



Algebraicko-geometrická varianta eukleidovské konstrukce pravidelných mnohoúhelníků

Bakalářská práce

Studijní program:

B1101 Matematika

Studijní obory:

Matematika se zaměřením na vzdělávání

Geografie se zaměřením na vzdělávání (dvouoborové)

Autor práce:

Michaela Kutschkerová

Vedoucí práce:

doc. Ing. Martin Plešinger, Ph.D.

Katedra matematiky a didaktiky matematiky





Zadání bakalářské práce

Algebraicko-geometrická varianta eukleidovské konstrukce pravidelných mnohoúhelníků

Jméno a příjmení: **Michaela Kutschkerová**
Osobní číslo: P17000280
Studijní program: B1101 Matematika
Studijní obory: Matematika se zaměřením na vzdělávání
Geografie se zaměřením na vzdělávání (dvouoborové)
Zadávající katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Akademický rok: **2018/2019**

Zásady pro vypracování:

Abstrakt: Je známo relativně málo pravidelných n -úhelníků (kde n je liché číslo), které lze narysovat pouze s využitím pravítka a kružítka, tj. jsou takzvaně euklidovsky konstruovatelné. Které to jsou je známo již od dob J. C. F. Gausse, který je charakterizoval. Nejjednodušším z nich je rovnostranný trojúhelník, který umíme zkonstruovat už od základní školy. Konstrukce pravidelného pětiúhelníku je také běžně známá, v případě sedmnáctiúhelníku už to ale tak jednoduché není. U složitějších n -úhelníků (pro n rovno 257, nebo 65537) je konstrukce prakticky téměř neproveditelná.

Cílem práce je zrekapitulovat základní teoretické poznatky o euklidovsky konstruovatelných pravidelných mnohoúhelnících. Dále pak jako algebraickou strukturu (resp. struktury) popsat soubor paralel mezi vybranými aritmetickými operacemi mezi konstruovatelnými a přirozenými čísly a jejich geometrickou reprezentací. Výsledkem by tedy měl být soubor jednoduchých parametrizovaných geometrických konstrukcí, které mi umožní konstruovat složitější algebraické výrazy. Výstup této bakalářské práce pak bude podkladem pro systém (využívající symbolické výpočty v Matlabu a geometrický software GeoGebra) pro automatické generování eukleidovských konstrukcí složitějších mnohoúhelníků.

Požadavky: Základní znalosti z obecné algebry a geometrie, základní znalost anglického jazyka. Práce by měla být psaná v LaTeXu, případně s využitím geometrického softwaru GeoGebra, bude-li to v možnostech studenta.

Rozsah grafických prací:
Rozsah pracovní zprávy:
Forma zpracování práce:
Jazyk práce:

tištěná/elektronická
Čeština



Seznam odborné literatury:

Felix Klein: Famous problems of elementary geometry, překlad Wooster Woodruff Beman, David Eugene Smith, Dover Publications, Revised edition, 2013.

David Stanovký: Základy algebry, Matfyzpress, Praha, 2010.

Ján Štalmašek: Geometrické konštrukcie, SVTL, Bratislava, 1959.

Euklides: Základy, editor Petr Vopěnka, pět svazků knih I-IV, V-VI, VII-IX, X, XI-XII, OPS, Plzeň, 2008–2013.

Vedoucí práce:

doc. Ing. Martin Plešinger, Ph.D.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Datum zadání práce:

21. února 2019

Předpokládaný termín odevzdání:

30. dubna 2020

prof. RNDr. Jan Pícek, CSc.
děkan

L.S.

doc. RNDr. Jaroslav Mlýnek, CSc.
vedoucí katedry

V Liberci dne 21. února 2019

Prohlášení

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně jako původní dílo s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé bakalářské práce a konzultantem.

Jsem si vědoma toho, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu Technické univerzity v Liberci.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti Technickou univerzitu v Liberci; v tomto případě má Technická univerzita v Liberci právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Současně čestně prohlašuji, že text elektronické podoby práce vložený do IS/STAG se shoduje s textem tištěné podoby práce.

Beru na vědomí, že má bakalářská práce bude zveřejněna Technickou univerzitou v Liberci v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů.

Jsem si vědoma následků, které podle zákona o vysokých školách mohou vyplývat z porušení tohoto prohlášení.

1. května 2020

Michaela Kutschkerová

Anotace

Je známo relativně málo pravidelných n -úhelníků (mnohoúhelníků o n vrcholech), kde n je liché prvočíslo, které lze narysovat pouze s využitím pravítka a kružítka, tj. jsou takzvaně eukleidovsky konstruovatelné. Které to jsou, je známo, již od dob J. C. F. Gauße, který je charakterizoval. Nejjednodušším z nich je rovnostranný trojúhelník, který umíme zkonstruovat už od základní školy. Konstrukce pravidelného pětiúhelníku je také běžně známá, v případě sedmnáctiúhelníku už to ale tak jednoduché není. U zbylých dvou n -úhelníků (pro n rovno 257, nebo 65537) je konstrukce prakticky téměř neproveditelná.

Cílem práce je zrekapitulovat základní teoretické poznatky o eukleidovsky konstruovatelných pravidelných mnohoúhelnících. Dále pak jazykem algebraických struktur popíšeme soubor paralel mezi vybranými aritmetickými operacemi (mezi tzv. konstruovatelnými a přirozenými čísly) a jejich geometrickou reprezentací. Výsledkem by tedy měl být soubor jednoduchých parametrizovaných geometrických konstrukcí (geometrických mikroalgoritmů), které mi umožní konstruovat složitější algebraické výrazy. Výstup této bakalářské práce pak bude podkladem pro systém (využívající symbolické výpočty v Matlabu a geometrický software GeoGebra) pro automatické generování eukleidovských konstrukcí složitějších pravidelných mnohoúhelníků.

Klíčová slova:

eukleidovská konstrukce; konstrukce kružítkem a pravítkem; Wanzelova metoda; konstruovatelná čísla; pravidelné mnohoúhelníky; konstrukce pětiúhelníku; konstrukce sedmnáctiúhelníku; Fermatova prvočísla

Abstract

There is only a few regular n -gons (polygons with n vertices), where n is an odd prime, that can be constructed only by using ruler and compass, i.e. by using so-called Euclidean construction. It is well known which polygons can be constructed since J. C. F. Gauß, who characterized them. The simplest one is an equilateral triangle, that we are able to draw since elementary school. The construction of a regular pentagon is also very simple and relatively known. On the other hand, construction of regular heptadecagon starts to be really complicated. The other two n -gons (for n equal to 257, or 65537), it is practically impossible to do the construction.

The goal of this thesis is to summarize the basic theoretical knowledge about regular polygons that can be drawn by using the ruler-and-compass construction. Further, by employing the language of algebraic structures, we describe a representation of selected parts of arithmetics (of so-called constructible and natural numbers) in geometry. We obtain in this way a set of simple parametrized geometric constructions (geometric microalgorithms), that can be used for geometric constructions of more complicated algebraic expressions. The outcome of this thesis is a base for a system (employing the symbolic calculations in Matlab and GeoGebra geometric software) for automated generating of ruler-and-compass constructions of more complicated regular polygons.

Key words:

Euclidean constructions; ruler-and-compass construction; Wanzel method; constructible numbers; regular polygons; construction of pentagon; construction of heptadecagon; Fermat primes

Poděkování

Ráda bych poděkovala, svému vedoucímu bakalářské práce, panu Martinu Plešingerovi, za cenné rady, věcné připomínky a vstřícnost při konzultacích a vypracování bakalářské práce.

Obsah

Anotace	4
Abstract	5
Seznam obrázků	11
Použité značení a zkratky	12
1 Úvod	13
2 Eukleidovská konstrukce	15
2.1 Co používáme k eukleidovským konstrukcím?	15
2.2 Jak pravítko a kružítko ke konstrukcím používáme a co vzniká?	15
2.3 Počáteční podmínky (počáteční množina bodů)	16
2.3.1 Triviální případy: Prázdná a jednoprvková množina	16
2.3.2 Dvouprvková množina	16
2.3.3 n -prvková množina	17
2.4 Eukleidovsky konstruovatelné body a eukleidovská konstrukce	18
3 Wanzelova metoda	20
3.1 Algebraizace eukleidovské konstrukce	20
3.1.1 Obecné mechanismy vzniku nových bodů	21
3.1.2 Příklad použití — půlení úhlu	26
3.1.3 Příklad eukleidovsky nekonstruovatelné úlohy — sedmiúhelník	27
3.2 Eukleidovsky neřešitelné úlohy	28
3.2.1 Náznak důkazu neřešitelnosti zdvojení krychle	28
3.2.2 Náznak důkazu neřešitelnosti rektifikace kružnice	28
3.2.3 Náznak důkazu neřešitelnosti kvadratury kruhu	29
3.2.4 Náznak důkazu neřešitelnosti trisekce úhlu	29
3.3 Pomocné konstrukce: kolmice a rovnoběžka	30
3.3.1 Kolmice	30
3.3.2 Rovnoběžka	31
4 Eukleidovsky konstruovatelné mnohoúhelníky a Gaußova věta	32
4.1 Gaußova věta	32
4.2 Co znamená konstruovat pravidelný n -úhelník?	33

4.3	Gaußův teoretický výpočet konstrukce n -úhelníků	34
4.3.1	Užitečné definice a věty	34
4.3.2	Stručný náznak Gaußova teoretického výpočtu konstrukce n -úhelníku	35
4.4	Ukázka výpočtu na konkrétním příkladu konstrukce sedmnáctiúhelníku	37
4.4.1	Hledání primitivního kořene	38
4.4.2	Rozdělení period	38
4.4.3	Vlastní řešení	39
4.4.4	Závěrečný vztah	41
5	Konstrukce vybraných pravidelných mnohoúhelníků	42
5.1	Rovnostranný trojúhelník	42
5.2	Čtverec	42
5.3	Pravidelný pětiúhelník	44
5.3.1	Ověření konstruovatelnosti desetiúhelníku a z něho vyplývající konstruovatelnost pětiúhelníku	45
5.3.2	Konstrukce pětiúhelníku	45
5.4	Pravidelný šestiúhelník	45
5.4.1	Konstrukce pravidelného šestiúhelníku	47
5.4.2	Důkaz konstrukce pravidelného šestiúhelníku	47
5.5	Pravidelný patnáctiúhelník	47
5.5.1	Konstrukce pravidelného patnáctiúhelníku	48
5.5.2	Náznak důkazu konstruovatelnosti pravidelného patnáctiúhelníku	49
5.6	Pravidelný sedmnáctiúhelník	49
5.6.1	Konstrukce pravidelného sedmnáctiúhelníku	49
6	Pomocné konstrukce při konstrukci n-úhelníků	53
6.1	Zdvojení počtu vrcholů aneb konstrukce $(2n)$ -úhelníka, kde n je liché	53
6.2	Zdvojení počtu vrcholů aneb konstrukce $(2n)$ -úhelníka, kde n je sudé	53
6.3	Součin dvou nesoudělných lichoúhelníků	54
6.3.1	Co je Eukleidův algoritmus?	55
6.3.2	Na čem je Eukleidův algoritmus založený?	55
6.3.3	Jak bude Eukleidův algoritmus vypadat v našem případě?	55
7	Systematický postup konstrukce n-úhelníků	56
7.1	Algebraizace pojmu úsečka v rovině	56
7.2	Unární a binární operace proveditelné v rovině bez jednotkové úsečky	57
7.2.1	Konstrukce součtu úseček	57
7.2.2	Konstrukce rozdílu úseček	59
7.2.3	Konstrukce přirozeného násobku úsečky	59
7.2.4	Konstrukce přirozeného podílu úsečky	61
7.2.5	Konstrukce aritmetického průměru	63
7.2.6	Konstrukce geometrického průměru	64
7.3	Unární a binární operace neproveditelné bez znalosti jednotkové úsečky	66

7.3.1	Konstrukce odmocniny úsečky	66
7.3.2	Konstrukce převrácené hodnoty úsečky	67
7.3.3	Konstrukce součinu dvou úseček	68
7.3.4	Konstrukce podílu dvou úseček	71
7.3.5	Konstrukce druhé mocniny délky úsečky	73
7.4	Dělení úseček se zbytkem	74
7.5	Operace proveditelné v eukleidovské rovině s úhly	75
7.5.1	Sčítání úhlů	76
7.5.2	Rozdíl úhlů	77
7.5.3	Přirozený násobek úhlů	78
7.5.4	Přirozený podíl úhlů	78

8	Závěr	79
----------	--------------	-----------

Seznam obrázků

2.1	Právě dva body A a B nám stačí k zavedení souřadnicového systému.	16
2.2	Konstrukce celých čísel.	17
2.3	Konstrukce racionálních čísel.	17
3.1	Konstrukce úsečky délky součtu daných úseček.	24
3.2	Konstrukce rozdílu useček.	24
3.3	Konstrukce součin úseček.	24
3.4	Konstrukce podíl úseček.	25
3.5	Konstrukce odmocniny.	25
3.6	Půlení úhlu.	26
3.7	Konstrukce x -ových souřadnic bodů E, F .	30
3.8	Konstrukce kolmice.	31
3.9	Konstrukce rovnoběžky.	31
5.1	Konstrukce rovnostranného trojúhelníku.	42
5.2	Konstrukce čtverce.	43
5.3	Konstrukce čtverce.	43
5.4	Konstrukce čtverce.	44
5.5	Konstrukce pětiúhelníku (krok 1).	46
5.6	Konstrukce pětiúhelníku (krok 2).	46
5.7	Konstrukce pětiúhelníku (krok 3).	46
5.8	Konstrukce šestiúhelníku.	47
5.9	Konstrukce patnáctiúhelníku (krok 1).	48
5.10	Konstrukce patnáctiúhelníku (krok 2).	48
5.11	Výsledný patnáctiúhelník.	49
5.12	Konstrukce sedmnáctiúhelníku (krok 1).	50
5.13	Konstrukce sedmnáctiúhelníku (krok 2).	50
5.14	Konstrukce sedmnáctiúhelníku (krok 3).	51
5.15	Konstrukce sedmnáctiúhelníku (krok 4).	51
5.16	Konstrukce sedmnáctiúhelníku (krok 5).	52
5.17	Konstrukce sedmnáctiúhelníku (krok 6).	52
5.18	Výsledný sedmnáctiúhelník.	52
6.1	Konstrukce šestiúhelníku.	54
6.2	Konstrukce osmiúhelníku.	54

7.1	Součet dvou úseček – vstup.	58
7.2	Součet dvou úseček – algoritmus.	58
7.3	Součet dvou úseček – výstup.	59
7.4	Rozdíl dvou úseček – vstup.	60
7.5	Rozdíl dvou úseček – algoritmus.	60
7.6	Rozdíl dvou úseček – výstup.	60
7.7	Přirozený násobek úsečky – vstup.	61
7.8	Přirozený násobek úsečky – algoritmus.	61
7.9	Přirozený násobek úsečky – výstup.	61
7.10	Přirozený podíl úsečky – vstup.	62
7.11	Přirozený podíl úsečky – algoritmus.	62
7.12	Přirozený podíl úsečky – výstup.	63
7.13	Aritmetický průměr dvou úseček – vstup.	63
7.14	Aritmetický průměr dvou úseček – algoritmus.	64
7.15	Aritmetický průměr dvou úseček – výstup.	64
7.16	Geometrický průměr dvou úseček – vstup.	65
7.17	Geometrický průměr dvou úseček – algoritmus.	65
7.18	Geometrický průměr dvou úseček – výstup.	66
7.19	Odmocnina z úsečky – vstup.	67
7.20	Odmocnina z úsečky – algoritmus.	67
7.21	Odmocnina z úsečky – výstup.	68
7.22	Převrácená hodnota úsečky – vstup.	68
7.23	Převrácená hodnota úsečky – algoritmus.	69
7.24	Převrácená hodnota úsečky – výstup.	69
7.25	Součin dvou úseček – vstup.	70
7.26	Součin dvou úseček – algoritmus.	70
7.27	Součin dvou úseček – výstup.	70
7.28	Podíl dvou úseček – vstup.	71
7.29	Podíl dvou úseček – algoritmus.	72
7.30	Podíl dvou úseček – výstup.	72
7.31	Druhá mocnina úsečky – vstup.	73
7.32	Druhá mocnina úsečky – algoritmus.	74
7.33	Druhá mocnina úsečky – výstup.	74
7.34	Dělení úseček se zbytkem – vstup.	75
7.35	Dělení úseček se zbytkem – algoritmus.	76
7.36	Dělení úseček se zbytkem – výstup.	76
7.37	Konstrukce součtu dvou úhlů.	77
7.38	Konstrukce rozdílu dvou úhlů.	77

Použité značení a zkratky

Značení

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

\mathbb{Q}

\mathbb{R}

\mathbb{R}^+

\mathbb{R}_0^+

$\mathbb{T}(x)$

A, B, C, \dots

$AB, u(A, B)$

$|AB|$

\sim

$p(A, B)$

$k(A, |AB|)$

\mathcal{E}_2

$$\mathcal{E}_2^2 = \mathcal{E}_2 \times \mathcal{E}_2$$

$$\mathcal{U} = \{u(A, B) : A, B \in \mathcal{E}\}$$

$$\mathbb{U}_x = \{u(A, B) \in \mathcal{U} : |AB| = x\}$$

$$\mathbb{U} = \mathcal{U}/\sim = \{\mathbb{U}_x : x \in \mathbb{R}_0^+\}$$

$$u_0 \in \mathbf{o}, \quad |u_0| = 0, \quad \mathbf{o} \in \mathbb{U}$$

$$u_1 \in \mathbf{1}, \quad |u_1| = 1, \quad \mathbf{1} \in \mathbb{U}$$

$$f : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$$

$$f : \mathbb{U} \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$$

Význam

množina (polookruh) přirozených čísel

množina (těleso) racionálních čísel

množina (těleso) reálných čísel

množina kladných reálných čísel

množina nezáporných reálných čísel

tělesové rozšíření tělesa \mathbb{T} o prvek x

body eukleidovské roviny

úsečka (u) s krajními body A a B ;

geometrický a algebraický zápis

délka úsečky AB

podobnost úseček;

$$u(A, B) \sim u(C, D) \iff |AB| = |CD|$$

přímka p zadána body A a B

kružnice k se středem v bodě A a poloměrem

rovným velikosti úsečky AB

množina všech bodů eukleidovské roviny

množina uspořádaných dvojic bodů v rovině

množina všech úseček v rovině; izomorfní s \mathcal{E}_2^2

množina (třída) všech úseček délky x ;

$$\mathbb{U}_x = [u(A, B)]_{\sim} \subset \mathcal{U}$$

faktorová množina tříd úseček různých délek

nulová úsečka (zdegenerovaná do bodu)

jednotková úsečka

binární operace na množině všech úseček \mathcal{U}

tatáž binární operace na faktorové množině \mathbb{U}

1 Úvod

V době vzniku eukleidovské geometrie měla řecká matematika za sebou zhruba tři století intenzivního a velmi plodného vývoje. Na základě poznatků, které byly během čtvrtého, pátého a šestého století před naším letopočtem shromážděny, sepsal Eukleides z Alexandrie Základy, ve kterých shrnul většinu matematických poznatků své doby vybudovanou dle principů Aristotela [2, str.12]. Dnes již víme, že knihy Eukleidových základů pochází od více autorů a jsou zčásti založeny na starších zdrojích (viz [3, str.30]).

Eukleidovská geometrie je založená na axiomech a definicích. Pojem eukleidovské konstrukce se vyskytuje především v zadání matematických úloh. Úkolem bývá určit, zda z daného objektu je možné pomocí eukleidovské konstrukce vytvořit jiný objekt, který má dané vlastnosti či zda je možné konstrukci geometrického útvaru provést eukleidovsky. Ve své bakalářské práci, se budu zejména zabývat eukleidovskou konstruovatelností mnohoúhelníků.

Některé pravidelné mnohoúhelníky lze eukleidovskou geometrií zkonstruovat jednoduše, některé ne. Cílem práce je tedy jednak pokusit se čtenáři přiblížit problematiku eukleidovské konstrukce, zrekapitulovat základní teoretické poznatky o eukleidovsky konstruovatelných pravidelných mnohoúhelnících, vytvořit systematický postup dílčích konstrukcí mnohoúhelníků i konstrukcích samotných mnohoúhelníků a také mimo jiné parametrizovat geometrické konstrukce, které budou sloužit jako podklad pro konstrukci složitějších algebraických výrazů.

Bakalářská práce obsahuje včetně úvodu a závěru devět kapitol. Druhá kapitola je věnovaná eukleidovské konstrukci obecně. Uvádí čtenáře do tématu eukleidovské konstrukce. Bude zde stručně popsáno, co se k eukleidovským konstrukcím používá, jakým způsobem a co vzniká. Čtenář získá povědomí o nutné podmínce počáteční množiny. Budou zde také zavedeny pojmy eukleidovsky konstruovatelné body a eukleidovská konstrukce. Třetí kapitola je věnována algebraizaci eukleidovské konstrukce, která je zavedena pomocí Wanzelovy metody. V rámci této kapitoly si také vysvětlíme obecné mechanismy vzniku nových bodů. Uvedeme zde také příklad, na kterém si vysvětlíme půlení úhlu a také příklad nekonstruovatelného mnohoúhelníku. Ve třetí kapitole také zmíníme dvě obecně známe a obecně užtečné pomocné konstrukce – konstrukci kolmice a rovnoběžky.

Čtvrtá kapitola bude věnovaná eukleidovsky konstruovatelným mnohoúhelníkům a Gaußově větě. Vysvětlíme si, jaké mnohoúhelníky jsou konstruovatelné, co znamená konstruovat pravidelný mnohoúhelník algebraicky. Gaußovu větu sice přímo nedokážeme, ale pokusíme se vysvětlit Gaußův teoretický výpočet konstrukce mnohoúhelníků. Na základě výstavby, kterou čtenář z předešlých kapitol získá, bude

čtenáři vysvětleno, jakým způsobem je možné z rovnice mnohoúhelníku získat délku strany vyjádřenou pouze pomocí algebraických operací a druhé odmocniny.

V páté kapitole pak rozebereme jednotlivé konstrukce základních pravidelných eukleidovsky konstruovatelných mnohoúhelníků. V šesté kapitole se budeme zabývat pomocnými konstrukcemi při konstrukci mnohoúhelníků. Konkrétně se podíváme na konstrukci mnohoúhelníků pomocí zdvojení počtu vrcholů již zkonstruovatelného mnohoúhelníku, přičemž budeme rozlišovat, zda původní mnohoúhelník měl lichý nebo sudý počet vrcholů. Také se podíváme, jak při znalosti konstrukce dvou lichoúhelníků s navzájem nesoudělným počtem vrcholů, řekněme m a k , zkonstruovat $(m \cdot k)$ -úhelník.

Sedmá kapitola se bude věnovat systematickému postupu konstrukce mnohoúhelníků. Na začátku si budeme algebraizovat pojem úsečka v rovině. Jednotlivé základní aritmetické operace přeložíme do jazyka úseček a eukleidovských konstrukcí – jakých si geometrických mikroalgoritmů. Uvidíme, že některé konstrukce jsou neproveditelné bez znalosti jednotkové úsečky. Ukážeme také, jak některé aritmetické operace přeložit do jazyka úhlů a eukleidovských konstrukcí.

2 Eukleidovská konstrukce

Termínem eukleidovská konstrukce, někdy též konstrukce kružítkem a pravítkem, označujeme konstrukci geometrických objektů pouze s použitím pravítka a kružítká a s dodržением celé řady dalších omezení, kterými se budeme více zabývat v této kapitole.

2.1 Co používáme k eukleidovským konstrukcím?

Při eukleidovských konstrukcích používáme pravítko a kružítko speciálním způsobem. S pravítkem pracujeme jako s dokonalým pravítkem, které splňuje řadu v praxi nespílitelných předpokladů:

- (i) má nekonečnou délku,
- (ii) má pouze jednu hranu,
- (iii) na pravítku není vyznačena žádná značka a žádnou další nemůžeme dodělat.

S kružítkem též pracujeme jako s dokonalým kružítkem, které opět splňuje předpoklad, jež v praxi nelze splnit:

- (iv) kružítkem je možné sestrojít kružnici o libovolném poloměru.

2.2 Jak pravítko a kružítko ke konstrukcím používáme a co vzniká?

Konstrukce jsou pojmenovány podle slavného řeckého matematika, Eukleida z Alexandrie (4.– 3. století př. n. l.). Stavebním kamenem eukleidovské geometrie jsou definice a axiomy, nazývané jakožto postuláty. Čili základní vlastnosti, popisující vztahy mezi základními geometrickými útvary. Pro všechny eukleidovské konstrukce platí, že se skládají z pěti základních opakovatelných *elementárních konstrukcí*. Konstrukce přímk a kružnic, které využívají již sestroyených bodů a konstrukce nových bodů v průsečících přímk a kružnic. Elementárními konstrukcemi je tedy myšleno následující:

- (a.) Zkonstruování přímky p procházející dvěma body A a B , $A \neq B$; $p(A, B)$.
- (b.) Zkonstruování kružnice k se středem v bodě A a poloměrem daným vzdáleností dvou bodů B a C , $B \neq C$; $k(A, |BC|)$.

- (c.) Vytvoření bodu, jakožto průniku dvou různoběžných přímek.
- (d.) Vytvoření jednoho nebo dvou bodů, jakožto průsečíků přímky a kružnice.
- (e.) Vytvoření jednoho nebo dvou bodů, jakožto průsečíků dvou kružnic.

Eukleidovskou konstrukcí je tedy míněna konstrukce, při které bylo použito pouze pravítko a kružítko s vlastnostmi (i)–(iv), s využitím pouze pěti výše zmíněných elementárních konstrukcí. Navíc ještě požadujeme:

- (f.) Konečný počet jednotlivých elementárních kroků konstrukce, viz [6, str.40].

2.3 Počáteční podmínky (počáteční množina bodů)

Nedílnou součástí každé konkrétní konstrukce je počáteční množina bodů. Ve stručnosti prodiskutujeme a naznačíme jaké možnosti a úskalí se skrývají za různě velkou počáteční množinou bodů.

2.3.1 Triviální případy: Prázdná a jednoprvková množina

Je zřejmé, že v případě prázdné množiny bodů se nic neděje, neboť není k dispozici dostatek bodů na konstrukci jakéhokoliv geometrického objektu. V případě jednoprvkové množiny opět nelze nic zkonstruovat. Jedním bodem nelze vést konkrétní přímku ani kružnici, neboť není dán žádný poloměr.

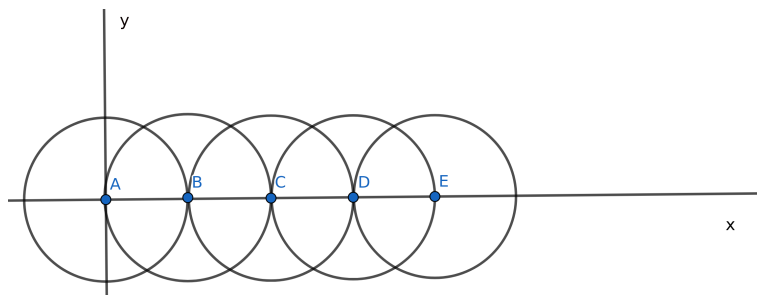
2.3.2 Dvouprvková množina

Z triviálních případů vyplývá, že je zapotřebí, aby byla zadaná množina minimálně dvouprvková. Ve chvíli, kdy máme zadány dva body, zavedeme si souřadnicový systém. A to pro jednoduchost následovně. Máme zadány dva body, bod A a bod B . Bod A určíme jakožto počátek souřadnicového systému, to znamená: $A = [0, 0]$. Bod B bude v námi vytvořeném souřadnicovém systému mít souřadnice $B = [1, 0]$. Je patrné, že z toho vyplývá podstatná informace. Nyní dva body definují jedničku.



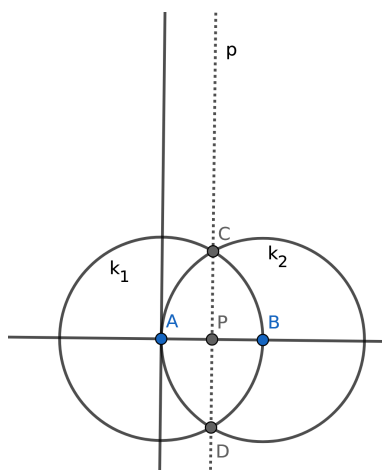
Obrázek 2.1: Právě dva body A a B nám stačí k zavedení souřadnicového systému.

Tedy zkonstruované body A, B umožní definovat počátek souřadnicového systému, zorientovat ho a definovat velikost jednotky. Souřadnicový systém máme vytvořený. Nyní si položme základní otázku. Co všechno je možné s touto vědomostí zkonstruovat?



Obrázek 2.2: Konstrukce celých čísel.

Je zřejmé, že lze zkonstruovat přirozená, potažmo celá čísla eukleidovskou konstrukcí kružnic. Minimálně na ose x se budou nacházet body se souřadnicemi celých čísel viz bod $C = [3, 0]$.



Obrázek 2.3: Konstrukce racionálních čísel.

Pokud máme zadány dva body, jsme schopny také pŮlit, konstruovat racionální čísla viz bod $P = [\frac{1}{2}, 0]$. Ve chvíli, kdy máme tedy dva body, tak je možné konstruovat libovolně mnoho konstrukcí (např. už proto, že přirozených čísel je nekonečně mnoho viz obr. 2.2). To je situace, z které při našich konstrukcích budeme vycházet.

2.3.3 n -prvková množina

V případě n -prvkové množiny, kde $n \geq 3$ umíme sestavit vše, co v rámci dvouprvkové množiny. Navíc však můžeme realizovat i některé složitější konstrukce např. v případě, že třetí bod je tzv. eukleidovsky nekonstruovatelný (podrobněji viz kapitola 2.4). Tedy pokud budou v počáteční množině např. body $A = [0, 0]$ a $B = [1, 0]$,

jako doposud, a navíc bod $C = [\pi, 0]$, pak budeme zjevně schopni provést kvadraturu (na první pohled alespoň některých, později uvidíme, že všech) kruhů, které jsme schopni zkonstruovat.

2.4 Eukleidovsky konstruovatelné body a eukleidovská konstrukce

V předchozích sekcích jsme si prošli jednotlivé aspekty eukleidovské konstrukce a jejich význam. Nyní tyto poznatky můžeme shrnout v matematickou definici.

Definice 1 (Množina eukleidovsky konstruovatelných bodů). *Nechť \mathcal{M}_0 je (počáteční) množina bodů roviny, která je alespoň dvouprvková, $|\mathcal{M}_0| \geq 2$. Označme symbolem \mathcal{M}_1 množinu, která obsahuje body množiny \mathcal{M}_0 a všechny body, které lze získat elementárními eukleidovskými konstrukcemi, aplikovanými na všechny body množiny \mathcal{M}_0 všemi možnými způsoby (zkonstruujeme všechny přímky a kružnice, které zkonstruovat lze, a všechny jejich průsečíky). Podobným způsobem budeme postupovat dále. Indukcí tak dostaneme množinu \mathcal{M}_n , $n \geq 2$, jako množinu obsahující body množiny \mathcal{M}_{n-1} a všechny body získané elementárními eukleidovskými konstrukcemi, které aplikujeme na všechny body množiny \mathcal{M}_{n-1} . Body, které náleží sjednocení*

$$\mathcal{M} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_j$$

nazýváme eukleidovsky konstruovatelné body.

Poznamenejme, že různé množiny \mathcal{M}_j jsou navzájem ve vztahu podmnožin a nadmnožin tak, že tvoří řetězec

$$\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \dots \subset \mathcal{M}_n \subset \dots$$

Poznamenejme dále, že pokud by počáteční množina bodů \mathcal{M}_0 byla *prázdná* nebo *jednoprvková*, pak by množina eukleidovsky konstruovatelných bodů byla $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0$. Povšimněme si, že v příkladu v sekci 2.3.3 pracujeme s počáteční množinou $\mathcal{M}_0 = A, B, C$, která obsahuje bod $C = [\pi, 0]$, který není konstruovatelný ze zbývajících dvou bodů. Což nám umožní provést jinak nerealizovatelnou kvadraturu kruhu.

Předchozí definice se zabývala všemi body roviny, které byly pomocí elementárních konstrukcí dosažitelné. Následující definice se zabývá eukleidovskou konstrukcí jako takovou. Tedy postupem, který již sleduje nějaký konkrétní cíl. Nebudeme tedy, na rozdíl od definice předchozí, konstruovat všechny body, ale jen některé.

Definice 2 (Eukleidovská konstrukce, viz [15, str.139]). *Eukleidovskou konstrukcí, nebo též konstrukcí pomocí pravítka a kružítká rozumíme posloupnost množin*

$$\mathcal{K}_0 \subseteq \mathcal{K}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{K}_n,$$

tedy konečných množin bodů v rovině takových, že $\mathcal{K}_{i+1} = \mathcal{K}_i \cup \{X\}$, kde X vznikne jako:

- průsečík přímek $p(A, B)$ a $p(C, D)$,
- průsečík přímky $p(A, B)$ a kružnice $k(D, |EF|)$ se středem D a poloměrem $|EF|$,
- průsečík kružnic $k(A, |BC|)$ a $k(D, |EF|)$,

pro nějaké body $A, B, C, D, E, F \in \mathcal{K}_i$.

Poznamenejme, že mezi množinami \mathcal{M}_j z definice 1 a \mathcal{K}_j z definice 2 je zřejmý vztah

$$\mathcal{K}_j \subseteq \mathcal{M}_j,$$

ovšem za předpokladu $\mathcal{M}_0 = \mathcal{K}_0$. Dále poznamenejme, že na každý krok konstrukce se můžeme dívat jako na *první* krok modifikované konstrukce s jinou počáteční množinou $\widetilde{\mathcal{M}}_0 = \mathcal{K}_j$.

3 Wanzelova metoda

V rámci této kapitoly se zaměříme na algebraický pohled na eukleidovskou konstrukci. Nejdříve se na eukleidovskou konstrukci podíváme pomocí Wanzelovi metody, následně si představíme obecné mechanismy vzniku nových bodů. Součástí této kapitoly bude také představení čtyř slavných úloh, jež jsou eukleidovsky nekonstruovatelné.

3.1 Algebraizace eukleidovské konstrukce

Nyní si zavedeme souřadnicový systém, který nám umožní zavedení množiny eukleidovsky konstruovatelných čísel.

Definice 3 (Množina eukleidovsky konstruovatelných čísel). *Množina počátečních bodů \mathcal{M}_0 z definice 1 je alespoň dvouprvková, nechť tedy $A, B \in \mathcal{M}_0$. Nechť je dále v rovině z předchozí definice dán kartézský systém souřadnic takový, že $A = [0, 0]$, $B = [1, 0]$. Souřadnice konstruovatelných bodů, tj. bodů množiny \mathcal{M} z definice 1, se nazývají konstruovatelná čísla, viz [5, str.454].*

Z předchozí definice je jasné, že množina eukleidovsky konstruovatelných čísel závisí na volbě resp. velikosti \mathcal{M}_0 . Dále se budeme soustředit zejména na eukleidovsky konstruovatelná čísla vznikající z $|\mathcal{M}_0| = 2$. Připomeňme definici v algebře velmi důležité a pro nás užitečné struktury se dvěma binárními operacemi, a sice tělesa.

Definice 4 (Těleso). *Tělesem rozumíme algebraickou strukturu, tedy množinu \mathbb{T} , na které jsou definovány dvě binární operace $(+, \cdot)$ takové, že:*

- i vzhledem k operaci $(+)$ je v \mathbb{T} abelovskou (aditivní) grupou s neutrálním prvkem 0 ,*
- ii vzhledem k operaci (\cdot) je v $\mathbb{T} \setminus \{0\}$ multiplikativní grupou, a operace splňuje distributivní zákon: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.*

Operace obvykle nazýváme operace sčítání a násobení, viz [1, str.18].

Mějme body v rovině body $A = [0, 0]$ a $B = [1, 0]$, resp. dvojici reálných čísel. V rámci této práce budeme pracovat s tělesem \mathbb{T} , které obsahuje $0, 1 \subseteq \mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$. Nejmenší těleso, které to splňuje, je těleso \mathbb{Q} , což vychází z definice 4(i) ($\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$) a z definice 4(ii) ($\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{T}$).

Definice 5 (Wanzelova metoda, viz [15, str.139]). *Wanzelova metoda spočívá v převedení konstrukcí pravítkem a kružítkem do jazyka algebry. Zvolme v rovině souřadnice a uvažujme nejmenší těleso \mathbb{T}_i , které obsahuje x -ové a y -ové souřadnice všech bodů z \mathcal{K}_i . Dostáváme tak řetěz rozšíření těles $\mathbb{T}_0 \subseteq \mathbb{T}_1 \subseteq \mathbb{T}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{T}_n$.*

Tedy v našem případě pokud $|\mathcal{K}_0| = 2$, tak $\mathbb{T}_0 = \mathbb{Q}$. Rozšíření toho tělesa probíhá tak, že přidáme bod $[x_i, y_i]$, tedy přejdeme z \mathcal{K}_i do \mathcal{K}_{i-1} , potom platí, že $\mathbb{T}_i = \mathbb{T}_{i-1}(x_i, y_i)$. \mathbb{T}_i lze interpretovat jako vektorový prostor nad \mathbb{T}_{i-1} , potom stupeň rozšíření tělesa je dimenze toho vektorového prostoru, tedy $[\mathbb{T}_i : \mathbb{T}_{i-1}]$ (viz [15, str.134]).

3.1.1 Obecné mechanismy vzniku nových bodů

Naskytá se nám otázka, které geometrické konstruktivní úlohy lze vyřešit eukleidovsky. Abychom tuto otázku vyřešili, je záhodno si uvědomit, že pokud je dána nějaká konstruktivní úloha v rovině, znamená to, že jsou dány v rovině nějaké body a mimo ně nějaké úsečky (přímky), což jsou ale rovněž body ležící na úsečce (přímce) v nějakých předepsaných vzdálenostech od sebe. Zadati nějakou konstruktivní úlohu tedy znamená zadat v rovině jistý počet bodů. Řešit tuto úlohu eukleidovsky ve své podstatě znamená sestrojít průsečíky dvou přímek, průsečíky přímky a kružnice, resp. průsečíky dvou kružnic. Tedy sestrojít z daných bodů řadu bodů dalších, které mají vlastnosti, jež jsou stanovené v úloze. Je tedy vidět, že celá konstrukce se dá rozložit na postupné provádění tří již zmíněných konstrukcí tj. konstrukce průsečíků dvou přímek, přímky a kružnice nebo dvou kružnic. Z hlediska analytické geometrie již máme zavedený souřadnicový systém (viz 3.1). Ze souřadnic daných bodů je potřebné si odvodit rovnice, jejichž koeficienty závisí na souřadnicích těchto bodů. Řešení těchto rovnic dává souřadnice bodů, které je cílem sestrojít. Platí nyní následující věta.

Věta 3.1.1. *Jestliže lze danou konstruktivní úlohu provést eukleidovsky, pak lze souřadnice hledaných bodů vypočítat ze souřadnic daných bodů pomocí racionálních operací (+, ·, −, /) a pomocí výpočtu druhé odmocniny v konečném počtu.*

Pro nás to tedy znamená, že když na začátku mám dva body, tedy $A = [0, 0]$, $B = [1, 0]$, tak jsme schopni nalézt každou souřadnici, jež je popsána konečným počtem konstrukcí, viz [11, str.467].

Důkaz. Předpokládejme, že kromě počáteční množiny bodů jsme již sestrojili eukleidovsky jistý počet dalších bodů a že souřadnice těchto nových bodů lze vypočítat ze souřadnic nových bodů operacemi ve větě. Předpokládejme, že nyní máme na některé již ze známých bodů provést jednu z dílčích konstrukcí, kterými jsme v eukleidovské konstrukci (viz definice 2) přidávali bod X . To algebraicky odpovídá nalezení řešení soustavy:

(A) Dvou lineárních rovnic, tedy obecně

$$\begin{aligned}\alpha x + \beta y &= \gamma, \\ \delta x + \eta y &= \phi.\end{aligned}$$

Konkrétně pak pro dvě přímky procházející body $A = [A_x, A_y]$, $B = [B_x, B_y]$ (první) a $D = [D_x, D_y]$, $E = [E_x, E_y]$ (druhá přímka) dostaneme:

$$\begin{aligned}(A_y - B_y)x + (B_x - A_x)y &= B_y A_x - B_x A_y, \\ (D_y - E_y)x + (E_x - D_x)y &= E_y D_x - E_x D_y.\end{aligned}$$

Koeficienty rovnic přímek určených dvěma body jsou racionální funkce souřadnic těchto bodů $\alpha = (A_y - B_y)$, $\beta = (B_x - A_x)$, $\gamma = B_y A_x - B_x A_y$, $\delta = (D_y - E_y)$, $\eta = (E_x - D_x)$ a $\phi = E_y D_x - E_x D_y$.

Způsob řešení: Nalezení průsečíku dvou přímek, resp. nalezení řešení soustavy dvou lineárních rovnic, odpovídá několika metodám. Existuje metoda dosazovací, při níž vyjádříme jednu neznámou z jedné rovnice a dosadíme ji do druhé rovnice. Další elementární užívanou metodou již na základní škole je metoda sčítací. Cílem této metody je pomocí ekvivalentních úprav dosáhnout toho, aby se koeficienty v obou rovnicích rovnaly až na znaménko ($\alpha = \delta$, β, η). Díky tomu dojde po sečtení těchto rovnic k tomu, že vybraná neznámá vypadne a dostaneme jednu rovnici o jedné neznámé. Poslední metodou je metoda srovnávací. Z obou rovnic vyjádříme stejnou vybranou neznámou (např. x) a výsledky porovnáme, čímž dostaneme rovnici, kde je vybraná neznámá vyloučena.

Řešení odpovídá uspořádané dvojici čísel $[x, y]$, která vyhovuje oběma rovnicím. Řešení takové soustavy rovnic může být právě jedno, resp. žádný, resp. nekonečně mnoho. Nalezli jsme tedy hledaný průsečík různoběžných přímek, resp. nenalezli jsme tedy hledaný průsečík, neboť se jednalo o rovnoběžné přímky, resp. přímky jsou totožné, tudíž existuje nekonečně mnoho řešení (nekonečně mnoho společných bodů).

(B) Dále pak algebraické řešení lineární a kvadratická rovnice tvaru:

$$\begin{aligned}\alpha x + \beta y &= \gamma, \\ (x - \theta)^2 + (y - \iota)^2 &= \kappa^2.\end{aligned}$$

Konkrétně pak pro přímku procházející body $A = [A_x, A_y]$, $B = [B_x, B_y]$ a kružnici se středem D a poloměrem $|EF|$, kde souřadnice těchto bodů označíme následovně: $D = [D_x, D_y]$, $E = [E_x, E_y]$, $F = [F_x, F_y]$, dostaneme

$$\begin{aligned}(A_y - B_y)x + (B_x - A_x)y &= B_y A_x - B_x A_y \\ (x - D_x)^2 + (y - D_y)^2 &= (E_x - F_x)^2 + (E_y - F_y)^2.\end{aligned}$$

Koeficienty rovnice přímky, jež je určena dvěma body, jsou funkce souřadnic těchto bodů. Totéž platí pro koeficienty kružnice: $\alpha = (A_y - B_y)$, $\beta = (B_x - A_x)$, $\gamma = B_y A_x - B_x A_y$, $\theta = D_x$, $\iota = D_y$, $\kappa = \sqrt{(E_x - F_x)^2 + (E_y - F_y)^2}$.

Způsob řešení: V případě soustav lineární a kvadratické rovnice se jeví nejelegantnější řešení metodou dosazovací. Vyjádříme z lineární rovnice neznámou, kterou poté dosadíme do rovnice kvadratické. Tím získáme jedno z možných řešení: žádné (přímka leží vně kružnice), jedno (přímka je tečnou kružnice) nebo dvě (přímka je sečnou kružnice).

(C) Resp. algebraické řešení dvou kvadratických rovnic tvaru:

$$\begin{aligned}(x - \lambda)^2 + (y - \rho)^2 &= \omega^2, \\ (x - \theta)^2 + (y - \iota)^2 &= \kappa^2.\end{aligned}$$

Konkrétně pak pro kružnici se středem A a poloměrem $|BC|$ a kružnici se středem D a poloměrem $|EF|$, kde souřadnice těchto bodů označíme následovně: $A = [A_x, A_y]$, $B = [B_x, B_y]$, $C = [C_x, C_y]$, $D = [D_x, D_y]$, $E = [E_x, E_y]$, $F = [F_x, F_y]$, dostaneme

$$\begin{aligned}(x - A_x)^2 + (y - A_y)^2 &= (B_x - C_x)^2 + (B_y - C_y)^2 \\ (x - D_x)^2 + (y - D_y)^2 &= (E_x - F_x)^2 + (E_y - F_y)^2.\end{aligned}$$

Stejně tak koeficienty rovnic kružnic, jež jsou určené dvěma body jsou racionální funkce souřadnic těchto bodů: $\lambda = A_x$, $\rho = A_y$, $\theta = D_x$, $\iota = D_y$, $\omega = \sqrt{(B_x - C_x)^2 + (B_y - C_y)^2}$, $\kappa = \sqrt{(E_x - F_x)^2 + (E_y - F_y)^2}$.

Způsob řešení: V případě hledání průsečíku dvou kružnic hledáme dvě, resp. jedno, resp. žádné, resp. nekonečně mnoho řešení. Řešením je opět uspořádaná dvojice čísel vyhovující oběma rovnicím. Řešení je elementární. Spočívá v převedení řešení na předchozí případ. Rovnice kružnic si převedeme na obecný tvar. Z jedné rovnice kružnice vyjádříme $x^2 + y^2$ a dosadíme do rovnice druhé. Tím získáme chordálu těchto dvou kružnic, tedy přímku. Dále řešíme jako soustavu kvadratické a lineární rovnice.

Poznamenejme, že soustavy mají řešení, v němž hodnoty neznámých jsou funkce koeficientů. Z toho vyplývá, že souřadnice průsečíků lze vypočítat racionálními operacemi ze souřadnic známých bodů.

□

Předchozí větu vhodně doplňuje ještě věta následující, viz [11, str.468].

Věta 3.1.2. *Každý bod, jehož souřadnice lze vypočítat ze souřadnic daných bodů pomocí racionálních operací (+, ·, −, /) a výpočtu druhé odmocniny v konečném počtu, dá se z těchto bodů sestrojít eukleidovsky.*

Důkaz. Důkaz spočívá v tom, že je možné si souřadnice daného bodu v rovině geometricky vyjádřit a to pomocí úseček. Jsou-li tyto úsečky dány a jsou-li v rovině dány osy souřadné, lze bod eukleidovsky sestrojít. Větu si můžeme přeformulovat. Jsou dány dvě úsečky. Každou úsečku, jejíž délka se dá vypočítat z délek daných úseček racionálními operacemi a výpočtem druhé odmocniny v konečném počtu, lze eukleidovsky sestrojít z daných úseček.

Stačí tedy ukázat, že lze eukleidovsky sestrojít úsečku, jejíž délka je součtem, rozdílem, součinem nebo podílem daných úseček. Dále pak úsečku, jejíž délka je druhá odmocnina z délky dané úsečky.

Konstrukce součtu a rozdílu je velmi jednoduchá a známá. Na přímku p nanese úsečku AB o délce a . Následně na přímku p nanese úsečku CD o délce b tak,



Obrázek 3.1: Konstrukce úsečky délky součtu daných úseček.

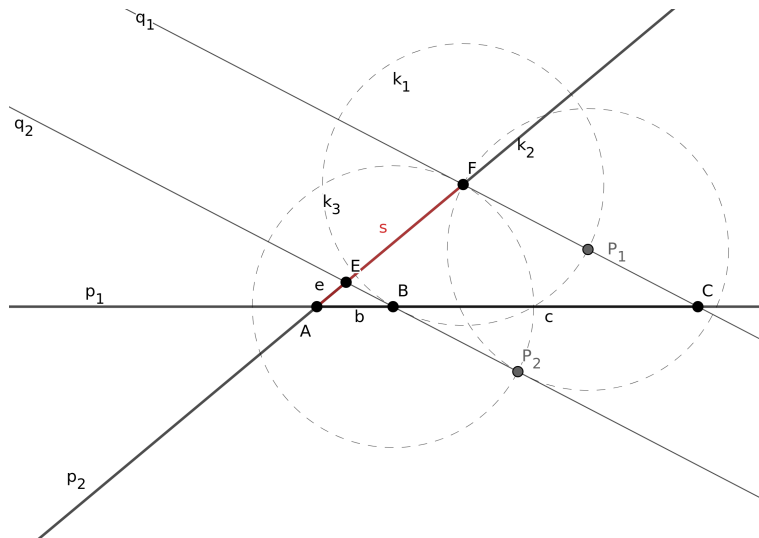
aby $B = C$ a současně úsečky byly stejně orientované. Vzniklá úsečka AD má délku $s = a + b$.

Obdobně postupujeme při konstrukci rozdílu. Postup je odlišný v nanesení úsečky CD o délce b , kde $b < a$ a kde $B = C$, neboť ji nanese jako opačně orientovanou úsečku k úsečce AB . Tím dostaneme úsečku AD , která má délku $r = a - b$.



Obrázek 3.2: Konstrukce rozdílu useček.

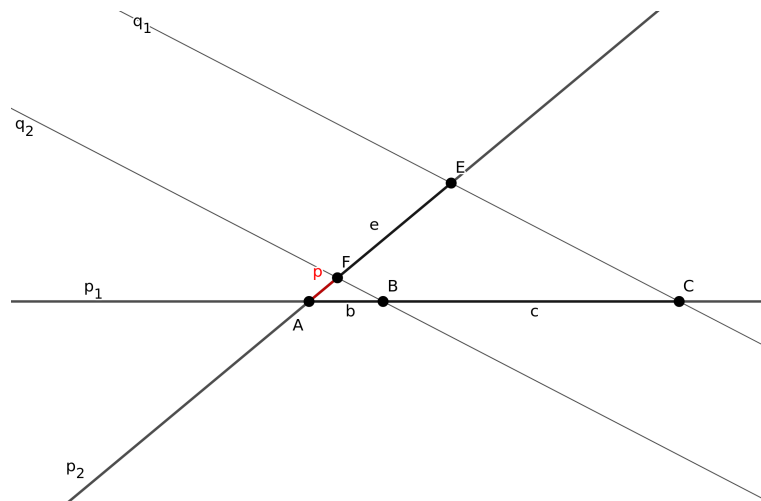
Součin: Konstrukci součinu délek a, b provádíme takto: Nakreslíme si pravítkem dvě polopřímky vycházející z bodu A , které jsou různoběžné. Na první polopřímku nanese od bodu A délku $b = 1$ a délku c . Dostaneme body B a C . Na druhou nanese přímku od bodu A délku e a dostaneme bod E . Spojíme přímkou bod B s bodem E . Následně povedeme bodem C rovnoběžku s přímkou BE . Průsečík této přímky s přímkou AE označíme jako bod F . Délka s úsečky AF je součin cd , což plyne z úměry $1 : c = e : s \Rightarrow s = ce$.



Obrázek 3.3: Konstrukce součin úseček.

Podobně postupujeme, máme-li sestrojít podíl $p = e/c$ délek dvou úseček, jak plyne z 3.4 a z úměry $1 : c = p : e \Rightarrow p = d/c$.

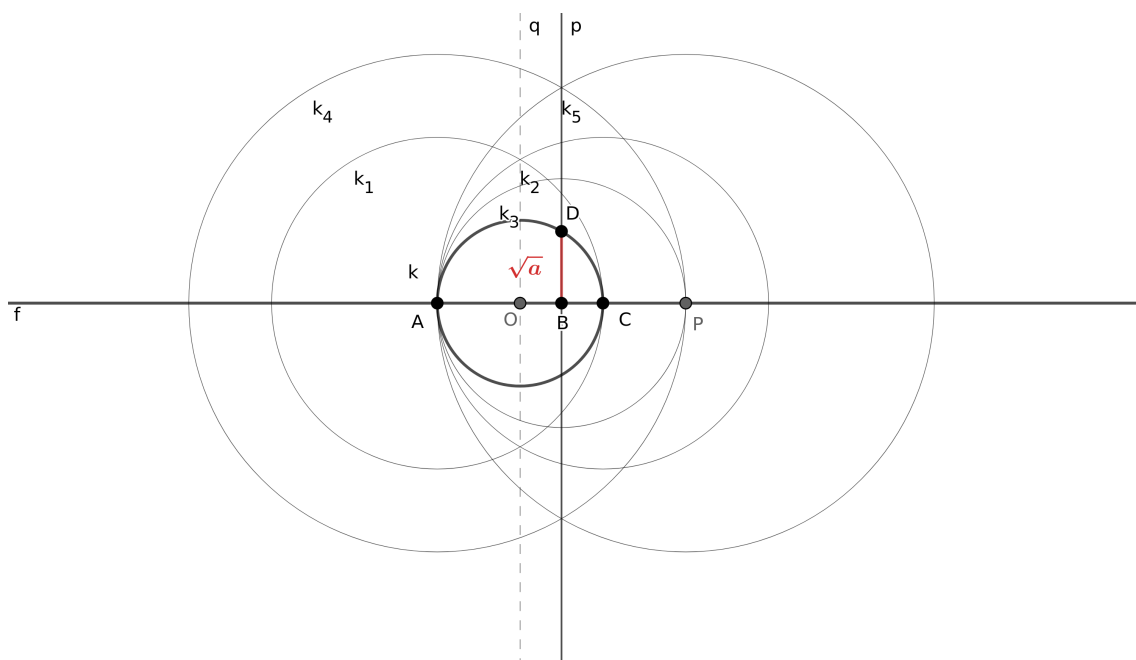
Druhá odmocnina: Je-li dána úsečka o délce a , sestrojíme úsečku o délce \sqrt{a} takto: Na přímku nanese úsečku AB délky a a úsečku BC délky 1 . Úsečku AC rozpůlíme, což lze eukleidovskly provést. Dostaneme tak bod O . V bodě B



Obrázek 3.4: Konstrukce podíl úseček.

vztyčíme na přímku AC kolmici, což lze opět eukleidovsky provést. Tato kolmice protne kružnici K v bodě D . Délka úsečky BD je podle Eukleidovy věty o výšce právě \sqrt{a} .

Tím je věta dokázána [11, str.468].



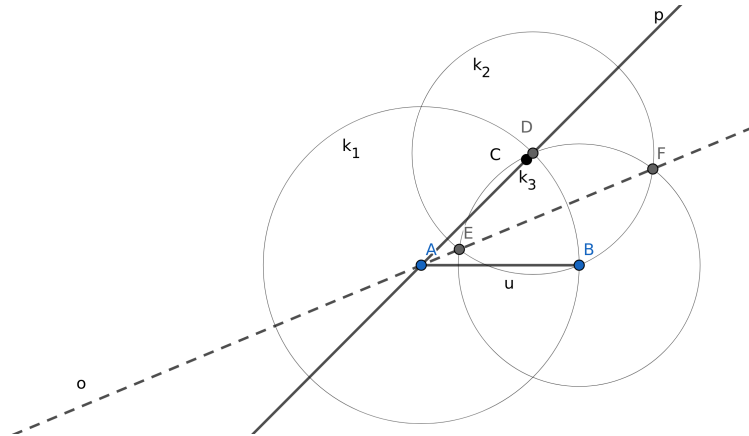
Obrázek 3.5: Konstrukce odmocniny.

□

3.1.2 Příklad použití — půlení úhlu

Nyní se zaměříme na to, jakým způsobem lze formalizovat úlohu, ve které k danému úhlu máme rozpůlit úhel.

Příklad 1. Mějme tři body A, B, C , které, mimo jiné, definují úhel (resp. dva úhly) $\angle BAC$ u vrcholu A . Úkolem je úhel (resp. oba úhly) rozpůlit.



Obrázek 3.6: Půlení úhlu.

Sestrojíme tedy obvyklým způsobem body D a E tak, že platí

$$D \in k_1(A, |AB|) \cap p(A, C)$$

a

$$E, F \in k_3(B, |BD|) \cap k_2(D, |BD|).$$

Pro názornost si vybereme pouze jeden bod, v tomto případě bod E . Hledaným výsledkem bude úhel $\angle BAE$ daný body A, B, E . Tedy:

$$\mathcal{K}_0 = \{A, B, C\}, \quad \mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_0 \cup \{D\}, \quad \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_1 \cup \{E\}.$$

Nyní si zvolíme souřadnicový systém tak, že $A = [0, 0]$, $B = [1, 0]$. Pak bod C má nějaké souřadnice $C = [C_x, C_y]$. Následně dopočítáme souřadnice bodů D, E , tedy

$$D = \left(\frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}}, \frac{C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}} \right), \quad E = \left(\frac{1}{2} + \frac{C_x - C_y\sqrt{3}}{2\sqrt{C_x^2 + C_y^2}}, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{C_y + C_x\sqrt{3}}{2\sqrt{C_x^2 + C_y^2}} \right)$$

Závěrem tedy dostáváme

$$\mathbb{T}_0 = \mathbb{Q}(C_x, C_y), \quad \mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_0(\sqrt{C_x^2 + C_y^2}), \quad \mathbb{T}_2 = \mathbb{T}_0(\sqrt{C_x^2 + C_y^2}, \sqrt{3}) [15, str.139].$$

[15, str.139]

Věty 3.1.1 a 3.1.2 charakterizují algebraicky konstruktivní úlohy, které lze eukleidovsky sestavit. Mnohdy však je zapotřebí dokázat neřešitelnost zadané úlohy eukleidovskou konstrukcí. Pro vyšetřování neřešitelnosti je užitečná následující věta.

Věta 3.1.3. *Mějme dáno nějaké podtěleso \mathbb{T} tělesa komplexních čísel. Necht' polynom*

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

je ireducibilní nad \mathbb{T} . Budiž α kořen kvadratické ireducibilní rovnice s koeficienty v \mathbb{T} .

$$\epsilon^2 + b_1\epsilon + b_2 = 0.$$

Utvoríme si adjunkcí α k $\mathbb{T}(\alpha)$. Rozpadá-li se polynom $f(x)$ nad $\mathbb{T}(\alpha)$, pak jeho stupeň n musí být číslo sudé $n = 2k$ a $f(x)$ je součinem dvou ireducibilních polynomů stupně k -tého nad $\mathbb{T}(\alpha)$.

Důkaz této věty lze nalézt např. v [11]. Z ní pak plyne následující pomocná věta.

Věta 3.1.4. *Necht' je dáno r úseček o délkách a_1, a_2, \dots, a_r . Budiž \mathbb{T} těleso, které vznikne z tělesa racionálních čísel R adjunkcí čísel a_1, a_2, \dots, a_r . Budiž β číslo, které je kořenem rovnice*

$$\epsilon^n + b_1\epsilon^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\epsilon + b_n = 0.$$

s koeficienty v \mathbb{T} a ireducibilní nad \mathbb{T} . Aby se úsečka o délce β dala eukleidovsky sestavit, k tomu je nutné, aby stupeň rovnice byla mocnina čísla 2 ($n = 2_l$).

Důkaz věty lze opět nalézt v literatuře, viz např. [11].

3.1.3 Příklad eukleidovsky nekonstruovatelné úlohy — sedmiúhelník

V této úloze se podíváme na eukleidovsky nekonstruovatelnou úlohu, a to důsledkem věty 3.1.4.

Příklad 2. *Vezměme si rovnici 4.1. Pro $n = 7$ dostaneme*

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Využijte reciprocity rovnice. Tudiž ji vynásobíme z^{-3} . Následně použijeme substituce $x = (z + z^{-1})$, $x^2 - 2 = (z^2 + z^{-2})$, $x^3 - 3x = (z^3 + z^{-3})$. Rovnice po substituci tedy bude vypadat

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Vidíme, že stupeň rovnice je 3, což není mocnina čísla 2 ($n = 2_l$). Rovnice tedy nemá racionální kořen a tedy ani eukleidovsky konstruovatelný kořen. Proto pravidelný sedmiúhelník není eukleidovsky konstruovatelný [18, 103].

Bezprostředním důsledkem věty 3.1.4 je neřešitelnost klasických úloh řecké matematiky eukleidovskou konstrukcí, kterými se budeme zabývat v další sekci.

3.2 Eukleidovsky neřešitelné úlohy

Konstrukce pravítkem a kružítkem patřily mezi klasické starořecké konstrukce. Postupem času se ustanovila čtyři slavná zadání, které se ani přes velkou snahu nedalo přes 2000 let vyřešit:

- Rektifikace kružnice: k dané kružnici sestrojít úsečku, která je stejně dlouhá jako obvod této kružnice.
- Kvadratura kruhu: k danému kruhu sestrojít úsečku takovou, že čtverec s touto hranou má stejnou plochu jako daný kruh.
- Zdvojení krychle: k dané úsečce u sestrojít úsečku v takovou, že krychle s hranou dlouhou jako v má dvakrát větší objem, než krychle s hranou dlouhou jako u .
- Trisekce úhlu: k danému úhlu sestrojít třetinový úhel.

První tři úlohy lze chápat jako: je-li zadána jednotková úsečka, zkonstruujte úsečku délky 2π , resp. $\sqrt{\pi}$, resp. $\sqrt[3]{2}$. Teprve rozvoj algebry v 19. století umožnil dokázat neřešitelnost těchto úloh. Pro trisekci úhlu a zdvojení krychle našel důkaz Pierre Wantzel v roce 1837. Stejnou metodou lze vyřešit také rektifikaci kružnice a kvadraturu kruhu, avšak k vyřešení je zapotřebí Lindemannův důkaz transcendence čísla π (podrobněji viz [9, str. 79]), který byl objeven o 50 let později, viz [15, str.139]. Poznamenejme, že navzdory tomu, že výše zmíněná zadání není možné vyřešit, se někteří matematici pokusili o přibližné řešení (tj. rektifikace kruhu [13, str.152-153], rektifikace kružnice [19, str.83-88], trisekce úhlu [20, str.153-159] a zdvojení krychle [8, str.255-257]).

3.2.1 Náznak důkazu neřešitelnosti zdvojení krychle

Bez újmy na obecnosti zvolíme délku strany krychle 1 cm. K sestrojení krychle o dvojnásobném objemu je zapotřebí sestrojít krychli o velikosti strany $\sqrt[3]{2}$. Číslo $\sqrt[3]{2}$ je kořenem polynomu $x^3 - 2$. V případě, že by byl tento polynom reducibilní nad \mathbb{Q} , měl by polynom alespoň jeden racionální kořen, který by musel být z množiny $\{1, -1, 2, -2\}$ (nutná podmínka racionality kořene racionálního polynomu). Po dosazení všech možností je zřejmé, že ani jedna z možností nevyhovuje. Tudíž se jedná o ireducibilní polynom nad tělesem čísel \mathbb{Q} . Další podstatnou skutečností je stupeň polynomu. Stupeň tohoto polynomu je 3, což není mocnina čísla 2. Tedy úsečka o délce $\sqrt[3]{2}$ není eukleidovsky sestrojitelná (algebraická rozšíření, která provádíme v konstrukci $Q(K_0) \subseteq Q(K_1) \subseteq Q(K_2)$, jsou rozšíření stupně 1 nebo 2 [5, str.455]).

3.2.2 Náznak důkazu neřešitelnosti rektifikace kružnice

Důkaz spočívá v transcendentnosti čísla π . Náznak důkazu provedeme sporem. Nechť máme zadanou jednotkovou úsečku s krajními body A, B o souřadnicích $A =$

$[0, 0], B = [1, 0]$. Výchozí těleso bude opět těleso racionálních čísel \mathbb{Q} . Cílem je sestrojít úsečku o délce π , tedy bod C , $C = [\pi, 0]$. Předpoklad je existence nadtělesa \mathbb{T}_n , obsahující číslo π a stupeň rozšíření $[\mathbb{T}_n : \mathbb{Q}]$ je konečný. Z toho vyplývá, že rozšíření je algebraické, a tudíž i číslo π . Což je spor s transcendentností čísla π [15, str. 140].

3.2.3 Náznak důkazu neřešitelnosti kvadratury kruhu

Důkaz opět spočívá v transcendentnosti čísla π . Důkaz je obdobný jako u rektifikace kružnice.

Máme kruh o poloměru 1, z čehož vyplývá obsah o velikosti π . Čtverec, který má stejný obsah, má délku strany $\sqrt{\pi}$. Jak již bylo řečeno, π je transcendentní, což platí také pro jeho druhou odmocninu. Z toho plyne eukleidovská nekonstruovatelnost. [5, str.455]

3.2.4 Náznak důkazu neřešitelnosti trisekce úhlu

Stačí najít jedno konkrétní zadání, které není řešitelné pravítkem a kružítkem. Například úhel $\alpha = 60^\circ$, zadaný body $A = [0, 0]$, $B = [1, 0]$ a $C = [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$, tedy $\mathbb{T}_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Dokážeme, že nelze sestrojít bod

$$D = [\cos(20^\circ), \sin(20^\circ)],$$

který vznikne jako průsečík zkonstruované přímky se směrnicí 20° pomocí jiného bodu a jednotkové kružnice. Dokážeme-li, že stupeň rozšíření

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \cos(20^\circ)) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] = 3,$$

můžeme použít stejný argument jako pro zdvojení krychle. Uvažujeme bod $C_x = [\frac{1}{2}, 0]$. Je zřejmé, že pokud umíme sestrojít bod C , jsme schopni následně sestrojít bod x_C a naopak. Díky tomu můžeme opět jakožto výchozí těleso určit těleso racionálních čísel \mathbb{Q} . Stejný postup je platný pro ostatní body E, F viz. obrázek 3.7. Stačí tedy umět sestrojít x -ovou souřadnici.

Využijeme vzorce

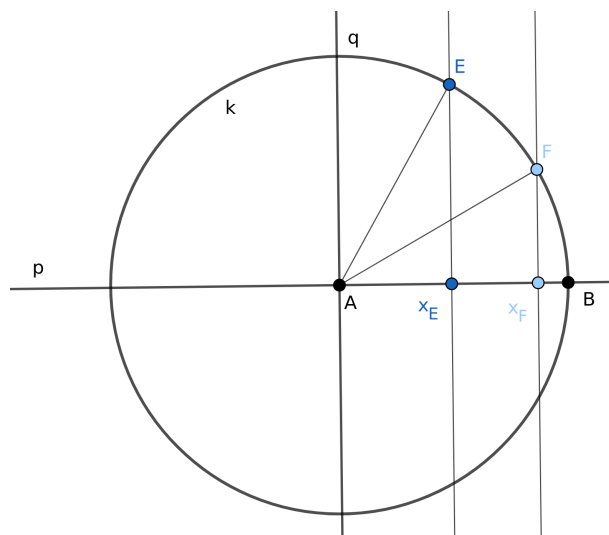
$$\cos(\alpha) = 4 \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 - 3 \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right),$$

který dostaneme snadno např. ze vzorce pro kosínus trojnásobného úhlu (resp. pro kosínus dvojnásobného úhlu a pro kosínus součtu úhlů). Po dosazení $\alpha = 60^\circ$ dostaneme

$$\frac{1}{2} = 4 \cos(20^\circ)^3 - 3 \cos(20^\circ).$$

Tedy $x = \cos(20^\circ)$ je kořenem (po přerovnání a vynásobení dvěma).

$$\frac{1}{2} - 4x^3 + 3x = 0$$



Obrázek 3.7: Konstrukce x -ových souřadnic bodů E, F .

Polynom $8x^3 - 6x - 1 = 0$ je však nad \mathbb{Q} ireducibilní. Pokud by totiž měl kořen z \mathbb{Q} , musel by tento kořen být nutně z množiny $\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\}$. Prostým dosazením všech kandidátů na kořen zjišťujeme, že ani jeden není kořenem uvedeného polynomu. Čímž jsme ukázali, že $\mu(x)$ je minimálním polynomem (viz [15, str.135]) čísla $\cos(20^\circ)$ a tedy odpovídající rozšíření je stupně 3.

$$\left[\mathbb{Q} \left(\sqrt{3}, \cos(20^\circ) \right) : \mathbb{Q} \left(\sqrt{3} \right) \right] = 3,$$

rozšíření je tedy stupně 3, tudíž se nejedná o mocninu dvou, viz sekce 3.1.1, viz také [5, str.455].

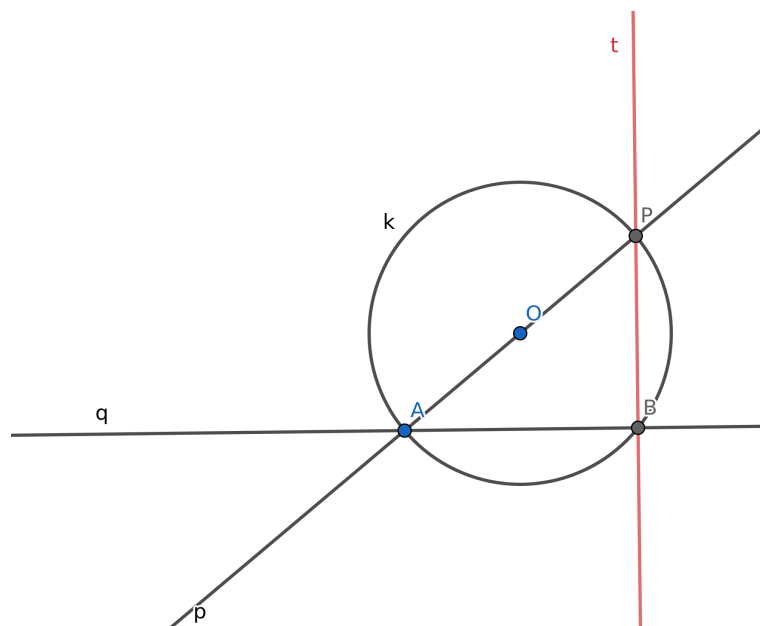
Protože úhel 60° , který jsme nedokázali roztřít, je vrcholový úhel vyskytující se v pravidelném šestiúhelníku, efektivně jsme také dokázali nemožnost eukleidovské konstrukce pravidelného osmnáctiúhelníku a tedy i devítiúhelníku.

3.3 Pomocné konstrukce: kolmice a rovnoběžka

V této sekci se budeme zabývat konstrukcí kolmice a rovnoběžky, které budou nezbytné při dalších konstrukcích, ve kterých se již k nim nebudeme explicitně vracet.

3.3.1 Kolmice

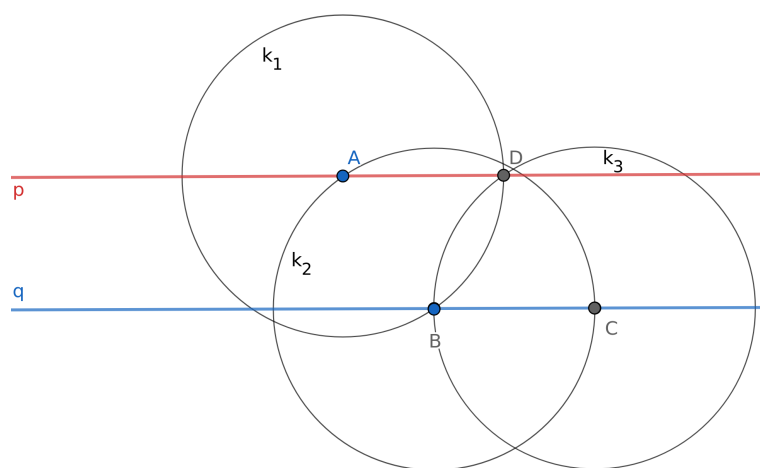
Při konstrukci vždy záleží na počátečních podmínkách. Budeme se zabývat případem, kdy máme zadány dva body O, A . Bodem A proložíme libovolnou přímku q . Následně zkonstruuujeme kružnici o libovolném poloměru r a středu v bodě O . Průsečík kružnice k s přímkou q označíme jako bod B (lze si vybrat ze dvou průsečíků). Následně proložíme body A a O přímkou p . Průsečík přímky p a kružnice k označíme P . Přímka t tvořená body P, B je kolmicí k přímce q , viz [17, str.3].



Obrázek 3.8: Konstrukce kolmice.

3.3.2 Rovnoběžka

Pro zkonstruování rovnoběžky je zapotřebí více dílčích opakujících se konstrukcí. Počáteční podmínky jsou následující: je zadán bod A a přímka q . Zkonstruujeme kružnici $k_1 = (A, r)$, kde $r \geq |Ap|$. Vznikne nám průsečík B (zvolili jsme si jeden ze dvou vzniklých). Konstrukci opakujeme se stejným poloměrem kružnice: $k_2 = (B, r)$. Vznikne bod C , $C = k_2 \cap q$. Nyní sestrojíme kružnici k_3 ; $k_3 = (C, r)$. Díky tomu nám vznikne bod D , $D = k_3 \cap k_1$. Přímka p na niž leží body A, D je rovnoběžná s přímkou q , viz [17, str.2].



Obrázek 3.9: Konstrukce rovnoběžky.

4 Eukleidovsky konstruovatelné mnohoúhelníky a Gaußova věta

Kapitola Konstruovatelné mnohoúhelníky a Gaußova věta, jak je již z názvu patrné, pojednává o eukleidovské konstrukci v rámci vybraných n - úhelníků z geometrického, částečně algebraického pohledu. Na začátku kapitoly si zavedeme Gaußovu větu, která určí, kdy je pravidelný n -úhelník eukleidovsky konstruovatelný. Důkaz této věty je nad rámec bakalářské práce, proto nebude její součástí. Lze ho však nalézt v literatuře, např. v [14, str. 32].

4.1 Gaußova věta

Otázku eukleidovsky konstruovatelných pravidelných mnohoúhelníků všeobecně vyřešil Gauß (1777–1855) následující větou, viz[10, str.179].

Věta 4.1.1 (Gaußova věta). *Pravidelný n -úhelník je eukleidovsky konstruovatelný pouze tehdy, pokud n je číslo tvaru:*

$$n = 2^m p_1 p_2 \cdots p_k$$

přičemž $m \geq 0$ a p_1, p_2, \dots, p_k jsou různá Fermatova prvočísla, tj. prvočísla tvaru

$$F_r = 2^{2^r} + 1,$$

kde $r \in \mathbb{N}$.

Podle této věty jsou konstruovatelné pravidelné mnohoúhelníky, které můžeme podle vlastností rozdělit do několika skupin, viz tabulka 4.1. Zejména to je pět n -úhelníků, kde n je jediných pět známých Fermatových prvočísel. To jsou

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad \text{a} \quad F_4 = 65\,537,$$

tedy pro $r = 0, 1, 2, 3, 4$. (Žádné další Fermatovo prvočíslο není známo. Neví se, zda existuje.) Tato skupina mnohoúhelníků, jejichž počet vrcholů je prvočíselný, je důležitá, protože mohou sloužit jako stavební kameny pro konstrukci dalších, které mohou vznikat zdvojnásobením počtu vrcholů či „součinem“ nesoudělných mnohoúhelníků, podrobněji viz sekce 6.

Dále je to dvacetšest mnohoúhelníků, tvořených součiny všech možných kombinací Fermatových čísel, představující počet vrcholů n -úhelníků.

Tabulka 4.1: Kategorizace n -úhelníků

Skupiny n -úhelníků	Konkrétní n -úhelníky
kde n je prvočíslo	3, 5, 17, 257, 65 537
kde n je součin dvou, tří, čtyř, resp. pěti lichých prvočísel	15, 51, 85, 771, 1 285, 4 396, 196 611, 327 685, 1 114 129, 16 843 009 255, 3 855, 13 107, 21 845, 983 055, 3 342 387, 5 570 645, 50 529 027, 84 215 045, 286 331 153 65 535, 16 711 935, 252 645 135, 858 993 459, 1 431 655 765 4 294 967 295
čtyřúhelník (čtverec)	4
malé sudoúhelníky	6, 8, 10, 12, 16, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 60, 64, 68, 80, 96, ...

Do skupiny n -úhelníků, které lze sestrojít (viz 4.1) patří také čtyřúhelník. Čtyřúhelník je speciální tím, že nepatří ani do jedné skupiny, neboť $n = 4$ je složené číslo, současně ho však nelze vytvořit zdvojnásobením vrcholů či součinem nesoudělných lichoběžníků. Tento fakt je zúsobený tím, že n -úhelníky uvažujeme pro $n \geq 3$. Důkaz toho, že se jedná zároveň i o podmínku nutnou, vytvořil až v roce 1837 francouzský matematik Pierre Wantzel (1814–1848) ([10, str. 180]).

Poslední skupinu tvoří malé sudoúhelníky. Malé sudoúhelníky je skupina mnohoúhelníků, které lze vytvořit zdvojnásobením vrcholů. Je zřejmé, že lze induktivně vytvářet stále nové n -úhelníky tímto způsobem. Z čehož vyplývá, že jich je nekonečně mnoho. V tabulce 4.1 jsou vypsány pouze některé n -úhelníky.

4.2 Co znamená konstruovat pravidelný n -úhelník?

Konstruovat pravidelný n -úhelník znamená sestrojít n bodů jednotkové kružnice, které jsou přiřazené k číslům, které splňují rovnici $z^n - 1 = 0$, tj.

$$\begin{aligned} z_1 = z &= \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \mathbf{i} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ z_2 = z^2 &= \cos\left(2\frac{2\pi}{n}\right) + \mathbf{i} \sin\left(2\frac{2\pi}{n}\right) \\ z_n = z^n &= \cos\left(n\frac{2\pi}{n}\right) + \mathbf{i} \sin\left(n\frac{2\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že sestrojení pravidelného n -úhelníka znamená najít kořen rovnice $z^n - 1 = 0$. Jeden kořen je zřejmý. Jedná se o kořen 1. Proto se jedná o určení $n - 1$ kořenů rovnice

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z^2 + z + 1 = 0 \quad (4.1)$$

Rovnice je známá, jako rovnice dělení kruhu. Úhel je možné eukleidovsky rozpůlit, zdvojnásobit. Proto z pravidelných n a $2n$ -úhelníků jsou eukleidovsky konstruovatelné buď oba nebo ani jeden [18, str. 101].

Nutno zmínit, že není možné sestavit pomocí eukleidovské konstrukce jakýkoliv mnohoúhelník bez odchylky. Vhodným příkladem nepřesné konstrukce je konstrukce sedmiúhelníku. Proto se konstrukce sedmiúhelníku, jak již bylo zmíněno, neřadí mezi eukleidovské konstrukce.

4.3 Gaußův teoretický výpočet konstrukce n -úhelníků

V rámci této sekce si představíme Gaußovu metodu (viz [16, str. 543–557]) hledání strany kořene pravidelného eukleidovsky konstruovatelného mnohoúhelníku, jehož počet vrcholů je prvočíselný. Jedná se také mimo jiné o metodu ověření konstruovatelnosti mnohoúhelníku. K vysvětlení této metody budeme potřebovat řadu vět a definic, na které se budeme následně odkazovat.

4.3.1 Užitečné definice a věty

Nejprve si připomeneme pojem Eulerovy funkce známé z algebry, viz např. [7, str. 14], nebo [15].

Definice 6 (Eulerova funkce). *Nechť je m přirozené číslo větší než jedna, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$. Počet všech přirozených čísel nesoudělných s m , která jsou menší nebo rovna m , značíme $\varphi(m)$, tj.*

$$\varphi(m) = |\{a \in \mathbb{N} : a < m, \gcd(m, a) = 1\}|.$$

Funkci $\varphi(m)$ říkáme Eulerova funkce.

Symbolem $\gcd(m, a)$ přitom značíme největší společný dělitel (greatest common divisor) čísel m a a . Pojem cyklické grupy je opět známý ze základního kurzu algebry, viz např. [12, str. 59], nebo [15].

Definice 7 (Cyklická grupa). *Nechť G je grupa s binární operací \cdot a neutrálním prvkem 1 . Jestliže existuje $g \in G$ tak, že*

$$G = \{g^k : k \in \mathbb{Z}\}, \quad \text{kde} \quad g^k = g \cdot g^{k-1}, \quad g^0 = 1,$$

což schématicky značíme $G = \langle g \rangle$, pak se grupa G nazývá cyklická. Prvek g nazýváme generátorem cyklické grupy G .

Připomeňme, že množina všech čísel a , $a < m$ nesoudělných s m , zpravidla značená \mathbb{Z}_m^* tvoří grupu vzhledem k operaci násobení modulo m , viz [15]. Zřejmě $|\mathbb{Z}_m^*| = \varphi(m)$. Řádem čísla a modulo m , $a \in \mathbb{Z}_m^*$, pak nazýváme takové nejmenší kladné přirozené číslo r , pro které platí

$$a^r \equiv 1 \pmod{m}.$$

Jazykem grup je tedy r velikost cyklické grupy $\langle a \rangle$, tj. $r = |\langle a \rangle|$, podgrupy \mathbb{Z}_m^* , kterou generuje právě a . Nyní již můžeme zavést první důležitý pojem tzv. primitivní kořen, viz [4, str. 42].

Definice 8 (Primitivní kořen). *Nechť $m \in \mathbb{N}$. Celé číslo $g \in \mathbb{Z}$, $\gcd(g, m) = 1$ nazveme primitivním kořenem modulo m , pokud je jeho řád modulo m roven $\varphi(m)$.*

Alternativně, jazykem grup můžeme říci, že g je primitivní kořen modulo m právě tehdy, když je generátorem \mathbb{Z}_m^* , neboť $|\langle g \rangle| = \varphi(m) = |\mathbb{Z}_m^*|$.

Následující tři věty na sebe navazují a převzali jsme je z [4, str. 41–48], kde se mimo jiné nachází i jejich důkazy.

Věta 4.3.1 (O existenci primitivního kořene). *Nechť $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$. Primitivní kořeny modulo m existují, právě tehdy když*

$$m \in \{2, 4, p^\ell, 2p^\ell\},$$

kde p je liché prvočíslo a $\ell \in \mathbb{N}$.

Věta 4.3.2. *Nechť p je liché prvočíslo a $\ell \geq 1$. Nechť m je rovno p^ℓ nebo $2p^\ell$. Uvažujme dále prvočíselný rozklad*

$$\varphi(m) = q_1^{\alpha_1} \cdots q_k^{\alpha_k}, \quad q_i \neq q_j \quad \text{pro } i \neq j.$$

Číslo $g \in \mathbb{Z}$, $\gcd(m, g) = 1$, je primitivním kořenem modulo m právě tehdy když nesplňuje žádnou z kongruencí

$$g^{\frac{\varphi(m)}{q_1}} \equiv 1 \pmod{m}, \quad \dots, \quad g^{\frac{\varphi(m)}{q_k}} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Věta 4.3.3. *Nechť p je liché prvočíslo, g je primitivní kořen modulo p^ℓ , $\ell \in \mathbb{N}$. Pak liché z čísel g , $g + p^\ell$ je primitivní kořen modulo $2p^\ell$.*

Nakonec poznamenejme, že symbolem

$$[a] = \{x \in \mathbb{Z} : a \equiv x \pmod{m}\}$$

budeme značit množinu všech čísel navzájem kongruentních modulo m .

4.3.2 Stručný náznak Gaußova teoretického výpočtu konstrukce n -úhelníku

Jak již bylo v předešlé kapitole naznačeno, máme-li sestrojít pravidelný n -úhelník o n stranách, musíme nalézt kořeny rovnice $z^n - 1 = 0$. Kořeny této rovnice budou představovat n vrcholů pravidelného mnohoúhelníku, jež budou ležet na jednotkové kružnici se středem v počátku soustavy souřadné, tedy v našem případě v bodě $A = [0, 0]$. Vzhledem k tomu, že jedním z kořenů této rovnice je $\varepsilon_0 = 1$, bude mít

jeden z vrcholů pravidelného mnohoúhelníku souřadnice bodu $B = [1, 0]$. Původní rovnici můžeme tedy upravit, jak již jsme udělali v minulé kapitole

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z^2 + z + 1 = 0.$$

Nyní tedy budeme pracovat s rovnicí

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z^2 + z + 1 = 0, \quad (4.2)$$

jejíž kořeny označíme $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, pro které platí, že číslo označení v indexu je stejné jako exponent kořene ε_1 tedy $\varepsilon_1 = \varepsilon^1, \varepsilon_2 = \varepsilon^2, \dots, \varepsilon_n = \varepsilon^n$. Dalším velice důležitým vztahem mezi kořeny je

$$\varepsilon^{n-1} + \varepsilon^{n-2} + \dots + \varepsilon^2 + \varepsilon = -1.$$

Kořeny rovnice 4.2 lze zapsat pomocí Moivreovy věty do tvaru

$$\varepsilon_k = \cos(k\theta) + \mathbf{i} \sin(k\theta), \quad \theta = \frac{2\pi}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Nyní se dostáváme ke Gaußovu teoretickému výpočtu. Nechť je ω množina všech kořenů rovnice 4.2, potom ω se bude shodovat s prvky $\varepsilon^e, \varepsilon^{2e}, \dots, \varepsilon^{(n-1)e}$, kde e je libovolné celé číslo takové, že není dělitelné číslem n . Rovnici (4.2) lze pak zapsat jako

$$(z - \varepsilon^e)(z - \varepsilon^{2e}) \dots (z - \varepsilon^{(n-1)e}) = 0.$$

Gauß pro zjednodušení používá značení ε^λ , kde λ je celé číslo. Ke Gaußovu teoretickému výpočtu dále potřebujeme znát primitivní kořen g . Pokud je g primitivním kořenem modulo n , potom čísla

$$g^0, g^1, \dots, g^{n-2}$$

budou kongruentní číslům

$$1, 2, \dots, n - 1$$

modulo n .

Tedy kořeny

$$[1], [g] \dots, [g^{n-2}]$$

se shodují s prvky množiny ω a ze stejného důvodu se budou shodovat

$$[\lambda], [\lambda \cdot g] \dots, [\lambda \cdot g^{n-2}],$$

kde λ je libovolné celé číslo, které není dělitelné číslem n .

Postup, jakým Gauß konstruuje řešení je rozdělení kořenů do tzv. *period*, resp. *součtů kořenů*, ve kterých je každý následující prvek tvořen součinem primitivního kořene g a předešlého prvku a poslední prvek v součtu po vynásobení primitivním kořenem g je znovu výsledkem prvního prvku.

Pokud e je dělitelem čísla $n - 1$, potom položíme $n - 1 = f \cdot e$, kde f je počet kořenů v periodě, g^e označíme h . Potom součet f takových kořenů je

$$(f, \lambda) = [\lambda] + [\lambda \cdot h] + \dots + [\lambda \cdot h^{f-1}].$$

Množina kořenů (f, λ) se právě onou *periodou*.

Gauß mimo jiné vymezil vlastnosti těchto period, tzn. jestliže $f = n - 1$, $e = 1$, potom se perioda $(f, 1)$ bude shodovat s ω . Ve zbývajících případech se bude ω skládat z period

$$(f, 1), (f, g), (f, g^2), \dots, (f, g^{e-1}).$$

Z toho důvodu budou tyto periody navzájem různé a každá podobná perioda (f, λ) se bude shodovat s jednou z těchto period v případě, že λ patří do ω a zároveň jak již bylo zmíněno, není dělitelná číslem n .

Pokud je $n - 1 = a \cdot b \cdot c$, potom perioda $(b \cdot c, \lambda)$ se skládá z b period (c, λ) , tedy

$$(b \cdot c, \lambda) = (c, \lambda) + (c, \lambda \cdot g^a) + (c, \lambda \cdot g^{2a}) + \dots + (c, \lambda \cdot g^{a(b-1)}). \quad (4.3)$$

Jestliže se tedy číslo $n - 1$ dá rozložit na součin prvočísel α, β, γ atd., jejich počet označíme ν , potom určení kořene rovnice 4.2 zredukujeme na řešení ν rovnic stupně α, β, γ atd. První perioda obsahuje $\frac{n-1}{\alpha} = r$ prvků. Druhá perioda pak obsahuje $\frac{n-1}{\alpha \cdot \beta} = s$, přičemž $h = g^{r\alpha}$. Následující perioda potom $\frac{n-1}{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}$ prvků a $h = g^{r\alpha\beta}$, atd.

4.4 Ukázka výpočtu na konkrétním příkladu konstrukce sedmnáctiúhelníku

Vezměme si jako příklad sedmnáctiúhelník, rovnice (4.2) bude tudíž ve tvaru

$$t^{16} + \dots + t^2 + t + 1 = 0.$$

Tedy $n - 1 = 2^4$. Je patrné, že získáme čtyři kvadratické rovnice. Podívejme se nyní na primitivní kořen (viz definici 8) modulo 17. Číslo 17 je prvočíslo. Tedy podle věty 4.3.1 existuje primitivní kořen. Nejdříve spočítejme Eulerovu funkci (viz definici 6) pro číslo 17. Zřejmě

$$\varphi(17) = 16 = 2^4.$$

Nyní podle věty 4.3.2 víme, že pro primitivní kořen g musí platit

$$g^8 \not\equiv 1 \pmod{17}.$$

Nyní vyzkoušíme čísla od 1 do 16 s tím, že ověříme, zda platí či neplatí tato kongruence, dokud nenalezneme g takové, pro které tato kongruence platí.

4.4.1 Hledání primitivního kořene

Pokud za g dosadíme číslo 2 dostaneme

$$2^8 \equiv 1 \pmod{17} \quad \text{neboť} \quad \frac{2^8 - 1}{17} = 15.$$

Z toho plyne, že 2 není primitivní kořen. Pro číslo 3 však již kongruence platí

$$3^8 \not\equiv 1 \pmod{17}.$$

Primitivním kořenem modulo 17 je číslo 3, jinými slovy mocniny čísla 3 jsou modulo 17 kongruentní s čísly $1, 2, \dots, 16$, neboli generuje celou cyklickou grupu invertibilních prvků modulo 17. Nejmenší kladné zbytky mocnin čísla 3 modulo 17 jsou uvedeny v tabulce 4.2. V prvním řádku tabulky jsou exponenty mocnin trojky, ve druhém mocniny, ve třetím již zmíněné nejmenší kladné zbytky.

Tabulka 4.2: Nejmenší kladné zbytky mocnin čísla 3 modulo 17.

ℓ	0	1	2	3	4	5	6	7
g^ℓ	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7
mod 17	1	3	9	10	13	5	15	11
ℓ	8	9	10	11	12	13	14	15
g^ℓ	3^8	3^9	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}
mod 17	16	14	8	7	4	12	2	6

4.4.2 Rozdělení period

Periodu $(16,1)$ zapíšeme jakou součet mocnin čísla 3 mod 17

$$(16, 1) = [1] + [3] + [9] + [10] + [13] + [5] + [15] + [11] + [16] + [14] + [8] + [7] + [4] + [12] + [2] + [6].$$

Následně dle 4.3 zapíšeme periodu $(16, 1)$ na dvě periody $(8, \lambda)$, neboť platí $n - 1 = a \cdot b \cdot c = 1 \cdot 2 \cdot 8$

$$(16, 1) = (8, 1) + (8, 1 \cdot 3^1) = (8, 1) + (8, 3).$$

Z definice pro periodu zjistíme $e: 16 = f \cdot e = 8 \cdot 2$, je $h = g^e = 3^2 = 9$. Periody $(8, 1)$ a $(8, 3)$ můžeme pak zapsat jako součty kořenů

$$\begin{aligned} (8, 1) &= [1] + [9] + [9^2] + [9^3] + [9^4] + [9^5] + [9^6] + [9^7] \\ &= [1] + [9] + [13] + [15] + [16] + [8] + [4] + [2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (8, 3) &= [3] + [3 \cdot 9] + [3 \cdot 9^2] + [3 \cdot 9^3] + [3 \cdot 9^4] + [3 \cdot 9^5] + [3 \cdot 9^6] + [3 \cdot 9^7], \\ &= [3] + [10] + [5] + [11] + [14] + [7] + [12] + [6]. \end{aligned}$$

Následně postup zopakujeme. Tedy periody $(8, 1)$ a $(8, 3)$, kde $h = 3^2$, rozepíšeme na součty,

$$(8, 1) = (4, 1) + (4, 1 \cdot 9) = (4, 1) + (4, 9),$$

$$(8, 3) = (4, 3) + (4, 3 \cdot 9) = (4, 3) + (4, 10).$$

Pro periody $(4, 1)$, $(4, 9)$, $(4, 3)$, $(4, 10)$ je $g = 3^4 \equiv 13 \pmod{17}$. Dostaneme tedy

$$(4, 1) = [1] + [13] + [13^2] + [13^3] = [1] + [13] + [16] + [4],$$

$$(4, 9) = [9] + [9 \cdot 13] + [9 \cdot 13^2] + [9 \cdot 13^3] = [9] + [15] + [8] + [2],$$

$$(4, 3) = [3 \cdot 1] + [3 \cdot 13] + [3 \cdot 13^2] + [3 \cdot 13^3] = [3] + [5] + [14] + [12],$$

$$(4, 10) = [10 \cdot 1] + [10 \cdot 13] + [10 \cdot 13^2] + [10 \cdot 13^3] = [10] + [11] + [7] + [6].$$

Tedy

$$(4, 1) = (2, 1) + (2, 13),$$

$$(4, 9) = (2, 9) + (2, 15),$$

$$(4, 3) = (2, 3) + (2, 5),$$

$$(4, 10) = (2, 10) + (2, 11).$$

V posledním kroku již dostáváme samotné kořeny $g = 3^8 = 16$

$$(2, 1) = [1] + [16], \quad (2, 3) = [14] + [3],$$

$$(2, 13) = [4] + [13], \quad (2, 5) = [5] + [12],$$

$$(2, 9) = [8] + [9], \quad (2, 10) = [7] + [10],$$

$$(2, 15) = [2] + [15], \quad (2, 11) = [6] + [11].$$

4.4.3 Vlastní řešení

Ve chvíli, kdy jsme našli kořeny, je nutné sestavit kvadratické rovnice. Tedy první dvě periody si označíme $(8, 1) = x_1$, $(8, 3) = x_2$ a přepíšeme s kořeny $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{16}$.

$$x_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_9 + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{15} + \varepsilon_{16} + \varepsilon_8 + \varepsilon_4 + \varepsilon_2,$$

$$x_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_{10} + \varepsilon_5 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{14} + \varepsilon_7 + \varepsilon_{12} + \varepsilon_6.$$

S využitím *Moirovovy věty* můžeme součty kořenů zapsat ve tvaru

$$\varepsilon_k + \varepsilon_{17-k} = 2 \cos(k\theta), \quad k = 1, 2, \dots, 16.$$

Nyní si tedy můžeme rozepsat x_1 a x_2 takto

$$x_1 = 2(\cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cos(4\theta) + \cos(8\theta)),$$

$$x_2 = 2(\cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(6\theta) + \cos(7\theta)).$$

Sečtením x_1 a x_2 získáme -1 , tedy

$$x_1 + x_2 = -1.$$

Vynásobením a upravením součinu s využitím znalosti, že ε a ε^{17-k} jsou symetrické vzhledem k reálné ose, získáme -4 , tj.

$$x_1 \cdot x_2 = -4.$$

Z těchto vztahů pomocí *Vietových vzorců* dostaneme kvadratickou rovnici

$$t^2 + t - 4 = 0.$$

Protože $x_1 > 0$, tedy $x_1 > x_2$, kořeny kvadratické rovnice tedy jsou

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}.$$

Čtyřprvkové periody zapíšeme stejným způsobem, tedy

$$x_{1,1} = \varepsilon_1 + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{16} + \varepsilon_4 = 2(\cos(\theta) + \cos(4\theta)),$$

$$x_{1,2} = \varepsilon_9 + \varepsilon_{15} + \varepsilon_8 + \varepsilon_2 = 2(\cos(2\theta) + \cos(8\theta)),$$

$$x_{2,1} = \varepsilon_3 + \varepsilon_5 + \varepsilon_{14} + \varepsilon_{12} = 2(\cos(3\theta) + \cos(5\theta)),$$

$$x_{2,2} = \varepsilon_{10} + \varepsilon_{11} + \varepsilon_7 + \varepsilon_6 = 2(\cos(6\theta) + \cos(7\theta)).$$

Z těchto rovností snadno odvodíme, že $x_{1,1} > x_{1,2}$ a $x_{2,1} > x_{2,2}$. Proces opakujeme, konkrétně

$$x_1 = x_{1,1} + x_{1,2} \quad \text{a} \quad x_{1,1} \cdot x_{1,2} = -1,$$

$$x_2 = x_{2,1} + x_{2,2} \quad \text{a} \quad x_{2,1} \cdot x_{2,2} = -1.$$

Dostaneme tedy další dvě kvadratické rovnice

$$t^2 + x_1 \cdot t - 1 = 0,$$

$$t^2 + x_2 \cdot t - 1 = 0.$$

Jejich sečtením získáme kořeny

$$x_{1,1} = \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 + 4}}{2} \quad \text{a} \quad x_{1,2} = \frac{x_1 - \sqrt{x_1^2 + 4}}{2}$$

$$x_{2,1} = \frac{x_2 + \sqrt{x_2^2 + 4}}{2} \quad \text{a} \quad x_{2,2} = \frac{x_2 - \sqrt{x_2^2 + 4}}{2}.$$

Co se týče dvojčlenných period, tak tam nám stačí vybrat si vybrat pouze jednu dvojici, jsme totiž již na konci celého procesu,

$$x_{1,1,1} = \varepsilon_1 + \varepsilon_{16} = 2 \cos(\theta),$$

$$x_{1,1,2} = \varepsilon_{13} + \varepsilon_4 = 2 \cos(4\theta),$$

kde

$$x_{1,1,1} + x_{1,1,2} = x_{1,1} \quad \text{a} \quad x_{1,1,1} \cdot x_{1,1,2} = x_{2,1}.$$

Víme, že $x_{1,1,1} > x_{1,1,2}$, sestavíme tedy kvadratickou rovnici

$$t^2 - x_{1,1} \cdot t + x_{2,1} = 0.$$

Nyní nám stačí vyjádřit si pouze jeden kořen, např. $x_{1,1,1}$, tj.

$$x_{1,1,1} = \frac{x_{1,1} + \sqrt{x_{1,1}^2 - 4 \cdot x_{2,1}}}{2}.$$

4.4.4 Závěrečný vztah

Díky tomu, že $\cos(\theta) = \frac{x_{1,1,1}}{2}$, dostáváme velikost $\cos(\theta)$, konkrétně

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = \frac{1}{16} \cdot \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \right. \\ \left. + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 2(1 - \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}} \right). \end{aligned}$$

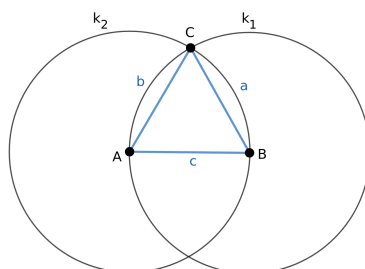
Je patrné, že $\cos(\frac{2\pi}{17})$ opravdu je konstruovatelné číslo, neboť výraz, kterému se rovná se skládá pouze z racionálních operací a z druhé odmocniny.

5 Konstrukce vybraných pravidelných mnohoúhelníků

V této kapitole si ukážeme konstrukce některých konkrétních n -úhelníků. Z eukleidovsky konstruovatelných n -úhelníků vybereme ty nejznámější a ověříme jejich eukleidovskou konstruovatelnost.

5.1 Rovnostranný trojúhelník

Vlastnosti trojúhelníku podstatně závisí na geometrických vlastnostech roviny, ve které se nachází. Základní vlastností trojúhelníku v eukleidovské rovině je rovnost součtu vnitřních úhlů trojúhelníku 180° . Speciálním případem trojúhelníku je trojúhelník rovnostranný, jenž má všechny tři strany shodné. Konstrukce rovnostranného trojúhelníku byla známa již v starověkém Řecku [6, str.46].



Obrázek 5.1: Konstrukce rovnostranného trojúhelníku.

Důkaz. Z konstrukce je patrné, že pro vrcholy A, C trojúhelníku platí: $(A \wedge C) \in k_1(B, |CB|) \Rightarrow |AB| = |BC|$. Stejné tvrzení platí pro úhly B, C : $(B \wedge C) \in k_2(A, |AB|)$. Všechny strany jsou tedy stejné délky. Z toho vyplývá, že trojúhelník je rovnostranný. \square

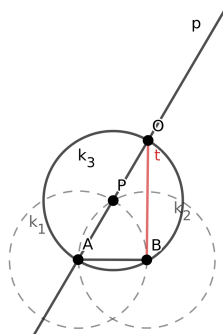
5.2 Čtverec

Přesnou konstrukci pravidelného čtyřúhelníku lze nalézt v již zmíněných Eukleidových základech. My tu ale předvedeme dvě konstrukce pozměněné dle zadání, které již známe ze základní školy. Zadání úlohy: Jsou zadány dva body, jež jsou

vrcholy čtverce. Čtverec zkonstruuje. V rámci této úlohy rozebereme dvě možnosti zadání.

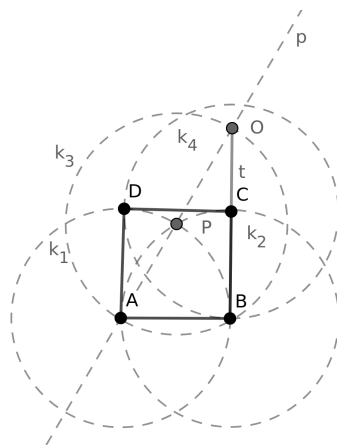
- I. Zmíněné vrcholy jsou vrcholy náležící stejné straně. Označme si je jako vrchol A a vrchol B .

Při konstrukci využijeme předchozí konstrukci rovnostranného trojúhelníku. Narýsujeme rovnostranný trojúhelník ABP . Následně provedeme konstrukci kružnice se středem P s poloměrem rovným vzdálenosti bodu P od A . Povedeme polopřímku AP . Průsečík polopřímky s kružnicí označíme O . Úsečka BO je kolmá na úsečku AB .



Obrázek 5.2: Konstrukce čtverce.

Průsečík kolmice a kružnice k_2 ; $k_2 = (B, |AB|)$ označíme C . Následně zkonstruujeme kružnici k_3 ; $k_3 = (C, |CB|)$. Tím nám vznikne hledaný vrchol D ; $D \in k_1 \cup k_3$.

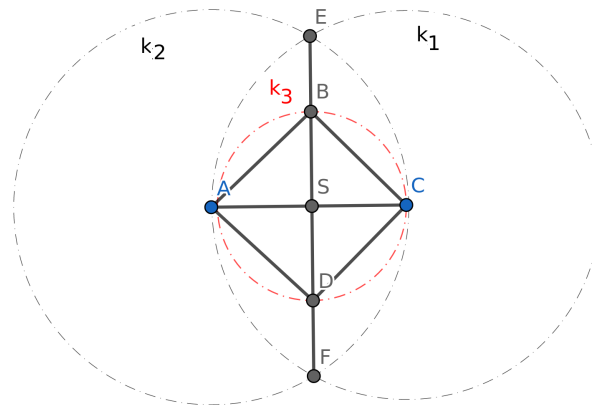


Obrázek 5.3: Konstrukce čtverce.

Důkaz. Nejdříve ukážeme shodnost vnitřních úhlů zkonstruovaného čtverce. Je patrné, že nám z konstrukce plyne, že úhel $\angle ABC$ je úhlem pravým. Následně ověříme zbývající úhly. Úhly $\angle BAD$ a $\angle BCD$ mohou být úhly ostré, tupé nebo pravé. Důkaz provedeme pro úhel $\angle BAD$. Úhel $\angle BCD$ se v tomto případě, díky konstrukci, dokazuje obdobně. Pokud by byl úhel $|\angle BAD| < 90^\circ \Rightarrow |\angle BAD| + |\angle ABC| < 180^\circ$.

$\Rightarrow \exists P; |\angle PAB| + |\angle ABP| + |\angle BPA| = 180^\circ$ Což je spor, neboť $AD \parallel BC$. Z toho plyne, že $|\angle BAD| = 90^\circ \wedge |\angle BCD| = 90^\circ$. Stejným způsobem lze ověřit poslední vnitřní úhel $\angle ADC$. Z toho plyne $|\angle ADC| = |\angle BAD| = |\angle ABC| = |\angle BCD|$. Nyní ověříme shodnost stran, což je nezbytné v případě čtverce. $A \in k_2(B, |AB|) \wedge C \in k_2(B, |AB|) \Rightarrow |AB| \cong |BC|$; $B \in k_1(A, |AB|) \wedge D \in k_1(A, |AB|) \Rightarrow |AB| \cong |AD|$. $|\angle ADC| = |\angle BAD| = |\angle ABC| = |\angle BCD| \wedge |AB| \cong |AD| \cong |BC| \Rightarrow |CD| \cong |AB| \cong |AD| \cong |BC|$. Sestrojený čtyřúhelník je skutečně čtverec. \square

II. Zmíněné vrcholy jsou vrcholy náležící jedné libovolné úhlopříčce čtverce. Například si vezmeme vrcholy, které označíme jako vrchol A a vrchol C . Zkonstruujeme úsečku EF jakožto osu úsečky s využitím znalosti eukleidovské konstrukce kolmice. Následně zkonstruujeme kružnici k_3 ; $k_3(S, |SC|)$. Průsečíky kružnice k_3 a úsečky EF označíme C, D , tedy vrcholy čtverce.



Obrázek 5.4: Konstrukce čtverce.

Důkaz. Z konstrukce plyne, že se úhlopříčky čtyřúhelníku navzájem půlí a svírají spolu pravý úhel. Tuto vlastnost má pouze dva geometrické útvary, tzv. čtverec a kosočtverec. Navíc je z rysu patrné, že čtyřúhelník je vepsán kružnici, což vylučuje možnosti kosočtverce. Z toho vyplývá, že daný čtyřúhelník je skutečně čtverec. \square

5.3 Pravidelný pětiúhelník

Stejně jako trojúhelník a čtverec, je pětiúhelník známý již ze spisů Eukleida. Pravidelný pětiúhelník byl populární již z dob antického Řecka v odvětví matematiky, mystice, symbolice pythagorejců, ale také v uměleckých odvětvích. Byl od něj odvozen pentagram. Důvodem, proč byl pětiúhelník takto uctíván, je zejména to, že pětiúhelník v sobě nese zlatý řez. Poměr délek úhlopříčky a strany je roven zlatému řezu, navíc úhlopříčka, protíná druhou tak, že délky vzniklých částí jsou opět v poměru zlatého řezu. Eukleides vyložil konstrukci pravidelného pětiúhelníku

ve čtvrté knize Základů (viz [6, 135]). Ačkoliv je tento postup matematicky elegantní, tak není příliš praktický, neboť je založen na dlouhé řadě vět. Nicméně existuje celá řada jednoduchých postupů pro sestavení pravidelného pětiúhelníku, které jsou k vidění např. v knize [17, str. 34]. My si představíme konstrukci, která je nám známá již ze základní, popřípadě střední školy.

5.3.1 Ověření konstruovatelnosti desetiúhelníku a z něho vyplývající konstruovatelnost pětiúhelníku

Důkaz. K ověření, zda je pětiúhelník možné sestavit eukleidovsky využijeme již zmíněnou rovnici 4.1. Dosazením $n = 5$ dostáváme:

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

Rovnici řešíme klasickým způsobem. Tedy řešíme ji jako reciproké rovnice. Tedy vynásobíme strany výrazem z^{-2} .

$$(z^2 + z^{-2}) + (z + z^{-1}) + 1 = 0.$$

Nyní použijeme substituci $(z + z^{-1}) = y$. Po substituuování získáme $(z^2 + z^{-2}) = y^2 - 2$. Dosazením do rovnice vytvoříme kvadratickou rovnici: $y^2 + y - 1 = 0$. Pokud $y = a_{10}$ je velikost strany pravidelného desetiúhelníka vepsaného do jednotkové kružnice, tehdy:

$$a_{10} = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1).$$

Tento výraz je eukleidovsky konstruovatelný. Z toho plyne eukleidovská konstruovatelnost desetiúhelníku a pětiúhelníku. \square

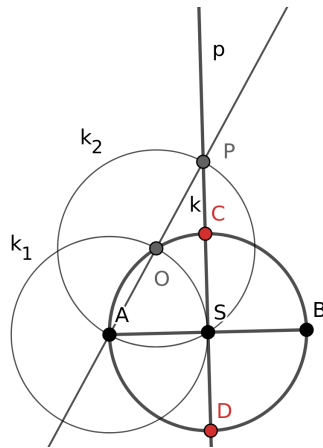
5.3.2 Konstrukce pětiúhelníku

Doposud jsme měli eukleidovské konstrukce jednotlivých geometrických útvarů zadány dvěma body, jakožto vrcholy jedné strany, případně vrcholy úhlopříčky. Od této konstrukce počínaje, se budeme při konstrukci n -úhelníku opírat o jednotkovou kružnici, na niž budeme postupně nanášet body.

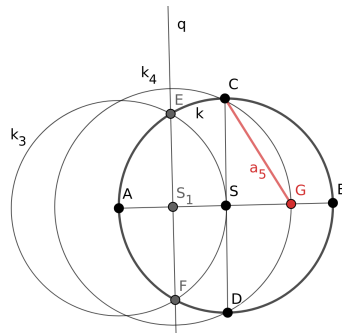
Prvním krokem bude konstrukce kolmice, která je podrobně popsána v sekci 3.3.1. Díky této konstrukci získáme bod C , jež bude nezbytný pro další postup konstrukce (obrázek 5.5). Následně zkonstruujeme kružnici k_3 ; $k_3(A, |AS|)$. Tím nám vznikne bod E ; $E \in k \cup k_3$. Dále zkonstruujeme S_1 ; $|S_1A| = \frac{1}{2}|AS|$. Tím nám vznikne bod G ; $G \in AB \cup k_4$. Velikost úsečky CG je rovna velikosti strany pětiúhelníku vepsaného do kružnice k . Dále se o úsečce GC budeme zmiňovat jako o úsečce a_5 (obrázek 5.6). Posledním krokem bude nanášení poloměru kružnice rovnému velikosti úsečky a_5 na kružnici k , čímž získáme vrcholy pětiúhelníku (obrázek 5.7).

5.4 Pravidelný šestiúhelník

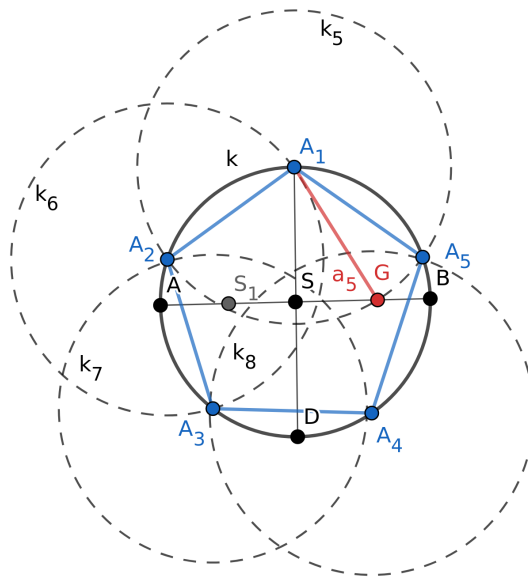
Dalším neméně zajímavým n -úhelníkem je šestiúhelník. Eukleidovsky ho lze zkonstruovat více než-li jedním způsobem. V sekci 6.1 si vysvětlíme konstrukci pomocí



Obrázek 5.5: Konstrukce pětiúhelníku (krok 1).



Obrázek 5.6: Konstrukce pětiúhelníku (krok 2).

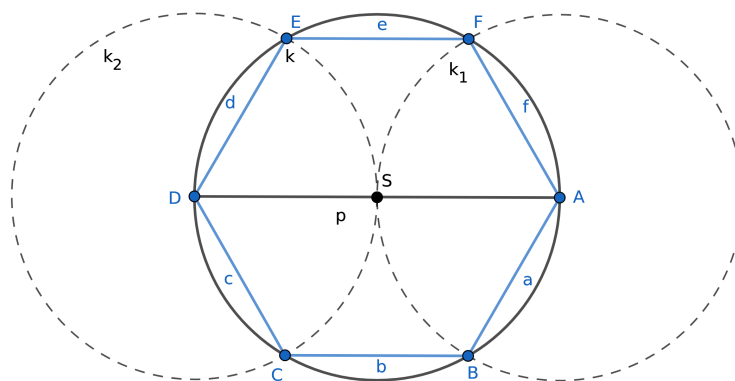


Obrázek 5.7: Konstrukce pětiúhelníku (krok 3).

zdvojení úhlů trojúhelníku. V této sekci se podíváme na eukleidovskou konstrukci, která se již učí na základní škole.

5.4.1 Konstrukce pravidelného šestiúhelníku

Mějme libovolný poloměr kružnice daný dvěma body, tj. středem S a bodem D . Sestrojením kružnice k ; $k = (S, |SD|)$ a sestrojením polopřímky p , tj. polopřímka $\mapsto DS$, získáme průsečík A ; $A = k \cap p$. Sestrojme kružnici $k_1 = (A, |AS|)$. Průsečíky těchto dvou kružnic nazveme B a F ; $B \wedge F \in k \cap k_1$. Postup zopakujeme s kružnicí k_2 ; tzn. $k_2 = (D, |DS|)$. Průsečíky těchto dvou kružnic nazveme C a E ; $C \wedge E \in k \cap k_2$. Body A, B, C, D, E, F jsou vrcholy pravidelného šestiúhelníku, viz [6, str.139].



Obrázek 5.8: Konstrukce šestiúhelníku.

5.4.2 Důkaz konstrukce pravidelného šestiúhelníku

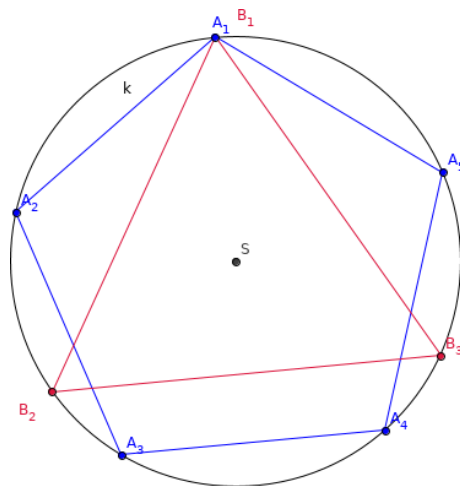
Důkaz. K důkazu použijeme shodnost trojúhelníků. Můžeme tvrdit, že trojúhelníky SAB a ASF jsou rovnostranné. Využitím věty o vnitřních úhlech trojúhelníku je velikost každého vnitřního úhlu rovna $\frac{2R}{3}$. Jelikož platí $|AF| = |AB|$, podle věty sss jsou oba trojúhelníky shodné a tím i jejich vnitřní úhly. Vzhledem k tomu, že platí rovnost $|\angle FSC| = |\angle FSA| + |\angle ASB| + |\angle BSC|$, s tím, že $|\angle FSC| = 2R$. Z toho plyne $\frac{2R}{3} = |\angle FSA| = |\angle ASB| = |\angle BSC|$. \square

5.5 Pravidelný patnáctiúhelník

Poslední pravidelný mnohoúhelník, který byl schopen Eukleides sestavit pouze pomocí pravítka a kružítka byl právě zmíněný patnáctiúhelník. U této konstrukce se využívá znalost konstrukce dvou nesoudělných lichoběžníků, neboť počet vrcholů konstruovaného mnohoúhelníku je roven součinu vrcholů nesoudělných lichoběžníků.

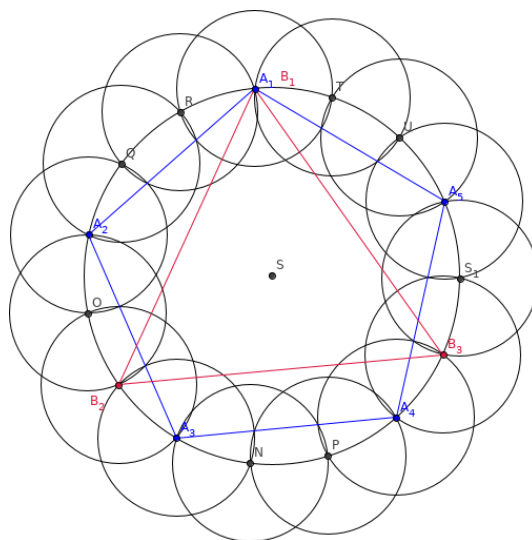
5.5.1 Konstrukce pravidelného patnáctiúhelníku

Vyžijeme již výše zkonstruovatelného pětiúhelníku $A_1A_2A_3A_4A_5$, kterému je kružnice k opsaná. Následně zkonstruujeme trojúhelník $B_1B_2B_3$, kružnici k vepsaný, jehož vrchol B_1 je totožný s vrcholem A_1 pětiúhelníku (obrázek 5.9). Každý ob-



Obrázek 5.9: Konstrukce patnáctiúhelníku (krok 1).

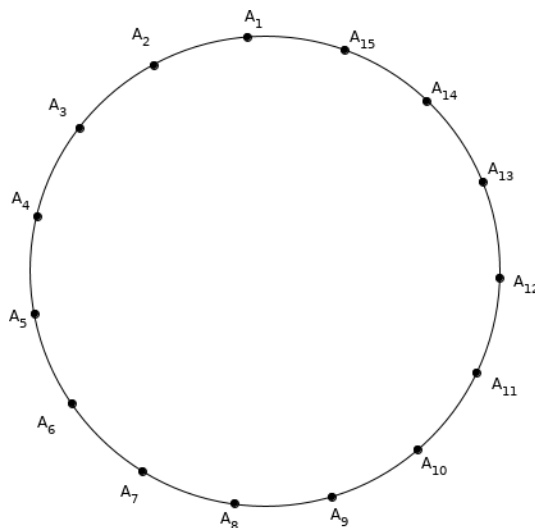
louk kružnice k ohraničený vrcholy trojúhelníka $B_1B_2B_3$ bude rozdělen na pět částí. Pro oblouky ohraničené pětiúhelníkem platí obdobné tvrzení. Tedy každý oblouk ohraničený pětiúhelníkem $A_1A_2A_3A_4A_5$ bude rozdělen na tři části. Oblouk A_1A_3 bude rozdělen na šest částí a oblouk A_1B_2 na pět částí. Z toho je patrné, že oblouk B_1A_3 bude strana patnáctiúhelníku. Nyní když známe délku strany, můžeme eukleidsky zkonstruovat zbývající vrcholy patnáctiúhelníku (obrázek 5.10). Postupným



Obrázek 5.10: Konstrukce patnáctiúhelníku (krok 2).

nanášením vzdálenosti rovné délce strany patnáctiúhelníku po obvodu kružnice, jsme

získáme zbývající vrcholy. Spojíme-li následně vrcholy, získáme hledaný obrazec (obrázek 5.11); viz [6, str.141].



Obrázek 5.11: Výsledný patnáctiúhelník.

5.5.2 Náznak důkazu konstruovatelnosti pravidelného patnáctiúhelníku

Náznak důkazu konstruovatelnosti pravidelného patnáctiúhelníku nalezneme v sekci 6.3.

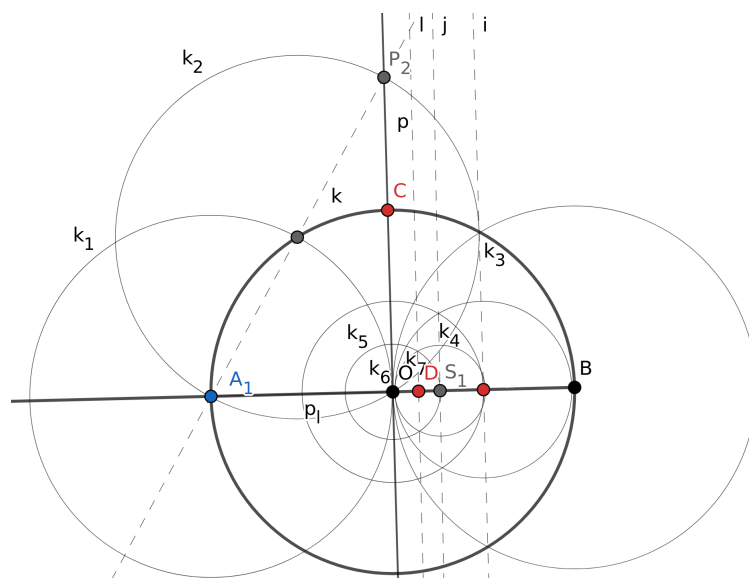
5.6 Pravidelný sedmnáctiúhelník

V této sekci se budeme zabývat konstrukcí pravidelného sedmnáctiúhelníku, jež patří mezi pracnější konstrukce. Nejdříve provedeme ověření konstruovatelnosti a následně zkonstruujeme pravidelný sedmnáctiúhelník metodou Lowryho konstrukce viz literatura [14, str. 47].

Ověření konstruovatelnosti sedmnáctiúhelníku jsme detailně probrali v sekci 4.3, ve které jsme studovali Gaußův teoretický výpočet ověření konstruovatelnosti n -úhelníku obecně, konkrétně jsme ho v sekci 4.4 ilustrovali právě na sedmnáctiúhelníku. Přejdeme tedy přímo ke konstrukci.

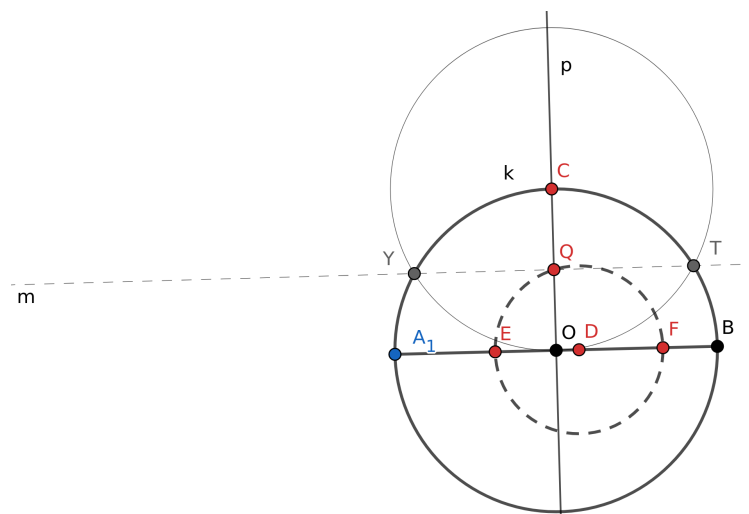
5.6.1 Konstrukce pravidelného sedmnáctiúhelníku

Mějme libovolný poloměr kružnice daný dvěma body, tj. středem O a bodem B . Sestrojením kružnice k ; $k = (O, |OB|)$ a sestrojením polořímky p_l , tj. polopřímka OB , získáme průsečík A_1 ; $A_1 = k \cap p_l$. Bodem O vedeme kolmici k průměru kružnice, která nám protne kružnici k v bodě C . Na poměru OB sestrojíme bod D tak, že $|OD| = \frac{1}{8} |OB|$ (obrázek 5.12). Na poloměru OC sestrojíme bod Q tak, že $|OQ| =$



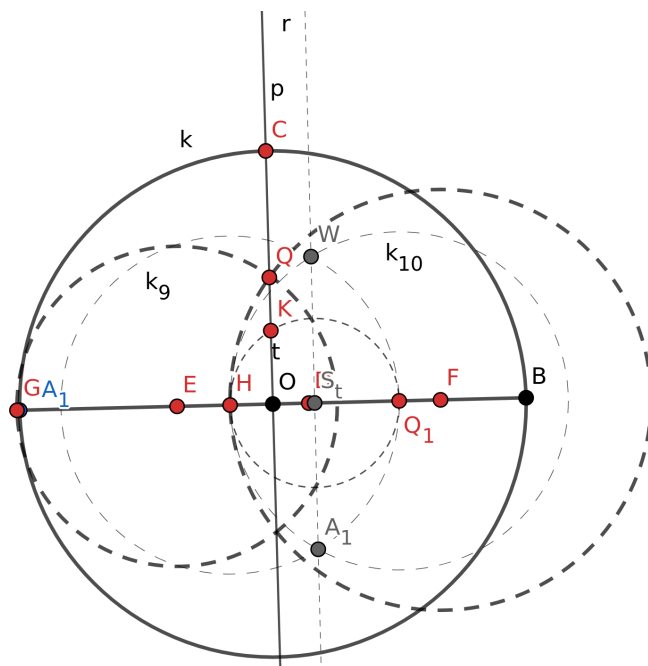
Obrázek 5.12: Konstrukce sedmnáctiúhelníku (krok 1).

$\frac{1}{2} |OC|$. Následně sestrojíme body E, F . Platí $|DQ| = |DE| = |DF|$. Použijeme tedy kružnici $a = (D, |DQ|)$. Průsečíky kružnice a a průměru AB jsou námi hledané body E, F (obrázek 5.13). Dále sestrojením kružnice $b = (F, |FQ|)$ získáváme průsečík



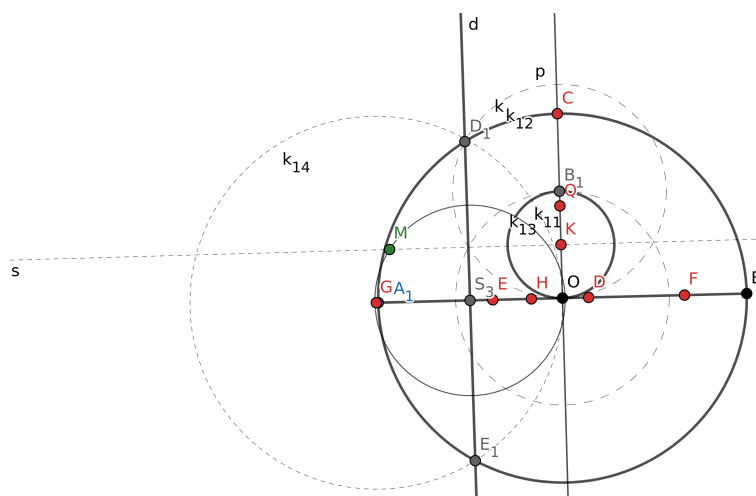
Obrázek 5.13: Konstrukce sedmnáctiúhelníku (krok 2).

s úsečkou AB , který označíme H . Průsečík kružnice $c = (E, |EQ|)$ s úsečkou AB , který označíme G . Využitím eukleidovské věty o výšce sestrojme bod K , který splňuje vztah $|OK| = \sqrt{|OH| \cdot |OQ|}$. Přeneseme si bod Q na poloměr OB s konstantní vzdáleností od středu O . Označíme ho Q_1 . Nyní sestrojíme Thaletovu kružnici t nad průměrem HQ_1 . Průsečík t s polopřímkou OC je námi hledaný bod K (obrázek 5.14). Bodem K vedeme rovnoběžku s s průměrem AB , která se nám protne s kružnicí, která je sestrojena nad průměrem OG . Průsečík označíme M (obrázek



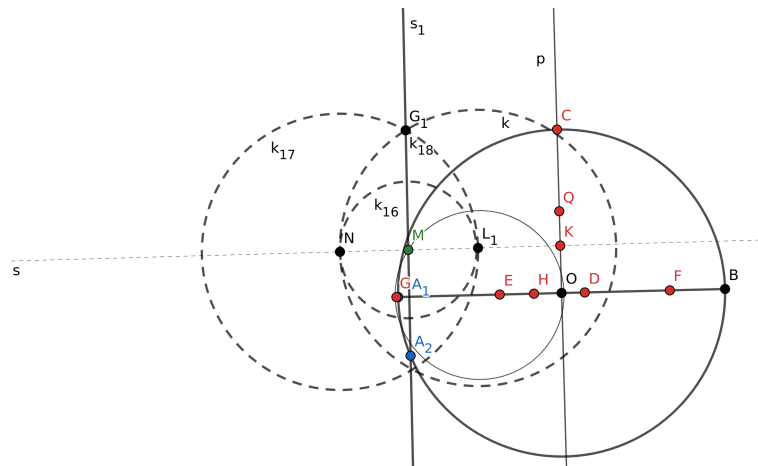
Obrázek 5.14: Konstrukce sedmnáctiúhelníku (krok 3).

5.15). Bodem M vedeme opět rovnoběžku s_1 , tentokrát se sdruženým průměrem,

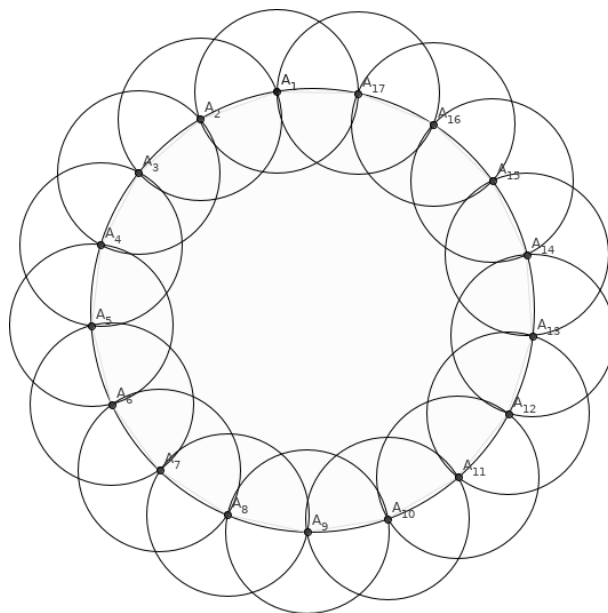


Obrázek 5.15: Konstrukce sedmnáctiúhelníku (krok 4).

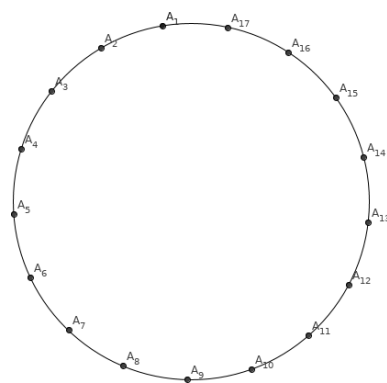
tedy s polopřímkou CO . Průsečík s_1 s k je bod A_2 . Velikost úsečky A_1A_2 je rovna velikosti strany pravidelného 17-úhelníku vepsaného do naší zvolené kružnice k (obrázek 5.16). Postupným nanášením vzdálenosti rovné délce strany pravidelného sedmnáctiúhelníku po obvodu kružnice, získáme zbývající vrcholy (obrázek 5.17). Spojíme-li nalezené vrcholy, získáme hledaný obrazec (obrázek 5.18).



Obrázek 5.16: Konstrukce sedmnáctiúhelníku (krok 5).



Obrázek 5.17: Konstrukce sedmnáctiúhelníku (krok 6).



Obrázek 5.18: Výsledný sedmnáctiúhelník.

6 Pomocné konstrukce při konstrukci n -úhelníků

Některé n -úhelníky je možné elementárně zkonstruovat pomocí eukleidovské konstrukce (např. 3, 4, 6, ...). Z kapitoly 4 již víme, že Carl Friedrich Gauß objevil postačující podmínku pro konstrukci pravidelného n -úhelníka. V této podkapitole se zaměříme na další možné konstrukce n -úhelníků pomocí již narýsovaných mnohoúhelníků. Při konstrukci tedy budeme vycházet z mnohoúhelníku, které již umíme zkonstruovat. Tímto způsobem můžeme rýsovat v podstatě neomezené množství mnohoúhelníků.

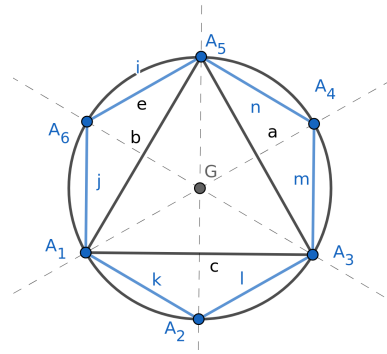
6.1 Zdvojení počtu vrcholů aneb konstrukce $(2n)$ -úhelníka, kde n je liché

Již ze základní školy víme, že vrcholy pravidelného trojúhelníku leží na kružnici opsané. Tento elementární poznatek lze využít při zdvojení počtu vrcholů pravidelného n -úhelníku. Z čehož plyne, že pokud jsme schopni narýsovat n -úhelník, jsme také schopni velice jednoduše zkonstruovat $2n$ -úhelník. Předvedeme si to na následujících příkladech.

Jako příklad pro konstrukci n -úhelníka, který má dvojnásobný počet vrcholů než-li n -úhelník, z kterého při konstrukci budeme vycházet a jenž má lichý počet vrcholů, zvolíme trojúhelník. Z konstrukce je patrné, jakým způsobem používáme výše zmíněnou vlastnost pravidelného trojúhelníku. Pro konstrukci šestiúhelníku nám postačí nalézt osy stran rovnostranného trojúhelníku. Vrcholy šestiúhelníku tvoří jednak vrcholy rovnostranného trojúhelníku, zbylé vrcholy vznikly jako průsečíky kružnice opsané a os stran trojúhelníku.

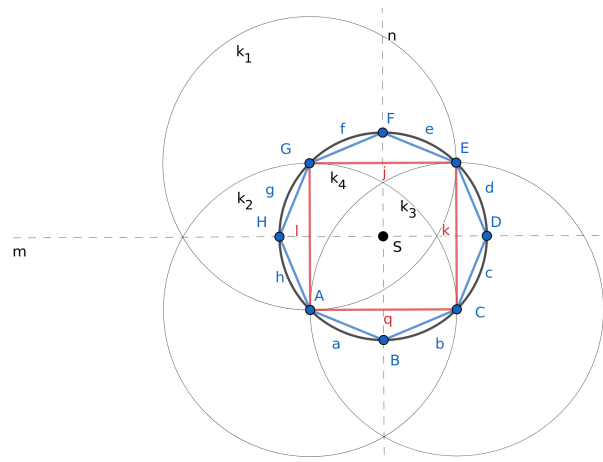
6.2 Zdvojení počtu vrcholů aneb konstrukce $(2n)$ -úhelníka, kde n je sudé

V případě $2n$ -úhelníků je proces konstrukce $4n$ -úhelníku totožný, jako v předchozím příkladě. Pro názornější představu si vystačíme s jednoduchým příkladem konstrukce: osmiúhelníku. V tomto případě budeme vycházet z konstrukce pravidelného čtyřúhelníku, tedy čtverce. Opět je z konstrukce patrné, že postačí narýsovat osy



Obrázek 6.1: Konstrukce šestiúhelníku.

stran čtverce. Vrcholy osmiúhelníku budou tvořit vrcholy čtverce a průsečíky os stran čtverce s kružnicí čtverci opsanou.



Obrázek 6.2: Konstrukce osmiúhelníku.

6.3 Součin dvou nesoudělných lichoúhelníků

Je dán úhel p a úhel q . Z Gaußovy věty plyne, že n -úhelník o lichém počtu vrcholů lze sestavit právě tehdy, je-li počet jeho vrcholů součin různých Fermatových prvočísel $n = p \cdot q$, $p > 1$, $q > 1$, přičemž p , q jsou nesoudělná. Při konstrukci opět vycházíme z n -úhelníků, které již máme narýsované. Příkladem si vezměme konstrukci patnáctiúhelníku pomocí trojúhelníku a pětiúhelníku viz 5.5. V tomto případě však tvoříme součin dvou nesoudělných lichoúhelníků. Obecně máme tedy p -úhelník a q -úhelník. Jsou-li nesoudělné, jejich největší společný dělitel je vždy jedna. V tomto konkrétním případě budeme řešit největší společný dělitel středových úhlů, tedy úhlů pětiúhelníku a trojúhelníku tj. $p = \frac{2\pi}{3}$, $q = \frac{2\pi}{5}$.

6.3.1 Co je Eukleidův algoritmus?

Největší společný dělitel budeme hledat pomocí Eukleidova algoritmu (viz tabulka 6.1). Eukleidův algoritmus pro dvě přirozená čísla a , b nalezne jejich největšího společného dělitele, kterého budeme značit $\gcd(a, b)$.

6.3.2 Na čem je Eukleidův algoritmus založený?

Je založen na rovnosti

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$$

kde pro jednoduchost předpokládáme $a > b$. Označíme-li $a_0 = a$, $a_1 = b$, a dále pak

$$a_{j+1} = a_{j-1} \bmod a_j, \quad \text{pro } j = 1, 2, 3, \dots,$$

pak je posloupnost přirozených čísel $\{a_j\}$ zjevně ostře klesající a tedy dříve či později pro nějaké j_0 dostaneme $a_{j_0} = 0$. Z výše zmíněné rovnosti pak plyne

$$\gcd(a, b) = \gcd(a_0, a_1) = \dots = \gcd(a_{j_0-1}, a_{j_0}) = \gcd(a_{j_0-1}, 0).$$

Tedy a_{j_0-1} je hledaný největší společný dělitel.

6.3.3 Jak bude Eukleidův algoritmus vypadat v našem případě?

Vstupem Eukleidova algoritmu jsou v našem případě velikosti středových úhlů pětiúhelníku a trojúhelníku. Tedy 72 stupňů v případě pětiúhelníku a 120 stupňů v případě trojúhelníku. Případně můžeme úhly vyjádřit v radiánech pomocí zlomků celého úhlu 2π .

Následně zjistíme zbytek po dělení těchto dvou čísel a tento zbytek dosadíme za proměnnou q , přičemž proměnná $p = q$ z předchozího kroku. Takto induktivně postupujeme dále, až do chvíle, kdy nám vyjde zbytek po dělení roven nule, tím dojdeme k největšímu společnému jmenovateli a tím je jedna. Poznamenejme, že opakovaně prováděné operace nemění hodnotu největšího společného dělitele.

Tabulka 6.1: Eukleidův algoritmus pro středové úhly pro vybrané n -úhelníky

a_{j-1}	a_j	$a_{j-1} = a_j \cdot q + a_{j+1}$
$\frac{1}{3}2\pi = \frac{5}{15}2\pi$	$\frac{1}{5}2\pi = \frac{3}{15}2\pi$	$\frac{1}{3}2\pi = \frac{1}{5}2\pi \cdot 1 + \frac{2}{15}2\pi$
$\frac{1}{5}2\pi$	$\frac{2}{15}2\pi$	$\frac{1}{5}2\pi = \frac{2}{15}2\pi \cdot 1 + \frac{1}{15}2\pi$
$\frac{2}{15}2\pi$	$\frac{1}{15}2\pi$	$\frac{2}{15}2\pi = \frac{1}{15}2\pi \cdot 2 + 0$

Co to tedy znamená, že úhly pětiúhelníku a trojúhelníku mají největšího společného dělitele rovného jedné, tedy že jsou nesoudělné? Znalostí toho, že úhly jsou vzájemně nesoudělné, získáme jistotu v tom, že lze konstruovat patnáctiúhelník pomocí trojúhelníku a pětiúhelníku, neboť vrcholy se nebudou duplikovat.

Pokud tedy jde o dva nesoudělné n -úhelníky, tak mnohoúhelník, který vznikne jakožto součin dvou nesoudělných lichoběžníků, má úhel roven $(\frac{2\pi}{pq})$. V tomto případě se jedná o úhel patnáctiúhelníku, tj.: $(\frac{2\pi}{pq}) = (\frac{2\pi}{15})$.

7 Systematický postup konstrukce n -úhelníků

V rámci této kapitoly postupně postavíme geometrickou aritmetiku. Nejprve se podíváme na geometrickou aritmetiku konstrukce bodu, kterou aplikujeme na jeden z vrcholů obecného n -úhelníku. Pomocí operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a druhé odmocniny vypočítáme obecné souřadnice jeho vrcholu. Také si probereme operace, které je možné s úsečkami provádět. Následně si k nim zavedeme funkce, jež nám vrátí provedenou operaci.

7.1 Algebraizace pojmu úsečka v rovině

V následujících sekcích si probereme sadu operací, které můžeme s úsečkami provádět. K nim si následně zavedeme již zmíněné funkce (de-fakto operace), které nám připadají k daným operacím výsledek. Později zjistíme, že provádění operací je různě náročné, což je zejména důsledkem nepostradatelnosti úsečky o délce jedna u některých operací. Uvidíme, že zatímco algebra jedničku při násobení a dělení vnímá jako neutrální prvek, geometrie na úsečce jednotkové délky při násobení a dělení staví.

Nejprve si však musíme trochu zalgebraizovat pojem úsečky. Předně si označíme symbolem \mathcal{E}_2 množinu všech bodů v eukleidovské rovině. Zjednodušeně bychom tedy mohli říci, že \mathcal{E}_2 je přímo touto rovinou. Protože každá úsečka v rovině je dána právě dvěma body v rovině, můžeme množinu všech úseček \mathcal{U} ztotožnit s množinou uspořádaných dvojic bodů,

$$\mathcal{U} = (\mathcal{E}_2)^2 = \mathcal{E}_2 \times \mathcal{E}_2.$$

Je třeba si ale uvědomit, že každá *geometrická úsečka* AB je zde *algebraicky* dvakrát, a sice jako $u(A, B)$ a $u(B, A)$. Dále je třeba si uvědomit, že ne každá uspořádaná dvojice bodů odpovídá geometrické úsečce, speciálně $u(A, A)$ geometricky odpovídá bodu – chceme-li úsečce nulové délky.

Protože se ale budeme v následujícím textu soustředit pouze na *délky* úseček (budeme s nimi chtít provádět aritmetické operace), ani jedna z předchozích neobvyklostí není na závadu. Dokonce můžeme jít ještě dál. Zavedeme si ekvivalenci dvou úseček následujícím způsobem

$$u(A, B) \sim u(C, D) \iff |AB| = |CD|.$$

Tedy dvě úsečky budeme považovat za ekvivalentní (pro potřeby našich operací) pokud budou stejně dlouhé. Budeme-li nyní uvažovat nějakou konkrétní algebraickou

úsečku $u(A, B)$ s délkou $x = |AB|$, můžeme zavést množinu všech ekvivalentních úseček, neboli třídu ekvivalence

$$\mathbb{U}_x = \mathbb{U}_{|AB|} = [u(A, B)]_{\sim} = \{u(A', B') \in \mathcal{U} : |A'B'| = x\}.$$

Speciálně si označíme

$$\mathbf{o} = \mathbb{U}_0, \quad \text{a} \quad \mathbf{1} = \mathbb{U}_1,$$

tedy třídu oněch zdegenerovaných nulových úseček (fakticky identickou s množinou bodů \mathcal{E}), resp. třídu úseček délky jedna.

Celou množinu všech úseček \mathcal{U} tedy můžeme pomocí ekvivalence rozdělit na faktorovou množinu, tedy množinu tříd ekvivalence

$$\mathbb{U} = \mathcal{U} /_{\sim} = \{\mathbb{U}_x : x \in \mathbb{R}_0^+\}.$$

Jak už jsme zmínili výše, všechny operace, se kterými budeme dále pracovat, sice reprezentujeme na konkrétních úsečkách, tedy prvcích množiny \mathcal{U} , fakticky nás ale zajímají jen délky těchto úseček, formálně tedy tyto operace můžeme uvažovat na faktorové množině \mathbb{U} . Operace budeme zapisovat spíše jako funkce, tedy

$$f_{\circ}(\mathbb{U}_a, \mathbb{U}_b) = \mathbb{U}_{aob}$$

bude reprezentovat binární operaci \circ provedenou na množinách úseček délky a a b . Pro potřeby konstrukce, kterou musíme narýsovat, budeme stejné operace (funkce) provádět i přímo na reprezentantech, tedy

$$f_{\circ}(u_a(A, A'), u_b(B, B')) = f_{\circ}(u_a, u_b) = u_{aob},$$

kde $|AA'| = a$, $|BB'| = b$. Čísla a, b budou vždy konstruovatelná, pro jednoduchost je však budeme uvažovat obecně reálná, neboť pracujeme se všemi body eukleidovské roviny.

7.2 Unární a binární operace proveditelné v rovině bez jednotkové úsečky

První sada operací je specifická tím, že nemusíme při jejich konstrukci znát délku jednotkové úsečky. Při konstrukci ji totiž nepotřebujeme. Později, v rámci druhé sady operací, zjistíme, že při některých konstrukcích, je znalost délky jednotkové úsečky nezbytná.

7.2.1 Konstrukce součtu úseček

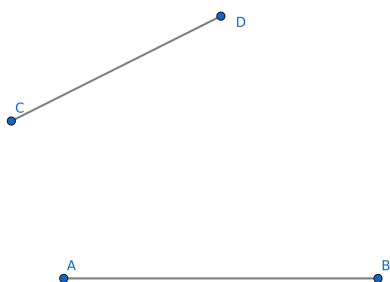
Jednou z nejzákladnějších operací, které umíme provádět s úsečkami, je jejich sčítání. Jedná se o intuitivní postup, kdy na jednu přímkou nanese obě délky úseček, s tím, že budou mít jeden společný bod. Délka nově vzniklé úsečky je délka součtu úseček. Jsou tedy dány dvě úsečky $u_a(A, B)$ a $u_b(C, D)$ délek a a b , hledáme úsečku délky

$$c = a + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

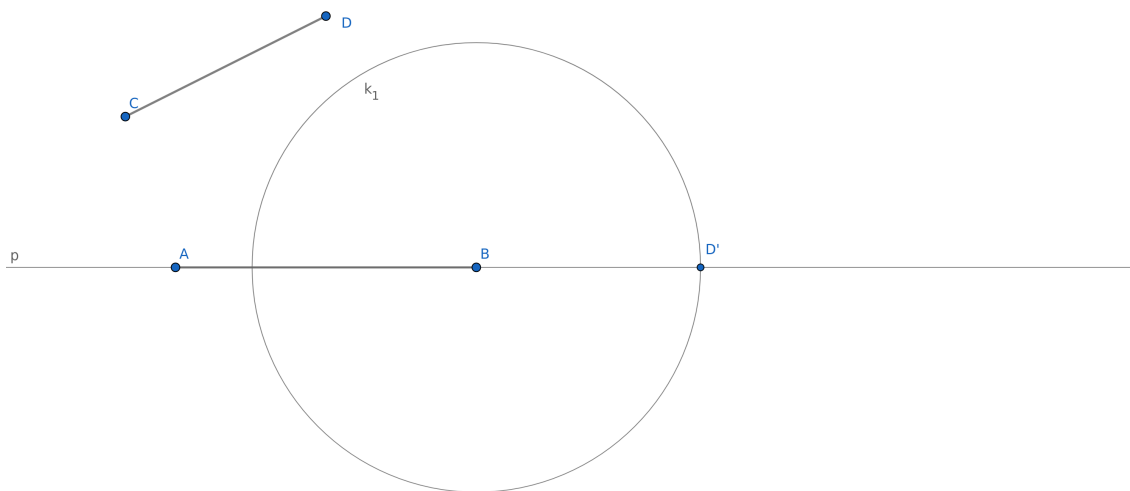
Postup konstrukce:

- (i) $u_a(A, B), u_b(C, D)$
- (ii) $p(A, B)$
- (iii) $k_1(B, |CD|)$
- (iv) $D' = p \cap k_1$
- (v) $u_c(A, D') = u_a + u_b$

Viz obrázky 7.1 (vstup), 7.2 (algoritmus), 7.3 (výstup).



Obrázek 7.1: Součet dvou úseček – vstup.



Obrázek 7.2: Součet dvou úseček – algoritmus.

Formálně si operaci zavedeme jako následující funkci, jejímž vstupem jsou dvě úsečky (resp. třídy úseček délek a a b) a výstupem je úsečka (resp. množina úseček) délky součtu, tj. $a + b$

$$f_+ : \mathbb{U} \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U},$$
$$f_+ : (\mathbb{U}_a, \mathbb{U}_b) \longmapsto f_+(\mathbb{U}_a, \mathbb{U}_b) = \mathbb{U}_{a+b}.$$



Obrázek 7.3: Součet dvou úseček – výstup.

7.2.2 Konstrukce rozdílu úseček

Rozdíl úseček je opět konstruován nanesením úseček na jednu přímku, přičemž jejich společné body bude množina všech bodů kratší úsečky. Množina bodů náležící úsečce delší a zároveň nenáležící úsečce kratší je množinou bodů tvořící úsečku, jejíž délka je rovna rozdílu úseček. Poznamenejme, že vždy je tato délka kladná, což vyplývá ze samotné definice délky. Proto při zápisu rozdílu používáme absolutní hodnotu,

$$c = |a - b|, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Postup konstrukce:

- (i) $u_a(A, B), u_b(C, D)$
- (ii) $p(A, B)$
- (iii) $k_1(B, |CD|)$
- (iv) $C' = p \cap k_1$
- (v) $u_c(A, C') = u_a - u_b$

Viz obrázky 7.4 (vstup), 7.5 (algoritmus), 7.6 (výstup).

Opět si vytvoříme funkci, jejíž vstupem budou úsečky, jejíž délky náležejí množině všech úseček a výstupem je množina úseček délky jejich rozdílu

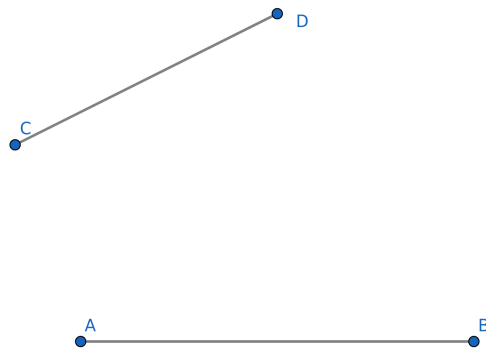
$$f_- : \mathbb{U} \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U},$$

$$f_- : (\mathbb{U}_a, \mathbb{U}_b) \longmapsto f_-(\mathbb{U}_a, \mathbb{U}_b) = \mathbb{U}_{|a-b|}.$$

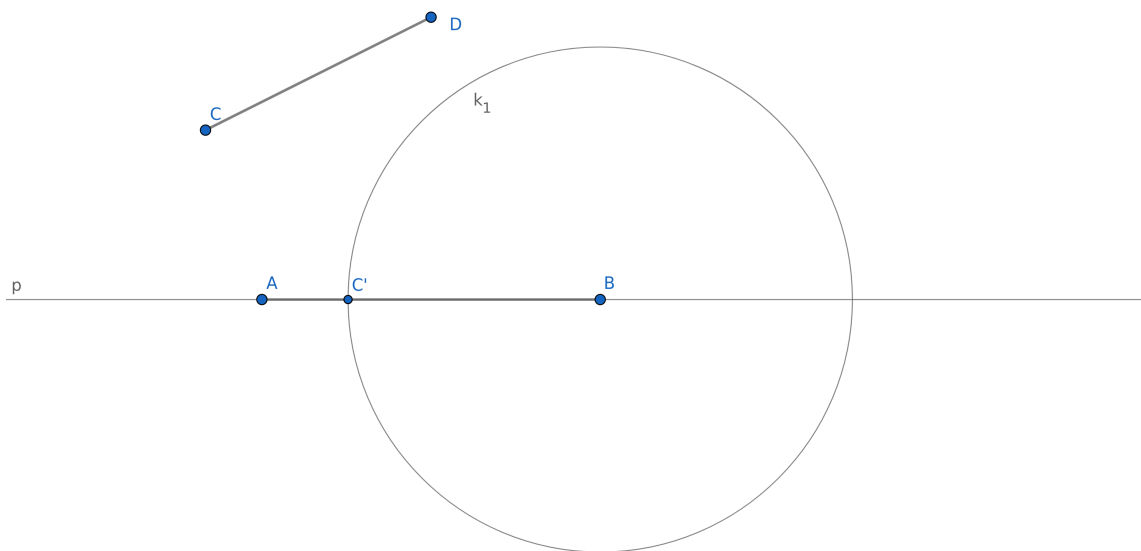
7.2.3 Konstrukce přirozeného násobku úsečky

Sčítání n stejně dlouhých úseček probíhá stejným způsobem jako sčítání dvou různých úseček. Tedy naneseme na přímku n stejně dlouhých úseček za sebou, tak aby dvě úsečky měly vždy jeden průsečík,

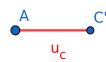
$$c = a \cdot n, \quad a \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$



Obrázek 7.4: Rozdíl dvou úseček – vstup.



Obrázek 7.5: Rozdíl dvou úseček – algoritmus.



Obrázek 7.6: Rozdíl dvou úseček – výstup.

Postup konstrukce:

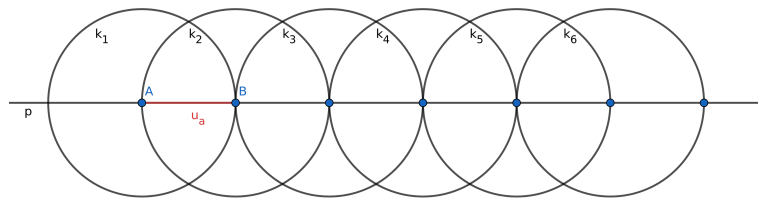
- (i) $u_a(A, B)$
- (ii) $p; u_a \in p$

- (iii) $k_1(A, |AB|)$
- (iv) $k_2(B, |AB|)$
- (v) $C; C \in k_2 \cap p$
- (vi) atd...

Viz obrázky 7.7 (vstup), 7.8 (algoritmus), 7.9 (výstup).



Obrázek 7.7: Přirozený násobek úsečky – vstup.



Obrázek 7.8: Přirozený násobek úsečky – algoritmus.



Obrázek 7.9: Přirozený násobek úsečky – výstup.

Funkce vypadá tím způsobem, že její vstupem je úsečka délky a a přirozené číslo n , které značí, kolikrát úsečku a sečteme. Jejím výstupem je poté množina úseček délky $n \times a$

$$f. : \mathbb{U} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{U},$$

$$f. : (\mathbb{U}_a, n) \longmapsto f.(\mathbb{U}_a, n) = \mathbb{U}_{a \cdot n}.$$

7.2.4 Konstrukce přirozeného podílu úsečky

Přirozený dělitel úsečky se konstruuje následujícím způsobem. Narýsujeme dvě kružnice. Kružnici $c(A, |AB|)$ a kružnici $d(B, |AB|)$. Vybereme si jeden z jejich průsečíku

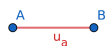
a označíme ho Q . Následně povedeme přímkou q , která prochází body Q a A . Naneseme na ni n stejně dlouhých úseček stejným způsobem, jakým jsme to udělali v minulém příkladu. Délka úseček bude rovna $|AQ|$. Konečný bod n -té úsečky spojíme s bodem B , který je konečným bodem úsečky a ve smyslu orientace po x -ové ose. Označme si ji q . Následně vedeme n rovnoběžných přímek s přímkou q , tak aby na každé přímce ležel jeden z hraničních bodů úseček nanášených na přímkou n . Tím docílíme rozdělení úsečky a na n stejně dlouhých úseček.

$$c = \frac{a}{n}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad n \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}).$$

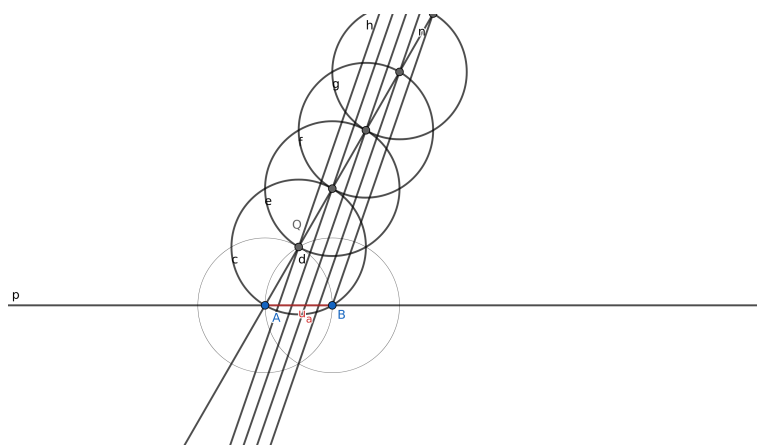
Postup konstrukce:

- (i) $u_a(A, B)$
- (ii) $k_1(A, |AB|), k_2(B, |AB|)$
- (iii) $Q = k_1 \cap k_2$
- (iv) $n(A, Q)$
- (v) $P; P \in u_a$
- (vi) $p(Q, P)$
- (vii) $k_3(Q, |AQ|)$
- (viii) $R; R \in k_3 \cap n$
- (ix) $l; R \in l \wedge l \parallel p$

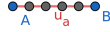
Viz obrázky 7.10 (vstup), 7.11 (algoritmus), 7.12 (výstup).



Obrázek 7.10: Přirozený podíl úsečky – vstup.



Obrázek 7.11: Přirozený podíl úsečky – algoritmus.



Obrázek 7.12: Přirozený podíl úsečky – výstup.

Vstupem funkce je délka úsečky a a přirozené číslo n , které značí, kolikrát úsečku rozdělíme na stejně dlouhé úsečky. Jejím výstupem je poté množina úseček délky $\frac{a}{n}$

$$f_{\frac{a}{n}} : \mathbb{U} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{U},$$

$$f_{\frac{a}{n}} : (\mathbb{U}_a, n) \longmapsto f_{\frac{a}{n}}(\mathbb{U}_a, n) = \mathbb{U}_{\frac{a}{n}}.$$

Poznamenejme, že speciálním případem přirozeného dělitele úsečky je její půlení, které využíváme v řadě konstrukcí.

7.2.5 Konstrukce aritmetického průměru

Konstrukce aritmetického průměru je speciální případ přirozeného dělitele úsečky. Stačí pouze sečíst úsečku u_a a u_b a následně vzniklou úsečku rozdělíme na polovinu. Vzniklá úsečka je výsledkem aritmetického průměru.

$$d = \frac{a + b}{2}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Postup konstrukce:

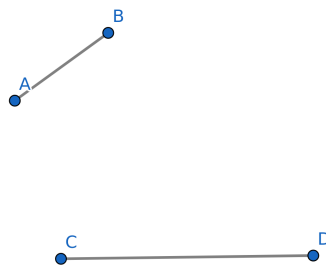
(i) $u_a(A, B); u_b(C, D)$

(ii) $u_c(A, D) = u_a \cap u_b$

(iii) $S; S = \frac{1}{2}|A, D|$

(iv) $u_d(A, S)$

Viz obrázky 7.13 (vstup), 7.14 (algoritmus), 7.15 (výstup).

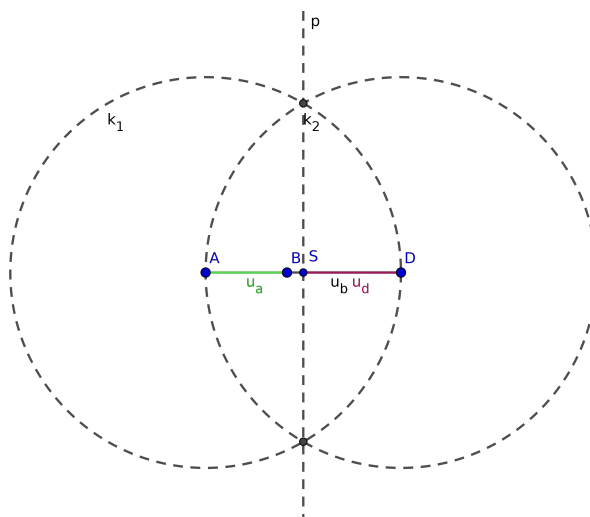


Obrázek 7.13: Aritmetický průměr dvou úseček – vstup.

Vzniklá funkce má vstup množinu úseček délky a a množinu úseček délky b . Výstupem je množina úseček délky $\frac{a+b}{2}$

$$f_{\text{ap}} : \mathbb{U} \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U},$$

$$f_{\text{ap}} : (\mathbb{U}_a, \mathbb{U}_b) \longmapsto f_{\text{ap}}(\mathbb{U}_a, \mathbb{U}_b) = \mathbb{U}_{\frac{a+b}{2}}.$$



Obrázek 7.14: Aritmetický průměr dvou úseček – algoritmus.



Obrázek 7.15: Aritmetický průměr dvou úseček – výstup.

7.2.6 Konstrukce geometrického průměru

Konstrukci geometrického průměru známe již ze střední školy. „Paradoxem“ této konstrukce je to, že bez znalosti jednotkové úsečky umíme sestavit geometrický průměr, zatímco součin ani mocninu sestavit neumíme. Je tedy náročnější v eukleidovské geometrii sestavit součin či mocninu, než-li geometrický průměr, neboť podmínkou je znalost již zmíněné jednotkové úsečky. Povšimněme si, že v aritmetice je tomu naopak. Součin a odmocnina je „snadnější“ než-li geometrický průměr. Jedná se o příklad rozdílu mezi geometrií a aritmetikou v tom, jakým způsobem konstruují nové objekty.

Nyní si ukážeme, jakým způsobem konstruujeme geometrický průměr. Sečteme úsečku u_a a úsečku u_b . Po sečtení nám vznikne úsečka $u_c = AD$. Nalezneme střed této úsečky, jenž bude také střed kružnice $k(A, |AS_k|)$. Následně zkonstruujeme kolmici k úsečce, na níž leží bod B . Průsečík kružnice k a kolmice označme jako bod G . Úsečka BG je výsledkem geometrického průměru.

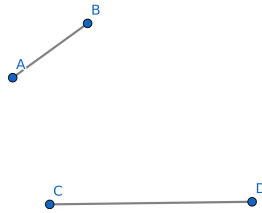
$$g = \sqrt{a \cdot b}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Postup konstrukce:

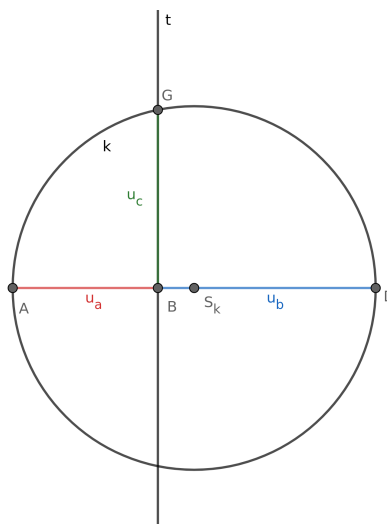
- (i) $u_a(A, B), u_b(C, D)$
- (ii) $u_c(A, D) = u_a \cap u_b$
- (iii) $S_k \in \frac{1}{2}|A, D|$

- (iv) $k(A, |AS_k|)$
- (v) $t; t \perp u_c \wedge B \in t$
- (vi) $P; P \in k \cap t$
- (vii) $u_g(B, P)$

Viz obrázky 7.16 (vstup), 7.17 (algoritmus), 7.18 (výstup).



Obrázek 7.16: Geometrický průměr dvou úseček – vstup.

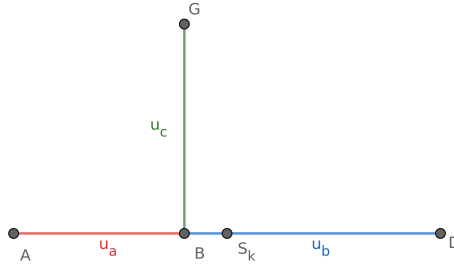


Obrázek 7.17: Geometrický průměr dvou úseček – algoritmus.

Vstupem funkce bude množina délek úsečky a a množina délek úseček b . Výstupem bude množina úseček délky c , která bude výsledkem geometrického průměru úsečky a a b

$$f_{\text{gp}} : \mathbb{U} \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U},$$

$$f_{\text{gp}} : (\mathbb{U}_a, \mathbb{U}_b) \longmapsto f_{\text{gp}}(\mathbb{U}_a, \mathbb{U}_b) \mathbb{U}_{\sqrt{a \cdot b}}.$$



Obrázek 7.18: Geometrický průměr dvou úseček – výstup.

7.3 Unární a binární operace neproveditelné bez znalosti jednotkové úsečky

V této sekci se budeme věnovat takovým operacím, pro které již bude nezbytná znalost jednotkové úsečky $\mathbf{1}$. V rámci eukleidovské konstrukce může být jednotka $\mathbf{1}$ reprezentována např. úsečkou $u_1([0, 0], [0, 1])$.

7.3.1 Konstrukce odmocniny úsečky

Při konstrukci odmocniny z úsečky se používá eukleidova věta o výšce. Sečteme úsečku např. o velikosti $\mathbf{1}$ a úsečku o velikosti a . Následně nalezneme střed vzniklé úsečky a zkonstruujeme kružnici $k(S_{CB}, |BS_{CB}|)$. Poté zkonstruujeme tečnu p v bodě A . Průsečík kružnice k a přímky p nazveme F . Úsečka AF je odmocnina z úsečky a .

$$x = \sqrt{a}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Postup konstrukce:

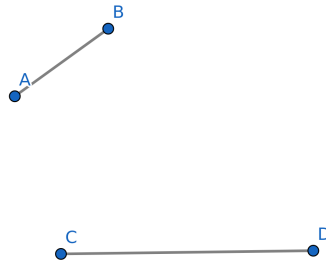
- (i) $u_a(A, B)$
- (ii) $q; A, B \in q$
- (iii) $u_1(C, A); u_1 \subset q \wedge u_1 \in \mathbf{1}$ (tj. $|u_1| = 1$)
- (iv) $p; p \perp u_a \wedge A \in p$
- (v) $k(S_{CB}, |S_{CB}B|)$
- (vi) $F; F \in k \cap p$
- (vii) $u_{\sqrt{a}}(A, F)$

Viz obrázky 7.19 (vstup), 7.20 (algoritmus), 7.21 (výstup).

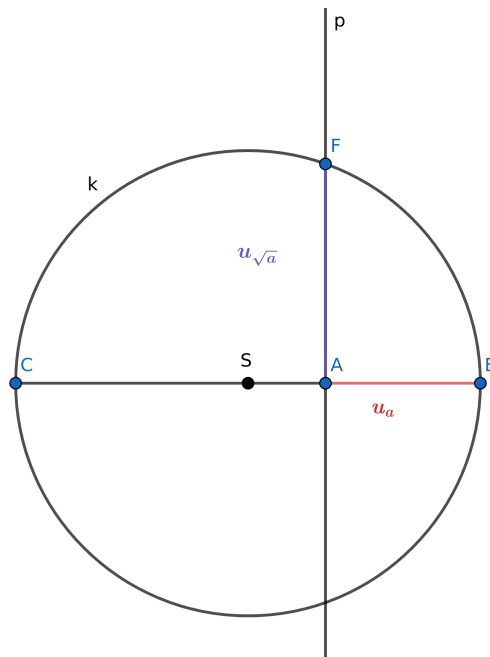
Vstupem funkce je množina úseček délky a a výstupem množina úseček délky odmocniny,

$$f_{\sqrt{\cdot}} : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U},$$

$$f_{\sqrt{\cdot}} : (\mathbb{U}_a) \longmapsto f_{\sqrt{\cdot}}(\mathbb{U}_a) = \mathbb{U}_{\sqrt{a}}.$$



Obrázek 7.19: Odmocnina z úsečky – vstup.



Obrázek 7.20: Odmocnina z úsečky – algoritmus.

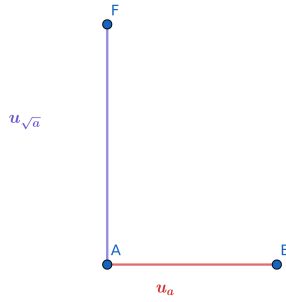
7.3.2 Konstrukce převrácené hodnoty úsečky

Při konstrukci převrácené hodnoty úsečky a opět používáme eukleidovu větu o výšce. Na přímce p nanese se úsečku délky a . Následně zkonstruujeme kolmici t ; t , která je kolmá na úsečku AB a bod B leží na kolmici t . Zkonstruujeme bod P , který leží na přímce t a zároveň $|BP| = 1$. Poté opět zkonstruujeme kolmici k , která bude kolmá na úsečku AP a bod P leží na kolmici k . Průnik kolmice k a přímky p nazveme bod D . Úsečka BD je úsečka délky $\frac{1}{a}$.

$$x = \frac{1}{a}, \quad a \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Postup konstrukce:

- (i) $u_a(A, B)$



Obrázek 7.21: Odmocnina z úsečky – výstup.

- (ii) $p; AB \in p$
- (iii) $t; t \perp u_a \wedge B \in t$
- (iv) $u_1(B, P); u_1 \subset p \wedge u_1 \in \mathbf{1}$ (tj. $|u_1| = 1$)
- (v) $k; k \perp AP \cap P \in k$
- (vi) $D; D \in k \cap p$
- (vii) $u_{\frac{1}{a}}(B, D) = \frac{1}{2}u_a$

Viz obrázky 7.22 (vstup), 7.23 (algoritmus), 7.24 (výstup).



Obrázek 7.22: Převrácená hodnota úsečky – vstup.

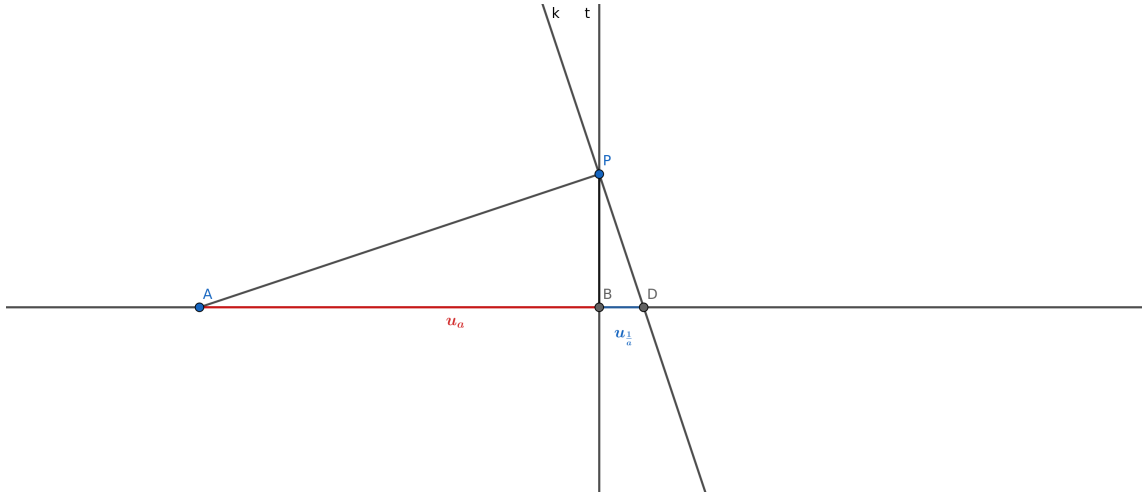
Vstupem funkce bude množina úseček délky a a výstupem bude množina úseček délky převrácené hodnoty, tj. $\frac{1}{a}$,

$$f_{-1} : (\mathbb{U} \setminus \{\mathbf{o}\}) \longrightarrow (\mathbb{U} \setminus \{\mathbf{o}\}),$$

$$f_{-1} : (\mathbb{U}_a) \longmapsto f_{-1}(\mathbb{U}_a) = \mathbb{U}_{a^{-1}}.$$

7.3.3 Konstrukce součinu dvou úseček

Konstrukce součinu úseček bude obdobná předchozí konstrukci. Vstupem budou tedy úsečky délky a a b . Abychom konstrukci mohli provést, musíme nejdříve využít



Obrázek 7.23: Převrácená hodnota úsečky – algoritmus.



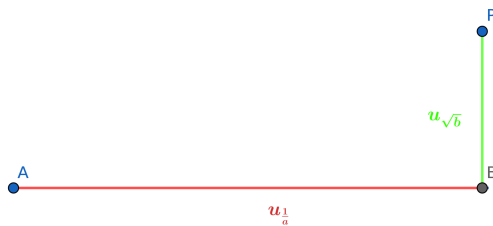
Obrázek 7.24: Převrácená hodnota úsečky – výstup.

předchozí námi vytvořené funkce a to funkci $f_{\sqrt{\cdot}}$ a $f_{\cdot^{-1}}$ tak, abychom dostali úsečky délky $\frac{1}{a}$ a \sqrt{b} . Nyní postupujeme stejným způsobem, jako v předchozí konstrukci.

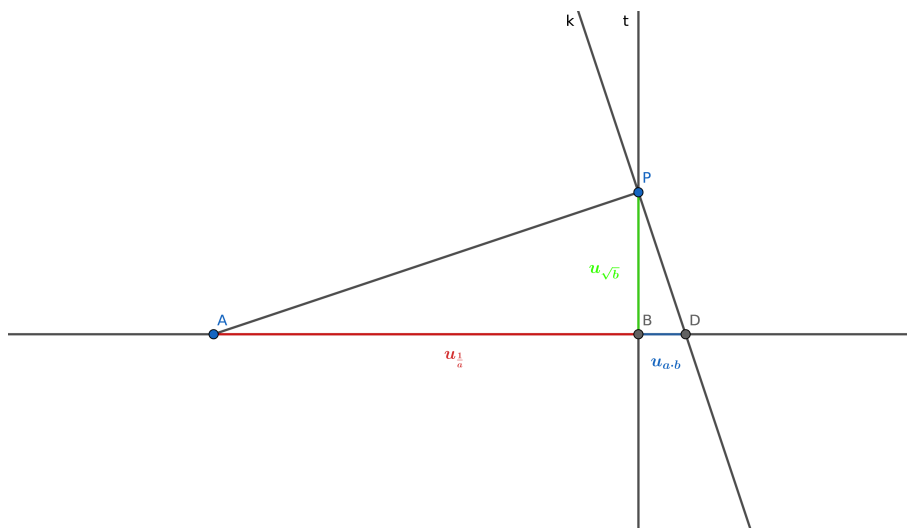
$$x = a \cdot b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Postup konstrukce:

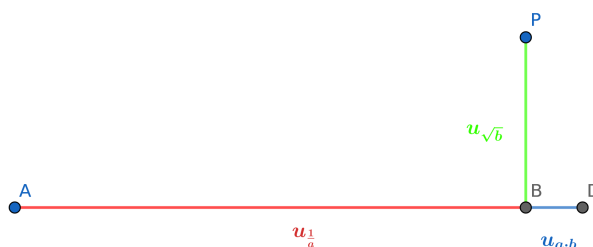
- (i) $\mathbb{U}_{\frac{1}{a}} = f_{\cdot^{-1}}(\mathbb{U}_a)$ (použijeme funkci převrácené hodnoty; viz sekce 7.3.2)
- (ii) $\mathbb{U}_{\sqrt{b}} = f_{\sqrt{\cdot}}(\mathbb{U}_b)$ (použijeme funkci odmocniny; sekce 7.3.1)
- (iii) $A, B, P : u_{\frac{1}{a}}(A, B) \perp u_{\sqrt{b}}(B, P)$ (použijeme konstrukce kolmice; sekce 3.3.1)
- (iv) $p; AB \in p$
- (v) $t; t \perp u_a \wedge B \in t$
- (vi) $u_b(B, P) \in t$
- (vii) $k; k \perp AP \cap P \in k$
- (viii) $D; D \in k \cap p$
- (ix) $u_{a \cdot b}(B, D)$



Obrázek 7.25: Součin dvou úseček – vstup.



Obrázek 7.26: Součin dvou úseček – algoritmus.



Obrázek 7.27: Součin dvou úseček – výstup.

Viz obrázky 7.25 (vstup), 7.26 (algoritmus), 7.27 (výstup).

Vstupem funkce bude množina úseček délky a a b . Výstupem funkce bude množina úseček rovný $a \cdot b$

$$f. : \mathbb{U} \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U},$$

$$f. : (\mathbb{U}_a, \mathbb{U}_b) \longmapsto f.(\mathbb{U}_a, \mathbb{U}_b) = \mathbb{U}_{a \cdot b}.$$

7.3.4 Konstrukce podílu dvou úseček

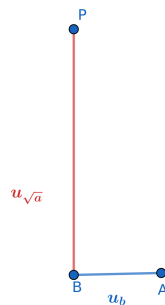
Konstrukce podílu úseček bude opět obdobná předchozí konstrukci. Vstupem budou tedy úsečky délky a a b . Abychom konstrukci mohli provést, musíme nejdříve opět využít předchozí námi vytvořenou funkci $f_{\sqrt{\cdot}}$ tak, abychom dostali úsečku délky \sqrt{a} . Nyní postupujeme stejným způsobem, jako v předchozí konstrukci.

$$x = \frac{b}{a}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad b \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

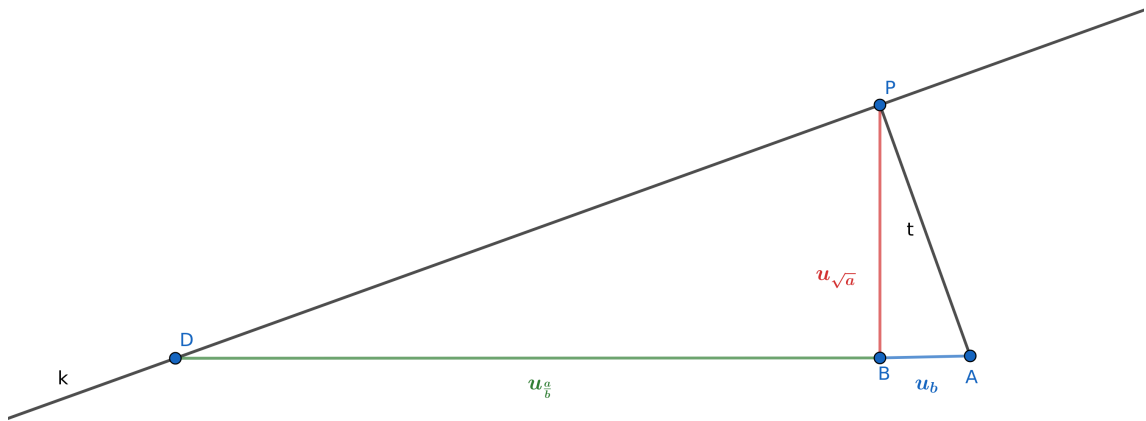
Postup konstrukce:

- (i) $u_b(A, B)$
- (ii) $\mathbb{U}_{\sqrt{a}} = f_{\sqrt{\cdot}}(\mathbb{U}_a)$ (použijeme funkci odmocniny; sekce 7.3.1)
- (iii) $P : u_b(A, B) \perp u_{\sqrt{a}}(B, P)$ (použijeme konstrukce kolmice; sekce 3.3.1)
- (iv) $p; AB \in p$
- (v) $t; t \perp u_a \wedge B \in t$
- (vi) $u_b(B, P) \in t$
- (vii) $k; k \perp AP \cap P \in k$
- (viii) $D; D \in k \cap p$
- (ix) $u_{\frac{a}{b}}(B, D)$

Viz obrázky 7.28 (vstup), 7.29 (algoritmus), 7.30 (výstup).



Obrázek 7.28: Podíl dvou úseček – vstup.



Obrázek 7.29: Podíl dvou úseček – algoritmus.



Obrázek 7.30: Podíl dvou úseček – výstup.

Vstupem funkce bude opět množina úseček délky a a množina úseček délky b . Výstupem bude množina úseček délky $\frac{a}{b}$.

$$f_{\frac{a}{b}} : \mathbb{U} \times (\mathbb{U} \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{U},$$

$$f_{\frac{a}{b}} : (\mathbb{U}_a, \mathbb{U}_b) \longmapsto f_{\frac{a}{b}}(\mathbb{U}_a, \mathbb{U}_b) = \mathbb{U}_{\frac{a}{b}}.$$

7.3.5 Konstrukce druhé mocniny délky úsečky

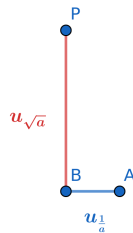
Poslední operací, kterou zkonstruujeme bude druhá mocnina délky úsečky. Konstrukce opět vychází z konstrukce součinu. V tomto případě konstruujeme součin úsečky délky a a opět úsečky délky a . Abychom konstrukci mohli provést, musíme nejdříve využít předchozí námi vytvořené funkce a to funkci $f_{\sqrt{\cdot}}$ a $f_{\cdot^{-1}}$ tak, abychom dostali úsečky délky \sqrt{a} a $\frac{1}{a}$.

$$x = a^2, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Postup konstrukce:

- (i) $\mathbb{U}_{\frac{1}{a}} = f_{\cdot^{-1}}(\mathbb{U}_a)$ (použijeme funkci převrácené hodnoty, viz sekce 7.3.2)
- (ii) $\mathbb{U}_{\sqrt{a}} = f_{\sqrt{\cdot}}(\mathbb{U}_a)$ (použijeme funkci odmocniny, viz sekce 7.3.1)
- (iii) $A, B, P : u_{\frac{1}{a}}(A, B) \perp u_{\sqrt{a}}(B, P)$ (použijeme konstrukce kolmice; sekce 3.3.1)
- (iv) $p; AB \in p$
- (v) $t; t \perp u_a \wedge B \in t$
- (vi) $u_b(B, P) \in t$
- (vii) $k; k \perp AP \cap P \in k$
- (viii) $D; D \in k \cap p$
- (ix) $u_{a^2}(B, D)$

Viz obrázky 7.31 (vstup), 7.32 (algoritmus), 7.33 (výstup).

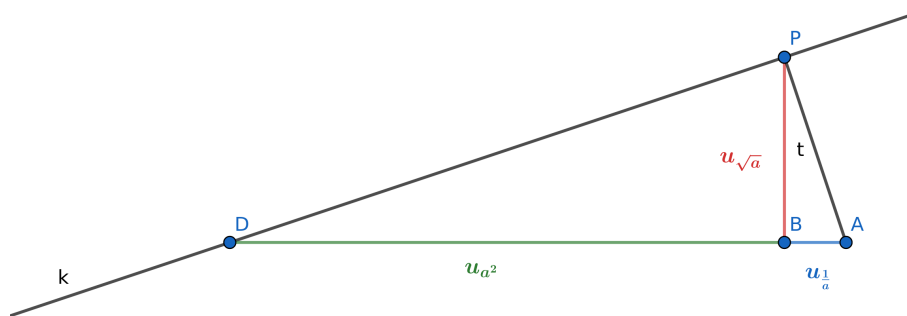


Obrázek 7.31: Druhá mocnina úsečky – vstup.

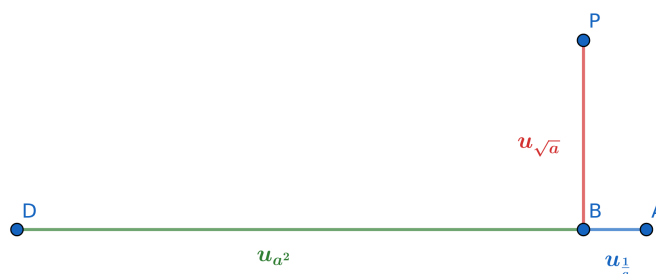
Vstupem funkce bude množina úseček délky a a délky a . Výstupem bude množina úseček délky a^2 ,

$$f_{.2} : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U},$$

$$f_{.2} : \mathbb{U}_a \longmapsto f_{.2}(\mathbb{U}_a) = \mathbb{U}_{a^2}$$



Obrázek 7.32: Druhá mocnina úsečky – algoritmus.



Obrázek 7.33: Druhá mocnina úsečky – výstup.

7.4 Dělení úseček se zbytkem

Povšimněme si, jakým způsobem funguje v geometrii celočíselné dělení. Pokud dělíme úsečku celým číslem, výsledkem dělení je podíl, který je vyjádřen pomocí čísla. Avšak zbytek po dělení je úsečka o určité délce. Přestože vstupem obou funkcí je množina úseček o určité délce, tak zatímco funkce, jejíž výstupem je podíl, nám vrací číslo, tak funkce, jejíž výstupem je zbytek po dělení, nám vrací opět úsečku. Celočíselný podíl úseček:

$$\text{div} : \mathbb{U} \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$\text{div} : (\mathbb{U}_a, \mathbb{U}_b) \longmapsto \text{div}(\mathbb{U}_a, \mathbb{U}_b) = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$$

Zbytek po dělení úseček:

$$\text{mod} : \mathbb{U} \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$$

$$\text{mod} : (\mathbb{U}_a, \mathbb{U}_b) \longmapsto \text{mod}(\mathbb{U}_a, \mathbb{U}_b) = \mathbb{U}_{a \bmod b}$$

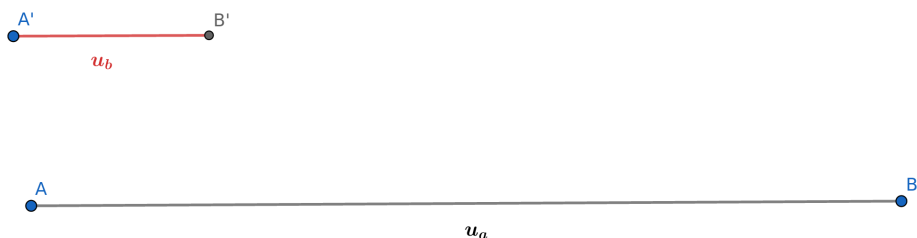
Oboje za předpokladu $\mathbb{U}_b \neq \mathbf{o}$.

Příklad: Vezměme si úsečku u_a např. délky 12,71 (jednotek). Dělíme ji na úsečkou u_b délky např. 3,1415 (jednotek). Jejich celočíselný podíl pak bude $q = 4$, zbytek po dělení bude úsečka u_f délky f (jednotek); $f < q$.

Postup konstrukce:

- (i) $u_a(A, B)$
- (ii) $u_b(A', B')$
- (iii) $k_1(A, |u_b|)$
- (iv) $C; C = k_1 \cap u_a$
- (v) $k_2(C, |u_b|)$
- (vi) $D; D = k_2 \cap u_a$
- (vii) $k_3(D, |u_b|)$
- (viii) $E; E = k_3 \cap u_a$
- (ix) $k_4(E, |u_b|)$
- (x) $F; F = k_4 \cap u_a$
- (xi) $u_f; u_f = FB$

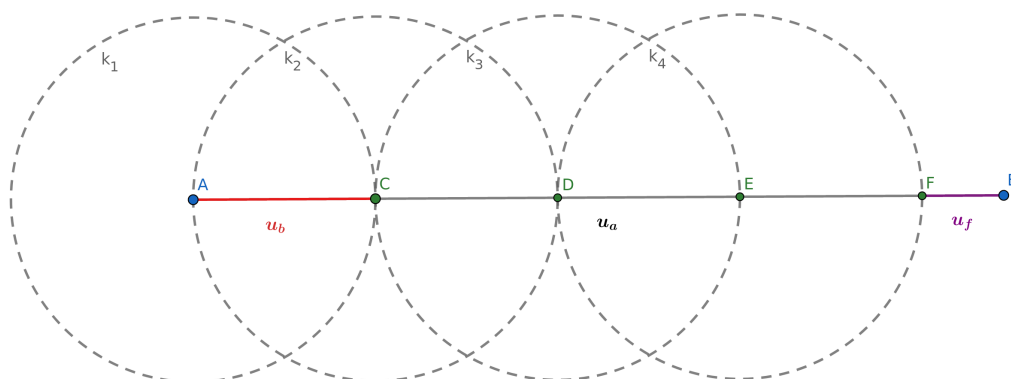
Viz obrázky 7.34 (vstup), 7.35 (algoritmus), 7.36 (výstup).



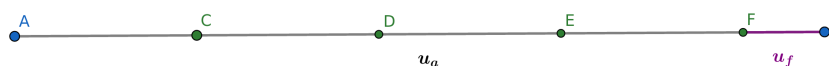
Obrázek 7.34: Dělení úseček se zbytkem – vstup.

7.5 Operace proveditelné v eukleidovské rovině s úhly

Pro úplnost doplníme, že i s úhly můžeme provádět určité elementární operace stejně jako s úsečkami. Narozdíl však od úseček je množství proveditelných operací s úhly menší než-li s úsečkami. Pro nás však tyto operace nejsou tak důležité, resp. ne všechny. Ty, co jsou důležité byly již většinou zmíněny. Jednou z nejzákladnějších operací je sčítání úhlů.



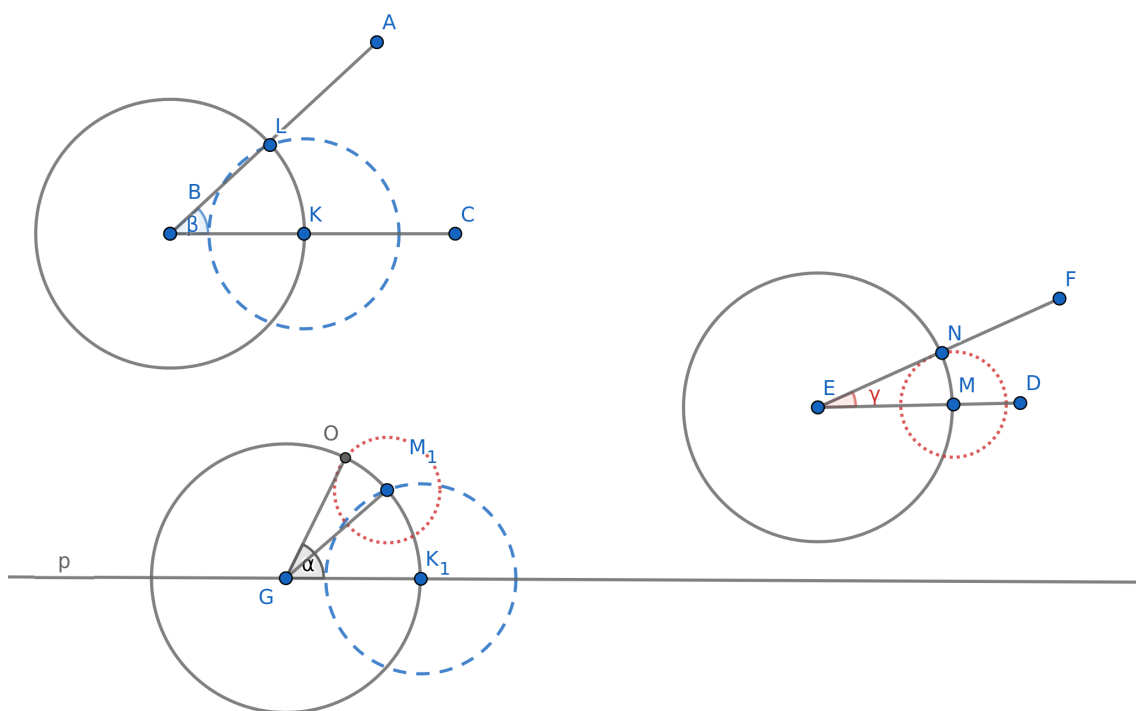
Obrázek 7.35: Dělení úseček se zbytkem – algoritmus.



Obrázek 7.36: Dělení úseček se zbytkem – výstup.

7.5.1 Sčítání úhlů

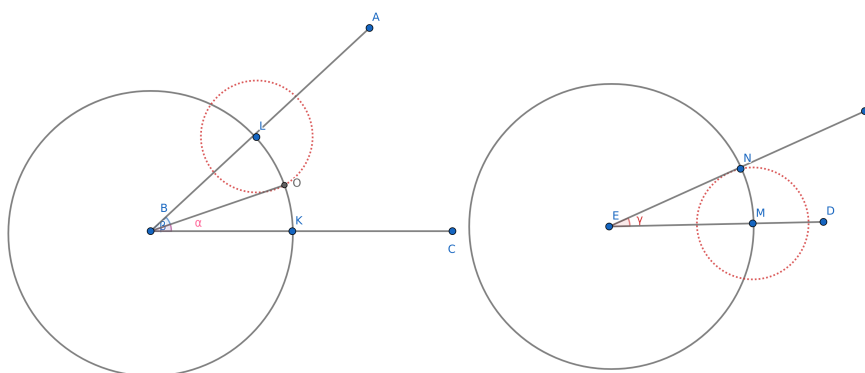
Postup je velmi elementární a intuitivní. Mějme zadány úhly $\angle\beta = \angle KBL$ a $\angle\gamma = \angle MEN$. Zkonstruujeme kružnice, kde střed kružnic bude vždy shodný s vrcholy úhlů a budou mít libovolný shodný poloměr. Kružnici se shodným poloměrem si nanese také na přímku p , kterou si narýsujeme libovolně tak, aby neměla žádný společný bod se zadanými úhly. Následně si změříme velikost oblouků, které nám vytínají oba úhly na kružnicích. Velikosti nanese na kružnici se středem $G \in p$. Součet těchto velikostí nám vytvoří bod O . Spojíme-li bod O se středem G , dostaneme součet úhlů $\angle\beta + \angle\gamma = \angle\alpha$.



Obrázek 7.37: Konstrukce součtu dvou úhlů.

7.5.2 Rozdíl úhlů

Operace rozdílu úhlů je obdobná operaci sčítání úhlů. Opět máme zadány dva úhly $\angle\beta = \angle KBL$ a $\angle\gamma = \angle MEN$. Nyní postupujeme stejně. Tedy zkonstruujeme kružnice, kde střed kružnic bude vždy shodný s vrcholy úhlů a budou mít libovolný shodný poloměr. Následně si změříme velikost oblouku, který nám vytíná menší úhel na kružnici. Následně nanese velikost naměřeného oblouku na větší oblouk, čímž dostaneme průsečík kružnic O a tedy rozdíl úhlů, resp. $\angle\beta - \angle\gamma = \angle\alpha = \angle OBL$.



Obrázek 7.38: Konstrukce rozdílu dvou úhlů.

7.5.3 Přirozený násobek úhlů

Jednou z dalších možných operací proveditelných s úhly je jejich přirozený násobek, resp. součin úhlu se skalárem, kde skalár představuje kolikrát musíme sečíst úhel sám se sebou (součet úhlů viz 7.5.1).

7.5.4 Přirozený podíl úhlů

Poslední možnou operací s úhly je jejich přirozený podíl a to pouze omezeně. Připomeňme si kapitolu eukleidovsky neřešitelné úlohy, ve které jsme naznačili důkaz neřešitelnosti trisekce úhlu (viz 3.2.4). Je tedy zřejmé, že lze zkonstruovat přirozený podíl úhlu, když je dělitel mocnin dvou (2^k). Důsledkem věty 3.1.4 by dělení ostatními prvočísly pravděpodobně nefungovalo ze stejných důvodů jako trisekce úhlu. Můžeme tedy úhel např. půlit (viz 3.1.2), jak jsme již provedli v kapitole Wanzelova metoda.

8 Závěr

V této práci byl čtenář seznámen jednak s různými metodami sestavení eukleidovsky konstruovatelných mnohoúhelníků pouze za pomoci pravítka a kružítka s vlastnostmi (i)–(iv) (viz 2.1) a náznaky důkazů základních konstrukcí, jež pocházejí již z dob antického Řecka, tak i s konstrukcemi, které jsou známe až od 18. století. Právě u později objevených konstrukcí mnohoúhelníků je patrné, jak důležitou roli má algebra. Průlomovou se stala Gaußova věta, která spojuje geometrii s algebrou. Proto důležitou částí této práce je zejména propojení algebry s geometrií, systematizace postupu konstrukcí mnohoúhelníků a v neposlední řadě Gaußův teoretický výpočet konstrukce mnohoúhelníků, který byl následně aplikován na sedmnáctiúhelník.

V kapitole Systematický postup konstrukce n -úhelníků jsme se zabývali zejména konstrukcemi operací s úsečkami, přičemž jsme se také zmínili o úhlech a operacích s nimi proveditelné. V případě úseček jsme se zejména zaměřili na rozdíl mezi unárními a binárními operacemi proveditelné v eukleidovské rovině bez znalosti jednotkové úsečky a s její znalostí. Také jsme se zabývali celočíselným podílem a zbytkem po dělení úsečky, kde jsme si mohli povšimnout, jakým způsobem funguje v geometrii celočíselné dělení.

Hlavním cílem této práce bylo zrekapitulovat základní teoretické poznatky o eukleidovsky konstruovatelných pravidelných mnohoúhelnících. Dále pak jazykem algebraických struktur popsat soubor paralel mezi vybranými aritmetickými operacemi a jejich geometrickou reprezentací. Výsledkem by tedy měl být soubor jednoduchých parametrizovaných geometrických konstrukcí, které umožní konstruovat složitější algebraické výrazy.

Výstup této bakalářské práce je podkladem pro Matlab pro automatické generování eukleidovských konstrukcí složitějších pravidelných mnohoúhelníků, které jsou prakticky téměř nezkonstruovatelné bez použití softwaru.

Přínos bakalářské práce, kromě podkladu pro program Matlab, vidím ve spojení algebry a geometrie do jednoho celku. Na jedné straně se zde nachází ryze geometrická konstrukce, na straně druhé algebraická. Práce tedy spojuje v rámci jednoho tématu dvě odvětví matematiky, na první pohled odlišné, ve skutečnosti propojené, ovlivňující se navzájem.

Literatura

- [1] J. BEČVÁŘ: *Lineární algebra*, MatfyzPress, Praha, 2010.
- [2] M. BEČVÁŘOVÁ: *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady*, 1. vyd., Praha: Prometheus, 2002. Dostupné z: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/401796>
- [3] L. C. BRUNO: *Matematika a matematici: historie matematických objevů po celém světě*, Baker, Lawrence W. Detroit, 1999.
- [4] M. BULANT: *Algebra 2 – Teorie čísel*, 2007 [online]. Dostupné z: <http://is.muni.cz/el/1431/jaro2007/M6520/um/main-print.pdf>
- [5] V. DLAB a J. BEČVÁŘ: *Od aritmetiky k abstraktní algebře*, Serifa, 2016.
- [6] EUKLEIDES: *Základy*, editor Petr Vopěnka, pět svazků knih I-IV, V-VI, VII-IX, X, XI-XII, OPS, Plzeň, 2008–2013.
- [7] R. HALAŠ: *Úvod do teorie čísel*, Univerzita Palackého v Olomouci, 2014.
- [8] J. HUSÁK: *Přibližné řešení kvadratury kruhu*, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, vol. 26 (1897), issue 3, pp. 255–257. Dostupné z: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/121662>
- [9] F. KLEIN: *Famous problems of elementary geometry*, Translated by Wooster Woodruff Beman, David Eugene Smith, Copyright, 1897.
- [10] M. KRÍŽEK: *Od Fermatových čísel ke geometrii*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, vol. 46 (2001), issue 3, pp. 179–191. Dostupné z: <http://dml.cz/dmlcz/141082>
- [11] V. KOŘÍNEK: *Základy algebry*, Nakladatelství ČSAV, Praha, 1956.
- [12] M. KUŘIL: *Základy teorie grup*. Dostupné z: <https://kma.ujep.cz/administrace/uploads/afa9832.pdf>
- [13] A. PLESKOT: *Poznámka k rektifikaci kruhu*, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, vol. 22 (1893), issue 2, pp. 152–153. Dostupné z: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/122042>

- [14] V. SEDLÁČKOVÁ: *Gauss a konstruovatelnost pravidelných mnohoúhelníků pomocí kružítka a pravítka*, Bakalářská práce, Praha, 2014.
- [15] D. STANOVKÝ: *Základy algebry*, MatfyzPress, Praha, 2010.
- [16] A. STRNAD: *O pravidelném sedmnáctiúhelníku*, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, vol. 33 (1904), issue 5, pp. 543–558. Dostupné z: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/123514>
- [17] A. SUTTON: *Pravítko a kružítko*, Dokořán 2017.
- [18] J. ŠTALMAŠEK: *Geometrické konštrukcie*, SVTL, Bratislava, 1959.
- [19] J. ŠRŮTEK: *Nový způsob rektifikace čáry kruhové*, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, vol. 21 (1892), issue 2, pp. 83–88. Dostupné z: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/123511>
- [20] J. R. VAŇAUS: *Trisektorie*, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, vol. 10 (1881), issue 3, pp. 153–159. Dostupné z: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/122760>