



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

ANALÝZA VAN DER POLOVA OSCILÁTORU

VAN DER POL OSCILLATOR ANALYSIS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Milan Huf

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Ondřej Rubeš

BRNO 2020

Abstrakt

Tato práce se zabývá studiem nelineárních systémů, především Van der Polovým oscilátorem. Teoretická část této práce je věnována základní teorii nelineárního kmitání. Cílem praktické části této práce je popsat chování buzeného (nehomogenního) a nebuzeného (homogenního) Van der Polova oscilátoru.

Abstract

This thesis describes study of nonlinear systems, especially the Van der Pol oscillator. The theoretical part of this thesis is devoted to the basic theory of nonlinear oscillation. The aim of the practical part of this thesis is to describe the behaviour of the forced and unforced Van der Pol oscillator.

Klíčová slova

Nelineární oscilátor, znaky nelineárních systémů, stabilita pohybu nelineárních systémů, Van der Poluv oscilátor, Duffingův oscilátor

Key words

Nonlinear oscillator, characteristics of nonlinear systems, stability behavior of nonlinear systems, Van der Pol oscillator, Duffing oscillator

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Milan Huf
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Mechatronika
Vedoucí práce:	Ing. Ondřej Rubeš
Akademický rok:	2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Analýza Van der Polova oscilátoru

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Cílem práce je zhotovit přehled fyzikálních systémů, které lze modelovat Van der Polovou rovnicí a popsat jejich možné chování. K tomuto účelu je potřeba sestavit matematický model Van der Polova oscilátoru a jeho numerickou simulací vyšetřovat jeho chování. Práce má přinést představu o chování nelineárních systémů.

Cíle bakalářské práce:

1. Rešerše nelineárních oscilátorů, zejména Van der Polova oscilátoru.
2. Analýza fyzikálních soustav, jejíž chování může být aproximováno Van der Polovou rovnicí.
3. Tvorba matematického modelu Van der Polova oscilátoru.
4. Simulace chování systému s různými počátečními podmínkami a s různým buzením.

Seznam doporučené literatury:

KRATOCHVÍL, Ctirad a Jaromír SLAVÍK. Mechanika těles: dynamika. Vyd. 4., V Akademickém nakl. CERM 2. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 978-80-214-3446-2.

BREPTA, Rudolf, František TUREK a Ladislav PŮST. Mechanické kmitání. Praha: Sobotáles, c1994. Technický průvodce, 71. ISBN 80-901684-8-5.

ZEMAN, Vladimír a Zdeněk HLAVÁČ. Kmitání mechanických soustav. 2. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2004. ISBN 80-7043-337-X.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc. ředitel
ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Bibliografická citace

HUF, Milan. *Analýza Van der Polova oscilátoru*. Brno, 2020. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/121520>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Ondřej Rubeš.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Analýza Van der Polova oscilátoru“ vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který tvoří přílohu této práce.

24. června 2020

.....

Milan Huf

Poděkování

Děkuji tímto Ing. Ondřeji Rubešovi za cenné připomínky a rady při vypracování bakalářské práce.

Obsah

1	Úvod	9
2	Základní teorie nelineárního kmitání	10
2.1	Typické vlastnosti a projevy nelinearit	11
2.1.1	Závislost vlastních frekvencí na amplitudě kmitů.....	11
2.1.2	Nelineární rezonance.....	11
2.1.3	Víceznačnost řešení a oblasti nestability.....	12
2.1.4	Přechodové charakteristiky	13
2.2	Stabilita pohybu u nelineárních soustav.....	14
3	Příklady nelineárních systémů	19
3.1	Duffingův oscilátor	19
3.2	Lorentzův dynamický systém	20
3.3	Van der Polův oscilátor.....	22
3.3.1	Balthasar van der Pol	22
3.3.2	Van der Polova rovnice.....	22
3.3.3	Odvození Van der Polovy Rovnice pro mechanickou soustavu	23
3.3.4	Odvození Van der Polovy rovnice pro RLC obvod	24
3.3.5	Homogenní Van der Polova rovnice	26
3.3.6	Nehomogenní Van der Polova rovnice	27
3.3.7	Řešení Van der Polovy rovnice.....	27
3.4	Rayleighův dynamický systém	29
4	Vlastní analýza Van der Polova oscilátoru	30
4.1	Analýza nebuzeného Van der Polova oscilátoru.....	30
4.2	Analýza buzeného Van der Polova oscilátoru.....	33
5	Závěr	41
6	Seznam použité literatury	42
7.	Seznam použitých symbolů a zkratk	44

1 Úvod

Počátky nelineární dynamiky se datují k období vzniku teorie o nelineárních oscilacích. Tato teorie se začala rozvíjet mezi 20. a 30. lety 20. století a je spojena především se jmény Van der Pola, Mandelštama a Andronova.

Od 70. let 20. století se formuje nový směr poznání, který je nazýván teorie chaosu. Předmětem zkoumání se stávají nelineární systémy. Studium nelineárních systémů umožnilo poznat i mnoho nových procesů lišících se od těch, které se vyskytují v systémech lineárních. Jedna z nejvýznamnějších nejznámějších prací tohoto období je teorie kvaziharmonického elektrického oscilátoru vypracovaná Van der Polem.

Fyzika na bakalářské úrovni představuje základy a základní pojmy fyzikálního popisu přírody. Při odvozování rovnic, které jí řídí, se často dopouštíme drastického zjednodušení a vytváříme modely, které popisují realitu jen v omezeném rozsahu parametrů. Obvykle se zjednodušování provádí linearizací rovnic. Dává nám velmi dobrý přehled a poměrně vhodně popisuje fyzikální jevy, ale v přírodě je mnoho jevů, jejichž řešení v lineárním režimu nenalezneme.

Nelineární soustava je charakterizována jako mechanická soustava, ve které je obsažen minimálně jeden prvek, jehož charakteristika je popsána nelineární závislostí silových a kinematických veličin.

V následujících kapitolách bude pojednáváno o nelineárních systémech, jejich znacích a odlišnostech od systémů lineárních. Podrobněji bude rozebírán buzený a nebuzený Van der Polův oscilátor při změně hodnot jednotlivých parametrů popisující jeho chování.

2 Základní teorie nelineárního kmitání

Klasická teorie dynamiky zjednodušuje řešení reálných problémů pomocí různých omezení či předpokladů tak, aby bylo možné studovaný problém popsat pomocí soustav lineárních diferenciálních rovnic. Mnohé problémy ale nelze takhle zjednodušit, protože výsledné lineární matematické modely nemohou vždy popsat kvalitativní charakter dynamických procesů, které v analyzovaných soustavách ve skutečnosti probíhají. V takových případech je často nutné doplnit lineární pohybové rovnice nelineárními členy, které modelují nelineární jevy.

Mezi charakteristické projevy nelinearity patří zvláště závislost vlastní frekvence a koeficientu tlumení na amplitudě kmitů, víceznačnost řešení a oblasti nestability a přechody kmitající soustavy jednoho pohybového stavu do druhého (přechodové charakteristiky), existence ustáleného a samobuzeného kmitání a nelineární rezonance.

Nelineární soustavu v dynamice pak můžeme charakterizovat jako mechanickou soustavu, která obsahuje alespoň jeden prvek, který má charakteristiku popsanou nelineární závislostí silových a kinematických (deformačních) veličin. [1]

Mezi nejzásadnější rozdíly odlišující nelineární soustavy od soustav lineárních je neplatnost principu superpozice u nelineárních systémů, tudíž výsledné řešení není dáno superpozicí dílčích řešení odpovídajícím jednotlivým složkám budícího účinku a řešení homogenní rovnice. Z toho například vyplývá, že vlastní vynucené kmitání se navzájem ovlivňují a že u vynuceného kmitání nelze budící účinky rozložit do harmonických složek a jejich dílčí odezvy prostě sečíst, neplatí, že dvojnásobná velikost vnější síly vyvolá dvojnásobnou výchylku. V nelineárním systému platí princip superpozice pouze pro malou množinu izolovaných bodů, které se nazývají fixními body. [2]

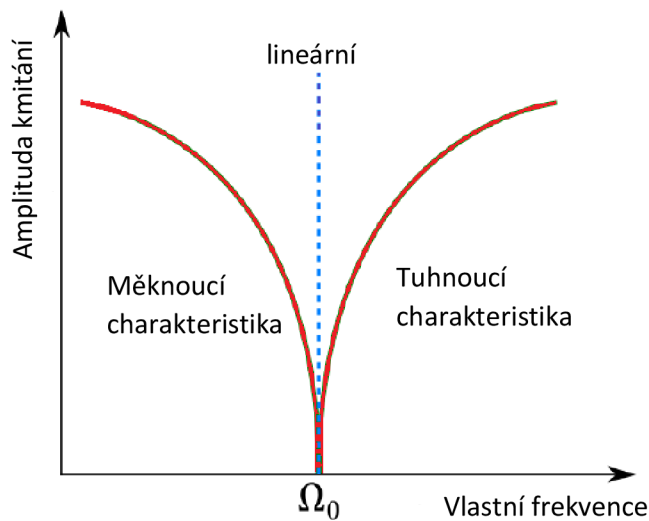
Dále u nelineárních soustav neplatí princip úměrnosti, nazývaný také proporcionality. To znamená, že pohyb není úměrný velikosti počátečních podmínek resp. velikosti budících sil.

Jako příklady dynamických nelineárních systémů se dají uvést soustava se dvěma zarážkami, soustava s vůlí, soustava s předpětím či matematické kyvadlo. V případě elektroniky je nelineárním prvkem například dioda. Dalším příkladem mohou být nelineární oscilátory – Duffingův nebo Van der Polův oscilátor.

2.1 Typické vlastnosti a projevy nelinearit

2.1.1 Závislost vlastních frekvencí na amplitudě kmitů

U nelineárních soustav jsou vlastní frekvence závislé na amplitudě kmitů. Tyto funkční závislosti se nazývají skeletové křivky. Způsob deformace těchto křivek je dán typem pružných charakteristik. Rozlišují se dva základní typy skeletových křivek: měknoucí (degresivní) a tvrdnoucí (progresivní) závislost. Tato závislost je v mnoha případech kombinací obou, v některých případech dokonce není ani funkční závislostí, tj. jedné vlastní frekvenci může odpovídat i několik amplitud, při níž nastane. Pro nulovou amplitudu kmitů odpovídá nelineární vlastní frekvence lineární. Je to důsledek možných složitých kombinací stavů, kdy obecně nelze používat princip superpozice. [1]



Obr. 1 Typy skeletových křivek [1]

2.1.2 Nelineární rezonance

U nelineárních soustav se objevuje bohatší spektrum rezonancí než u lineárních soustav, obsahuje více složek s vyššími i nižšími frekvencemi než je budící frekvence ω . Je to způsobeno tím, že nelze nikdy zcela realizovat přesné harmonické buzení nebo existenci parazitního buzení. V důsledku existence nelinearit dochází mezi jednotlivými složkami buzení ke vzájemným vazbám, čímž mohou být jednotlivé složky zvýrazněny, jiné zase potlačeny.

U nelineárních soustav s jedním stupněm volnosti se rozlišují čtyři základní typy rezonancí: [1]

- Hlavní rezonance – nastává, když $\omega_b = \Omega(A)$
- Subharmonické rezonance - nastává, když $\omega_b = \frac{\Omega(A)}{n}$, $n = 2, 3, \dots$
- Ultraharmonické rezonance - nastává, když $\omega_b = m\Omega(A)$, $m=2, 3, \dots$
- Subultraharmonické rezonance - nastává, když $\omega_b = \frac{n}{m}\Omega(A)$, $n \neq m$, $n, m = 2, 3, \dots$

U soustav s více stupni volnosti se můžou vyskytovat i další typy rezonancí, např.:

- Hlavní a vedlejší vnitřní rezonance
- Kombinační periodické rezonance
- Kombinační neperiodické rezonance

S rostoucím počtem stupňů volnosti roste i počet kombinací uvedených rezonancí. To, která rezonance se projeví a to která zůstane zatlumená, závisí na stavu, ve kterém se daná soustava nachází a úrovni zatlumení a rozbor těchto stavů se obecně liší soustavou od soustavy.

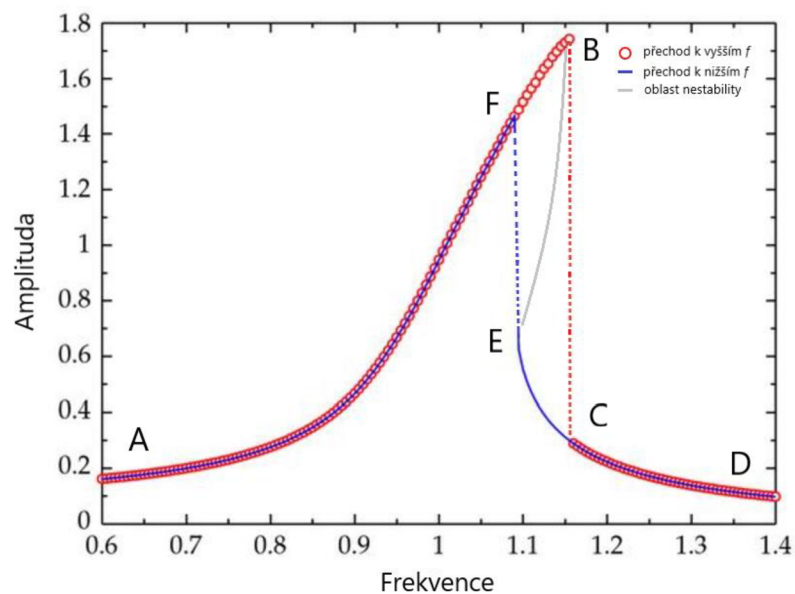
2.1.3 Víceznačnost řešení a oblasti nestability

S víceznačností řešení se setkáme při experimentálních analýzách i výpočtech. Většinou se projevuje jako deformace amplitudové charakteristiky. Větve amplitudové rezonanční charakteristiky se deformují souhlasně s průběhem skeletové křivky a „výška“ jejich vrcholů závisí na úrovni tlumení v modelové soustavě. V některých případech může dojít až ke vzniku další větve.

Obrázek 2 znázorňuje změnu amplitudy během pomalé změny budící frekvence. Během toho roste budící frekvence ω a vzrůstá i hodnota amplitudy až do bodu B. Poté amplituda skokem změní svoji hodnotu na úroveň bodu C a dále se mění podle křivky až do bodu D.

Při přechodu rezonance ve směru od vyšších frekvencí k nižším, se amplituda mění podél větve DE. V bodě E se skokem změní na hodnotu odpovídající bodu F. Dále mění svoji hodnotu až do bodu A.

S víceznačností řešení je tedy spojena existence oblasti nestability (větve BE). Pokud je soustava v této oblasti, dochází k přeskokům mezi jednotlivými stabilními oblastmi doprovázenými okamžitými změnami amplitudy a fáze kmitání. V takovýchto oblastech se nacházejí pásma, v nichž je soustava nestabilní a díky tomu se v ní neustálí. [1]

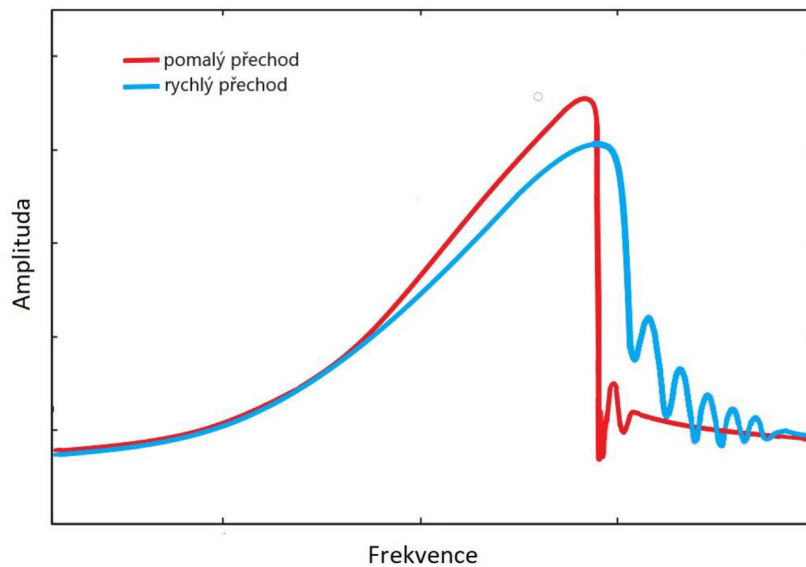


Obr. 2 Změna amplitudy při pomalé změně budící frekvence [3]

2.1.4 Přechodové charakteristiky

Jako přechodové charakteristiky jsou myšleny křivky modelující děje, k nimž dochází při přechodu rezonančních vrcholů. Ty mohou nastat například při rozběhu nebo doběhu modelové soustavy. Takovéto děje lze rozdělit na děje s rychlým či pomalým přechodem rezonančního vrcholu.

Na obr. 3 je znázorněn pomalý přechod rezonančního vrcholu od nižších frekvencí po vyšší frekvence. Při pomalém přechodu rezonančního vrcholu amplituda vibrací kopíruje přesně rezonanční křivku na amplitudové charakteristice až do bodu, kdy se dostane do nestabilní části této charakteristiky. Tady dochází ke skokové změně amplitudy na další stabilní část charakteristiky. Po té dochází vlivem interference vynucených a vlastních kmitů k pulzacím amplitud a fází, které jsou tím výraznější, čím je rychlost přechodu rezonančního vrcholu vyšší. (Převzato z [2])



Obr. 3 Přechodové charakteristiky při malé a velké rychlosti přechodu [4]

Pro případ rychlého přechodu platí, že dochází ke snížení rezonančního vrcholu, ale naopak se zvyšuje počet zvýšených výchylek. Při přechodu rezonance dojde k pulzacím amplitud a fází, který je tím intenzivnější, čím je rychlost přechodu rezonančního vrcholu vyšší. [1]

Z následujících obrázků je patrné, že s nárůstem rychlosti dochází na jedné straně ke snížení rezonančního vrcholů, na straně druhé však dochází k rozšíření oblasti zvýšených výchylek (pulzace amplitud a fází).

2.2 Stabilita pohybu u nelineárních soustav

Pro pohyb mechanické soustavy platí, že se určuje řešením pohybových diferenciálních rovnic výpočtového modelu odpovídajícího dané fyzikální soustavě. Tyto pohybové rovnice vyjadřují rovnováhu všech silových účinků včetně setrvačných sil, resp. momentů působících na zkoumanou soustavu. Ne vždy vypočtené průběhy odpovídají skutečným vlastnostem. Je to patrné při sledování některých dlouhodobých jevů, jako je ustálení kmitání nebo klidová poloha v rovnovážném stavu. V těchto případech popisuje vypočtený průběh pohybu skutečný pohyb jen v krátkém čase. S rostoucím časem se skutečný stav soustavy více vzdaluje od skutečného.

To je způsobeno zanedbáním některých velice malých silových účinků při sestavování pohybových rovnic. Tyto malé silové účinky jsou až o několik řádů menší než síly, které se v pohybových rovnicích uvažují. Vliv malých rušivých faktorů je pro různé pohyby různý. Na některé pohyby je velmi malý – takový pohyb lze považovat za stabilní. Jestliže se pohyb vlivem i sebemenších rušivých účinků silně mění, nazývá se nestabilním.

Ve srovnání s lineárními soustavami, kde platí princip superpozice, tak nezáleží na jejich okamžitém stavu. Proto je lineární soustava v celém stavovém prostoru buď stabilní, nebo nestabilní. U nelineární soustavy existuje víceznačnost řešení (viz kap. 2.1.3) a o tom, který stav s jakou amplitudou se nastaví, rozhodují počáteční podmínky pohybu.

Jak u lineárních tak i nelineárních systému se hodnotí stabilita pohybu podle stejného jevu, zda mají rušivé faktory velký nebo malý vliv na pohyb soustavy. Rušivé faktory mohou působit jak na počátku pohybu, tak také během celého jeho trvání. Pojem stability pohybu je přímým zobecněním pojmu stability rovnovážné polohy a proto při určování stability pohybu postupujeme podobně jako při určování stability rovnovážné polohy – taková poloha, ve které soustava při nulových počátečních rychlostech a při rovnováze vnějších sil zůstává libovolně dlouho.

Chování dynamické soustavy o jednom stupni volnosti lze nejlépe znázornit ve fázové rovině. Rovnovážné poloze ve fázové rovině odpovídá singulární bod, v jehož okolí jsou trajektorie popsány vztahem [5]:

$$\frac{dv}{du} = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}, \quad v = \frac{du}{dt} \quad (1)$$

Pro singulární bod u_0, v_0 platí:

$$P(u_0, v_0) = 0, \quad Q(u_0, v_0) = 0, \quad (2)$$

Neboť počátek souřadnic lze vždy převést do singulárního bodu, může se položit $u_0 = 0$ a $v_0 = 0$.

Po rozvoji analytických funkcí P, Q v bodě $(0,0)$ přejde vztah (1) do tvaru:

$$\frac{dv}{du} = \frac{au + bv + P_2(u, v)}{cu + dv + Q_2(u, v)} \quad (3)$$

kde funkce $P_2(u, v)$ a $Q_2(u, v)$ obsahují druhé a vyšší mocniny u a v . Jestliže $ad - bc \neq 0$, pak průběhy trajektorií v dostatečně blízkém okolí bodu $(0,0)$ jsou určeny lineárními částmi v čitateli a jmenovateli na pravé straně rovnice (3), kterou lze nahradit jednodušším výrazem:

$$\frac{dv}{du} = \frac{au + bv}{cu + dv} = \frac{Q_1}{P_1} \quad (4)$$

V případě $ad - bc = 0$ je třeba při použití této metody zahrnout členy $P_2(u, v)$ a $Q_2(u, v)$. [5]

V dalším kroku se vytvoří Jacobiho matice parciálních derivací funkcí P_1 a Q_1 podle proměnných u a v :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{dQ_1}{du} & \frac{dQ_1}{dv} \\ \frac{dP_1}{du} & \frac{dP_1}{dv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \quad (5)$$

Pro analýzu stability systému je nutné znát vlastní čísla matice J . Ty se určí z determinantu Jacobiho matice, který se položí rovno nule:

$$\det \begin{pmatrix} c - \lambda & d \\ a & b - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (6)$$

Z vypočteného determinantu vyjde charakteristická rovnice ve tvaru:

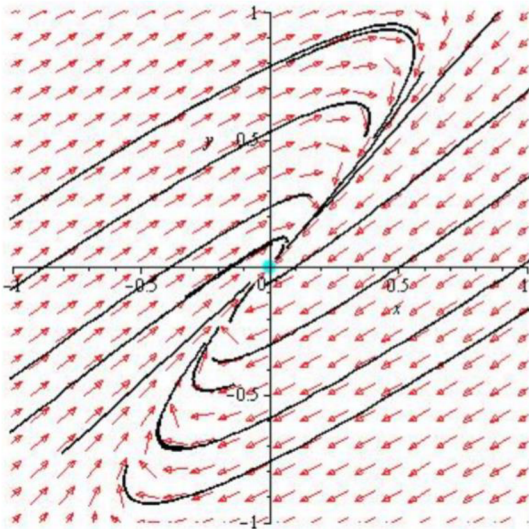
$$\lambda^2 - \lambda(b + c) - (ad - bc) = 0 \quad (7)$$

kde λ_1 a λ_2 jsou kořeny charakteristické rovnice.

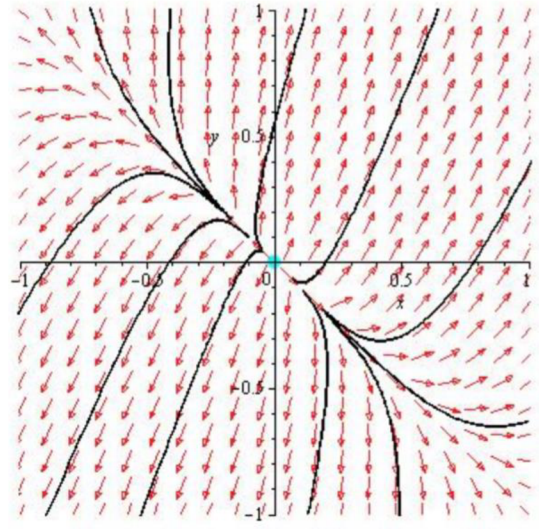
Pro různé hodnoty a, b, c, d nabývají kořeny λ_1 a λ_2 kladné nebo záporné, reálné nebo komplexní hodnoty. Podle toho je průběh trajektorií v těsném okolí singulárního bodu různý.

Pro různé hodnoty a, b, c, d nabývají kořeny λ_1 a λ_2 kladné nebo záporné, reálné nebo komplexní hodnoty. Podle toho také průběh trajektorií v těsném okolí singulárního bodu je různý.

V případě, že singulární bod je *stacionární uzel*, platí, že kořeny charakteristické rovnice λ_1 a λ_2 jsou reálné a mají stejné znaménko. Stacionární uzel může být stabilní či nestabilní. Pro stabilní uzel platí, že trajektorie se blíží k počátku ($b + c < 0$). Pro nestabilní uzel platí naopak, že v počátku trajektorie začínají a vzdalují se od něj ($b + c > 0$).

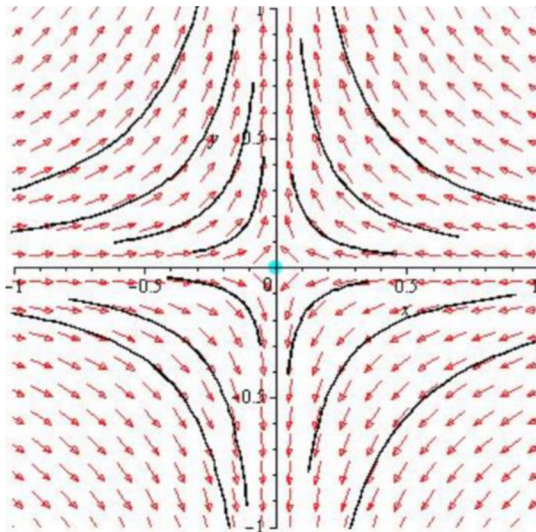


Obr. 4 Stabilní uzel [6]



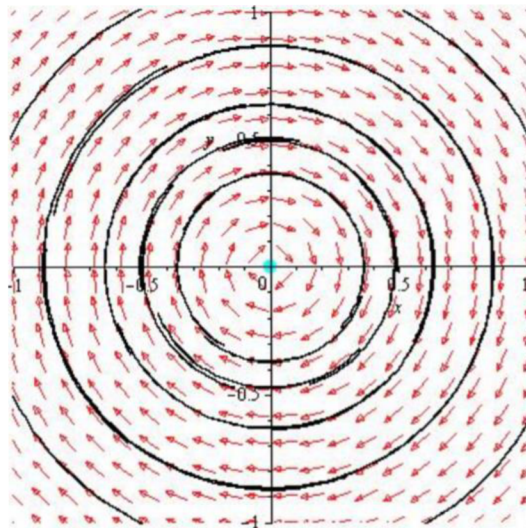
Obr. 5 Nestabilní uzel [6]

Pro singulární bod typu *sedlo* platí, že kořeny charakteristické rovnice λ_1 a λ_2 jsou reálné, ale mají opačné znaménko. Integrální křivky v okolí singulárního bodu mají hyperbolický tvar. Sedlo je vždy nestabilní a procházejí jím dvě integrální křivky směřující jednak od singulárního bodu, tak i do něho.



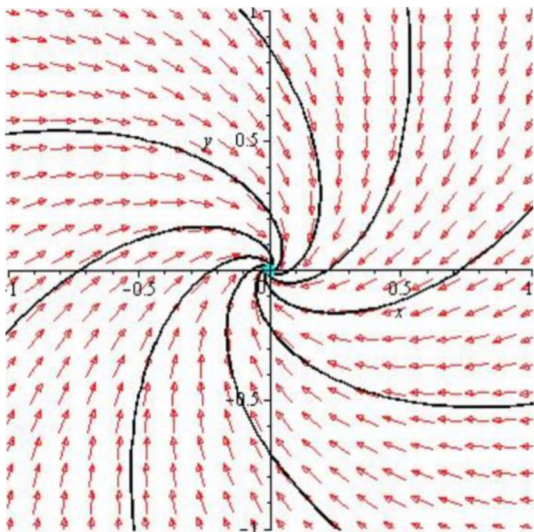
Obr. 6 Sedlo [6]

Pro singulární bod typu *střed* platí, že kořeny charakteristické rovnice λ_1 a λ_2 jsou sdružené ryze imaginární kořeny λ_1 a λ_2 . Jedná se o stabilní pole a neprochází jím žádná integrální křivka.

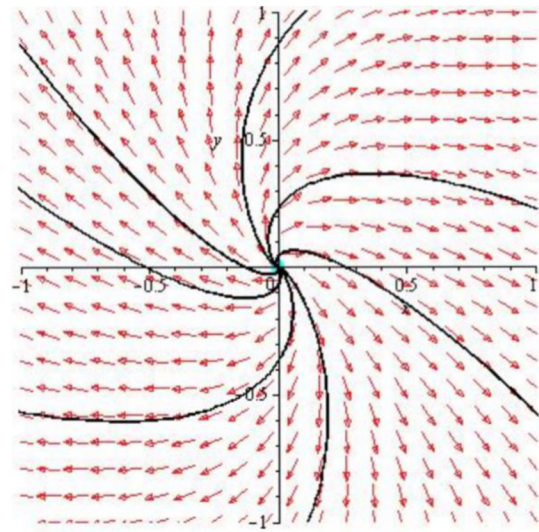


Obr. 7 Střed [6]

V případě, že jsou kořeny charakteristické rovnice λ_1 a λ_2 komplexně sdružené, jedná se o singulární bod typu ohnisko. Ohnisko může být také stabilní či nestabilní. Trajektorie jsou tvořené soustavou logaritmických spirál s asymptotickým bodem v počátku. Pro stabilní ohnisko platí $(b + c < 0)$ a pro nestabilní $(b + c > 0)$.

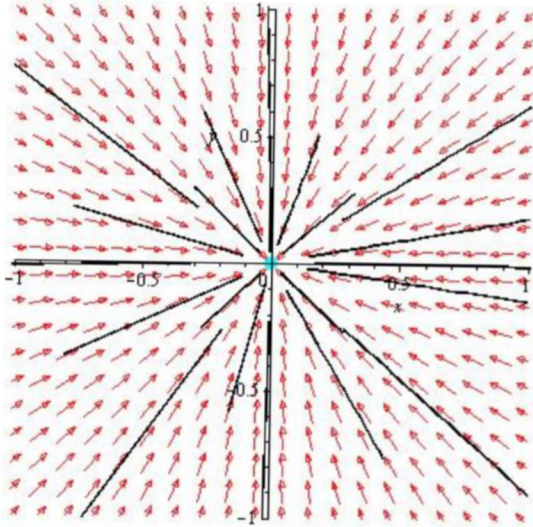


Obr. 8 Stabilní ohnisko [6]

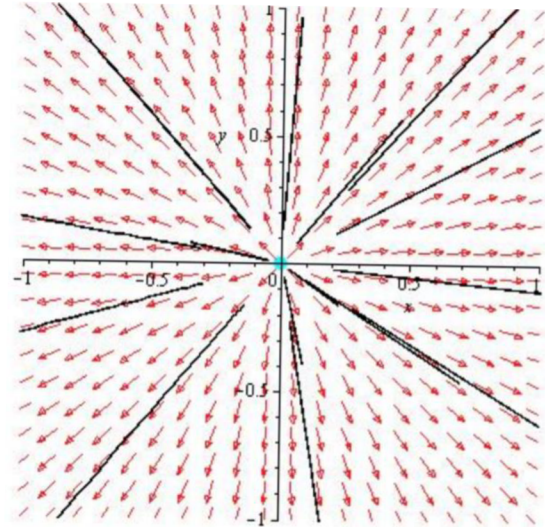


Obr. 9 Nestabilní ohnisko [6]

V případě dvou rovných reálných kořenů λ_1 a λ_2 je singulární bod opět uzel, který může být podobný prvnímu typu nebo typu hvězdice (dikritický uzel), kdy trajektorie procházejí počátkem s různými směnicemi. Tento uzel může být stabilní ($b + c < 0$) nebo nestabilní ($b + c > 0$).



Obr. 10 Dikritický stabilní uzel [6]



Obr. 11 Dikritický nestabilní uzel [6]

Jako příklad řešení stability pohybu je v kapitole 3.3.7 určeno řešení Van der Polovy rovnice.

3 Příklady nelineárních systémů

3.1 Duffingův oscilátor

Duffingův oscilátor pojmenovaný po německém inženýrovi Georgu Duffingovi (1861-1944) je nelineární oscilátor používaný k modelování určitých tlumených a poháněných oscilátorů.

Tento nelineární oscilátor je popsán diferenciální rovnicí druhého řádu ve tvaru [7]:

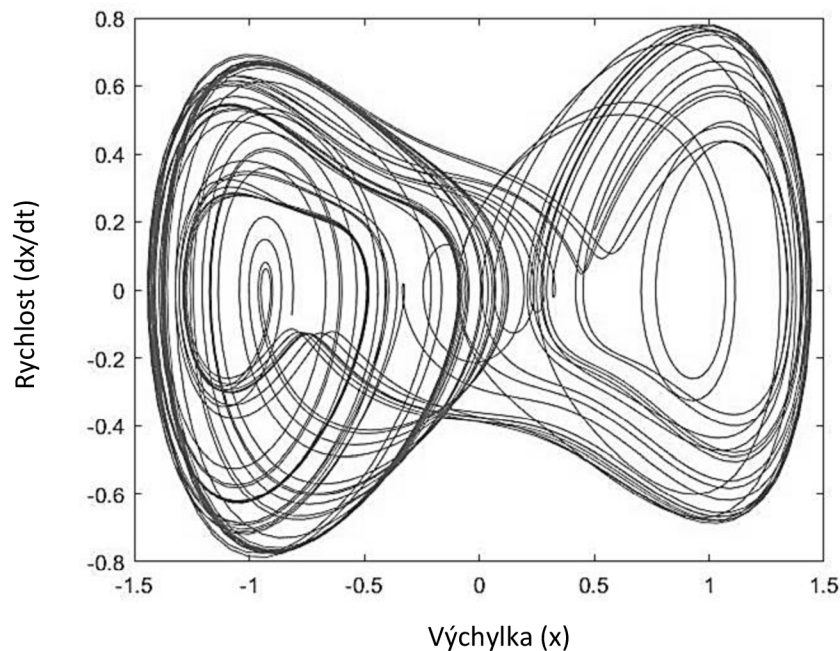
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t) \quad (8)$$

kde α je konstanta odpovídající odporové síly pružiny, koeficient β popisuje “tvrdnutí“ v případě že $\beta > 0$ či “měknutí“ $\beta < 0$ pružiny, koeficient δ reprezentuje odporovou sílu tlumiče a koeficient γ představuje amplitudu budící síly a ω je úhlová frekvence.[8]

Neznámá funkce $x = x(t)$ je pozice v čase t , \dot{x} je první derivace x vzhledem k času, tedy rychlost, a \ddot{x} je druhá derivace x podle času, jde tedy o zrychlení.

Rovnice popisuje pohyb tlumeného oscilátoru se složitějším potenciálem než v jednoduchém harmonickém pohybu (což odpovídá $\beta = \delta = 0$); v oblasti fyziky lze pomocí Duffingovi rovnice modelovat například pružinové kyvadlo, jehož pružinová tuhost přesně neplní Hookův zákon.

Duffingův oscilátor je velmi citlivý na počáteční podmínky. Vlivem nelinearit při postupných malých změnách parametrů v určitém okamžiku se skokem změni pohybový stav soustavy a ta začne kmitat kolem jiné rovnovážné polohy. Duffingův oscilátor je tedy příkladem dynamického systému, který vykazuje chaotické chování. [7]



Obr. 12 Chování Duffingova oscilátoru při hodnotách parametrů $\delta = 0.5$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.42$, $\omega = 1$

3.2 Lorentzův dynamický systém

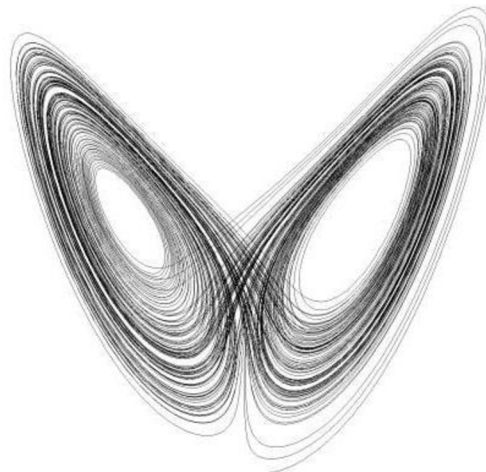
Lorentzův systém je systémem obyčejných diferenciálních rovnic, kterými se zabýval Edward Lorenz. Tento systém je pozoruhodný tím, že má chaotické řešení pro určité hodnoty parametrů a počáteční podmínky, tudíž se stává nepředvídatelným. Lorentzův atraktor je především souborem chaotických řešení Lorenzova systému, který se při vykreslování podobá motýlu - motýlí efekt. Tento systém je popsán systémem tří diferenciálních rovnic [9]:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \quad (9)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(r - z) - y \quad (10)$$

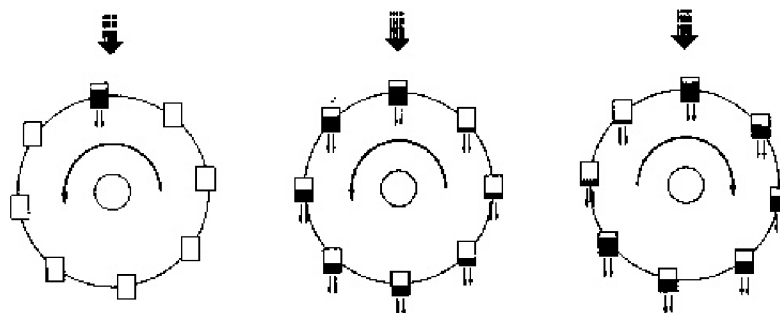
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz \quad (11)$$

kde σ je Prandtlovo číslo, r je Rayleighovo číslo. Pro hodnoty $\sigma = 10$, $b = 8/3$ a $r = 28$ systém vykazuje chaotické chování, viz obr. 13. [9]



Obr. 13 Trajektorie Lorenzova systému ve stavovém prostoru [10]

Pomocí tohoto systému lze popsat chování Lorenzova vodního kola – kruhový rám s připevněnými nádobami, do kterých postupně přitéká a otvory na dně nádob odtéká voda. Toto kolo respektuje vliv tření na jeho otáčení, tato nelinearita může vést na chaotické chování. Voda stéká do horní nádoby, po naplnění vlivem gravitace roztáčí kolo. Lorenz očekával, že se kolo bude otáčet stále stejným směrem nebo se bude periodicky střídát otáčení na každou stranu. Nestalo se ani jedno z toho, díky tomu, že se systém dostal díky zvoleným hodnotám do nestability. Lorenz si nechal na počítači vykreslit mapu zobrazující chování vodního kola a výsledky vynášel do trojrozměrného grafu. Zobrazila se mu nekonečná neprotínající se křivka v prostoru připomínající motýlí křídla (obr. 13) – tehdy netušil, že se jedná o fraktál. Doba předvídatelnosti je v případě vodního kola v řádu minut. Je prakticky nemožné předpovědět, jakým způsobem se bude kolo točit za hodinu. [9]



Obr. 14 Lorenzovo vodní kolo [11]

Lorenz se zabýval i předpovědí počasí a tak pomocí souboru těchto rovnic navrhl zjednodušený model vynucené konvekce v atmosféře. [11]

3.3 Van der Poluv oscilátor

3.3.1 Balthasar van der Pol

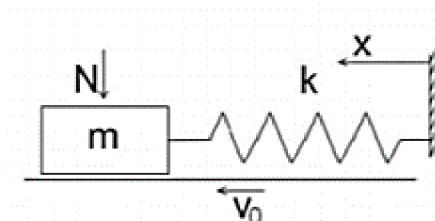
Balthasar Van der Pol byl holandský elektrotechnik a fyzik, který mezi roky 1920 a 1930 zkoumal chování elektrických obvodů obsahující elektronky. Ty byly v tehdejší době používané ke kontrole toku elektrické energie v elektrickém obvodu.

Van der Poluv oscilátor je nekonzervativní oscilátor s nelineárním tlumením, kde je energie při vysokých amplitudách ze systému odebírána a při nízkých amplitudách přidávána, což má za následek periodický pohyb nazývaný limitní cyklus. Při práci s oscilátorem našel Van der Pol stabilní oscilace, které nazval relaxační oscilace, které se později začaly v elektrických obvodech označovat jako typ mezního cyklu. V elektronice je relaxační oscilátor nelineární elektronický oscilační obvod, který vytváří nesinusoidální opakující se vlny, jako jsou čtvercové nebo trojúhelníkové vlny.

Van der Pol se také zabýval sestavením modelů činnosti lidského srdce, zkoumal jeho dynamiku a vliv buzení.

3.3.2 Van der Polova rovnice

Van der Polova rovnice je systém sloužící k modelování oscilačních procesů v nebuzených i buzených elektrických a mechanických soustavách, ve kterých je energie přidávána a odebírána ze systému. Jedná se o diferenciální rovnici 2. řádu s kubickou nelinearitou. Taková soustava je složená z tělesa Ω které má hmotnost m a je připojeno na pružinu s tuhostí k . Těleso Ω je v kontaktu s podložkou pohybující se konstantní rychlostí v_0 . Parametr ε je kladný skalár indikující nelinearitu a sílu tlumení. [12]



Obr. 15 Schéma mechanické soustavy [12]

Tato rovnice se stala standardní rovnicí pro modelování různých fyzikálních, biologických a ekonomických systémů. Jako mechanická soustava může být uvedena soustava, u které dochází ke kmitání vlivem proudící kapaliny či suchého tření. Může se jednat například o model smýkání kola při intenzivním brzdění či rozjezdu.

V seismologii byla tato rovnice například použita k modelování interakce dvou tektonických desek v geologickém zlomu. Sám Van der Pol vybudoval mnoho elektrických obvodů za účelem studování dynamiky lidského srdce - periodické nucení simulovalo stav, kde srdce bylo poháněno umělým kardiostimulátorem. [13]

3.3.3 Odvození Van der Polovy Rovnice pro mechanickou soustavu

Pro odvození VdP rovnice se bude uvažovat soustava podle obr. 15. Ta je složena z tělesa o hmotnosti m , které je charakterizováno posuvem x , rychlostí x' a zrychlením x'' během pohybu podložky konstantní rychlostí v_0 .

Abychom mohli chování dané soustavy analyzovat, vytvoříme systém. Bude se jednat o systém dynamický, protože pohyb hmoty, její rychlost i zrychlení se realizují v čase. Tento systém bude konkretizován tzv. Van der Polovou pohybovou rovnicí:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx - F(v) = 0 \quad (12)$$

ve které parametr značí k tuhost pružiny, parametr b reprezentuje tlumení, $F(v)$ je třecí síla, která je funkcí stykové síly N (směr kolmý ke směru x) a rychlostí c relativního pohybu tělesa o hmotnosti vůči podložce, která se pohybuje konstantní rychlostí v_0 . Relativní rychlost v je tedy určena vztahem:

$$v = \frac{dx}{dt} - v_0 \quad (13)$$

Potom

$$F(v) = F \frac{dx}{dt} - v_0 \quad (14)$$

Sílu F se rozvine v okolí bodu $dx/dt = v_0$

$$F \left(\frac{dx}{dt} - v_0 \right) = F(-v_0) + \frac{dx}{dt} \frac{dF_{v_0}}{dv} + \frac{d^2x}{dt^2} \frac{d^2F_{v_0}}{dv^2} + \dots \quad (15)$$

Dosazením prvního členu rozvoje do rovnice 12 se dostane následující rovnice:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \left(b - \frac{dF_{v_0}}{dv} \right) \frac{dx}{dt} + kx = F(-v_0) \quad (16)$$

Vlivem třecí síly $F(-v_0)$, která vznikla pohybem podložky, dojde k posunutí rovnovážné polohy o hodnotu $[F(-v_0)/k]$ ve směru pohybu podložky. S využitím této hodnoty se provede transformace do nové proměnné y :

$$y = x - \frac{F(-v_0)}{k} \quad (17)$$

Odkud

$$x = \frac{F(-v_0)}{k} + y \quad (18)$$

Po dosazení:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \left(b - \frac{dF_{v0}}{dv} \right) \frac{dy}{dt} + ky = 0 \quad (19)$$

Dále se označí $\omega^2 = k/m$. Pro suché tření dvou pevných povrchů platí rovnice [14]

$$\frac{dF_{v0}}{dv} = -\delta y^2 + \alpha \quad (20)$$

Dosazením těchto vztahů do rovnice (19) se dospěje ke vztahu:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{m} (\delta y^2 + b - \alpha) \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0 \quad (21)$$

Abychom dostali Van der Polovu rovnici do standardního tvaru provedením substituce

$z = \sqrt{\frac{\delta}{\alpha - b}} y$ a označením $\varepsilon = \alpha - \frac{b}{m}$ dostaneme Van der Polovu rovnici:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \varepsilon (z^2 - 1) \frac{dz}{dt} + \omega^2 z = 0 \quad (22)$$

Formálně nahradíme proměnnou z proměnnou x .

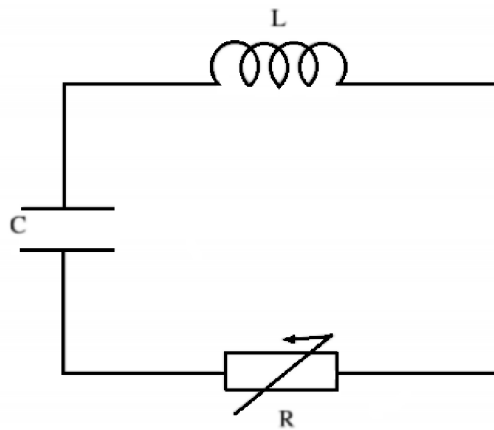
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (23)$$

3.3.4 Odvození Van der Polovy rovnice pro RLC obvod

Jako Van der Poluv oscilátor je považován také samobuzený elektrický obvod. Jedná se o obvod složený z cívky s indukčností (L), nabitého kondenzátoru s kapacitou (C) a nelineárního odporu (R). Ty jsou za sebou v obvodu řazeny sériově, jak je uvedeno na Obr. 16.

Pro odvození Van der Polovy rovnice se bude vycházet z 2. Kirchhofova zákona pro uzavřenou smyčku, který bude ve tvaru:

$$U_L + U_C + U_R = 0 \quad (24)$$



Obr. 16 Elektrický obvod modelující Van der Poluv oscilátor [15]

Napětí na odporu je nelineární a je popsáno vztahem:[15]

$$U_R = -R_0 i_0 \left[\frac{i}{i_0} - \frac{1}{3} \left(\frac{i}{i_0} \right)^3 \right] \quad (25)$$

kde i_0 je střední proud a R_0 reprezentuje odpor. Tento nelineární odpor lze získat při použití operačního zesilovače.

Napětí na cívce je přímoúměrné časové změně proudu, který cívkou prochází. Je tedy dáno vztahem:

$$U_L = L \frac{di}{d\tau} \quad (26)$$

kde konstanta L představuje indukčnost cívky. Napětí na kondenzátoru je vyjádřeno ve tvaru:

$$U_C = \frac{1}{C} \int id\tau \quad (27)$$

kde konstanta C vyjadřuje kapacitu kondenzátoru.

Dosazením vztahů (25), (26) a (27) do rovnice (24) se získá rovnice napětí ve smyčce:

$$L \frac{di}{d\tau} - R_0 i_0 \left[\frac{i}{i_0} - \frac{1}{3} \left(\frac{i}{i_0} \right)^3 \right] + \frac{1}{C} \int id\tau = 0 \quad (28)$$

Provedením derivace vztahu (28) vzhledem k τ se dospěje k následujícímu vztahu:

$$L \frac{d^2 i}{d\tau^2} - R_0 \left[1 - \frac{i^2}{i_0^2} \right] \frac{di}{d\tau} + \frac{i}{C} = 0 \quad (29)$$

Zavede se substituce: [15]

$$x = \frac{i}{i_0} \quad (30)$$

a

$$t = \omega_e \tau \quad (31)$$

kde $\omega_e = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\frac{d}{d\tau} = \omega_e \frac{d}{dt} \quad (32)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = \omega_e^2 \frac{d^2}{dt^2} \quad (33)$$

Dosazením vztahů (32) a (33) do vztahu (29) se získá tvar rovnice:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - R_0 \sqrt{\frac{C}{L}} (1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (34)$$

Nyní se zavede substituci $\varepsilon = R_0 \sqrt{\frac{C}{L}}$ a po dosazení vyjde výsledný tvar:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \varepsilon (1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (35)$$

který je nazýván Van der Polova rovnice. Parametr ε charakterizuje nelinearitu tohoto systému.

3.3.5 Homogenní Van der Polova rovnice

Homogenní VdP rovnice je ve tvaru:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \varepsilon (1 - x^2) \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (36)$$

Nebuzený oscilátor nevykazuje chaotické chování. Při vysokých hodnotách řídicího parametru ε nastává relaxační kmitání - skoková změna některé kinematické veličiny (výhylky nebo rychlosti). Kmitání je periodické, takže fázovým portrétem je limitní cyklus.

3.3.6 Nehomogenní Van der Polova rovnice

U nehomogenní Van der Polovy rovnice nahradí nulu na pravé straně budící člen $A \cos(\omega t)$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = A \cos(\omega t) \quad (37)$$

kde A je amplituda buzení a ω je úhlová frekvence budícího členu.

U nehomogenního systému se vyskytnou dvě frekvence kmitů – jedná se o vlastní frekvenci kmitů, která je ovlivňována parametrem ε a frekvence periodického buzení.

Nejzásadnější rozdíl mezi buzeným a nebuzeným oscilátorem spočívá v tom, že pro určité hodnoty parametrů A a ω vykazuje buzený Van der Polův oscilátor chaotické chování. [16]

3.3.7 Řešení Van der Polovy rovnice

Ve Van der Polově rovnici (24) se bude uvažovat člen $\omega^2 = 1$ a rovnice se převede substitucí na dvě diferenciální rovnice prvního řádu [16]:

$$x = x_1 \quad (38)$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (39)$$

$$\dot{x}_2 = \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \quad (40)$$

Jednotlivé diferenciální rovnice se označí jako funkce f_1 a f_2 :

$$f_1(x_1, x_2) = x_2 \quad (41)$$

$$f_2(x_1, x_2) = \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \quad (42)$$

Pro rovnice (44) a (45) se vytvoří Jacobiho matice ve tvaru:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (43)$$

Symbolicky zapsáno:

$$J = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \quad (44)$$

Dosazením derivací se dostane:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\varepsilon x_1 x_2 - 1 & \varepsilon(1-x_1^2) \end{pmatrix} \quad (45)$$

V dalším kroku se hledají vlastní čísla Jacobiho matice:

$$J = \begin{pmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -2\varepsilon x_1 x_2 - 1 & [\varepsilon(1-x_1^2)] - \lambda \end{pmatrix} \quad (46)$$

Pomocí determinantu Jacobiho matice se sestaví charakteristická rovnice, která má tvar:

$$\lambda^2 - \lambda\varepsilon(1 - x_1^2) + 2\varepsilon x_1 x_2 + 1 = 0 \quad (47)$$

Dosazením hodnot $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ se dospěje ke tvaru:

$$\lambda^2 - \lambda\varepsilon + 1 = 0 \quad (48)$$

Vyřešením kvadratické rovnice se určí kořeny charakteristické rovnice, které jsou ve tvaru:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4 * 1}}{2} \quad (49)$$

Z analýzy vztahu pro kořeny charakteristické rovnice (kapitola 2.2) pak pro singulární bod vyplývají tyto závěry:

Pro $\varepsilon > 0$ tato rovnice popisuje oscilátor s lineárně pružnou silou a nelineární tlumící silou.

V případě $\varepsilon < 2$ jsou vlastní hodnoty stacionárního bodu komplexně sdružené a rovnice má v počátku nestabilní ohnisko.

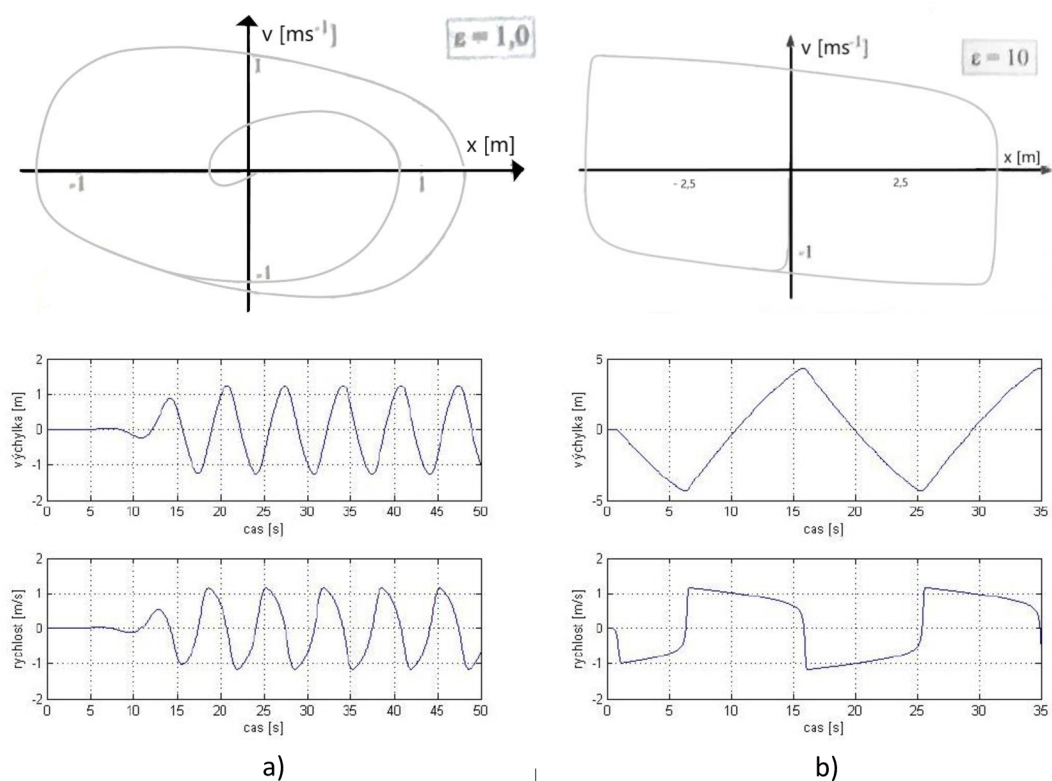
Pokud $\varepsilon > 2$ jsou vlastní hodnoty pevného bodu dvě různá reálná čísla a v počátku se nachází nestabilní uzel, z něhož se trajektorie blíží k příslušnému limitnímu cyklu. [16]

3.4 Rayleighův dynamický systém

Tento dynamický systém je odlišný od Van der Polova oscilátoru v jiném vztahu pro suché tření mezi hmotou a podložkou. U tohoto modelu se předpokládá, že suché tření je závislé na kvadrátu rychlosti.

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \varepsilon \left[\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 - 1 \right] \frac{dz}{dt} + \omega^2 z = 0 \quad (50)$$

Chování tohoto systému je jako u Van der Polova oscilátoru řízeno parametrem ε . Pro hodnoty $\varepsilon < 2$ je pevným bodem nestabilní ohnisko. Naopak pro hodnoty $\varepsilon > 2$ je pevným bodem nestabilní uzel, z něhož se trajektorie okamžitě blíží příslušnému limitnímu cyklu. [16] Pro velké hodnoty parametru ε dochází ke skokovým změnám rychlosti – relaxačnímu kmitání. Jedná se o nebezpečný jev z hlediska degradace povrchových vrstev kola a kolejniče. [12]



Obr. 18 Zobrazení Rayleighova dynamického systému ve stavovém prostoru a v časové oblasti pro hodnoty parametru a) $\varepsilon = 1$ b) $\varepsilon = 10$

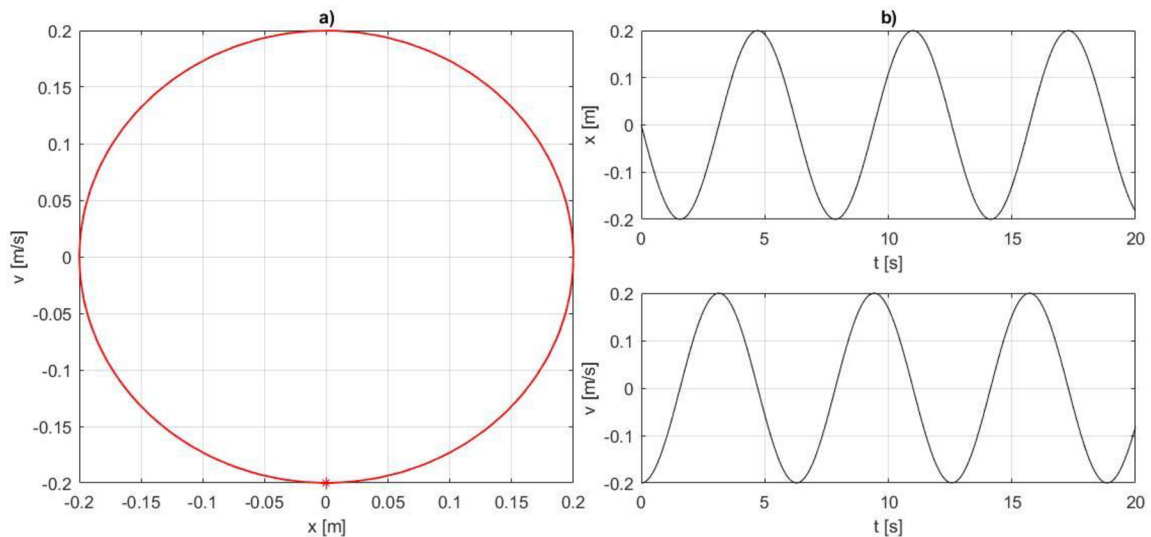
4 Vlastní analýza Van der Polova oscilátoru

Pro analýzu chování van der Polova oscilátoru byl v programu simulink sestaven model oscilátoru, který popisuje jeho chování. Cílem studie je zkoumání chování oscilátoru při změnách jednotlivých hodnot parametrů popisujících jeho pohyb. Jako řešič diferenciálních rovnic byl v simulinku použit ode45. Jako výchozí bod simulace je označen bod křížku. Červenou barvou je ve stavovém prostoru označen limitní cyklus.

4.1 Analýza nebuzeného Van der Polova oscilátoru

Rovnice pro nebuzeň VdP oscilátor je dána (36):

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

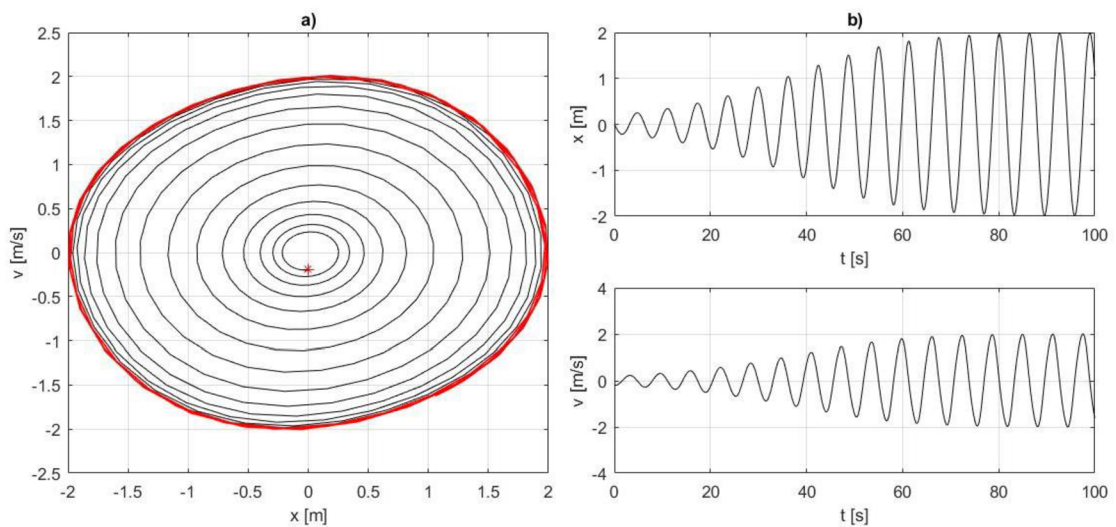


Obr. 18 Zobrazení polohy a rychlosti a) ve stavovém prostoru b) v časové oblasti pro hodnotu $\varepsilon = 0$

Nejjednodušší případ je, pokud je parametr $\varepsilon = 0$. Vztah (37) se zjednoduší na tvar:

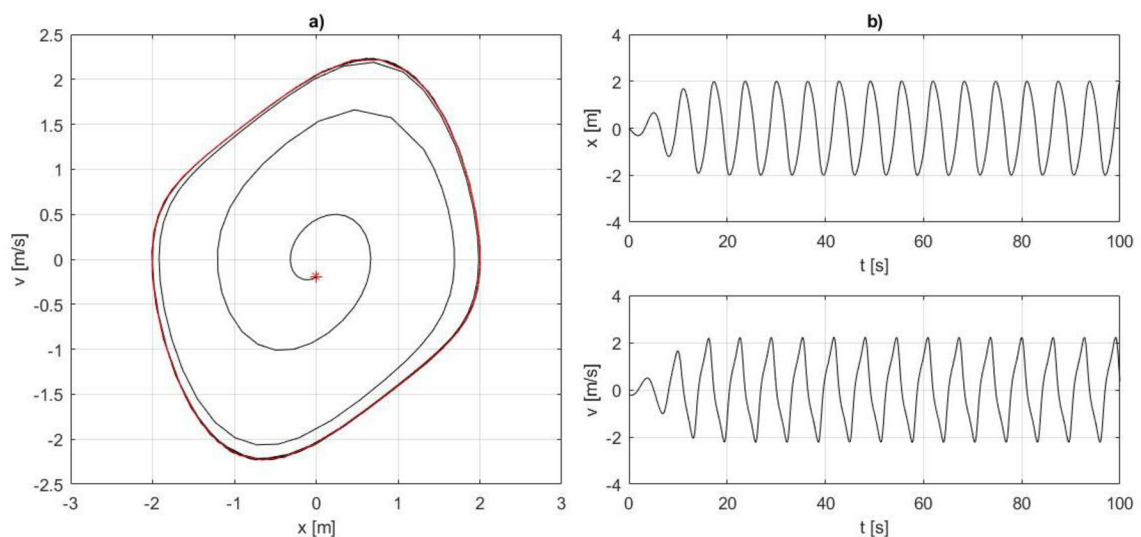
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (51)$$

Pro parametr $\omega^2 = 1$ platí, že jde o jednoduchý harmonický oscilátor. Neexistuje u něj žádná tlumící síla a systém šetří energii. Jedná se o harmonické kmitání s konstantní amplitudou a periodou kmitání 2π .



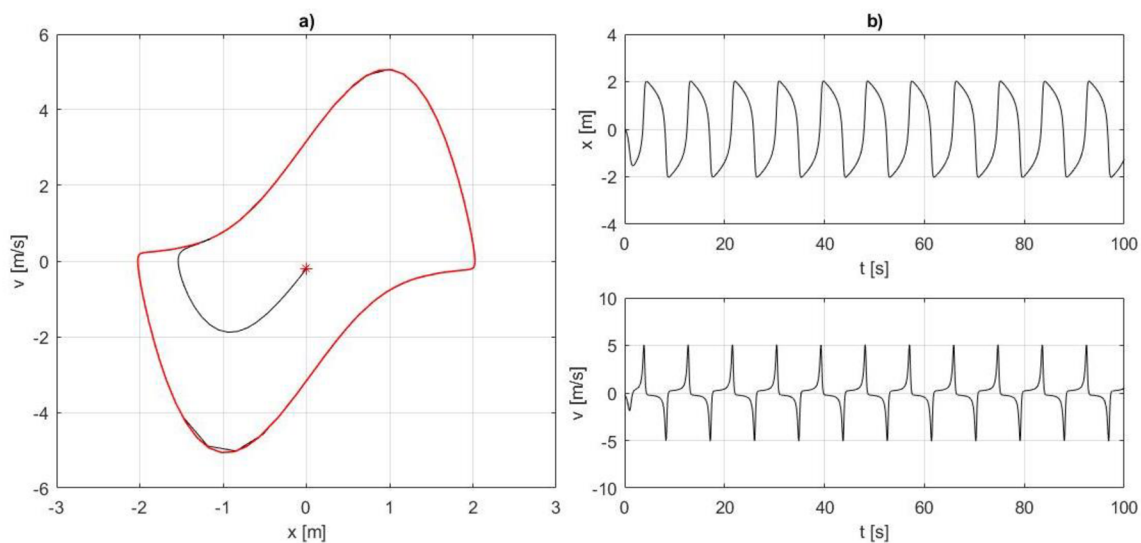
Obr. 19 Zobrazení polohy a rychlosti a) ve stavovém prostoru b) v časové oblasti pro hodnotu $\varepsilon = 0,1$

Nyní se do systému zavede nelinearita $\varepsilon \neq 0$. Fázovým diagramem Van der Polova oscilátoru při hodnotě $\varepsilon = 0,1$ se stává nestabilní ohnisko. Trajektorie se pomalu blíží od středu na oběžnou dráhu, nazývanou limitní cyklus. Výchylka a rychlost se mění spojitě (bez skokových změn) a při hodnotě 70 s se ustálí. Kmitání se blíží harmonickému. Takle situace odpovídá malým hodnotám třecích sil, resp. tělese o velké hmotnosti m , která má kmitat. V tomto případě mohou převládat elastické síly související s připojenou pružinou s tuhostí k nad tlumícími silami.



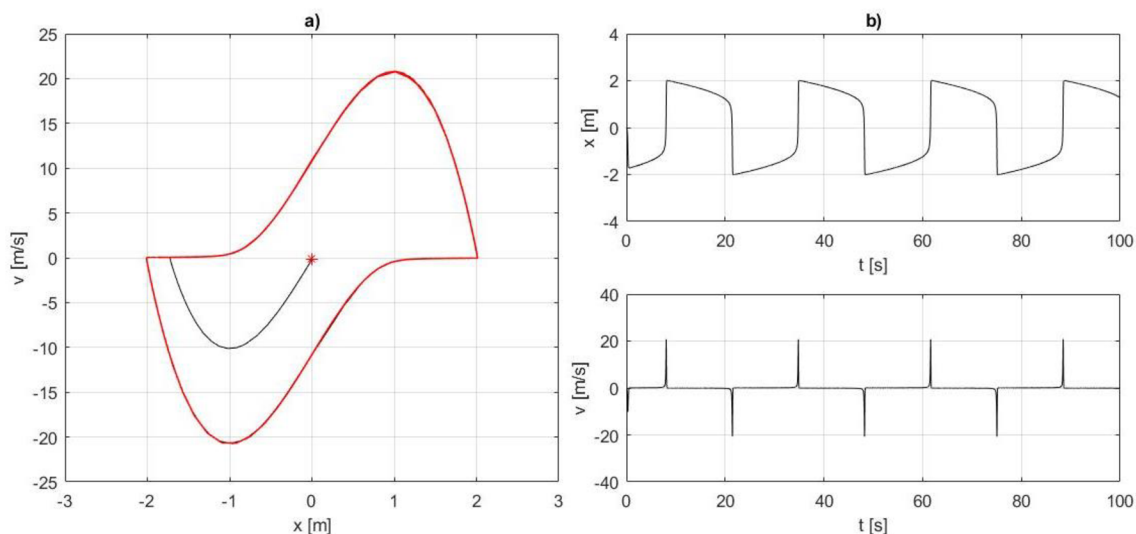
Obr. 20 Zobrazení polohy a rychlosti a) ve stavovém prostoru b) v časové oblasti pro hodnotu $\varepsilon = 0,5$

Fázovým diagramem je při hodnotě $\varepsilon = 0,5$ stále nestabilní ohnisko. Trajektorie se blíží na uzavřený okruh limitního cyklu. V tomhle případě už dochází k malé deformaci limitního cyklu. Trajektorie se při hodnotě $t=15$ s ustálí.



Obr. 21 Zobrazení polohy a rychlosti a) ve stavovém prostoru b) v časové oblasti pro hodnotu $\varepsilon = 3$

Zvětšováním parametru ε dochází k větší deformaci tvaru fázového portréту. Trajektorie se rychle blíží od středu k limitnímu cyklu. Při překročení hodnoty $\varepsilon = 2$, přechází stacionární bod z nestabilního ohniska v nestabilní uzel.



Obr. 22 Zobrazení polohy a rychlosti a) ve stavovém prostoru b) v časové oblasti pro hodnotu $\varepsilon = 15$

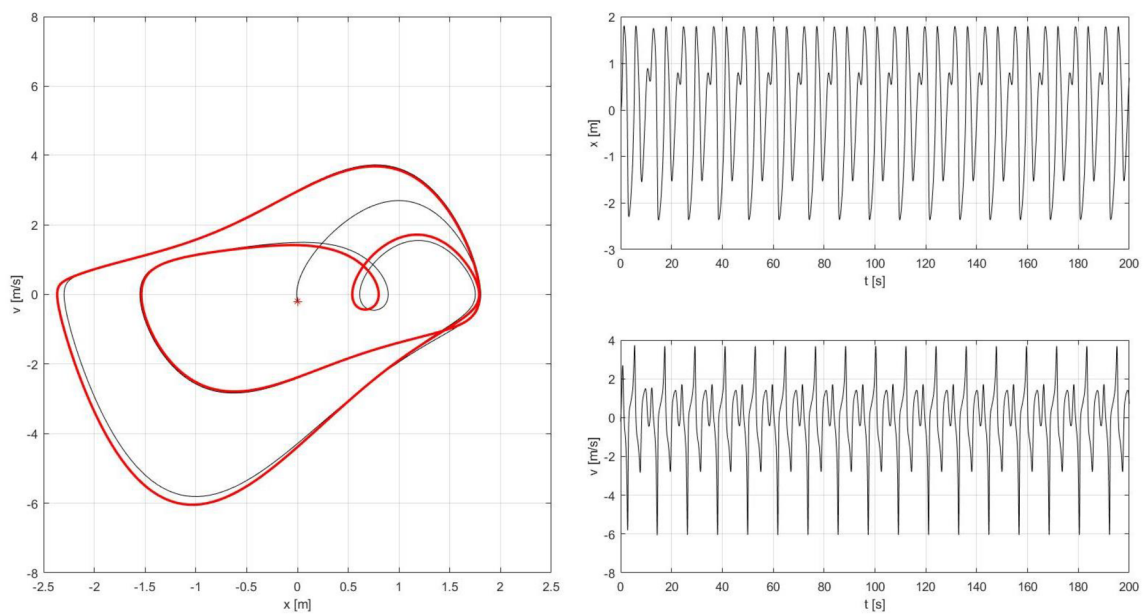
Při hodnotě nelinearity $\varepsilon = 15$ se trajektorie od středu šíří k limitnímu cyklu. Z časového průběhu rychlosti je patrné, že dochází ke skokovým změnám rychlosti - jedná se o tzv. Diracovy impulsy. Situace odpovídá velkým hodnotám třecích sil, resp. Tělesu o malé hmotnosti, která má kmitat. Převládají třecí nad silami setrvačnými. Třecí síly způsobí „posunutí“ hmoty, které během jedné půlperrody zůstává prakticky konstantní. V pružném členu se akumuluje energie, která se následně skokově uvolní (velmi vysokou rychlostí) a hmota zůstává další půlperrodu v jiné poloze, tento cyklus se pravidelně opakuje, jedná se o tzv. relaxační kmitání.

4.2 Analýza buzeného Van der Polova oscilátoru

Vztah pro buzený VdP oscilátor (39) je:

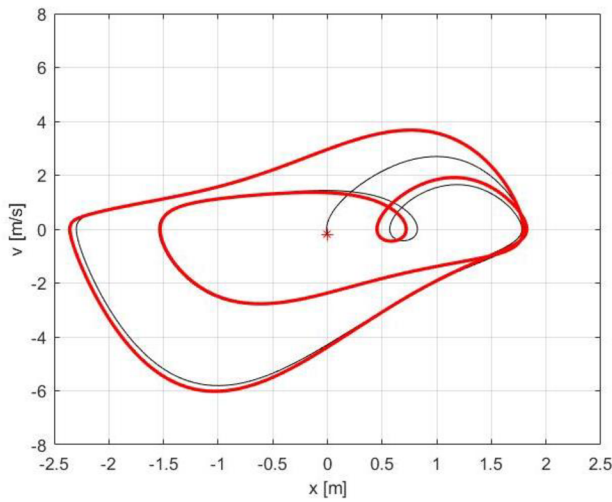
$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = A \cos(\omega t)$$

Analýza buzeného oscilátoru byla prováděna nejdříve za konstantních parametrů ε a A . Parametr ω byl postupně po malých hodnotách zvyšován, aby bylo prokázáno, že i malá změna budící frekvence může způsobit chaotické chování. Hodnoty konstantních parametrů byly zvoleny $\varepsilon = 2$, $A=3$ a parametr $\omega = 1,590$.

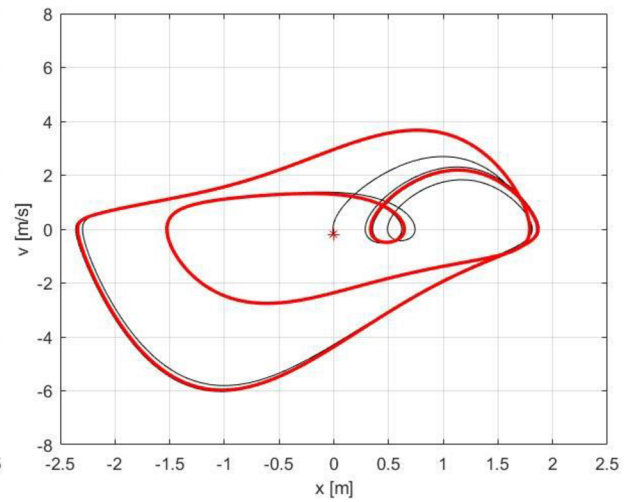


Obr. 23 Zobrazení polohy a rychlosti a) ve stavovém prostoru b) v časové oblasti pro hodnotu $\omega = 1,590$

Dále byla zvýšena hodnota parametru ω o jednu tisícinu. Na fázovém portrétu nedošlo k mnoha viditelným změnám, jen dochází k mírnému zhušťování křivek.

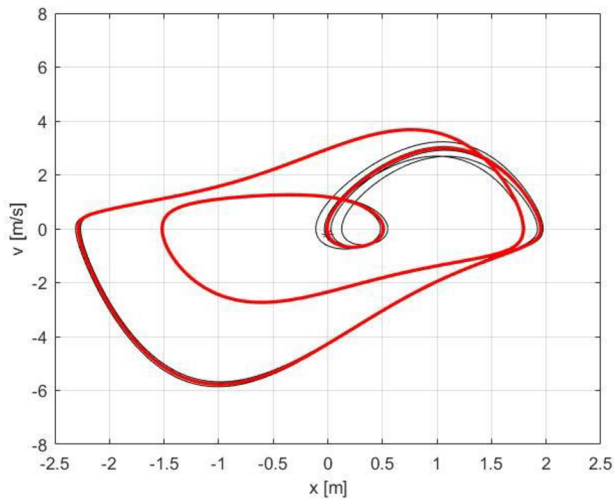


Obr. 24 Zobrazení polohy a rychlosti ve stavovém prostoru pro hodnotu $\omega = 1,591$

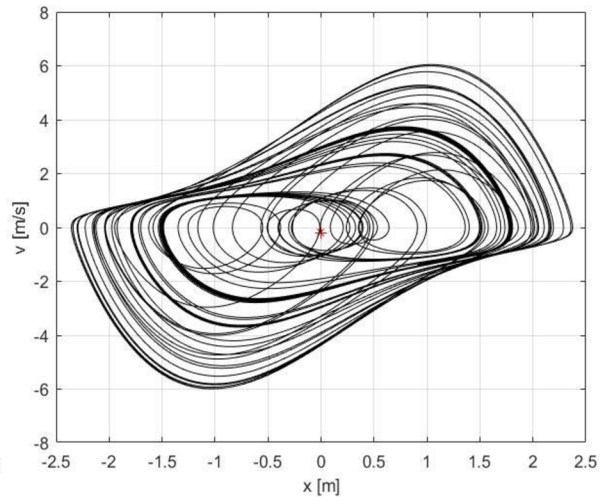


Obr. 25 Zobrazení polohy a rychlosti ve stavovém prostoru pro hodnotu $\omega = 1,592$

Pro hodnotu $\omega = 1,590$ dochází ke skokovým změnám jak rychlosti, tak i výchylky.

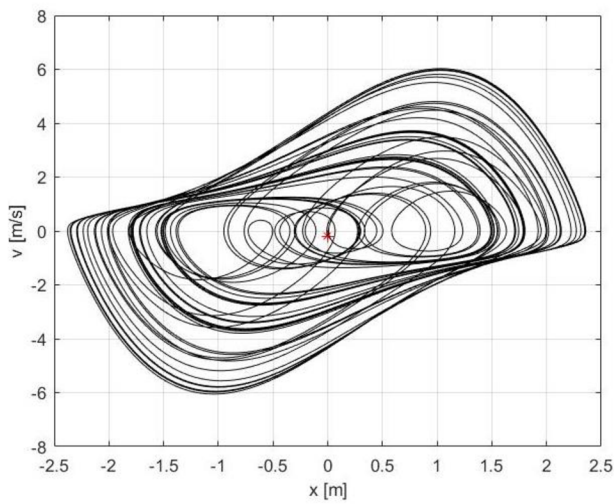


Obr. 26 Zobrazení polohy a rychlosti ve stavovém prostoru pro hodnotu $\omega = 1,594$

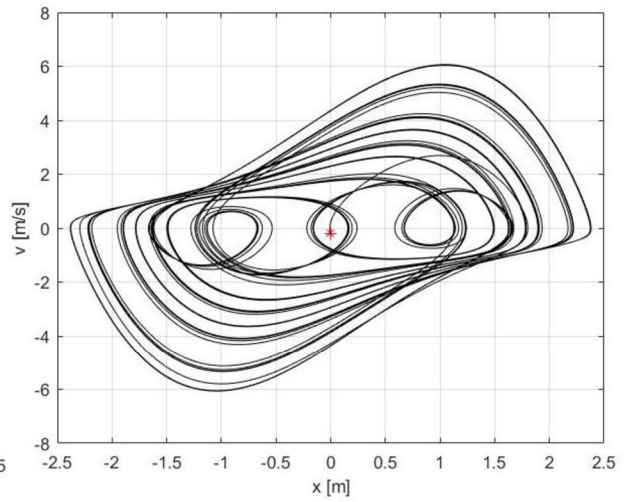


Obr. 27 Zobrazení polohy a rychlosti ve stavovém prostoru pro hodnotu $\omega = 1,595$

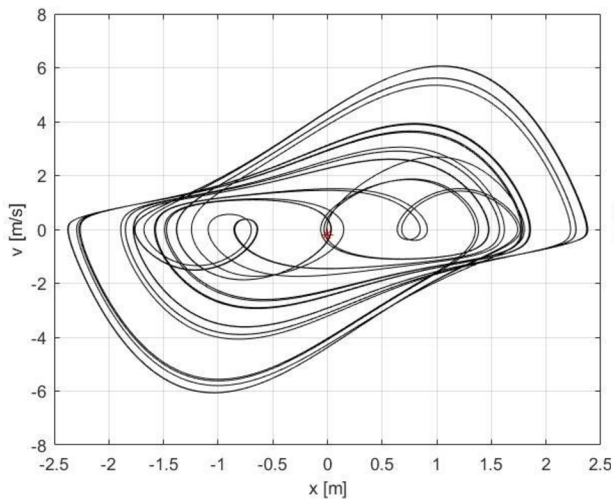
Až mezi hodnotami $\omega=1,594$ a $1,595$ dochází k výrazné změně fázového portréту, nastává tzv. chaotické chování. Z toho vyplývá, že buzený VdP je velmi citlivý na počáteční podmínky a i při malé změně budící frekvence dojde k náhlé změně jeho chování.



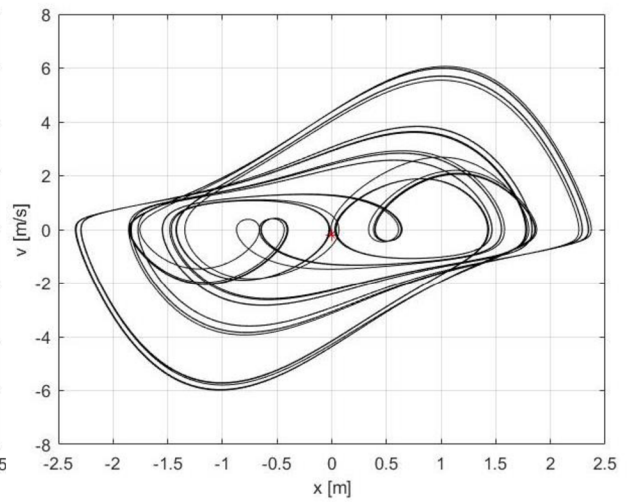
Obr. 28 Zobrazení polohy a rychlosti ve stavovém prostoru pro hodnotu $\omega = 1,596$



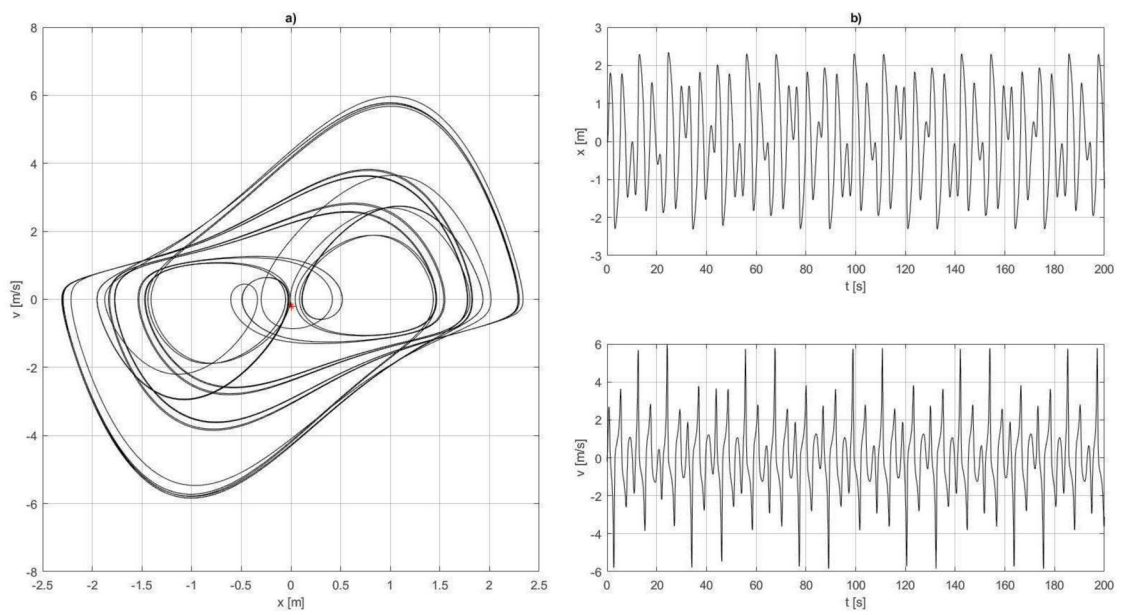
Obr. 29 Zobrazení polohy a rychlosti ve stavovém prostoru pro hodnotu $\omega = 1,597$



Obr. 30 Zobrazení polohy a rychlosti ve stavovém prostoru pro hodnotu $\omega = 1,598$

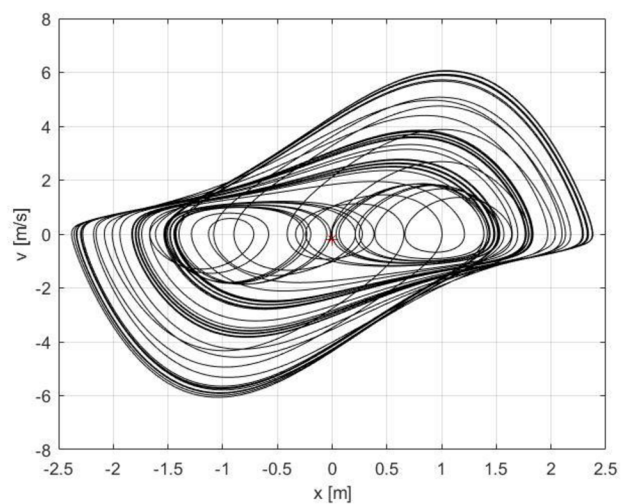


Obr. 31 Zobrazení polohy a rychlosti ve stavovém prostoru pro hodnotu $\omega = 1,599$



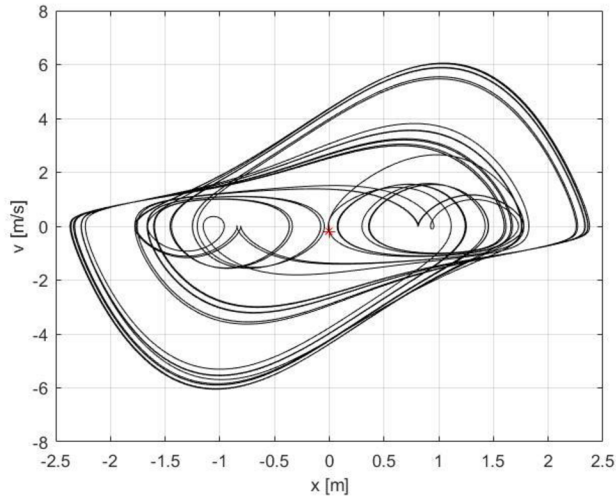
Obr. 32 Zobrazení polohy a rychlosti a) ve stavovém prostoru b) v časové oblasti pro hodnotu $\omega = 1,600$

Na obrázcích 28 až 32 jde vidět, že chaotické chování postupně ustupuje. Zvýšením hodnoty na $\omega = 1,603$ se oscilátor opět jeví jako chaotický (obr. 33)

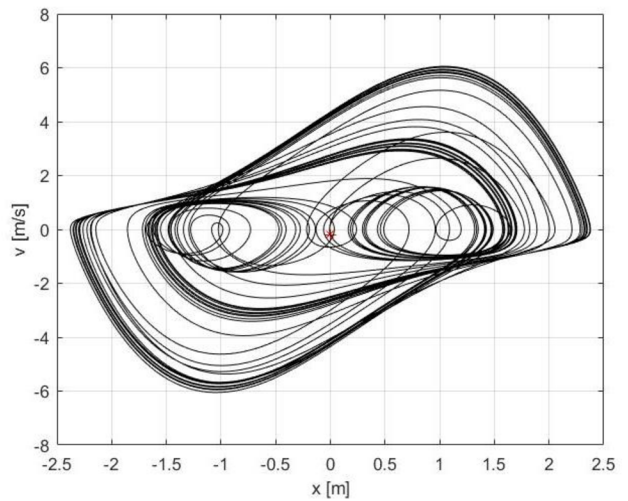


Obr. 33 Zobrazení polohy a rychlosti ve stavovém prostoru pro hodnotu $\omega = 1,603$

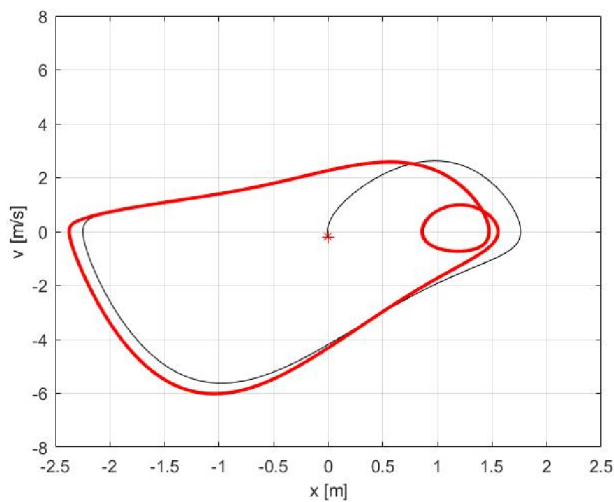
Při hodnotě $\omega = 1,660$ dochází opět k chaotickému chování oscilátoru. Postupným navyšováním budící frekvence dochází k ustupování chaotického chování až do hodnoty $\omega = 1,787$, kdy nastane limitní cyklus.



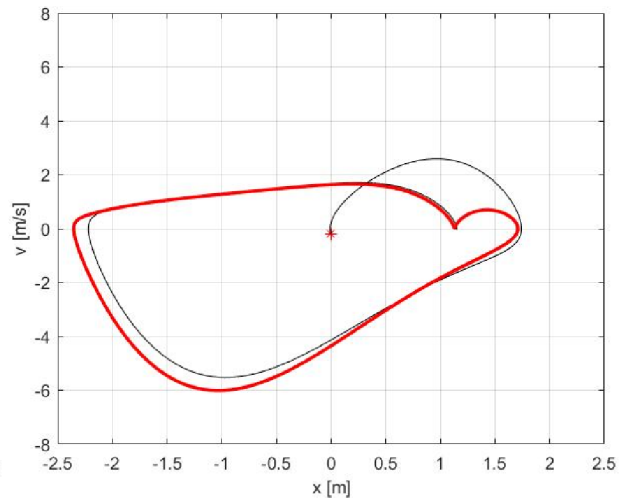
Obr. 34 Zobrazení polohy a rychlosti ve stavovém prostoru pro hodnotu $\omega = 1,660$



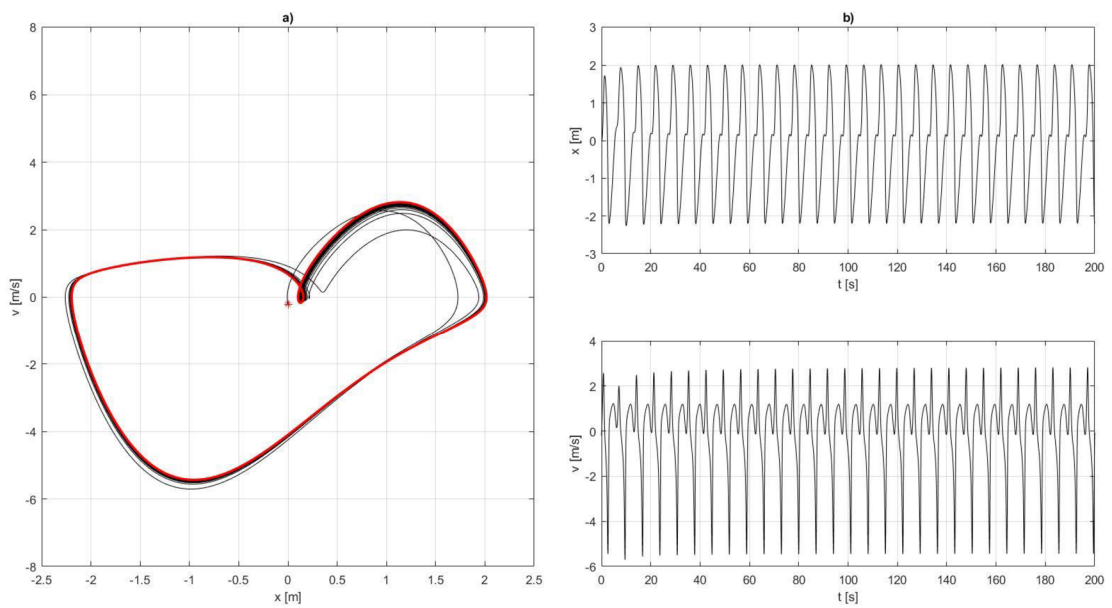
Obr. 35 Zobrazení polohy a rychlosti ve stavovém prostoru pro hodnotu $\omega = 1,666$



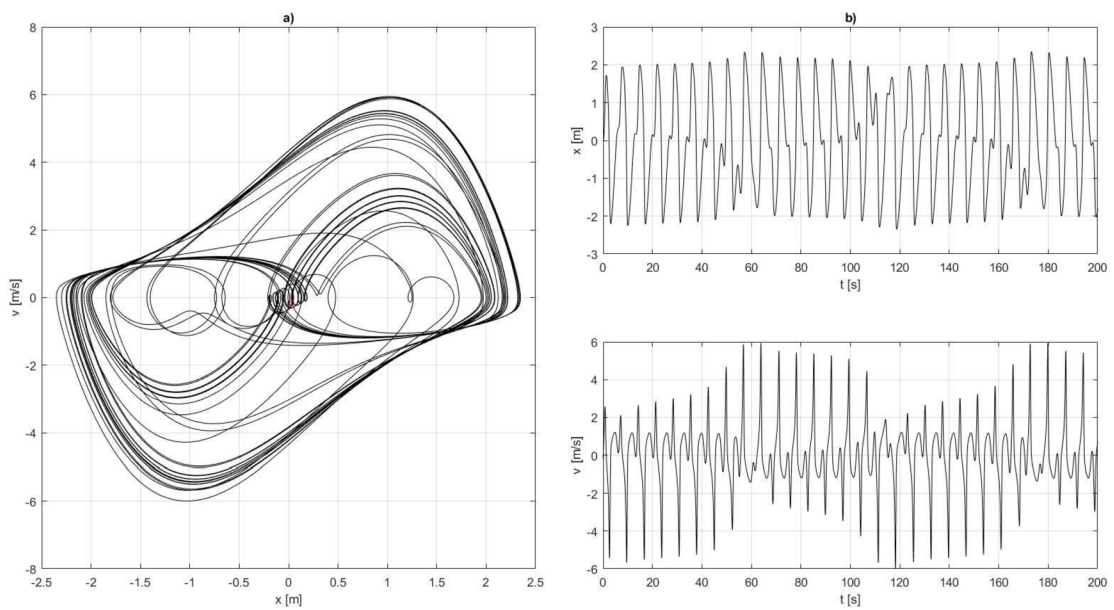
Obr. 36 Zobrazení polohy a rychlosti ve stavovém prostoru pro hodnotu $\omega = 1,700$



Obr. 37 Zobrazení polohy a rychlosti ve stavovém prostoru pro hodnotu $\omega = 1,750$



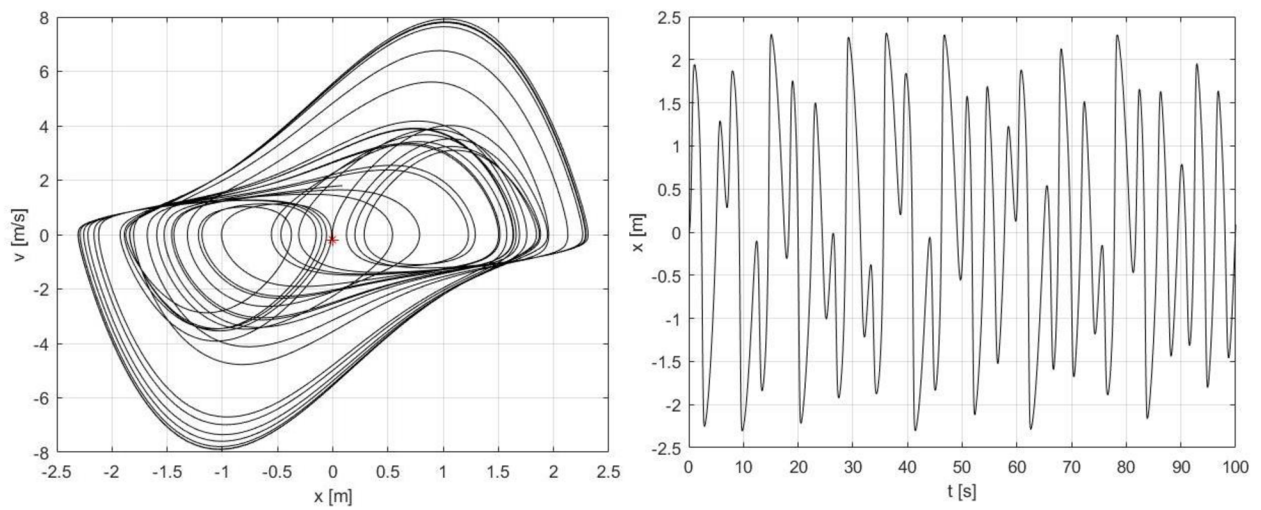
Obr. 38 Zobrazení polohy a rychlosti a) ve stavovém prostoru b) v časové oblasti pro hodnotu $\omega = 1,787$



Obr. 39 Zobrazení polohy a rychlosti a) ve stavovém prostoru b) v časové oblasti pro hodnotu $\omega = 1,788$

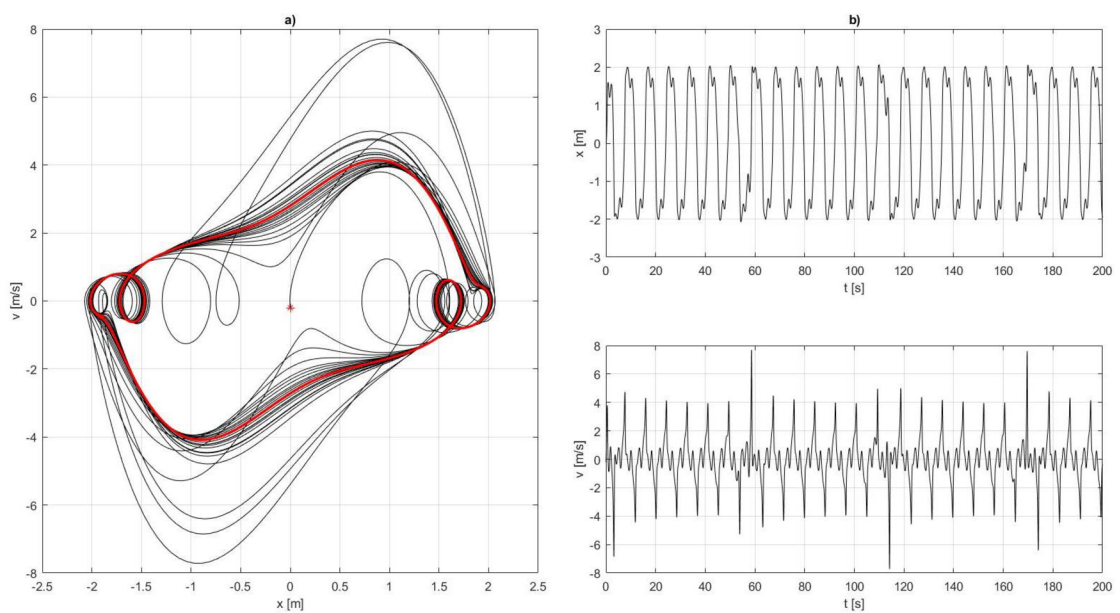
Opět zvýšením hodnoty budící frekvence o tisícinu dochází k chaotickému chování, Obr. 39. Amplitudy rychlosti a výchylky se skokově mění, nastávají tzv. Diracovy impulsy.

V dalších případech analýzy chování buzeného oscilátoru byly měněny hodnoty parametrů nelinearity a amplitudy.



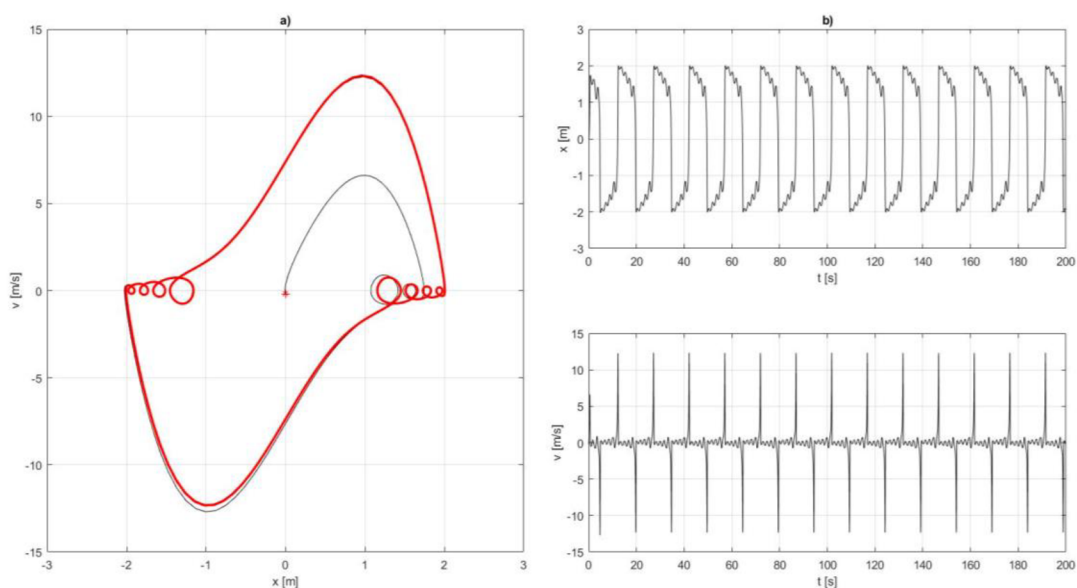
Obr. 40 Zobrazení polohy a rychlosti a) ve stavovém prostoru b) v časové oblasti pro hodnoty: $\varepsilon = 3$, $A=5$ a $\omega = 1,788$.

Oscilátor nevykazuje žádnou jasnou periodicitu, což znamená, že buďto řešení nejsou periodická vůbec nebo mají velmi velkou periodu.



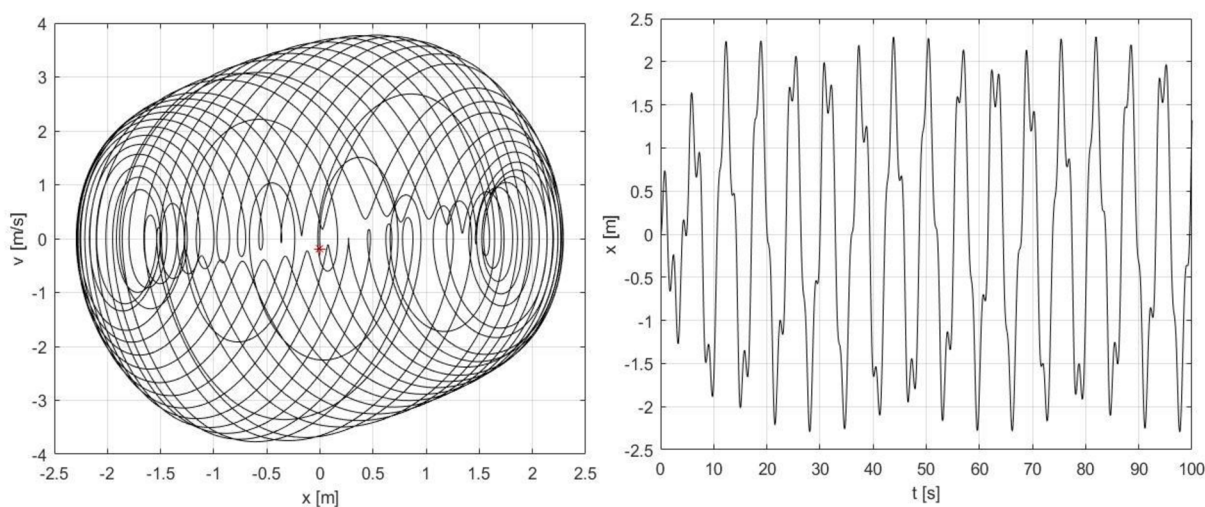
Obr. 41 Zobrazení polohy a rychlosti a) ve stavovém prostoru b) v časové oblasti pro hodnoty $\varepsilon = 4$, $A=6$ a $\omega = 3,788$.

Parametry buzeného VdP byly nyní změněny na hodnoty $\varepsilon = 4$, $A = 6$ a $\omega = 3,788$. Do soustavy byla zavedena vyšší nelinearita a budící frekvence.



Obr. 42 Zobrazení polohy a rychlosti a) ve stavovém prostoru b) v časové oblasti pro hodnoty $\varepsilon = 8$, $A = 6$ a $\omega = 3,788$.

Při hodnotě parametru nelinearity $\varepsilon = 8$ platí, že řešení inklinují k případům relaxačních oscilací jako u nebuzeného VdP oscilátoru.



Obr. 43 Zobrazení polohy a rychlosti a) ve stavovém prostoru b) v časové oblasti pro hodnoty $\varepsilon = 0,5$, $A=6$ a $\omega = 3,788$.

Pro velmi malou hodnotu parametru nelinearity ε (například 0,5) platí, že řešení jsou oscilační.

Z pozorování chování buzeného VdP oscilátoru je patrné, že je velmi citlivý na počáteční podmínky a i při sebemenší změně podmínek se začne chovat chaoticky. Chaotické chování se začíná uklidňovat, vzroste-li hodnota parametru nelinearity ε nad hodnotu 8.

5 Závěr

V této práci bylo pojednáváno o nelineárních systémech, jejich vlastnostech a určování. Bylo zde pojednáváno o stabilitě pohybu u nelineárních systémů, jejím určování a typy singulárních bodů. Následně byly uvedeny příklady nelineárních systému jako Duffingův oscilátor, Lorentzův a Rayleighův dynamický systém. Podrobněji byl rozebírán Van der Polův oscilátor. Byly zde odvozeny Van der Polovy rovnice jak pro mechanickou soustavu, tak i pro elektrický obvod.

Hlavním cílem této bakalářské práce bylo analyzovat chování Van der Polova oscilátoru. K samotné analýze bylo potřeba udělat v simulinku model diferenciální rovnice oscilátoru. Samotná analýza spočívala v postupné obměně parametrů diferenciální rovnice, jako je nelinearita, budící frekvence a amplituda buzení.

Po zhodnocení získaných informací o nelineárních systémech, Van der Polově oscilátoru a výsledků měření je zřejmé, že buzený Van der Polův oscilátor je velice citlivý na malé změny počátečních podmínek. Díky tomu je patrné, že fázové portréty jsou mnohem rozmanitější než v případě nebuzeného Van der Polova oscilátoru a díky tomu, má systém nepředvídatelný průběh chování – chová se chaoticky. Při studiu nebuzeného oscilátoru platí, že pro malé hodnoty parametru nelinearity, fázový diagram odpovídá nestabilnímu ohnisku. Při postupném zvyšování nelinearity přechází ve fázovém diagramu nestabilní ohnisko na nestabilní uzel.

Van der Polova rovnice nachází využití v mnoha oborech, jak v mechanice (smýkání kola při rozjezdu či brzdění) tak v geologii (modelování interakce dvou tektonických desek) či elektronice (simulace chování srdce).

6 Seznam použité literatury

- [1] KRATOCHVÍL, Ctirad a Jaromír SLAVÍK. *Mechanika těles: dynamika*. Vyd. 4., V Akademickém nakl. CERM 2. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 978-80-214-3446-2.
- [2] TIŠNOVSKÝ, Pavel., *Nelineární dynamické systémy* [online]. 1999, 14.11.1999
Dostupný z: <<http://www.fit.vutbr.cz/~tisnovpa/fract/clanky/2.htm>>.
- [3] WEI, X., M. RANDRIANANDRASANA, W. LOWE: *Nonlinear Dynamics of a Periodically Driven Duffing Resonator Coupled to a Van der Pol Oscillator*, Mathematical Problems in Engineering [online], 2011. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/47696770_Nonlinear_Dynamics_of_a_Periodically_Driven_Duffing_Resonator_Coupled_to_a_Van_der_Pol_Oscillator
- [4] ITOH, Y., T. IMAZU, H. NAKAMURA, T. YAMAZAKI: *Vibration analysis based on time-frequency analysis with a digital filter: Application to nonlinear system identification* [online], 2014. Dostupné z: https://www.acoustics.asn.au/conference_proceedings/INTERNOISE2014/papers/p361.pdf
- [5] BREPTA, Rudolf, František TUREK a Ladislav PŮST. *Mechanické kmitání*. Praha: Sobotáles, 1994. Česká matice technická (Sobotáles). ISBN 80-901684-8-5.
- [6] DAVIS, G. *A Linear Systems of Differential Equations* [online]. 2009, 7.2.2009. Dostupný z: <https://jmckennonmth212s09.wordpress.com/2009/02/07/linear-systems-of-differential-equations/>.
- [7] THOMPSON, Michael a Bruce STEWART. *Nonlinear dynamics and chaos*. 2nd ed. Chichester: John Wiley, 2002. ISBN 04-718-7684-4.
- [8] KLAPKA, Petr. *Studentské projekty do předmětu OPT/MF* [online]. 2014, Dostupný z: http://muj.optol.cz/bajer/projekty/2014_Klapka.pdf
- [9] HREN, R., Dušić. *Nonlinear oscillators* [online], 2014.
Dostupný z: http://mafija.fmf.uni-lj.si/seminar/files/2014_2015/seminar_Nonlinear_Oscillators.pdf
- [10] BISWAS, Dhruvajyoti., *Analysis of the Van der Pol's Oscillator* [online], 2017. Dostupný z: <https://www.scribd.com/document/419741366/Main-Actual>
- [11] HLADÍK, Michal.: *Edward Norton Lorenz* [online], 2006
Dostupný z: <http://www.hungry-lord.wz.cz/data/Lorenz.php>
- [12] PEJCHAL, P., P. JANÍČEK, J. PETRUŠKA a F. PROCHÁZKA: *The analysis of dynamical system for simulation of relaxation oscillation* [online], 2005
Dostupný z: <http://www.engmech.cz/improc/2005/Pejchal-PT.pdf>

- [13] STEJSKAL, Vladimír, Václav BAUMA a Tomáš VAMPOLA. *Kmitání mechanických soustav: doplňkové skriptum*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2003. ISBN isbn80-010-2752-x.
- [14] KAPITANIAK, Tomasz. *Chaos for engineers: theory, applications, and control*. 2nd rev. ed. New York: Springer, 2000. ISBN 3-540-66574-9.
- [15] HAFEEZ, H., Y., Ch. E. NDIKILAR a S. ISYAKU: *Analytical Study of the Van der Pol Equation in the Autonomous Regime* [online], Progress in Physics [online], **11**(3), 252-255, 2015. Dostupný z: https://www.researchgate.net/publication/283894096_Analytical_Study_of_the_Van_der_Pol_Equation_in_the_Autonomous_Regime
- [16] JANÍČEK, Přemysl. *Systémové pojetí vybraných oborů pro techniky: hledání souvislostí: učební texty*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 978-80-214-3546-9.

7. Seznam použitých symbolů a zkratek

Veličina	Symbol	Jednotka
Amplituda buzení	A	m/s ²
Budící frekvence	ω	Hz
Parametr určující nelinearitu systému	ε	-
Hmotnost	m	kg
Tuhost	k	N/m
Elektrický odpor	R	Ω
Indukčnost	L	H
Elektrická kapacita	C	F
Elektrické napětí	U	V
Elektrický proud	I	A
Výchylka	x	m
Rychlost	x'	m/s
Zrychlení	x''	m/s ²