. CHALVET, G. DE PORTU, N. TASSINI, S. PATSIAS, T. LUBE a O. VAN DER BIEST. Elastic properties and damping behaviour of alumina-alumina/zirconia laminates. *Journal of the European Ceramic Society* [online]. 2007, **27**(2-3), 1307-1311 [cit. 2017-05-18]. DOI: 10.1016/j.jeurceramsoc.2006.04.124. ISSN 09552219. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0955221906001804>
- [29] Ladění parametrů mechanických soustav. *Katedra mechaniky* [online]. [cit. 2017-03-19]. Dostupné z: <http://www.kme.zcu.cz/download/predmety/406-dso4.pdf>
- [30] SCHINDELIN, Johannes, Ignacio ARGANDA-CARRERAS, Erwin FRISE, et al. Fiji: an open-source platform for biological-image analysis. *Nature Methods* [online]. 2012-6-28, **9**(7), 676-682 [cit. 2017-04-16]. DOI: 10.1038/nmeth.2019. ISSN 1548-7091. Dostupné z: <http://www.nature.com/doifinder/10.1038/nmeth.2019>
- [31] The Determination of Uncertainties in Dynamic Young's Modulus. *Manual of Codes of Practice for the Determination of Uncertainties in Mechanical Tests on Metallic Materials* [online]. 2000, [cit. 2017-03-20]. Dostupné z: <http://www.npl.co.uk/upload/pdf/cop13.pdf>
- [32] SHI, Yinming, Hugo SOL a Hongxing HUA. Material parameter identification of sandwich beams by an inverse method. *Journal of Sound and Vibration* [online]. 2006, **290**(3-5), 1234-1255 [cit.

2017-05-14]. DOI: 10.1016/j.jsv.2005.05.026. ISSN 0022460x. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022460X0500372X>

- [33] LAUWAGIE, T., H. SOL a W. HEYLEN. Handling uncertainties in mixed numerical-experimental techniques for vibration based material identification. *Journal of Sound and Vibration* [online]. 2006, **291**(3-5), 723-739 [cit. 2017-05-14]. DOI: 10.1016/j.jsv.2005.06.025. ISSN 0022460x. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022460X05004438>

10. Zoznam použitých skratiek a symbolov

E	youngov modul pružnosti, modul pružnosti v ťahu
G	modul pružnosti v šmyku
μ	poissonov pomer
L	dĺžka, matica citlivosti
a	dĺžka
b	šírka
t	hrúbka / výška
w	posuv v smere osi z
f	frekvencia
ω	uhlová frekvencia
λ	koreň frekvenčnej rovnice, vlastné číslo
ρ	hustota
A	obsah plochy prierezu
J	kvadratický moment prierezu
s	citlivostný koeficient
m	hmotnosť
D	ohybová tuhosť
p	parameter (obecne)
l	ladený parameter
z	súradnica používaná pri viacvrstvom nosníku
T, A, B	korekčné faktory

Zoznam tabuliek

4.1	Dáta pre referenčné nosníky podľa [21]	17
4.2	Laminát 3, pomer dĺžky ku hrúbke 12.35:1	20
4.3	Laminát P3, pomer dĺžky ku hrúbke 5.6:1	21
4.4		23
5.1	rozмеры a frekvencie fiktívnych telies, hustota $\rho = 6000\text{kgm}^{-3}$, poissonov pomer $\mu = 0.22$	30
5.2	počiatočné, skutočné a výsledné hodnoty	31
6.1	Skúšobné telesá (vzorky). Pre všetky materiály je uvažovaná hodnota poissonovho pomeru $\mu=0.275$. Hrúbky zmerané mikrometrom.	33
6.2		34
7.1	konvergenzie siete pre SOLID185 s relatívnym rozdielom voči predchádzajúcemu deleniu	36
7.2	konvergenzie siete pre SOLID186 s relatívnym rozdielom voči predchádzajúcemu deleniu	37
7.3	Zhrnutie výsledkov pre out of plane frekvenciu	38
7.4	Zhrnutie výsledkov pre in plane frekvenciu	38
7.5	Závislosť hodnoty E_{AMZ} na hodnote E_{ATZ}	40
7.6	Šírky a hrúbky zmerané mikrometrom pri lamináte 3	40
7.7	Hrúbky získané zo snímok z mikroskopu pri 240 a 2400 násobnom zväčšení a hrúbky získané pri 120 násobnom zväčšení spolu s korekciami	41
7.8	Hrúbky získané zo snímok z mikroskopu ako priemerované hodnoty, plus korekcie na priemernú hrúbku	41
7.9	Moduly pružnosti AMZ vrstvy získané pre rôzne stanovené hrúbky vrstiev užitím out of plane frekvencie, $E_{ATZ}=390$ GPa	42
7.10	Vplyv hodnoty E modulu AMZ v závislosti na E module ATZ pri in plane frekvencii, použitá hrúbka zmeraná zo 2400 a 240 násobného zväčšenia bez korekcie	42
7.11	Moduly pružnosti AMZ vrstvy získané pre rôzne stanovené hrúbky vrstiev užitím in plane frekvencie, $E_{ATZ}=390$ GPa	43
7.12	Bezrozmerná citlivosť prvej a druhej ohybovej frekvencie na youngove moduly pružnosti ATZ a AMZ - číselne.	44
7.13	Moduly pružnosti ATZ a AMZ vrstiev laminátu pri užití prvých 2 ohybových frekvencií	44
8.1	Citlivosti prvých 6 vlastných frekvencií na moduly pružnosti zložiek laminátu	53

Zoznam obrázkov

2.1	Typický merací aparát [3]	4
2.2	Metódy určovania materiálových vlastností [5]	5
2.3	Statická skúška podľa [14]	7
2.4	Schéma aktuátoru RAINBOW (piezo a redukovaná vrstva) a ilustrácia metódy ekvivalentného prierezu [17]	8
2.5	Rovnaké frekvencie, rôzne elastické konštanty [18]	10
2.6	Správne určenie elastických konštánt [18]	10
4.1	priečne kmitajúci nosník a jeho uvoľnený prvok [20]	14
4.2	Symetrické vrstvenie	15
4.3	Nesymetricky vrstvený nosník a jeho ekvivalentný priečny prierez	16
4.4	Porovnanie prvých ohybových vlastných frekvencií a relatívnych chýb. Alumina Al_2O_3 - dáta z článku [21]. Indexy 1-12 odpovedajú referenčným nosníkom postupne A1 až D3. Spodný obrázok je relatívny rozdiel voči referenčným dátam z článku.	18
4.5	Prístroj IMCE HT1600 [25]	19
4.6	Prvá ohybová vlastná frekvencia, rozdiel a relatívny rozdiel medzi použitím priemernej hustoty a hustoty jednotlivých zložiek laminátu pre rôzne pomery hustôt laminátu 3	20
4.7	Prvá ohybová vlastná frekvencia, rozdiel a relatívny rozdiel medzi použitím priemernej hustoty a hustoty jednotlivých zložiek laminátu pre rôzne pomery hustôt laminátu P3	21
4.8	Zamedzenie posuvov tak, aby minimálne bránili deformácii spôsobenej teplotou	22
4.9	Axiálne napätia v lamináte pri použití trojnásobnej symetrie	24
4.10	Priebeh axiálnych napätí v lamináte pri použití trojnásobnej symetrie	24
5.1	Schéma popisujúca činnosť makier. Obdobný algoritmus sa používa prakticky vo všetkých prípadoch iteračných spôsobov získavania elastických konštánt založených na deriváciách - citlivostných koeficientoch	29
5.2	3 tenkostenné telesá o rôznych hrúbkach vrstiev	30
5.3	Citlivostné koeficienty frekvencií na moduly pružnosti vrstiev, t_1 , t_2 , t_3 : teleso 1, 2, 3, farby odpovedajú modulom pružnosti jednotlivých vrstiev telies	30
5.4	Konvergencia ku skutočným hodnotám	31
5.5	Konvergencia ku skutočným hodnotám pre počiatočné hodnoty youngových modulov pružnosti 600/50/250 GPa	32
5.6	Konvergencia ku skutočným hodnotám pre pre počiatočné hodnoty youngových modulov pružnosti 50/600/250 GPa	32
6.1	geometrické nepresnosti vo vrstvení laminátu P3	33
6.2	Malá relatívna hrúbka vrstiev AMZ voči vrstvám ATZ	34
6.3	Nepresnosti v geometrii pre laminát P16	34
7.1	konvergenzie siete pre prvú (in plane) a druhú (out of plane) ohybovú frekvenciu	36
7.2	Sieť pre model geometrie s využitím polovičnej symetrie	37
7.3	Youngov modul pružnosti, porovnanie MKP a dát z experimentu (ÚFM) pre monolity	38

7.4	Orientačne naznačené vrstvy laminátu 3 pri 120 násobnom zväčšení, vo vrstvách AMZ možno vidieť povrchové trhliny z dôvodu vysokých hodnôt ťahových napätí na povrchu, vo vnútri vrstiev sú napätia naopak tlakové .	39
7.5	Závislosť určeného youngovho modulu AMZ na module pružnosti ATZ vrstiev	43
7.6	Bezrozmerná citlivosť prvej a druhej ohybovej frekvencie na youngove moduly pružnosti ATZ a AMZ , získané z poslednej iterácie riešenia pre stanovenie hrúbky z mikroskopu pri 240 a 2400 násobnom zväčšení.	44
7.7	Konvergencia hodnoty modulu pružnosti AMZ vrstiev pre rôzne poč. podmienky	45
7.8	Konvergencia hodnoty modulu pružnosti ATZ a AMZ vrstiev pre rôzne poč. podmienky	45
8.1	Dopredné diferencie a chyba voči derivácii	48
8.2	Bezrozmerné citlivosti prvej ohybovej frekvencie na parametre vstupujúce do výpočtu	48
8.3	Bezrozmerné citlivosti modulu pružnosti AMZ vrstiev na parametre vstupujúce do výpočtu	49
8.4	ATZ(modrá farba), AMZ (fialová), objemový podiel AMZ 4/9	49
8.5	Citlivosti vlastnej frekvencie na parametre pre prípad podľa obrázku 8.4 . .	50
8.6	Citlivosti určeného modulu pružnosti AMZ vrstiev pre prípad podľa obrázku 8.4	50
8.7	Citlivosť ohybovej frekvencie na moduly pružnosti pre 3 rôzne polohy materiálu s modulom $E_2=250$ GPa, $E_1=300$ GPa	51
8.8	Citlivostné koeficienty určeného E_2 vzhľadom na parametre pre prípady 1 a 2	51
8.9	Bezrozmerné citlivosti modulu pružnosti AMZ vrstiev na parametre vstupujúce do výpočtu pri druhej ohybovej frekvencii	52
8.10	Bezrozmerné citlivostné koefiencienty pre prvých 6 vlastných frekvencií vzhľadom k modulom pružnosti ATZ a AMZ vrstiev laminátu	53
8.11	Prvých 6 vlastných tvarov pre laminát 3	53
8.12	Citlivostné koeficienty pre E_{AMZ} pri torznej frekvencii	54
8.13	Citlivostné koeficienty pre E_{AMZ} vzhľadom na parametre pri prvých 2 ohybových a torznej frekvencii - porovnanie	54