Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Katedra matematiky

Různé přístupy k zavedení goniometrických funkcí

Bakalářská práce

Autor: Kristýna Machová

Studijní program: B1701

Studijní program: Fyzika se zaměřením na vzdělávání

Matematika se zaměřením na vzdělávání

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jaroslav Seibert, CSc.

Hradec Králové srpen 2015

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny prameny, z kterých jsem vycházela.

V Hradci Králové dne 6. 8. 2015 Kristýna Machová

Chtěla bych poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce doc. RNDr. Jaroslavu Seibertovi, CSc. za odborné vedení, za pomoc a cenné rady při zpracování této práce.

Anotace

MACHOVÁ, K. *Různé přístupy k zavedení goniometrických funkcí.* Hradec Králové, 2015. Bakalářská práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí bakalářské práce Jaroslav Seibert. 68 s.

V bakalářské práci jsou porovnány možné způsoby zavedení základních goniometrických funkcí na základní škole, střední škole a vysoké škole. Goniometrické funkce jsou zavedeny pomocí pravoúhlého trojúhelníku, jednotkové kružnice, Taylorových řad nebo pomocí funkcionálních rovnic. Spolu s definicemi goniometrických funkcí jsou uvedeny jejich základní vlastnosti, příp. vybrané vztahy pro tyto funkce. V bakalářské práci jsou uvedeny dvě tzv. trigonometrické věty (sinová a kosinová věta) a jejich aplikace. Bakalářská práce je taktéž doplněna o zavedení cyklometrických funkcí, které jsou inverzní k funkcím goniometrických. V první kapitole je připomenuta historie goniometrie a trigonometrie.

Klíčová slova

goniometrické funkce, cyklometrické funkce, pravoúhlý trojúhelník, jednotková kružnice, mocninné řady, funkcionální rovnice

Annotation

Machová, K. *Various ways of the definition of the trigonometric functions*. Hradec Králové, 2015. Bachelor Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Thesis Supervisor Jaroslav Seibert. 68 p.

Various ways of defining the basic trigonometric functions at primary school, at secondary school, and at university are compared in this bachelor thesis. The right-angled triangle, the unit circle, the Taylor series or the functional equations are used for defining these functions. The basic properties of the goniometric functions and the trigonometric identities are mentioned in this bachelor thesis. Two trigonometric theorems (law of sines, law of cosines) and their applications are mentioned, too. In addition to that, the definitions of the inverse trigonometric functions, which are often called the cyclometric functions, are mentioned. The history of goniometry and trigonometry is observed in the first chapter.

Keywords

trigonometric functions, cyclometric functions, right-angled triangle, unit circle, power series, functional equations

Obsah

Úvod

Studiem goniometrických funkcí, mezi které řadíme funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens, se zabývá goniometrie, kterou často spojujeme s trigonometrií zabývající se studiem trojúhelníků. Obě slova, jak goniometrie, tak trigonometrie, pochází z řečtiny a můžeme velmi snadno dokázat, že vznikly před více jak 2000 lety. Celou historii vývoje trigonometrie a goniometrie si v krátkosti připomeneme v první kapitole (Odvárko, 1996, s. 4, 90).

V dalších kapitolách se již zaměříme na různé způsoby zavedení goniometrických funkcí a zároveň se pokusíme uvést a dokázat i některé vztahy, které můžeme mezi goniometrickými funkcemi najít. Součástí definic bude i odvození některých vlastností těchto funkcí.

V druhé kapitole zavedeme goniometrické funkce pomocí pravoúhlého trojúhelníku, v němž definujeme funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens pro hodnoty proměnné odpovídající velikostem ostrých úhlů.

Ve třetí kapitole budeme definovat goniometrické funkce pomocí jednotkové kružnice, kde můžeme základní goniometrické funkce zavést pro jakékoliv reálné proměnné z jejich definičního oboru. Tentokrát se již nebudeme omezovat pouze na goniometrické funkce, ale budeme definovat i funkce cyklometrické. Nezapomeneme ani na trigonometrii a ukážeme si, jak jsou pro nás poznatky z této části matematiky důležité i dnes.

Ve čtvrté a páté kapitole se již budeme věnovat zavedení goniometrických, příp. cyklometrických funkcí pomocí Taylorových řad nebo pomocí funkcionálních rovnic. Tyto způsoby definice považujeme za náročnější. Setkávají se s nimi až studenti vysokých škol, protože vyžadují hlubší znalosti z matematické analýzy.

1 Historie

Náznaky vzniku trigonometrie můžeme nalézt již v 17. století př. n. l. u Egypťanů stavících pyramidy, což dokládá Rhindův papyrus (Herman et al., 2005, s. 8-9), taktéž „u Babylóňanů a Chaldejců“ (Odvárko, 1996, s. 118). Většinou ale za zrod trigonometrie považujeme období starověkého Řecka, kdy na alexandrijské univerzitě působili Archimédes ze Syrakus a hvězdář a zakladatel trigonometrie Hipparchos z Nikaje (Šmakal a Budinský, 1968, s. 4; Odvárko, 1996, s. 118). Archimédovi ze Syrakus se mimo jiné podařilo s velkou přesností vypočítat číslo π, přičemž při výpočtu použil pravidelný mnohoúhelník, který nadále upravoval, až jím nahradil kruh. Dostal se ale jen k určitému rozmezí hodnot čísla π, protože při svých výpočtech pracoval, jak s mnohoúhelníkem opsaným, tak i vepsaným (Šmakal a Budinský, 1968, s. 4; Mareš, 2011, s. 63). Mezi další významné starověké matematiky řadíme Hippokrata z Chiu, Menelaose z Alexandrie a Klaudia Ptolemaiose. Těmto starořeckým matematikům se podařilo s využitím znalostí o kružnici a tětivách v ní zjistit závislost mezi středovým úhlem a příslušnou délkou tětivy kružnice. Všechny tyto poznatky, včetně úhlových tabulek, poté zveřejnil Klaudius Ptolemaios ve svém díle Megale syntaxis (Herman et al., 2005, s. 9; Odvárko, 1996, s. 118-119).

Na poznatky řeckých matematiků navázali ve středověku matematici z Asie a Blízkého východu (Herman et al., 2005, s. 10). Brahmagupta a další indický matematik Bháskara se zaměřili na studium závislosti mezi polovinou středového úhlu a polovinou příslušné tětivy, tudíž již nepracovali s rovnostranným trojúhelníkem, nýbrž s trojúhelníkem pravoúhlým a mohli zavést funkce sinus a kosinus (Herman et al., 2005, s. 9-10; Odvárko, 1996, s. 119). Brahmagupta dokonce publikoval knihu Brahmasputasiddhata, v níž se mimo jiné snažil pomocí funkce kosinus zobecnit Pythagorovu větu (Mareš, 2011, s. 93). Mezi základní goniometrické funkce ale řadíme i funkce tangens a kotangens, pro něž v 10. století vytvořili úhlové tabulky astronomové Al Battání a Abu-l-Váfá. První zmínky o trigonometrických vzorcích registrujeme v souvislosti matematikem Násiruddínem Túsí (Odvárko, 1996, s. 119).

V Evropě o rozvoj trigonometrie se v období od 15. do 18. století zasloužili především Johannes Müller, Mikuláš Koperník, Rhaeticus, Françọis Viète a samozřejmě Leonhard Euler. Např. Rhaeticus se i nadále pokoušel zpřesňovat hodnoty úhlových tabulek, přičemž využíval středový úhel a příslušnou tětivu kružnice, přičemž až posledně jmenovaný Leonhard Euler zcela změnil pohled na trigonometrii (Herman et al., 2005, s. 10; Odvárko, 1996, s. 119), když „zkoumal hodnoty $\sin x$, $\cos x$ jako čísla, nikoli jako úsečky" (Odvárko, 1996, s. 199). Tento významný švýcarský matematik zavedl pojem transcendentní funkce, kam zařadil např. funkce goniometrické a cyklometrické. Funkce sinus a kosinus vyjádřil pomocí nekonečných řad a své poznatky týkající se goniometrických funkcí publikoval v knize Úvod do analýzy (1748) (Smýkalová, 2011, s. 34-36). Připomeňme, že Euler taktéž zpřesnil některé pojmy týkající se jednotkové kružnice, jejich kvadrantů, atd. (Odvárko, 1996, s. 119).

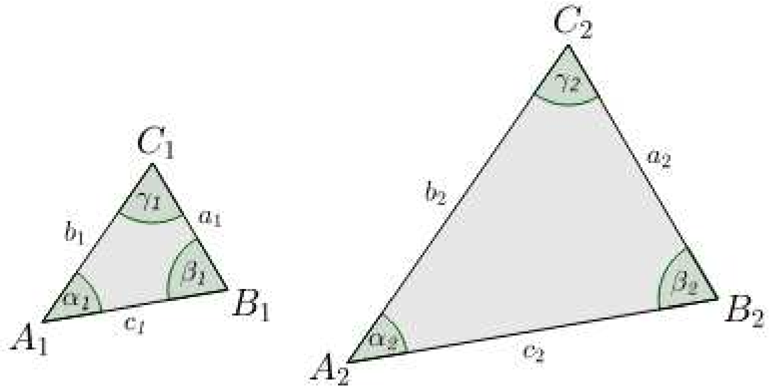
Důvody, proč trigonometrie vznikla a přetrvala až do současnosti, se nezměnily. V minulosti využívali znalosti z trigonometrie např. astronomové a mořeplavci. V současnosti jsou na jejich principech založeny např. navigace pro letadla a lodě nebo některé lékařské přístroje (Herman et al., 2005, s. 10; Odvárko, 1996, s. 118).

2 Zavedení goniometrických funkcí pomocí pravoúhlého trojúhelníku

Za nejjednodušší způsob, jak lze definovat geometrické funkce pro hodnoty proměnné odpovídající velikostem ostrých úhlů, považujeme jejich zavedení pomocí pravoúhlého trojúhelníku. Zde využíváme faktu, „že každé dva pravoúhlé trojúhelníky se stejným ostrým vnitřním úhlem jsou podobné“ (Herman et al., 2005, s. 80). Tento způsob definice goniometrických funkcí je velmi ovlivněn samotnými vlastnostmi pravoúhlého trojúhelníku (Smýkalová, 2011, s. 44), protože „v žádném pravoúhlém trojúhelníku nemůže být délka odvěsny nulová a odvěsna s přeponou nemohou mít stejnou délku“ (Smýkalová, 2011, s. 44). Z předchozí věty usuzujeme, že tímto způsobem můžeme definovat základní goniometrické funkce (sinus, kosinus, tangens a kotangens) pouze pro interval $(0°, 90°)$ (Smýkalová, 2011, s. 44). Ovšem žáci 9. ročníku základní školy, a taktéž studenti nižšího stupně gymnázia („kvarta“), si umějí s tímto problémem poradit, což si ukážeme později, a tudíž je definice goniometrických funkcí pomocí pravoúhlého trojúhelníku pro ně plně dostačující (Herman et al., 2005, s. 70-71).

2.1 Podobnost trojúhelníků

Použité pojmy a poznatky jsou čerpané z: (Herman et al., 2005, s. 28, 30-33; Molnár et al., ©2001, s. 45).



Obr. 1: Podobnost trojúhelníků $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ (Herman et al., 2005, s. 30)

Definice 2.1.

Dva trojúhelníky nazveme podobné, právě když poměry velikostí odpovídajících si stran trojúhelníků se sobě rovnají a odpovídající si vnitřní úhly jsou shodné.

Pro odpovídající si strany a vnitřní úhly podobných trojúhelníků platí rovnosti

$$\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2, \gamma_1 = \gamma_2,$$
$$a_2 : a_1 = b_2 : b_1 = c_2 : c_1.$$

Podobnost dvou trojúhelníků (obr. 1) zapisujeme ve tvaru:

$$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2.$$

Pro určení, zda jsou trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ podobné, se používají tři věty o podobnosti trojúhelníků:

Věta 2.1. (Věta sss)

Jestliže pro trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ platí rovnosti

$$\frac{|A_2B_2|}{|A_1B_1|} = \frac{|B_2C_2|}{|B_1C_1|} = \frac{|C_2A_2|}{|C_1A_1|},$$

pak jsou tyto trojúhelníky podobné: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$.

Slovně:

Mají-li dva trojúhelníky stejné všechny tři poměry odpovídajících si stran, jsou podobné.

Věta 2.2. (Věta uu)

Jestliže pro trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ platí rovnosti

$$\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2,$$

pak jsou tyto trojúhelníky podobné: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$.

Slovně:

Shodují-li se dva trojúhelníky ve dvou úhlech, jsou podobné.

Věta 2.3. (Věta sus)

Jestliže pro trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ platí rovnosti

$$\frac{|C_2A_2|}{|C_1A_1|} = \frac{|A_2B_2|}{|A_1B_1|}, \alpha_1 = \alpha_2,$$

pak jsou tyto trojúhelníky podobné: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$.

Slovně:

Mají-li dva trojúhelníky stejné dva poměry odpovídajících si stran a shodují-li se v úhlu jimi sevřeném, jsou podobné.

2.2 Funkce

Použité pojmy a poznatky jsou čerpané z: (Molnár et al., ©2001, s. 56-58).

Definice 2.2.

Funkce f je předpis, který každému prvku x z dané množiny $D(f)$ přiřazuje právě jedno reálné číslo y z množiny $H(f)$.

Poznámka:

a) Proměnná x je nezávisle proměnná a y závisle proměnná.
b) Místo proměnné y lze užít zápis $f(x)$, tzv. funkční hodnota proměnné x.
c) Množina $D(f)$ se nazývá definiční obor funkce f, množina $H(f)$ všech reálných čísel y se nazývá množina hodnot funkce f.
d) Funkci f lze definovat několika způsoby, např. tabulkou, grafem, rovnicí nebo výčtem funkčních hodnot.

Vlastnosti funkce f definujeme takto:

Definice 2.3. (rostoucí funkce)

Pro každé x_1, x_2 z $D(f)$ platí: jestliže $x_1 < x_2$, pak také $f(x_1) < f(x_2)$.

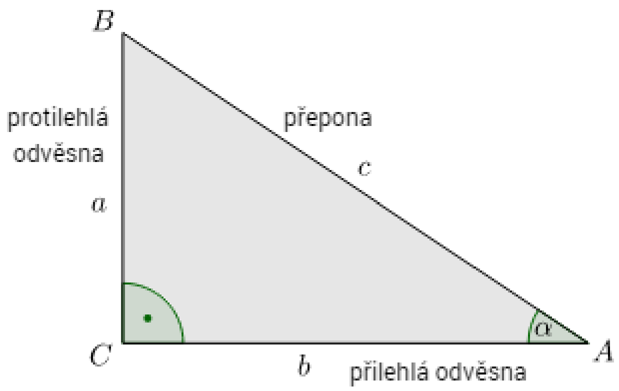
Definice 2.4. (klesající funkce)

Pro každé x_1, x_2 z $D(f)$ platí: jestliže $x_1 < x_2$, pak také $f(x_1) > f(x_2)$.

2.3 Goniometrické funkce ostrého úhlu

Použité pojmy a poznatky jsou čerpané z: (Herman et al., 2005, s. 70-79, 82-83, 92-93, 96-98; Molnár et al., ©2001, s. 68-69).

V podkapitolách 2.1 a 2.2 jsme připomněli, jaká kritéria musí splňovat dva trojúhelníky, aby byly podobné. Také jsme zavedli pojem funkce. Nyní se již zaměříme na čtyři základní goniometrické funkce: sinus, kosinus, tangens a kotangens. Budeme je definovat v pravoúhlém trojúhelníku, a též se pokusíme ukázat některé jejich vlastnosti.



Obr. 2: Pravoúhlý trojúhelník ABC (Herman et al., 2005, s. 69, 81)

Definice 2.5. (Funkce sinus)

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C definujeme $\sin\alpha$ jako poměr délek odvěsny protilehlé úhlu α a přepony.

Funkci sinus (obr. 2) zapisujeme tímto předpisem:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

Existují přinejmenším tři způsoby, jak můžeme určit hodnotu funkce sinus pro určitý úhel v intervalu $(0°, 90°)$:

1. rýsováním a měřením,
2. pomocí matematických tabulek,
3. užitím kalkulačky.

Tab. 1: Hodnoty funkce sinus (Herman et al., 2005, s. 70)

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$\sin \alpha$	0,17	0,34	0,50	0,64	0,77	0,87	0,94	0,98

Pokud bychom hodnoty funkce sinus zapsaly do tab. 1, můžeme z ní odvodit některé vlastnosti této funkce:

Věta 2.4.
Pro každé α, kde $\alpha \in (0°, 90°)$, platí $0 < \sin \alpha < 1$.

Poznámka:
Definičním oborem funkce sinus je zatím jen otevřený interval $(0°, 90°)$, množinou hodnot funkce sinus je otevřený interval $(0,1)$.

Věta 2.5.
Je-li $0° < \alpha < \beta < 90°$, pak $\sin \alpha < \sin \beta$.

Nyní se vrátíme k problému, který jsme již naznačili v úvodu této kapitoly. Funkci sinus jsme prozatím definovaly pouze na otevřeném intervalu $(0°, 90°)$. Abychom mohli funkci sinus definovat na uzavřeném intervalu $\langle 0°, 90° \rangle$, musíme přijmout úmluvu: $\sin 0° = 0$, $\sin 90° = 1$. Množinou hodnot pak bude uzavřený interval $\langle 0,1 \rangle$.

Definice 2.6. (Funkce kosinus)
V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C definujeme $\cos \alpha$ jako poměr délek odvěsny přilehlé k úhlu α a přepony.

Funkci kosinus (obr. 2) zapisujeme tímto přepisem:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

Tab. 2: Hodnoty funkce kosinus (Herman et al., 2005, s. 82)

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$\cos \alpha$	0,98	0,04	0,87	0,77	0,64	0,50	0,34	0,17

Z tab. 2 vyčteme, že platí:

Věta 2.6.

Pro každé α, kde $\alpha \in (0°, 90°)$, platí $0 < \cos\alpha < 1$.

Poznámka:

Definičním oborem funkce kosinus je opět prozatím jen otevřený interval $(0°, 90°)$ a množinou hodnot funkce je interval $(0,1)$. Po přijmutí úmluvy: $\cos 0° = 1$, $\cos 90° = 0$, můžeme funkci kosinus definovat na uzavřeném intervalu $\langle 0°, 90° \rangle$, přičemž množinou hodnot bude uzavřený interval $\langle 0,1 \rangle$.

Věta 2.7.

Je-li $0° \leq \alpha < \beta \leq 90°$, pak $\cos\alpha > \cos\beta$.

Definici 2.7. (Funkce tangens)

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C definujeme $\operatorname{tg}\alpha$ jako poměr délek odvěsny protilehlé úhlu α a odvěsny přilehlé úhlu α.

Funkci tangens (obr. 2) zapisujeme tímto přepisem:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

Tab. 3: Hodnoty funkce tangens (Chajda, 2012, s. 60)

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$\operatorname{tg}\alpha$	0,18	0,36	0,58	0,84	1,19	1,73	2,75	5,67

Z tab. 3 vyčteme, že platí:

Věta 2.8.

Je-li $0° < \alpha < \beta < 90°$, pak $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$.

Pro funkci tangens můžeme přijmout úmluvu: $\operatorname{tg}\alpha = 0°$. Ovšem úmluvu nemůžeme přijmout pro $\alpha = 90°$, protože v tomto úhlu funkce dosahuje nekonečna, a proto ji definujeme pouze pro interval $\langle 0°, 90°)$. Množinou hodnot funkce kosinus je tudíž interval $\langle 0, \infty)$.

Definici 2.8. (Funkce kotangens)

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C definujeme $\operatorname{cotg} \alpha$ jako poměr délek odvěsny přilehlé úhlu α a odvěsny protilehlé úhlu α.

Funkci kotangens (obr. 2) zapisujeme tímto přepisem:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Tab. 4: Hodnoty funkce kotangens (Chajda, 2012, s. 60)

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$\operatorname{cotg} \alpha$	5,67	2,75	1,73	1,19	0,84	0,58	0,36	0,18

Z tab. 4 vyčteme, že platí:

Věta 2.9.

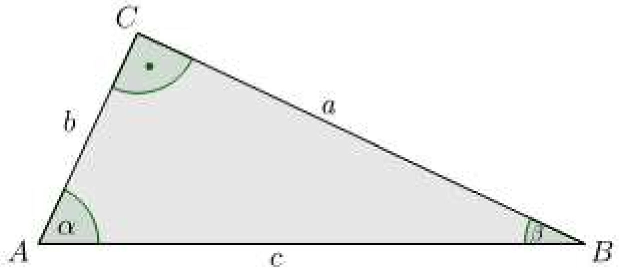
Je-li $0° < \alpha < \beta < 90°$, pak $\operatorname{cotg} \alpha > \operatorname{cotg} \beta$.

Obdobně jako pro předchozí goniometrické funkce můžeme přijmout úmluvu pro funkci kotangens a platí: $\operatorname{cotg} 90° = 0$. Pak je ale nutné uvědomit si, že funkce kotangens bude pro $\alpha = 0°$ dosahovat nekonečna, a proto tuto funkci definujeme pouze pro interval $(0°, 90°\rangle$. Množinou hodnot funkce kotangens je tudíž interval $\langle 0, \infty)$.

2.4 Vztahy mezi goniometrickými funkcemi ostrého úhlu

Použité pojmy a poznatky jsou čerpané z: (Herman et al., 2005, s. 103-108).

Mezi goniometrickými funkcemi sinus, kosinus, tangens a kotangens můžeme definovat několik vztahů. Tyto goniometrické vztahy nám značně ulehčují matematické výpočty s těmito funkcemi, např. známe-li hodnotu funkce $\sin\alpha$, můžeme pomocí nich snadno určit hodnoty zbývajících goniometrických funkcí.



Obr. 3: Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C (Herman et al., 2005, s. 104)

Věta 2.10.

Pro každé $\alpha \in (0°, 90°)$ platí:

$$\sin\alpha = \cos\,(90° - \alpha),$$
$$\cos\alpha = \sin\,(90° - \alpha),$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{cotg}\,(90° - \alpha),$$
$$\mathrm{cotg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,(90° - \alpha).$$

Poznámka:

Vztahy pro sinus a kosinus platí pro $\alpha \in \langle 0°, 90° \rangle$.

Důkaz:

V obecném trojúhelníku ABC pro jeho úhly platí: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Ovšem v případě pravoúhlého trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C (obr. 3) můžeme psát $\alpha + \beta = 90°$, protože úhel $\gamma = 90°$. Říkáme, že úhel α je doplňkový úhel k úhlu β a naopak.

V pravoúhlém trojúhelníku ABC (obr. 3) dále platí:

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha = \cos\beta,$$
$$\frac{b}{c} = \cos\alpha = \sin\beta,$$
$$\frac{a}{b} = \mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{cotg}\,\beta,$$
$$\frac{b}{a} = \mathrm{cotg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\beta.$$

Vyjádříme-li ze vztahu $\alpha + \beta = 90°$ úhel β $(\beta = 90° - \alpha)$ a dosadíme-li jej postupně do předchozích rovností, dostaneme:

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha),$$
$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha),$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}(90° - \alpha),$$
$$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha). \bullet$$

Věta 2. 11.

Pro každé $\alpha \in (0°, 90°)$ platí:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}, \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Důkaz:

Pro pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C (obr. 3) platí:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Pokud takto vyjádřené funkce dosadíme do pravé a levé strany rovnosti

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha},$$

dostáváme

$$L = \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},$$
$$P = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{a}{b},$$
$$L = P.$$

Obdobně pro

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a},$$

dostáváme

$$L = \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a},$$
$$P = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a},$$
$$L = P. \bullet$$

Věta 2.12.

Pro každé $\alpha \in (0°, 90°)$ platí:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Důkaz:

Pro pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C (obr. 3) platí:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \cos\alpha = \frac{b}{c},$$

a taktéž

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Z předpisů funkcí sinus a kosinus pro strany a a b pravoúhlého trojúhelníku plyne:

$$a = c \cdot \sin\alpha, b = c \cdot \cos\alpha.$$

Pak pro funkce tangens a kotangens platí:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{c \cdot \sin\alpha}{c \cdot \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

a

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{c \cdot \cos\alpha}{c \cdot \sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \bullet$$

Věta 2.13.

Pro každé $\alpha \in \langle 0°, 90° \rangle$ platí:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Důkaz:

Pro $\alpha \in (0°, 90°)$ v pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C (obr. 3), jak jsme již uvedli v předchozím důkazu, platí:

$$a = c \cdot \sin\alpha, b = c \cdot \cos\alpha.$$

Pokud takto vyjádřené délky strany a a b pravoúhlého trojúhelníku ABC dosadíme do Pythagorovy věty a postupně rovnost upravíme, dostaneme:

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

$$c^2 = (c \cdot \sin\alpha)^2 + (c \cdot \cos\alpha)^2,$$

$$c^2 = c^2 \cdot \sin^2\alpha + c^2 \cdot \cos^2\alpha,$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Pro $\alpha = 0°$ platí:

$$\sin 0° = 0 \text{ a } \cos 0° = 1.$$

Pokud tyto hodnoty dosadíme do pravé a levé strany rovnosti, dostaneme:

$$L = 0^2 + 1^2 = 1,$$

$$P = 1,$$

$$L = P.$$

Pro $\alpha = 90°$ platí:

$$\sin 90° = 1 \text{ a } \cos 90° = 0.$$

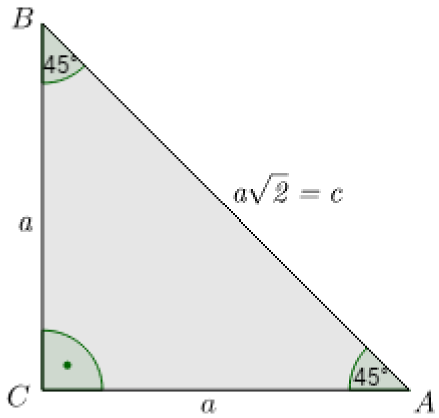
Opět po dosazení do pravé a levé strany rovnosti dostáváme:

$$L = 1^2 + 0^2 = 1,$$
$$P = 1,$$
$$L = P. \bullet$$

2.5 Vybrané hodnoty goniometrických funkcí

Použité pojmy a poznatky jsou čerpané z: (Herman et al., 2005, s. 103-108).

Některé hodnoty základních goniometrických funkcí sinus, kosinus, tangens a kotangens pro ostré úhly nemusíme hledat v matematických tabulkách, nebo je počítat na kalkulačce. Můžeme je snadno určit z rovnoramenného pravoúhlého a rovnostranného trojúhelníku.



Obr. 4: Pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC (Molnár et al., ©2001, s. 75)

Pomocí pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C (obr. 4) můžeme vypočítat hodnoty základních goniometrických funkcí pro úhel $\alpha = 45°$. Podle Pythagorovy věty pro rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ABC platí:

$$c^2 = a^2 + a^2,$$
$$c^2 = 2a^2,$$
$$c = \sqrt{2a^2},$$
$$c = a\sqrt{2}.$$

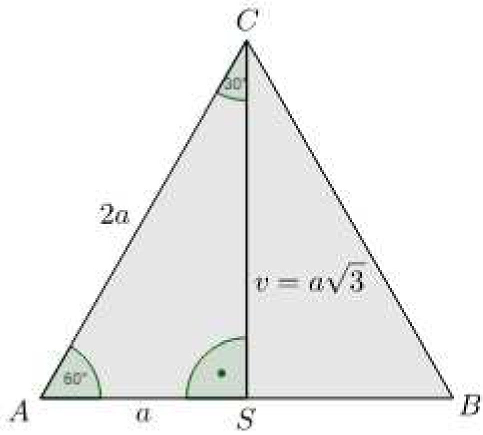
Hodnoty sin 45°, cos 45°, tg 45° a cotg 45° dopočítáme z již dříve uvedených vzorců pro výpočet goniometrických funkcí:

$$\sin 45° = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45° = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{a}{a} = 1,$$

$$\operatorname{cotg} 45° = \frac{a}{a} = 1.$$



Obr. 5: Rovnostranný trojúhelník ABC (Molnár et al., ©2001, s. 75)

Pro odvození goniometrických hodnot funkcí úhlu $\alpha = 60°$ a $\delta = 30°$ opět využijeme Pythagorovy věty. Tentokrát ale nebudeme pracovat s celým rovnostranným trojúhelníkem ABC, ale pouze s pravoúhlým trojúhelníkem ASC (obr. 5). Pro výpočet odvěsny v pak platí:

$$(2a)^2 = a^2 + v^2,$$

$$4a^2 = a^2 + v^2,$$

$$3a^2 = v^2,$$

$$v = \sqrt{3a^2},$$

$$v = a\sqrt{3}.$$

Hodnoty základních goniometrických funkcí pro ostrý úhel $\alpha = 60°$ jsou:

$$\sin 30° = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30° = \frac{v}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{a}{v} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{cotg}\,30° = \frac{v}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}.$$

A pro úhel $\delta = 30°$ platí:

$$\sin 60° = \frac{v}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60° = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$

$$\text{tg}\,60° = \frac{v}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3},$$

$$\text{cotg}\,60° = \frac{a}{v} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Často je velmi výhodné z vybraných hodnot goniometrických funkcí sestavit tab. 5. Takto vyjádřené hodnoty jsou přesné a výpočty s nimi nejsou zatíženy zaokrouhlováním, jak by to bylo v případě, kdybychom jejich hodnoty hledali např. v matematických tabulkách.

Tab. 5: Významné hodnoty goniometrických funkcí (Herman et al., 2005, s. 112)

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\text{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\text{cotg}\,\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

3 Zavedení goniometrických funkcí pomocí jednotkové kružnice

Zavedení základních goniometrických funkcí sinus, kosinus, tangens a kotangens pomocí pravoúhlého trojúhelníku má své limity, jak jsme uvedli v předchozí kapitole, a proto je vhodnější přistoupit k dalšímu způsobu definice goniometrických funkcí pomocí jednotkové kružnice, který tyto nedostatky odstraní. Pojem samotné jednotkové kružnice nám ale k zavedení goniometrických funkcí nestačí, a proto musíme taktéž definovat pojem orientovaného úhlu. Tento způsob definice goniometrických funkcí používají studenti středních škol (Polák, 1998, s. 145, 148-149).

3.1 Jednotková kružnice, oblouková a stupňová míra

Použité pojmy a poznatky jsou čerpané z: (Odvárko, 1996, s. 21-22; Polák, 1998, s. 146).

Definice 3.1.

Jednotkovou kružnicí rozumíme kružnici k se středem S a poloměrem 1, jejíž délka je 2π.

Definice 3.2.

Radián je středový úhel, který přísluší na jednotkové kružnici oblouku o délce 1.

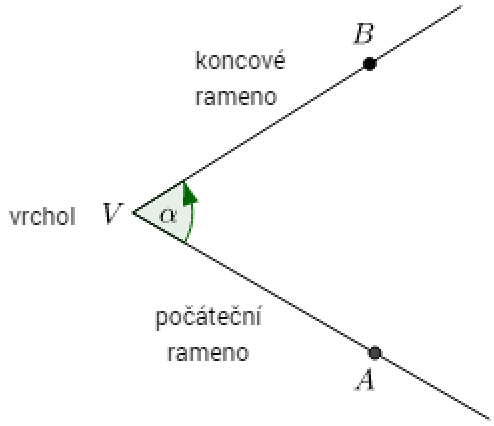
Poznámka:

Radián se používá jako základní jednotka obloukové míry úhlů (zapisujeme 1 rad). Oproti tomu, základní jednotkou stupňové míry úhlů je 1 úhlový stupeň (zapisujeme 1°). Dalšími jednotkami jsou 1 úhlová minuta (zapisujeme $1'$) a 1 úhlová vteřina (zapisujeme $1''$). Pro úhly, jejichž velikost uvádíme ve stupňové míře, platí: $1° = 60' = 3600''$. Vycházíme-li z předpokladu, že $2\pi\ rad = 360°$, pak pro převody mezi obloukovou a stupňovou mírou úhlů platí:

$$1\ rad = \frac{180°}{\pi} \doteq\ 57°\ 17'45'', 1° = \frac{\pi}{180}\ rad.$$

3.2 Orientovaný úhel

Použité pojmy a poznatky jsou čerpané z: (Odvárko, 1996, s. 26-31).



Obr. 6: Orientovaný úhel AVB

Definice 3.3.

Uspořádaná dvojice polopřímek VA, VB se společným počátkem V se nazývá orientovaný úhel AVB (obr. 6). Tento úhel se zapisuje $\widehat{AVB}$. Polopřímka VA se nazývá počáteční rameno, polopřímka VB koncové rameno orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$, bod V vrchol orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$.

Definice 3.4.

Velikost úhlu, který opíše polopřímka při otočení z počátečního ramene VA do koncového ramene VB v kladném smyslu, se nazývá základní velikost orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$.

Poznámka:

a) Za kladný smysl otáčení považujeme pohyb ramene VA proti směru hodinových ručiček. Pro záporný smysl otáčení platí opak.
b) Nulový orientovaný úhel $\widehat{AVB}$ je úhel, jehož základní velikost je rovna 0, a jehož polopřímky VA a VB jsou totožné.

Věta 3.1.

Pro základní velikost α každého orientovaného úhlu platí

$$0 \leq \alpha < 2\pi, \text{resp. } 0° \leq \alpha < 360°.$$

Definice 3.5.

Velikostí orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$, jehož základní velikost v obloukové míře je α, se nazývá každé číslo $\alpha + k \cdot 2\pi$, kde k je libovolné celé číslo.

Poznámka:

Obdobně ve stupňové míře úhlů platí $\alpha + k \cdot 360°$, kde $k \in Z$.

Věta 3.2.

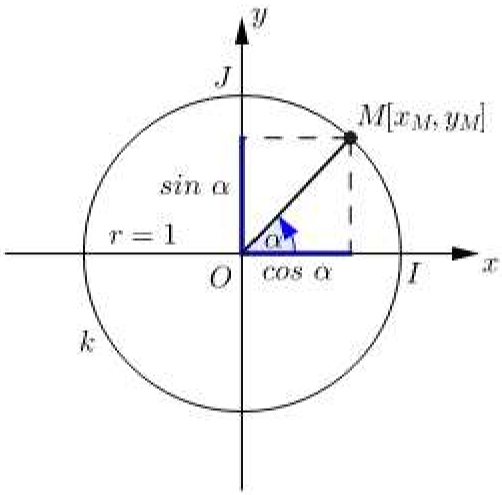
Je-li φ jedna z velikostí orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$, pak množina všech čísel, která lze psát ve tvaru $\varphi + k \cdot 2\pi$ $(k \in Z)$, je rovna množině všech velikostí úhlu $\widehat{AVB}$.

Věta 3.3.

Je-li v rovině dána polopřímka VA a je-li dáno libovolné reálné číslo x, pak v této rovině existuje právě jeden orientovaný úhel $\widehat{AVB}$, jehož jedna velikost v obloukové míře je x.

3.3 Goniometrické funkce v jednotkové kružnici

Použité pojmy a poznatky jsou čerpané z: (Odvárko, 1996, s. 34-35, 38, 50-52; Polák, 2012, s. 167, 170, 172, 174).



Obr. 7: Orientovaný úhel v jednotkové kružnici (Polák, 2012, s. 166)

Pro definici goniometrických funkcí pomocí jednotkové kružnice (obr. 7) provedeme konstrukci. Do kartézské soustavy souřadnic Oxy, kde mají osy x, y

stejné jednotky, umístíme orientovaný úhel velikosti α v základní poloze, pro jehož počáteční rameno $\overrightarrow{OI}$ platí $I\,[1{,}0]$, a jednotkovou kružnici k se středem O. Získáváme bod $M[x_M, y_M]$, který vznikl protnutím koncového ramena $\overrightarrow{OM}$ orientovaného úhlu o velikosti α s jednotkovou kružnicí k.

Poznámka:

Dále budeme značit hodnotu proměnné (velikost orientovaného úhlu) x.

Definice 3.6.

Funkcí sinus se nazývá funkce na množině R, kterou je každému $x \in R$ přiřazeno číslo y_M neboli $\sin x = y_M$.

Funkci sinus zapisujeme tímto předpisem:

$$f: y = \sin x\,, D(f) = R.$$

Definice 3.7.

Funkcí kosinus se nazývá funkce na množině R, kterou je každému $x \in R$ přiřazeno číslo x_M neboli $\cos x = x_M$.

Funkci kosinus zapisujeme tímto předpisem:

$$f: y = \cos x\,, D(f) = R.$$

Poznámka:

Grafem funkce sinus je tzv. sinusoida a grafem funkce kosinus je tzv. kosinusoida.

Důkazy následujících vět jsou přímým důsledkem definice goniometrických funkcí pomocí jednotkové kružnice.

Věta 3.4.

Pro každé $k \in Z$ a pro každé $x \in R$ je

$$\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x,$$

$$\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x.$$

Poznámka:

Při vyšetřování průběhu funkcí sinus a kosinus na množině R si vystačíme pouze s intervalem $\langle 0,2\pi)$, protože tyto funkce jsou periodické s periodou 2π.

Věta 3.5.

Pro každé $x \in R$ je

$$\sin(-x) = -\sin x,$$
$$\cos(-x) = \cos x.$$

Věta 3.6.

Pro každé $x \in R$ platí, že

$$-1 \leq \sin x \leq 1, -1 \leq \cos x \leq 1.$$

Poznámka:

Funkce sinus i kosinus jsou shora i zdola omezené, jejich obory hodnot jsou v intervalu $\langle -1,1\rangle$, přičemž 1 je jejich globálním maximem a -1 globálním minimem.

Definice 3.8.

Funkcí tangens se nazývá funkce daná vztahem

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}, \text{kde } \cos x \neq 0.$$

Funkci tangens zapisujeme tímto předpisem:

$$f: y = \operatorname{tg} x, D(f) = R \setminus \bigcup_{k\in Z} \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\} = \bigcup_{k\in Z} \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Definice 3.9.

Funkcí kotangens se nazývá funkce daná vztahem

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \text{kde } \sin x \neq 0.$$

Funkci kotangens zapisujeme tímto předpisem:

$$f: y = \operatorname{cotg} x, D(f) = R \setminus \bigcup_{k\in Z} \{k\pi\} = \bigcup_{k\in Z} \big((k-1)\pi, k\pi\big).$$

Poznámka:

Grafem funkce tangens je tzv. tangentoida a grafem funkce kotangens je tzv. kotangentoida.

Věta 3.7.

Pro každé reálné číslo $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, kde $k \in Z$, je

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x.$$

Důkaz:

Abychom mohli dokázat, že funkce tangens je lichou funkcí, musí platit podmínka: každé $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, kde $k \in Z$. Pak už levou stranu rovnosti vyjádříme podle definice 3.8., přičemž využijeme toho, že funkce kosinus je sudou funkcí a sinus lichou, pak dostáváme:

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x. \bullet$$

Věta 3.8.

Pro každé reálné číslo $x \neq k\pi$, kde $k \in Z$, je

$$\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x.$$

Důkaz:

Postup z důkazu věty 3.7. můžeme aplikovat i na funkci kotangens a dokázat tak, že funkce kotangens je lichá. Tentokrát musí být $x \neq k\pi$, kde $k \in Z$. Pak

$$\operatorname{cotg}(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\operatorname{cotg} x. \bullet$$

Věta 3.9.

Pro každé reálné číslo $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, kde $k \in Z$, platí

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x.$$

Věta 3.10.

Pro každé reálné číslo $x \neq k\pi$, kde $k \in Z$, platí

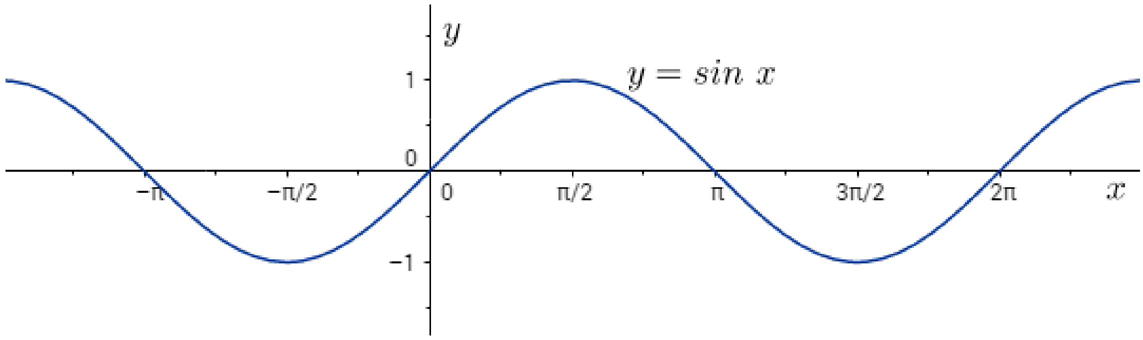
$$\operatorname{cotg}(x + k\pi) = \operatorname{cotg} x.$$

Poznámka:

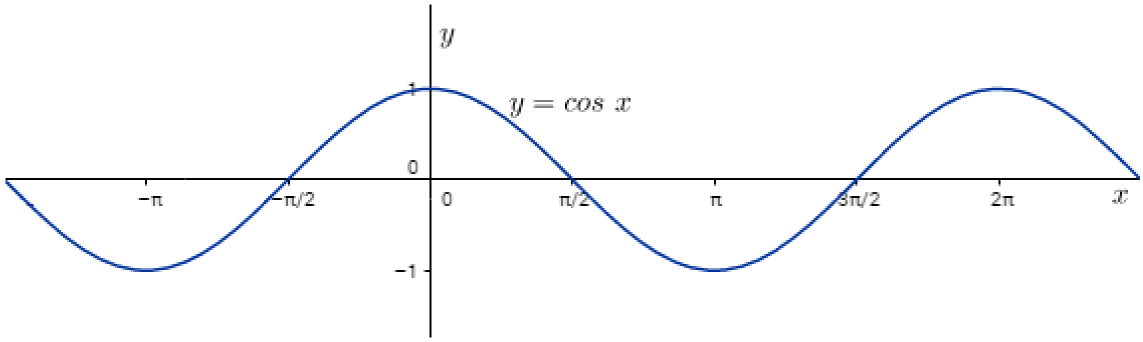
Funkce tangens a kotangens jsou periodické, jejich primitivní perioda je π.

3.4 Grafy goniometrických funkcí

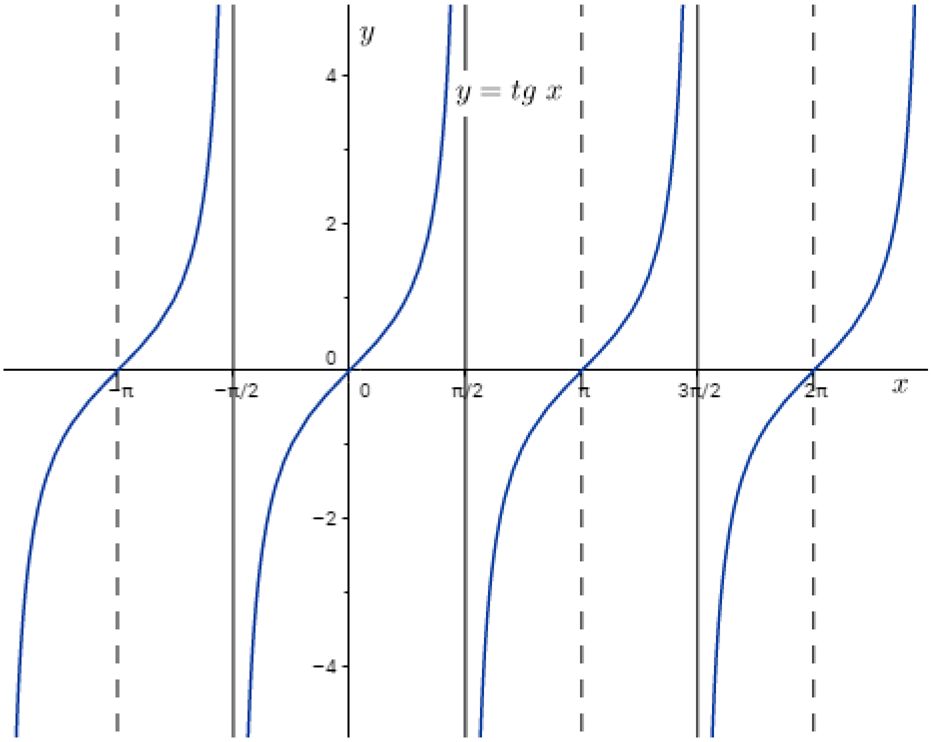
Existuje velké množství počítačových programů pomocí níž lze vytvářet grafy goniometrických funkcí. Následující grafy základních goniometrických funkcí sinus (obr. 8), kosinus (obr. 9), tangens (obr. 10) a kotangens (obr. 11) jsou vytvořeny pomocí počítačového programu GeoGebra.



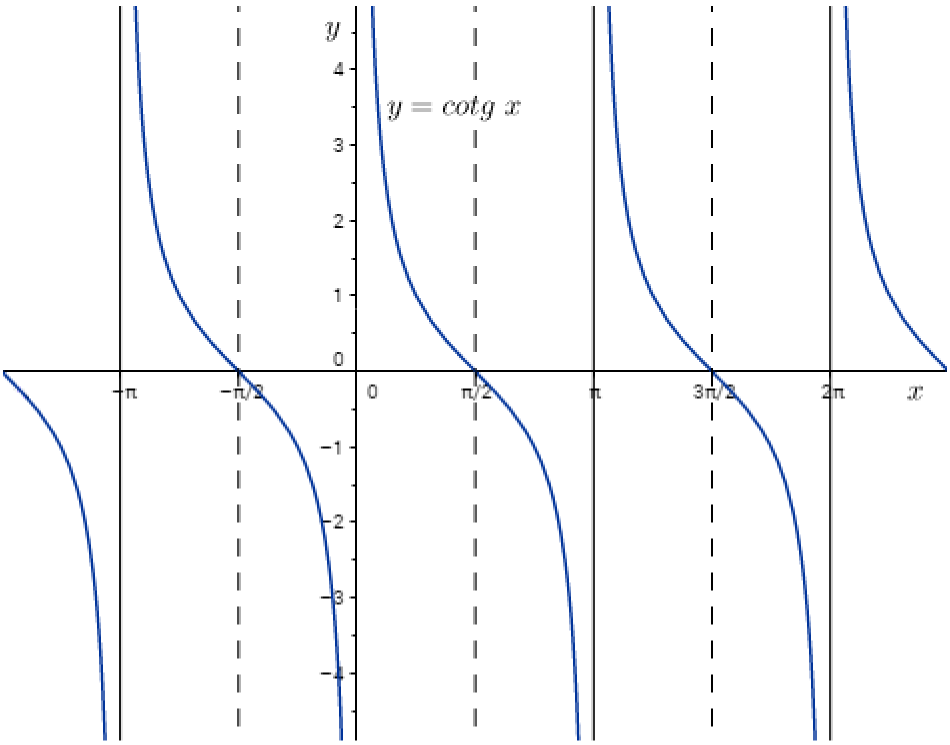
Obr. 8: Sinusoida (Polák, 2012, s. 168)



Obr. 9: Kosinusoida (Polák, 2012, s. 168)



Obr. 10: Tangentoida (Polák. 2012, s. 172)



Obr. 11: Kotangentoida (Polák, 2012, s. 172)

3.5 Vlastnosti goniometrických funkcí

Pro celkový přehled shrňme vlastnosti základních goniometrických funkcí do tab. 6:

Tab. 6: Vlastnosti goniometrických funkcí (Odvárko, 1996, str. 59; Polák, 2012, str. 169, 173)

Vlastnosti funkce	$\mathrm{y} = \sin x$	$\mathrm{y} = \cos x$	$\mathrm{y} = \mathrm{tg}\, x$	$\mathrm{y} = \mathrm{cotg}\, x$
Definiční obor funkce	R	R	$\{x \in R;\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\}$	$\{x \in R; x \neq k\pi\}$
Obor funkčních hodnot	$\langle -1; 1\rangle$	$\langle -1; 1\rangle$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
Sudost, lichost funkce	lichá	sudá	lichá	lichá
Periodičnost funkce	periodická s periodou $2k\pi$	periodická s periodou $2k\pi$	periodická s periodou $k\pi$	periodická s periodou $k\pi$
(Ne)omezenost funkce	shora i zdola omezená	shora i zdola omezená	není ani shora, ani zdola neomezená	není ani shora, ani zdola neomezená
Intervaly, v nichž je funkce rostoucí	$\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle$	$\langle -\pi + 2k\pi, 2k\pi\rangle$	$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$	–
Intervaly, v nichž je funkce klesající	$\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\rangle$	$\langle 2k\pi, \pi + 2k\pi\rangle$	–	$(k\pi, \pi + k\pi)$
Maximum funkce v bodě	$y = 1$ pro $x = (4k+1)\frac{\pi}{2}$	$y = 1$ pro $x = 2k\pi$	–	–
Minimum funkce v bodě	$y = -1$ pro $x = (4k-1)\frac{\pi}{2}$	$y = -1$ pro $x = (2k-1)\pi$	–	–
Body, ve kterých jsou funkční hodnoty nulové ($y = 0$)	$x = k\pi$	$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$	$x = k\pi$	$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$
Intervaly, v nichž jsou funkční hodnoty kladné ($y > 0$)	$(2k\pi, \pi + 2k\pi)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$	$\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$	$\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$
Intervaly, v nichž jsou funkční hodnoty záporné ($y < 0$)	$(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)$	$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\right)$	$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\right)$

3.6 Goniometrické vztahy

Použité pojmy a poznatky jsou čerpané z: (Herman et al., 2005, s. 108; Odvárko, 1996, s. 71-73, 76-80, 83-86).

V první kapitole jsme již uvedli některé vztahy pro goniometrické funkce, které jsme vyjádřili pro hodnoty proměnné odpovídající velikostem ostrých úhlů. Protože jsme již zavedli goniometrické funkce pomocí jednotkové kružnice, můžeme vyjádřit goniometrické vztahy pro jakékoliv reálné proměnné z definičního oboru příslušných funkcí.

Věta 3.11.

Pro každé $x \in R$ je

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{3.1}$$

Důkaz:

V případě důkazu tohoto vzorce je vhodné si vzpomenout, jak jsme definovali goniometrické funkce pomocí jednotkové kružnice a na některé vlastnosti funkcí sinus a kosinus. Samotný princip důkazu spočívá v tom, že do jednotkové kružnice v kartézské soustavě souřadnic umístíme orientovaný úhel o velikosti x v základní poloze, protnutím koncového ramene tohoto úhlu a jednotkové kružnice dostáváme bod, jehož první souřadnicí je $\cos x$ a druhou $\sin x$ (viz obr. 7), pak již stačí použít Pythagorovou větu, přičemž velikost přepony je 1, a daný vzorec je dokázán pro interval $\langle 0, 2\pi)$. Protože jsou funkce sinus a kosinus periodické, platí vzorec pro každé reálné číslo. •

Věta 3.12.

Pro každé $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, kde $k \in Z$, je

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1.$$

Důkaz:

Důkaz tohoto vzorce je velmi jednoduchý. Pokud bude platit podmínka, že pro každé $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, kde $k \in Z$, můžeme do vzorce dosadit podle definice funkcí tangens a kotangens:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

a pak dostáváme:

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1. \bullet$$

Věta 3.13. (Součtové vzorce)

Pro každá dvě reálná čísla x, y platí:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \tag{3.3}$$

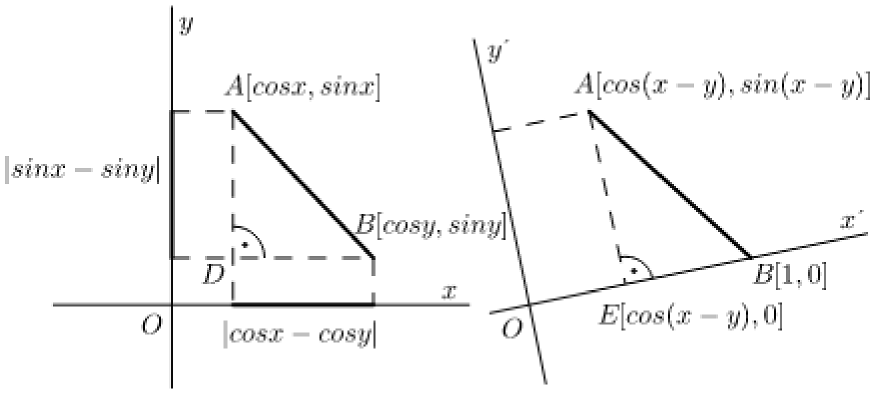
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \tag{3.4}$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y. \tag{3.5}$$

Důkaz:

Důkazy součtových vzorců jsou složitější, a proto zde naznačíme důkaz pouze jednoho z nich (3.5). Samotný důkaz musíme rozdělit do čtyř částí. V prvních třech bodech se omezíme pouze na interval $\langle 0, 2\pi)$ podobně jako v případě důkazu vzorce (3.1), protože budeme opět pracovat s jednotkovou kružnicí a orientovaným úhlem. Poté se zaměříme na ostatní reálná čísla mimo tento interval, přičemž opět využijeme toho, že jsou funkce sinus a kosinus periodické.



Obr. 12: Otočení kartézské soustavy souřadnic (Odvárko, 1996, s. 77)

$\mathbf{cos}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}\,\mathbf{cos}\,\boldsymbol{y} - \mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{y}$

1. Pro $x > y \ \wedge \ x, y \in \langle 0, 2\pi)$:

Do jednotkové kružnice v kartézské soustavě souřadnic umístíme dva orientované úhly x a y v základní poloze. Protnutím koncových ramen těchto orientovaných úhlů dostaneme postupně dva body $A\,[\cos x\,, \sin x]$ a $B\,[\cos y\,, \sin y]$. Podle obr. 12 s využitím Pythagorovy věty píšeme:

$$|AB|^2 = |\cos y - \cos x|^2 + |\sin x - \sin y|^2,$$
$$|AB|^2 = (\cos y - \cos x)^2 + (\sin x - \sin y)^2,$$
$$|AB|^2 = 2(1 - \cos x \cos y - \sin x \sin y).$$

Tento výpočet nám ale pro dokázání rovnosti nestačí, a proto otočíme kartézskou soustavu souřadnic o úhel y (obr. 12). Pak mají body A a B nové souřadnice ($A[\cos(x-y), \sin(x-y)], B[1,0]$) a můžeme podle Pythagorovy věty psát:

$$|AB|^2 = |1 - \cos(x-y)|^2 + |\sin(x-y)|^2,$$
$$|AB|^2 = [1 - \cos(x-y)]^2 + [\sin(x-y)]^2,$$
$$|AB|^2 = 2[1 - \cos(x-y)].$$

Nyní již stačí obě rovnosti pro $|AB|^2$ porovnat a dostáváme:

$$2(1 - \cos x \cos y - \sin x \sin y) = 2[1 - \cos(x-y)],$$
$$1 - \cos x \cos y - \sin x \sin y = 1 - \cos(x-y),$$
$$\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x-y).$$

Zbývá ověřit platnost rovnosti i pro případy, kdy je $x = y$, $x < y$ nebo $x, y \in R$.

2. Pro $x = y \ \wedge \ x, y \in \langle 0, 2\pi)$ platí:

$$\cos x \cos x + \sin x \sin x = \cos(x - x),$$
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

To znamená, že pro $x = y$ je daná rovnost platná.

3. Pro $x < y \ \wedge \ x, y \in \langle 0, 2\pi)$ platí:

$$\cos(x-y) = \cos[-(y-x)] = \cos(y-x) =$$
$$= \cos y \cos x + \sin y \sin x.$$

Při důkazu jsme využili toho, že funkce kosinus je sudá. Dokazovaná rovnost pro $x < y$ platí.

4. Pro $x, y \in R$:

vzorec platí pro libovolná reálná $x, y \in R$, protože obě funkce jsou periodické. Např. zvolíme-li $x_0, y_0 \in \langle 0, 2\pi)$ a $k, m \in Z$, pak píšeme:

$$x = x_0 + 2k\pi \text{ a } y = y_0 + 2m\pi.$$

Pro ověření dosazujeme:

$$\cos(x-y) = \cos[(x_0+2k\pi)-(y_0+2m\pi)] = \cos[(x_0-y_0)+(k-m)2\pi] =$$
$$= \cos(x_0-y_0),$$

$$\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x_0+2k\pi)\cdot\cos(y_0+2m\pi) =$$
$$+\sin(x_0+2k\pi)\cdot\cos(y_0+2m\pi) =$$
$$= \cos x_0 \cos y_0 + \sin x_0 \sin y_0.$$

Protože $\cos(x_0-y_0) = \cos x_0 \cos y_0 + \sin x_0 \sin y_0$, platí i dokazovaná rovnost pro libovolná reálná $x, y \in R$. •

Věta 3.14.

Pro každé reálné číslo x platí:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x,$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x. \tag{3.6}$$

Důkaz:

Pro důkaz těchto vzorců použijeme součtové vzorce pro sinus (3.3) a pro kosinus (3.4), přičemž za y budeme dosazovat x.

Pro $\boldsymbol{\sin 2x = 2\sin x\cos x}$ platí:

$$\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x\cdot\cos x + \cos x\cdot\sin x = 2\sin x\cos x$$

a pro $\boldsymbol{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$ platí:

$$\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x. \bullet$$

Věta 3.15.

Pro každé reálné číslo x platí:

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},$$
$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

Důkaz:

Pro důkaz goniometrických vztahů pro poloviční argument sinu a kosinu využijeme předchozí vztahy pro dvojnásobný argument kosinu (3.6) a tzv. goniometrickou jedničku (3.1).

Pro $\left|\mathbf{sin}\,\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}\right| = \sqrt{\frac{\mathbf{1-cos}\,\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}}$ pak platí:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x,$$

pokud vzorec upravíme, vyjádříme $\sin x$ a dosadíme za x poloviční argument, dostáváme:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \to |\sin x| = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} \to \left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}.$$

Pro $\left|\mathbf{cos}\,\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}\right| = \sqrt{\frac{\mathbf{1+cos}\,\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}}$ je postup obdobný:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1,$$

pak

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \to |\cos x| = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} \to \left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}. \bullet$$

Věta 3.16.

Pro každá dvě reálná čísla x, y platí:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}.$$

Důkaz:

Princip důkazu všech těchto rovností je podobný, a proto si podrobně ukážeme důkaz jen jedné z nich. Podíváme-li se na pravé strany vzorců, můžeme usoudit, že je pro nás výhodné vyjádřit x a y v tomto tvaru:

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2},\ y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$$

a pak takto vyjádřené proměnné x a y dosadit do levé strany rovnosti a výraz dále upravovat, přičemž využijeme součtové vzorce pro sinus a kosinus.

Pro $\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x} - \mathbf{sin}\,\boldsymbol{y} = \mathbf{2}\,\mathbf{cos}\,\frac{\boldsymbol{x+y}}{\mathbf{2}}\cdot\mathbf{sin}\,\frac{\boldsymbol{x-y}}{\mathbf{2}}$ pak platí:

$$\sin x - \sin y = \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) =$$

$$= \left[\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right] -$$
$$- \left[\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right] =$$
$$= \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) -$$
$$- \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) =$$
$$= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right). \bullet$$

3.7 Goniometrické funkce v obecném trojúhelníku

Použité pojmy a poznatky jsou čerpané z: (Odvárko, 1996, s. 90, 96-99, 102-103, 117; Polák, 2012, s. 442-443, 445-446).

Studenti středních škol se běžně setkávají s matematickými či fyzikálními úlohami, kde potřebují pracovat nejen s pravoúhlým trojúhelníkem, ale též s trojúhelníkem obecným. Proto je užitečné odvodit dvě matematické (tzv. trigonometrické) věty, které jim takovéto výpočty umožňují.

Věta 3.17. (Věta sinová)

Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a vnitřní úhly velikosti α, β, γ, platí:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r,$$

kde r je poloměr kružnice opsané trojúhelníku, neboli

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

tj. poměr délek stran trojúhelníku se rovná poměru sinů velikostí příslušných protilehlých úhlů.

Věta 3.18. (Věta kosinová)

Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a vnitřní úhly velikosti α, β, γ, platí:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Poznámka:

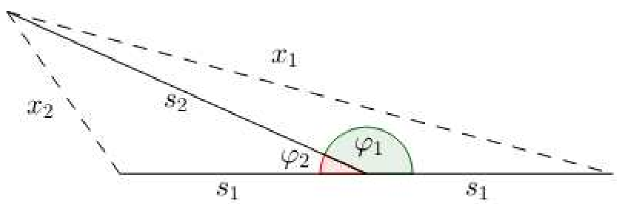
Kosinová věta je zobecněním Pythagorovy věty, protože pro $\gamma = 90°$ platí $\cos 90° = 0$, z čehož vyplývá $c^2 = a^2 + b^2$.

Při řešení trigonometrických úloh v obecném trojúhelníku se rozhodujeme, kterou trigonometrickou větu použít podle toho, co máme zadáno, např. máme-li zadány dvě strany a úhel, který je naproti jedné z těchto stran, použijeme větu sinovou. Oproti tomu je typickým příkladem na použití věty kosinové určení všech vnitřních úhlů trojúhelníku, přičemž máme zadány pouze délky jeho stran. Zatímco věta kosinová dává jednoznačný výsledek, u věty sinové to tak být nemusí. Při řešení trigonometrických úloh nesmíme opomenout další věty o vlastnostech trojúhelníků, jako jsou např. trojúhelníková nerovnost nebo věta o součtu vnitřních úhlů trojúhelníku.

Úloha 3.1.

Ze stanice vyjedou současně dva vlaky po přímých tratích, které svírají úhel $\varphi = 156°30'$. Rychlost prvního vlaku je $v_1 = 13\ m \cdot s^{-1}$, rychlost druhého vlaku $v_2 = 14{,}5\ m \cdot s^{-1}$. Jak daleko budou od sebe za $5\frac{1}{2}$ minuty?

Řešení:



Obr. 13: Náčrt k úloze 3.1.

Pro lepší představu je vhodné nakreslit si jednoduchý náčrt (obr. 13). Z hodin fyziky známe vzorec pro vypočítání dráhy: $s = v \cdot t$ a pomocí tohoto vzorce dopočítáme velikost dráhy s_1a s_2, kterou vlaky urazí, ale nesmíme zapomenout dosadit za čas t v sekundách (dosazujeme v základních jednotkách), a pak dostáváme:

$$s_1 = v_1 \cdot t \rightarrow s_1 = 13 \cdot 330\ m = 4290\ m,$$

$$s_2 = v_2 \cdot t \rightarrow s_2 = 14{,}5 \cdot 330\ m = 4785\ m.$$

Protože v úloze nemáme blíže uvedeno, kterým směrem vlaky pojednou, musíme počítat s oběma variantami a dopočítat ještě úhel φ_2. Při výpočtech vzdáleností obou vlaků použijeme kosinovou větu, protože již máme vyjádřené velikosti dvou stran trojúhelníku a úhel, který tyto dvě strany svírají.

Pro $\varphi_1 = 156°30'$ platí:

$$x_1{}^2 = s_1{}^2 + s_2{}^2 - 2s_1s_2\cos\varphi_1 \to x_1 = \sqrt{s_1{}^2 + s_2{}^2 - 2s_1s_2\cos\varphi_1}$$

a po dosazení je:

$$x_1 = \sqrt{(4290)^2 + (4785)^2 - 2\cdot 4290\cdot 4785\cdot\cos(156°30')}\,m \to x_1 \approx 8885\,m.$$

A pro $\varphi_2 = 180° - 156°30' = 23°30'$ platí:

$$x_2{}^2 = s_1{}^2 + s_2{}^2 - 2s_1s_2\cos\varphi_2 \to x_2 = \sqrt{s_1{}^2 + s_2{}^2 - 2s_1s_2\cos\varphi_2}$$

a po dosazení je:

$$x_2 = \sqrt{(4290)^2 + (4785)^2 - 2\cdot 4290\cdot 4785\cdot\cos(23°30')}\,m \to x_2 \approx 1911\,m.$$

Úloha má dvě řešení, vlaky jsou od sebe vzdáleni přibližně 8885 m nebo 1911 m.

3.8 Cyklometrické funkce

Použité pojmy a poznatky jsou čerpané z: (Polák, 2012, s. 139-140, 198-199).

Pro definice cyklometrických funkcí je nezbytně nutné znát pojmy prosté a inverzní funkce, a proto si je nejdříve připomeneme.

Definice 3.10.

Funkce f s definičním oborem $D(f)$ se nazývá prostá funkce, právě když pro každou dvojici $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Věta 3.19.

Je-li funkce ryze monotónní, tj. rostoucí, anebo klesající, pak je prostá.

Definice 3.11.

Je daná prostá funkce f, která zobrazuje definiční obor $D(f)$ na množinu všech funkčních hodnot $H(f)$. K tomuto zobrazení existuje zobrazení inverzní, které je opět prosté a zobrazuje množinu $H(f)$ na množinu $D(f)$. Je to funkce, které říkáme funkce inverzní k funkci f a značíme ji f^{-1}.

Další známé věty jsou přímým důsledkem definice inverzní funkce.

Věta 3.20.

Jestliže je v kartézské soustavě souřadnic Oxy sestrojen graf libovolné prosté funkce f, pak graf inverzní funkce f^{-1} v téže soustavě souřadnic je souměrně sdružený s grafem funkce f podle přímky o rovnici $y = x$.

Věta 3.21.

Je-li funkce f rostoucí v $D(f)$, pak k ní existuje inverzní funkce f^{-1}, která je také rostoucí v $H(f)$. Je-li funkce f klesající v $D(f)$, pak k ní existuje inverzní funkce f^{-1}, která je též klesající v $H(f)$.

Funkce cyklometrické jsou inverzní k funkcím goniometrickým, protože jsou ale funkce goniometrické prosté jen na určitých intervalech, můžeme tyto funkce definovat jen na nich, přičemž bereme v úvahu intervaly co nejjednodušší.

Definice 3.12. (Funkce arkussinus)

Funkce arkussinus je funkce daná předpisem

$$f: y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y\,,\ \ x \in D(f) = \langle -1,1 \rangle,\ \ y = H(f) = \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \rangle.$$

Definice 3.13. (Funkce arkuskosinus)

Funkce arkuskosinus je funkce daná předpisem:

$$f: y = \arccos x \ \Leftrightarrow x = \cos y\,,\ \ x \in D(f) = \langle -1,1 \rangle,\ \ y = H(f) = \langle 0, \pi \rangle.$$

Definice 3.14. (Funkce arkustangens)

Funkce arkustangens je funkce daná předpisem

$$f: y = \operatorname{arctg} x \ \ \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y\,,\ \ x \in D(f) = R,\ \ y = H(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

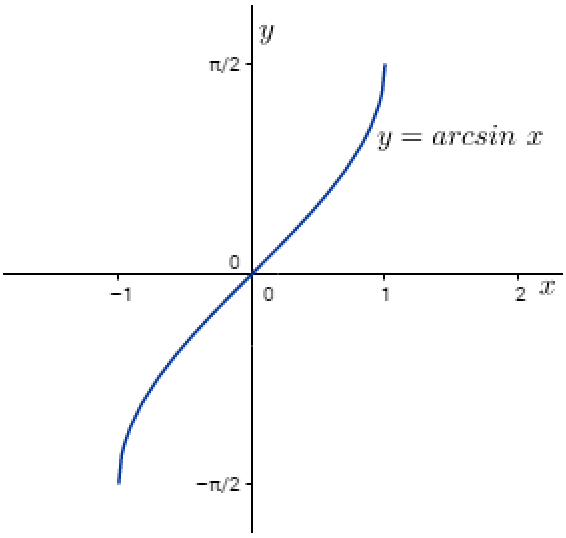
Definice 3.15. (Funkce arkuskotangens)

Funkce arkuskotangens je funkce daná předpisem

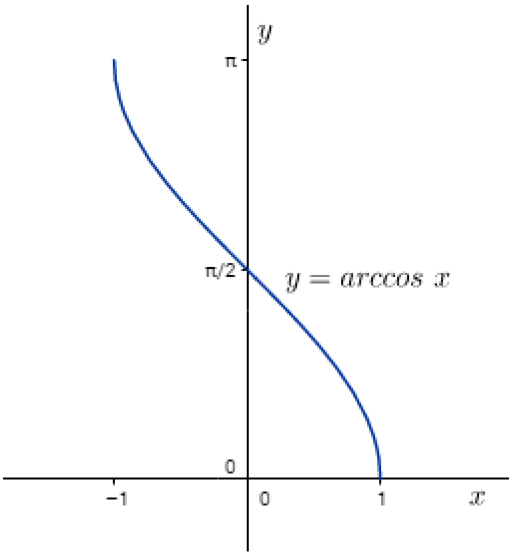
$$f: y = \operatorname{arccotg} x \ \Leftrightarrow x = \operatorname{cotg} y\,,\ \ x \in D(f) = R,\ \ y = H(f) = (0, \pi).$$

3.8.1 Grafy cyklometrických funkcí

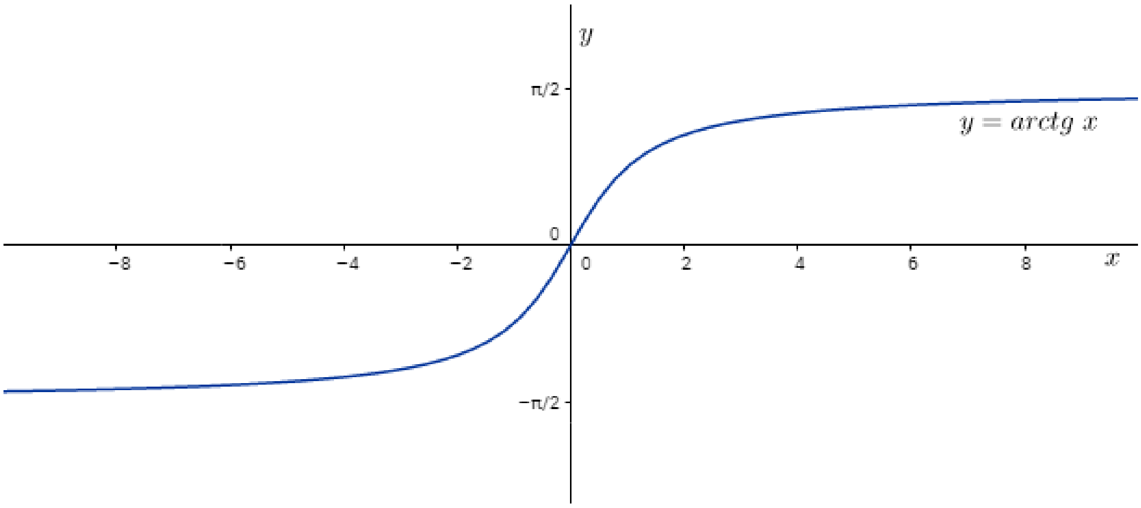
Grafy cyklometrických funkcí arkussinus (obr. 14), arkuskosinus (obr. 15), arkustangens (obr. 16) a arkuskotangens (obr. 17) jsou opět vytvořeny pomocí počítačového programu GeoGebra.



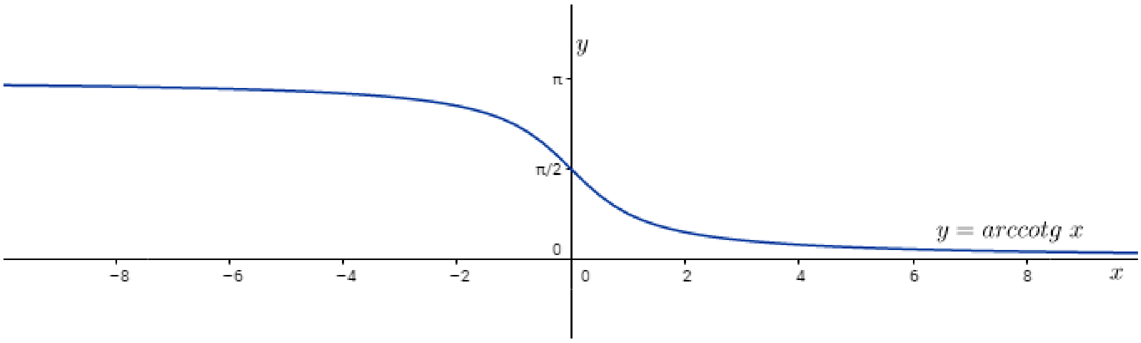
Obr. 14: Graf funkce arkussinus (Polák, 2012, s. 199)



Obr. 15: Graf funkce arkuskosinus (Polák, 2012, s. 199)



Obr. 16: Graf funkce arkustangens (Polák, 2012, s. 199)



Obr. 17: Graf funkce arkuskotangens (Polák, 2012, s. 199)

3.8.2 Cyklometrické vztahy

Podobně jako existují goniometrické vztahy pro goniometrické funkce, existují i vztahy pro funkce cyklometrické. Věty, které vyjadřují základní vztahy pro cyklometrické funkce, již uvedeme bez důkazu.

Věta 3.22.

Pro každé $x \in \langle -1,1 \rangle$ platí:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

Věta 3.23.

Pro každé$x \in \langle -1,1 \rangle$ platí:

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

Věta 3.24.

Pro každé $x \in \langle -1,1 \rangle$ platí:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Věta 3.25.

Pro každé $x \in R$ platí:

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x.$$

Věta 2.26.

Pro každé $x \in R$ platí:

$$\operatorname{arccotg}(-x) = \pi - \operatorname{arccotg} x.$$

Věta 2.27.

Pro každé $x \in R$ platí:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}.$$

4 Zavedení goniometrických funkcí pomocí Taylorových řad

Se zavedením goniometrických funkcí pomocí Taylorových řad se setkáváme až při vysokoškolském studiu, protože pro jejich pochopení, je nutné absolvovat alespoň základní kurz matematické analýzy. Nejdříve budeme definovat mocninné řady a jejich vlastnosti v oboru reálných čísel, poté ukážeme, že jejich zvláštním případem jsou Taylorovy (příp. Maclaurinovy) řady, pomocí nichž zavedeme goniometrické a cyklometrické funkce. Následně definice rozšíříme i pro obor komplexních čísel a poukážeme na vztah mezi funkcí exponenciální a funkcemi goniometrickými (Seibert, 1999, s. 115-149; 2000, s. 72-89).

4.1 Mocninné řady v oboru reálných čísel

Použité pojmy a poznatky jsou čerpané z: (Seibert, 1999, s. 89, 117-120, 122-124, 127-129; 2000, s. 11-12; Rektorys et al., 1981, s. 308).

Definice 4.1.
Řadu funkcí tvaru $a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, kde $x_{0,}\ a_0, a_1, \ldots$ jsou reálné konstanty, nazýváme mocninnou (potenční) řadou se středem v bodě x_0. Čísla a_n $(n = 0, 1, \ldots)$ se nazývají koeficienty řady.

V následujících definicích a větách je vhodné použít novou proměnnou $X = x - x_0$, pak bude řada mít tvar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$. Protože ale nadále budeme pracovat s mocninnými řadami, pro jejichž střed platí $x_0 = 0$, můžeme řady zapisovat takto $\sum a_n x^n$.

Věta 4.1. (Abelova)
Konverguje-li mocninná řada $\sum a_n x^n$ v některém bodě $x_0 \neq 0$, konverguje absolutně pro všechna x z intervalu $M = (-|x_0|, |x_0|)$.

Důsledek:

Diverguje-li řada $\sum a_n x^n$ v některém bodě $x = x_0$, diverguje i pro všechna x, pro která platí $|x| > |x_0|$.

Věta 4.2.

Pro každou mocninnou řadu lze najít takové nezáporné reálné číslo R (může nabývat i nevlastní hodnoty $+\infty$), že řada konverguje pro všechna x, pro která $|x| < R$ a diverguje pro všechna x, pro která $|x| > R$.

Definice 4.2.

Číslo R z věty 4.2. se nazývá poloměr konvergence mocninné řady. Je-li $R > 0$, pak interval $(-R, R)$ se nazývá interval konvergence.

Poznámka:

a) Je-li $R = 0$, konverguje řada pouze ve svém středu.

   Je-li $R = +\infty$, konverguje řada pro každé reálné x (dokonce absolutně).

b) Konvergenci každé mocninné řady v krajních bodech $-R, R$ intervalu konvergence je nutno vyšetřovat zvlášť. V těchto bodech řada může, ale nemusí konvergovat. Proto obor konvergence a interval konvergence nemusí být totožné.

Následující věty 4.3. a 4.5. (Cauchy-Hadamardova podmínka) nám umožňují určit početně poloměr konvergence dané mocninné řady. Při formulaci věty 4.5. je nutné definovat pojem limes superior posloupnosti.

Věta 4.3.

Je-li posloupnost $\{a_n\}$ koeficientů mocninné řady $\sum a_n x^n$ taková, že existuje $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = h > 0$ resp. $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = h > 0$, má daná řada poloměr konvergence $R = \frac{1}{h}$. Je – li $h = 0$, pak $R = +\infty$, je-li $h = +\infty$, pak $R = 0$.

Věta 4.4. (Bolzanova-Weierstrassova věta.)

Každá ohraničená posloupnost $\{a_n\}$ má alespoň jeden hromadný bod. Vždy (i když těchto hromadných bodů je nekonečně mnoho) existuje jeden největší a jeden nejmenší (limes superior a limes inferior dané posloupnosti). Označení:

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n \text{ nebo } \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n,$$

resp.

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n \text{ nebo } \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n.$$

Poznámka:

Místo ohraničená se používá též názvu omezená posloupnost.

Věta 4.5.

Pro posloupnost koeficientů mocninné řady $\sum a_n x^n$ označme $\lim_{n\to\infty} sup\sqrt[n]{|a_n|} = h$. Pak pro poloměr konvergence mocninné řady platí:

a) Je-li $h > 0$, pak $R = \frac{1}{h}$.
b) Je-li $h = 0$, pak $R = +\infty$.
c) Je-li $h = +\infty$, pak $R = 0$.

Nezbytnou součástí definice mocninných řad je zavedení pojmu stejnoměrné konvergence řady, se kterým úzce souvisí pojmy derivace a integrace mocninných řad člen po členu:

Definice 4.3.

Funkční řadu $\sum f_n$ nazveme stejnoměrně konvergentní v množině M, jestliže

1) konverguje pro všechna $x \in M$, $\sum f_n(x) = s(x)$;
2) ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové přirozené číslo n_0 (nezávisle na volbě prvků $x \in M$), že platí $|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$ pro každé přirozené $n \geq n_0$ a každé $x \in M$.

Věta 4.6.

Mocninná řada s poloměrem konvergence $R \neq 0$ je stejnosměrně konvergentní v každém uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle \subset (-R, R)$.

Věta 4.7.

Součet s mocninné řady $\sum a_n x^n$ s kladným poloměrem konvergence je spojitá funkce v intervalu konvergence $(-R, R)$. Je-li navíc řada $\sum a_n x^n$ konvergentní pro $x = R$, resp. $x = -R$, je stejnoměrně konvergentní v intervalu $\langle 0, R\rangle$, resp. $\langle -R, 0\rangle$, a součet řady s je spojitá funkce v intervalu $(-R, R\rangle$, resp. $\langle -R, R)$.

Věta 4.8. (Derivování mocninné řady člen po členu.)

Nechť řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má kladný poloměr konvergence R (může být i $+\infty$). Potom funkce $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má v intervalu $\left(-R, R\right)$ vlastní derivaci $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Věta 4.9. (Integrování mocninné řady člen po členu.)

Nechť řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má kladný poloměr konvergence R. Potom funkce $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má v intervalu $\left(-R, R\right)$ primitivní funkci $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

4.2 Taylorovy řady v oboru reálných čísel

Použité pojmy a poznatky jsou čerpané z: (Seibert, 1999, s. 137-142; Kopáček, 2004, s. 127, 130-131).

Než se začneme zabývat Taylorovými řadami, měli bychom připomenout Taylorův vzorec, který obsahuje pojem Taylorova mnohočlenu n-tého stupně a tzv. zbytek po Taylorově polynomu. Tento zbytek se pak v konkrétních případech vyjadřuje např. v Lagrangeově nebo Cauchyově tvaru.

Věta 4.10. (Peanova).

Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in R$ vlastí derivace do řádu n včetně, kde n je přirozené číslo. Potom existuje právě jeden mnohočlen $P_n(x)$ stupně nejvýše n (anebo nulový), že platí

$$f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n).$$

Tento mnohočlen je dán vzorcem

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

nazývá se Taylorovým mnohočlenem n-tého stupně a označuje se $T_n(x; x_0, f)$.

Poznámka:

Tzv. Taylorův vzorec je známý z diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné.

Pro Taylorovy řady a jejich vlastnosti platí:

Definice 4.4.

Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je rozvojem funkce f v intervalu (x_0-b, x_0+b), právě když má tato řada pro každé $x \in (x_0-b, x_0+b)$ součet $f(x)$.

Věta 4.11.

Je-li mocninná řada $\sum a_n(x-x_0)^n$ rozvojem funkce f v intervalu (x_0-b, x_0+b), pak její koeficienty a_n $(n=0,1,\dots)$ jsou jednoznačně určeny vztahy $a_0=f(x_0)$, $a_1=\frac{f'(x_0)}{1!}, \dots, a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \dots$.

Důkaz:

Budeme přepokládat, že v daném intervalu platí rovnice

$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\ a_4(x-x_0)^4+\ \dots$

a její vyšší derivace:

$f'(x)=1\cdot a_1+2\cdot a_2(x-x_0)+3\cdot a_3(x-x_0)^2+\ 4\cdot a_4(x-x_0)^3+\cdots,$

$f''(x)=2\cdot 1\cdot a_2+3\cdot 2\cdot a_3(x-x_0)+4\cdot 3\cdot a_4(x-x_0)^2+\cdots,$

$f'''(x)=3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3+4\cdot 3\cdot 2\cdot a_4(x-x_0)+\cdots$ atd.

Pokud zvolíme za $x=x_0$ dostáváme vzorce pro koeficienty:

$a_0=f(x_0), a_1=\frac{f'(x_0)}{1!}, a_2=\frac{f''(x_0)}{2!}, a_3=\frac{f'''(x_0)}{3!}, \dots$ atd. •

Definice 4.5.

Taylorovou řadou se středem v bodě x_0 (nebo stručně v bodě x_0) funkce f, která je diferencovatelná bez omezení (má derivace všech řádů) v jistém okolí bodu x_0 (speciálně v intervalu (x_0-b, x_0+b)), nazýváme mocninnou řadu

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

V případě, že $x_0=0$, nazýváme mocninnou řadu Maclaurinovou řadou funkce f.

Poznámka:

a) Z uvedeného je zřejmé, že limitním přechodem $n \to \infty$ přejde Taylorův mnohočlen formálně v Taylorovu řadu. Tedy naopak Taylorovy mnohočleny tvoří částečné součty Taylorovy řady.

b) Je-li funkce f rozvinutelná v mocninnou řadu v okolí bodu x_0, je tento rozvoj Taylorovou řadou funkce f v bodě x_0.

Nezbytnou podmínkou pro rozvoj funkce v Taylorovu (příp. Maclaurinovu) řadu je její konvergence.

Věta 4.12.

Taylorova řada funkce f konverguje v intervalu I (například $(x_0 - b, x_0 + b)$) k funkci f právě tehdy, když pro každé $x \in I$ platí $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Pro praktické použití je vhodnější následující postačující podmínka rozvinutelnosti funkce v Taylorovu řadu.

Věta 4.13.

Jsou-li všechny derivace funkce f v intervalu I (obsahující bod x_0) stejnoměrně ohraničené, tj. existuje-li takové reálné číslo K, že pro všechna $x \in I$ a n přirozená je $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq K$, pak je funkce f rozvinutelná v Taylorovu řadu v intervalu I.

Důkaz:

Při důkazu vyjádříme tzv. zbytek po Taylorově mnohočlenu n-tého stupně v Lagrangeově tvaru a dostáváme:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \xi \in (x_0, x).$$

Ze zápisu Lagrangeova tvaru zbytku plyne, že pokud $x \in I$, pak také $\xi \in I$. Po zavedení nové proměnné h, pro niž platí $h = |x - x_0|$, začneme dokazovat platnost:

$$|R_n(x)| = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\xi)\right| \leq K \cdot \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pro ověření konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$ použijeme podílové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{h^{n+2}}{(n+2)!}}{\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{h^{n+2}}{h^{n+1}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+2)!} = h \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0.$$

Řada konverguje pro každé h, platí nutná podmínka konvergence řady, tudíž jsme dokázali, že platí $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ pro každé $x \in I$. •

4.3 Rozvoje goniometrických a cyklometrických funkcí v Maclaurinovy řady

Použité pojmy a poznatky jsou čerpané z: (Seibert, 1999, s. 143, 145-147; Kopáček, 2006, s. 212; 2007, s. 31; Kříž a Šrot, 2006; Trigonometric functions, 2015).

4.3.1 Rozvoj funkce sinus

Vyšší derivace funkce sinus zapisujeme ve tvaru:

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x, f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$$

pro každé $k = 0, 1, 2, \ldots$ v intervalu $(-\infty, +\infty)$.

Pak je rozvoj funkce sinus do Maclaurinovy řady ($x_0 = 0$):

$$\mathrm{T}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Protože je splněna podmínka z věty 4.13., a tudíž pro každé $n \in N$ a pro každé $x \in R$ platí $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1$, můžeme psát:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

pro každé $x \in (-\infty, +\infty)$.

4.3.2 Rozvoj funkce kosinus

Stejným způsobem, jaký jsme použili u funkce sinus, určíme i rozvoj funkce kosinus. Pro vyšší derivace funkce kosinus platí

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^{k+2} \cos x , f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin x$$

pro každé $k = 0, 1, 2, \ldots$ v intervalu $(-\infty, +\infty)$.

Pak je rozvoj funkce kosinus do Maclaurinovy řady:

$$\mathrm{T}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Obdobně jako u funkce sinus je splněna podmínka konvergence řady z věty 4.13., kde pro každé $n \in N$ a pro každé $x \in R$ platí $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1$, a proto můžeme psát:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

pro každé $x \in (-\infty, +\infty)$.

Rozvoj funkce kosinus lze získat i jiným způsobem. Použijeme-li větu 4.8., můžeme postupnou derivací rozvoje funkce sinus získat Taylorův rozvoj funkce kosinus:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \to (\sin x)' = (x)' - \left(\frac{x^3}{3!}\right)' + \left(\frac{x^5}{5!}\right)' - \left(\frac{x^7}{7!}\right)' + \cdots \to$$

$$\to \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

4.3.3 Rozvoj funkce tangens

Abychom mohli ukázat jeden ze způsobů, jak lze získat rozvoj funkce tangens v Maclaurinovu řadu, musíme definovat další vlastnosti mocninných řad.

Definice 4.6.

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ jsou dvě mocninné řady. Jejich součtem nazýváme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n$, rozdílem mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)(x-x_0)^n$ a součinem mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j b_{n-j}\right)(x-x_0)^n =$
$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)(x-x_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)(x-x_0)^2 + \cdots$.

Věta 4.14.

Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ má poloměr konvergence R_1 a součet $s(x)$ a řada $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ má poloměr konvergence R_2 a součet $t(x)$. Pak součet, rozdíl i součin těchto řad má poloměr konvergence $R = min(R_1, R_2)$ a součet postupně $s(x)+t(x)$, $s(x)-t(x)$, $s(x)\cdot t(x)$.

Nejdříve označíme rozvoje funkcí sinus, kosinus a tangens:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \cdots,$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + \cdots, \text{ kde } b_0 \neq 0,$$

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \cdots.$$

Pro dané goniometrické funkce platí rovnost:

$$\cos x \cdot \operatorname{tg} x = \sin x.$$

Pokud za funkce sinus a kosinus dosadíme jejich rozvoje do Maclaurinovy řady, dostáváme:

$$\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)\cdot(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3\ \ldots)=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right).$$

Při dalším výpočtu roznásobíme levou stranu rovnosti (násobení mocninných řad) a pak porovnáme koeficienty na pravé a levé straně rovnosti, z čehož postupně určíme koeficienty rozvoje funkce tangens do Maclaurinovy řady:

x^0: $b_0\cdot c_0=a_0\to 1\cdot c_0=0\to c_0=0$

x^1: $(b_0\cdot c_1+b_1\cdot c_0)=a_1\to 1\cdot c_1+0\cdot c_0=1\to c_1=1$

x^2: $(b_0\cdot c_2+b_1\cdot c_1+b_2\cdot c_0)=a_2\to 1\cdot c_2+0\cdot c_1+\left(-\frac{1}{2!}\right)\cdot c_0=0\to c_2=0$

x^3: $(b_0\cdot c_3+b_1\cdot c_2+b_2\cdot c_1+b_3\cdot c_0)=a_3$

$\to 1\cdot c_3+0\cdot c_2+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot c_1+0\cdot c_0=-\frac{1}{3!}\to a_3=\frac{1}{3}$

x^4: $(b_0\cdot c_4+b_1\cdot c_3+b_2\cdot c_2+b_3\cdot c_1+b_4\cdot c_0)=a_4$

$\to 1\cdot c_4+0\cdot c_3+\left(-\frac{1}{2!}\right)\cdot c_2+0\cdot c_1+\frac{1}{4!}\cdot c_0=0\to c_4=0$

x^5: $(b_0\cdot c_5+b_1\cdot c_4+b_2\cdot c_3+b_3\cdot c_2+b_4\cdot c_1+b_5\cdot c_0)=a_5$

$\to 1\cdot c_5+0\cdot c_4+\left(-\frac{1}{2!}\right)\cdot c_3+0\cdot c_2+\frac{1}{4!}\cdot c_1+0\cdot c_0=\frac{1}{5!}\to c_5=\frac{2}{15}$

Pokud bychom postupně vypočítali i další koeficienty a dosadili je do řady $\operatorname{tg} x=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ dostáváme hledaný rozvoj funkce tangens:

$$\operatorname{tg} x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\cdots$$

pro $|x|<\frac{\pi}{2}$.

4.3.4 Rozvoj funkce arkussinus

Při určení Taylorova rozvoje funkce $f(x)=\arcsin x$ do Maclaurinovy řady využijeme toho, že známe její první derivaci pro $x\in(-1,1)$:

$$f'(x)=(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Použijeme substituci $t=-x^2, f(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t}}$ pro $t\in(-1,1)$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}}=1+\frac{-\frac{1}{2}}{1!}t+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}t^2+\cdots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}}=1-\frac{1}{2}t+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}t^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}t^3+\cdots.$$

Pro funkci $f'(x)$ platí:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}$$

pro každé $x \in (-1{,}1)$.

Při dalším výpočtu použijeme větu 4.9., pro $x \in (-1{,}1)$ integrováním mocninné řady funkce $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ získáme rozvoj funkce arkussinus:

$$\int_{-1}^{1} f'(x)\ dx = c + x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots =$$

$$= c + x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Konstanta $c = 0$, což lze snadno ověřit např. pro $x = 0$. Rozvoj funkce arkussinus do Maclaurinovy je:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

pro $|x| \leq 1$.

4.3.5 Rozvoj funkce arkustangens

Postup výpočtu rozvoje funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x$ do Maclaurinovy řady je stejný jako u funkce arkussinus, pro $x \in (-1{,}1)$ platí:

$$f'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Poté použijeme vzorec pro součet geometrické řady:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad \text{pro každé } x \in (-1{,}1).$$

Integrací pro $x \in (-1{,}1)$ dostáváme:

$$\int_{-1}^{1} f'(x)\ dx = c + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = c + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Taktéž pro $x = 0$ je konstanta c nulová, pak arkustangens zapisujeme ve tvaru:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = c + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

pro $|x| \leq 1$.

4.3.6 Rozvoje goniometrických a cyklometrických funkcí v Maclaurinovy řady v přehledu

Goniometrické funkce

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$,

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$,

$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$ pro $|x| < \frac{\pi}{2}$,

$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \cdots$ pro $0 < |x| < \pi$.

Cyklometrické funkce

$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \cdots \cdot 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

pro $|x| \le 1$,

$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots\right) =$

$= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \cdots \cdot 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pro $|x| \le 1$,

$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pro $|x| \le 1$,

$\operatorname{arcotg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\right) =$

$= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pro $|x| \le 1$.

4.4 Taylorovy řady v oboru komplexních čísel

Použité pojmy a poznatky jsou čerpané z: (Seibert, 2000, s. 72-84, 86-89).

Definice a věty, které jsme zavedli pro mocninné a Taylorovy řady v oboru reálných čísel, můžeme s jistými úpravami používat i v oboru komplexních čísel. Uvedeme několik rozdílů:

1. Mocninnou řadu zapisujeme ve tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, kde z_0, a_0, a_1, … jsou komplexní konstanty.
2. Opět zavádíme novou proměnnou $Z = z - z_0$, řada bude ve tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n$. Pro mocninné řady se $z_0 = 0$ píšeme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.
3. V případě absolutní konvergence mocninné řady, taktéž hledáme poloměr konvergence R, ale nehovoříme o intervalu konvergence, nýbrž o tzv. kruhu konvergence, protože se v případě komplexních čísel pohybujeme v Gaussově rovině.
4. Z praktických důvodů (např. při zavádění logaritmické funkce) připouštíme i takové funkce komplexní proměnné, které mohou mít pro hodnoty nezávisle proměnné víceprvkovou funkční hodnotu, tudíž funkce nemusí

být zobrazení. V tomto případě bývá funkce označovaná jako mnohoznačná. Často si ovšem vystačíme s klasickými jednoznačnými funkcemi i v komplexní proměnné. Pro určení dalších vlastností (např. spojitost či derivace) mocninných řad v komplexním oboru je vhodné využít toho, že z jednoznačné komplexní funkce komplexní proměnné můžeme vhodně zvoleným předpisem získat dvě reálné funkce dvou reálných proměnných (reálnou a imaginární složku komplexní proměnné).

V oboru komplexních čísel platí:

Věta 4.15. (O rozvoji funkce v Taylorovu řadu.)

Nechť f je holomorfní funkce v bodě z_0 a nechť b je nebližší izolovaný singulární bod. Pak pro libovolné z, jehož obraz leží uvnitř kružnice se středem v bodě z_0 a poloměrem $|b - z_0|$, lze funkci f jednoznačně rozvinout v Taylorovu řadu, tzn. že platí

$$f(z) = f_0 + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots.$$

Poznámka:

a) Funkce funkce f komplexní proměnné je holomorfní v komplexním bodě a, má-li derivaci v nějakém okolí $O(a)$ bodu a.

b) Bod, ve kterém funkce f není holomorfní, se nazývá singulární bod funkce f. Mezi singulární body funkce patří i body, v nichž není funkce příslušným předpisem definována. Jestliže existuje okolí singulárního bodu a funkce f takové, že v něm již není žádný jiný singulární bod této funkce, říkáme, že a je izolovaný singulární bod funkce f.

Abychom mohli ukázat, jak úzce spjaty jsou goniometrické (sinus a kosinus) a exponenciální funkce a jak pomocí goniometrických funkcí můžeme vyjádřit funkci exponenciální a naopak (Eulerovy vzorce), definujeme tyto funkce v oboru komplexních čísel pomocí Maclaurinových řad. Z podkapitoly 4.3. již známe rozvoje těchto funkcí v oboru reálných čísel. Po formální záměně komplexní proměnné z namísto reálné proměnné x a po ověření absolutní konvergence dostáváme:

Definice 4.7.

Exponenciální funkcí $w = e^z$ komplexní proměnné z rozumíme funkci definovanou v množině všech komplexních čísel tak, že pro každé komplexní z je

$$w = e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Věta 4.16.

Pro libovolná dvě komplexní čísla z_1, z_2 platí

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$

Důkaz:

Při důkazu nejdříve násobíme mocninné řady určující hodnoty e^{z_1}, e^{z_2} a dostáváme

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= \left(1 + \frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{z_2}{1!} + \frac{z_2^2}{2!} + \cdots\right) = \\ &= 1 + \left(\frac{z_1}{1!} + \frac{z_2}{1!}\right) + \left(\frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1 z_2}{1!1!} + \frac{z_2^2}{2!}\right) + \cdots + \\ &+ \left(\frac{z_1^n}{n!} + \frac{z_1^{n-1} z_2}{(n-1)!1!} + \cdots + \frac{z_1 z_2^{n-1}}{1!(n-1)!} + \frac{z_2^n}{n!}\right) + \cdots. \end{aligned}$$

Pak upravíme obecný člen součinu řad

$$\begin{aligned} &\frac{z_1^n}{n!} + \cdots + \frac{z_1^{n-k} z_2^k}{(n-k)!k!} + \cdots + \frac{z_2^n}{n!} = \\ &= \frac{1}{n!}\left(z_1^n + \cdots + \frac{n!}{(n-k)!k!} z_1^{n-k} z_2^k + \cdots + z_2^n\right) = \\ &= \frac{1}{n!}\left(z_1^n + \cdots + \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k + \cdots + z_2^n\right) = \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Proto

$$e^{z_1} e^{z_2} = 1 + \frac{z_1+z_2}{1!} + \frac{(z_1+z_2)^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2}. \bullet$$

Definice 4.8.

Goniometrickými funkcemi $w = \sin z$, resp. $w = \cos z$, komplexní proměnné z rozumíme funkce definované v množině všech komplexních čísel tak, že pro každé komplexní z je

$$w = \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

resp.

$$w = \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Funkce $w = \operatorname{tg} z$, resp. $w = \operatorname{cotg} z$ komplexní proměnné z definujeme vztahy $w = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ pro $\cos z \neq 0$, resp. $w = \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$ pro $\sin z \neq 0$.

Věta 4.17.

Pro každé komplexní číslo z platí:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{-iz}-e^{iz}}{2i}.$$

Pokud $z = x + iy$, pak $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Důkaz:

$\boldsymbol{e^{iz} = \cos z + i \sin z}$

Pro libovolné komplexní číslo t je

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots .$$

Použijeme-li substituci $t = iz$, kde $z \in C$, pak platí

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \cdots = 1 + i\frac{z}{1!} - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \cdots =$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right) = \cos z + i \sin z.$$

$\boldsymbol{\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{-iz}-e^{iz}}{2i}}$

Pro dokázání těchto vzorců musíme také vyjádřit e^{-iz}, použijeme stejný postup jako pro e^{iz}:

$$e^{-iz} = 1 + \frac{(-iz)}{1!} + \frac{(-iz)^2}{2!} + \frac{(-iz)^3}{3!} + \frac{(-iz)^4}{4!} + \cdots = 1 - i\frac{z}{1!} - \frac{z^2}{2!} + i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - i\frac{z^5}{5!} - \cdots =$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) - i\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right) = \cos z - i \sin z.$$

Pak dostáváme:

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{\cos z + i\sin z + \cos z - i \sin z}{2} = \frac{2\cos z}{2} = \cos z,$$

$$\frac{e^{-iz}-e^{iz}}{2i} = \frac{\cos z + i\sin z - \cos z + i \sin z}{2i} = \frac{2i\sin z}{2i} = \sin z.$$

$\boldsymbol{e^z = e^x(\cos y + i \sin y)}$

V případě, že komplexní proměnnou z vyjádříme v algebraickém tvaru $z = x + iy$, kde $x, y \in R$, můžeme za současného využití součtového vzorce z věty 4. 16. ($e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$) a dokázat, že $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \bullet$$

Pro bližší seznámení se s cyklometrickými funkcemi komplexní proměnné je nutné definovat logaritmické funkce komplexní proměnné a taktéž zavést pojem obecná mocninná funkce komplexní proměnné, což přesahuje rámec této bakalářské práce, a proto uvedeme pouze jejich definici:

Definice 4. 9.

Cyklometrickými funkcemi $w = \operatorname{arcsin} z$, $w = \operatorname{arccos} z$, $w = \operatorname{arctg} z$, $w = \operatorname{arccotg} z$ komplexní proměnné z rozumíme po řadě inverzní relace k funkcím $w = \sin z$, $w = \cos z$, $w = \operatorname{tg} z$, $w = \operatorname{cotg} z$ komplexní proměnné.

5 Zavedení goniometrických funkcí pomocí funkcionálních rovnic

Použité pojmy a poznatky jsou čerpané z: (Veselý, 2001, s. 162-167).

Při zavedení goniometrických funkcí pomocí funkcionálních rovnic přistoupíme k tomu, že budeme formulovat dvě funkcionální rovnice se dvěma prozatím neznámými funkcemi s a c (s jistým omezením pro funkci s) a poté nalézat jednotlivé vlastnosti těchto funkcí. Tento způsob zavedení goniometrických funkcí (sinus a kosinus) vůbec neřeší důležitou otázku jejich existence a jednoznačnosti, které lze ověřit použitím jiných metod, např. zavedením goniometrických funkcí pomocí Taylorových řad, jak jsme uvedli v předchozí kapitole.

Věta 5.1.

Existuje právě jedna dvojice funkcí na R, které vyhovují rovnicím

$$c(x-y) = c(x)c(y) + s(x)s(y), \qquad x, y \in R, \tag{5.1}$$

$$s(x-y) = s(x)c(y) - c(x)s(y), \qquad x, y \in R, \tag{5.2}$$

a podmínce

$$\lim_{x \to 0} \frac{s(x)}{x} = 1. \tag{5.3}$$

Tyto funkce nazýváme sinus a kosinus (označení: sin a cos).

Pro funkce c a s budeme postupně dokazovat jejich vlastnosti:

1. Funkce c je sudá.

Funkci c můžeme považovat za sudou, protože podíváme-li se na pravou stranu rovnice (5.1), zjistíme, že platí $c(x-y) == c(y-x)$. Pokud provedeme ověření pro $x = 0$, dostáváme $c(-y) = c(y)$, kde $y \in R$. •

2. Funkce s není konstantní.

Pokud bychom funkci s považovali za konstantní, nebyla by splněna její omezující podmínka. Můžeme nalézt $x_0 \in R$, pro něž platí $s(x_0) \neq 0$. •

3. Funkce c není konstantní.

Dané tvrzení můžeme dokázat, budeme-li naopak předpokládat, že funkce c je konstantní ($c \equiv K$). Pak by pro rovnost (5.1) platilo

$$K = K^2 + s(x)s(y), \text{ kde } x, y \in R.$$

Zkusíme-li dosadit $x = x_0$, dostáváme

$$s(y) = s\big(s(x_0)\big)^{-1}(K - K^2), \text{ kde } y \in R.$$

Tímto způsobem jsme vyvrátili předpoklad, protože funkce s není konstantní. •

4. Funkce s je lichá.

Budeme-li při důkazu vycházet z předpokladu, že je funkce s sudá, a dosadíme-li $y = -y$, bude mít rovnost (5.1) tento tvar

$$c(x + y) = c(x)c(-y) + s(x)s(-y) = c(x)c(y) + s(x)s(y) = c(x - y).$$

Zkusíme-li do takto upravené rovnosti tentokrát dosadit $x = y$ dostáváme $c(2x) = c(0)$, kde $x \in R$, což by ukazovalo na to, že je funkce c konstantní. Toto tvrzení jsme ale už dříve vyvrátili, a proto funkce s není sudá. Můžeme tedy např. pro $x_1 \in R$ psát $s(x_1) \neq s(-x_1)$, přičemž nezapomeneme vyloučit i možnost, že by funkce s byla pro $x_1 \in R$ konstantní ($s(x_1) \neq 0$).

V druhé části důkazu použijeme již dříve dokázané tvrzení, že je funkce c sudá, a využijeme dva platné tvary rovnosti (5.1):

$$c(x - y) = c(x)c(y) + s(x)s(y), \qquad c(y - x) = c(y)c(x) + s(-y)s(-x).$$

Pak po úpravách platí:

$$c(x - y) - s(x)s(y) = c(y - x) - s(-y)s(-x),$$

$$0 = s(x)s(y) - s(-y)s(-x), \text{ kde } x, y \in R. \tag{5.4}$$

Zkusíme-li do takto upravené rovnosti dosadit $x = y$, dostaneme:

$$s(x)s(x) - s(-x)s(-x) = 0,$$

$$\big(s(-x) - s(x)\big)\big(s(-x) + s(x)\big) = 0.$$

Podle první části důkazu pro $x_1 \in R$ platí, že $s(x_1) \neq s(-x_1)$, pro rovnost dostáváme:

$$s(-x_1) + s(x_1) = 0,$$

$$s(-x_1) = -s(x_1) \neq 0.$$

Můžeme tedy dosadit $y = x_1$ do rovnosti (5.4):

$$0 = s(x)s(x_1) - s(-x_1)s(-x),$$

$$0 = s(x_1) \cdot (s(x) + s(-x)),$$

$$s(x_1) \neq 0 \rightarrow s(x) + s(-x) = 0 \rightarrow s(-x) = -s(x), \text{ kde } x \in R.$$

Pro $x = 0$ platí: $s(0) = -s(0) = 0$. •

5. Funkce c a s jsou omezené.

Důkaz provedeme tak, že použijeme rovnost (5.2) a dosadíme $y = 0$, pak dostáváme:

$$s(x) = s(x - 0) = s(x)c(0) - c(x)s(0) = s(x)c(0),$$
$$s(x_1) \neq 0 \to c(0) = 1.$$

Takto získaný výsledek můžeme dále upravit za pomoci rovnosti (5.1)

$$1 = c(0) = c(x - x) = c(x)c(x) + s(x)s(x)$$

a dostáváme

$$1 = c^2(x) + s^2(x), \text{kde } x \in R. \tag{5.5}$$

Pak pro každé $x \in R$ platí $|s(x)| \leq 1$ a $|c(x)| \leq 1$. •

6. Platí rovnosti $c(2x) = c^2(x) - s^2(x)$ a $s(2x) = 2s(x)c(x)$.

Při důkazu využijeme toho, že jsme již dokázali, že funkce c je sudá a funkce s je lichá. Pak platí rovnosti

$$c(x + y) = c(x)c(y) - s(x)s(y), \tag{5.6}$$
$$s(x + y) = s(x)c(y) + c(x)s(y). \tag{5.7}$$

Pokud dosadíme $y = x$, dostáváme dané rovnosti pro dvojnásobný argument funkcí c a s. •

7. Funkce c a s mají vlastní derivace všech řádů.

Při důkazu vypočítáme první derivace funkcí s a c. Pro výpočet první derivace funkce s budeme potřebovat rovnost $c(h) = c^2\left(\frac{h}{2}\right) - s^2\left(\frac{h}{2}\right)$, dále rovnosti (5.5) a (5.7) a podmínku (5.3).

$$s'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{s(x+h)-s(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{s(x)c(h)+c(x)s(h)-s(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{s(x)(c(h)-1)+c(x)s(h)}{h} = s(x)\lim_{h\to 0} \frac{(c(h)-1))}{h} + c(x)\lim_{h\to 0} \frac{s(h)}{h} =$$
$$= -s(x)\lim_{h\to 0} \left(\frac{s\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right)^2 \left(\frac{h}{2}\right) + c(x)\cdot 1 = -s(x)\cdot 1\cdot 0 + c(x) = c(x), x \in R.$$

Obdobně provedeme výpočet i pro první derivaci funkce c, přičemž místo rovnosti (5.7) použijeme rovnost (5.6), a dostáváme

$$c'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{c(x+h)-c(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c(x)c(h)-s(x)s(h)-c(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{c(x)(c(h)-1)-s(x)s(h)}{h} = c(x)\lim_{h\to 0} \frac{(c(h)-1))}{h} - s(x)\lim_{h\to 0} \frac{s(h)}{h} =$$
$$= c(x)\lim_{h\to 0} \left(\frac{s\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right)^2 \left(\frac{h}{2}\right) - s(x)\cdot 1 = c(x)\cdot 1\cdot 0 - s(x) = -s(x), x \in R. \bullet$$

8. Funkce c a s jsou periodické.

Využijeme-li toho, že funkce c a s mají vlastní derivace všech řádů, můžeme nalézt nejmenší kladné číslo α, pro které platí $c(\alpha) = 0$ a $s(\alpha) = 1$. Pak pro rovnosti (5.1), (5.6) a (5.7) můžeme psát

$$c(x - \alpha) = c(x)c(\alpha) + s(x)s(\alpha) = s(x),$$

$$c(x + \alpha) = -s(x), \qquad s(x + \alpha) = c(x),$$

$$c(x + 2\alpha) = -s(x + \alpha) = -c(x), \qquad c(x + 4\alpha) = -c(x + 2\alpha) = c(x),$$

$$s(x + 2\alpha) = c(x + \alpha) = -s(x), \qquad s(x + 4\alpha) = -s(x + 2\alpha) = s(x).$$

Takto vyjádřené rovnosti nám potvrzují, že jsou funkce c a s periodické. Jejich perioda je 4α. Vezmeme-li v úvahu, že 2α odpovídají π, můžeme za jejich periodu považovat 2π. •

Poté, co jsme zavedli funkce sinus a kosinus, nám již zbývá definovat funkce tangens a kotangens.

Definice 5.1.

Funkcí tangens nazýváme funkci danou vztahem

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \text{ kde } x \in R \setminus \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2}; k \in N\right\}.$$

Definice 5.2.

Funkcí kotangens nazýváme funkci danou vztahem

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \text{ kde } x \in R \setminus \{k\pi; k \in N\}.$$

Závěr

Cílem práce bylo porovnat možné způsoby zavedení goniometrických funkcí na základní škole, střední škole i vysoké škole, což se nám s využitím dostupných učebnic a skript pro jednotlivé stupně škol podařilo ukázat na čtyřech případech. Některé uvedené způsoby definice goniometrický funkcí bychom mohli ještě dále rozvíjet, např. v poslední kapitole bychom mohli k definici funkce kosinus použít tzv. d´Alembertovy rovnice (Veselý, 2001, s. 163). Podobně jsme nedefinovali funkce sekans a kosekans, protože se s nimi žáci základních škol a studenti středních škol během svého studia prakticky vůbec nesetkají.

Prostřednictvím aplikace kosinovy věty se nám podařilo poukázat na provázanost matematiky a fyziky. Už v první kapitole jsme uvedli jména několika známých astronomů, kteří se podíleli na vývoji goniometrie a trigonometrie. Goniometrické funkce jsou naprosto nezbytnou součástí několika oborů fyziky, např. mechaniky, elektromagnetismu nebo optiky.

Všechny obrázky a grafy jsme vytvořily pomocí moderního počítačového programu GeoGebra, který má velké ambice stát se nepostradatelným pro každého studenta matematiky, protože je snadno dostupný na internetu, nemusí se instalovat a jeho ovládání je velmi intuitivní. Učitelé i studenti s ním mohou pracovat při studiu jakékoli oblasti matematiky.

Tato bakalářská práce by měla sloužit pouze jako ucelený pomocný učební text, díky kterému získá každý zájemce o studium goniometrie rychlý přehled nejen o základních goniometrických funkcích, ale i o jejich vlastnostech, vztazích atd.

Seznam použité literatury

[1] HERMAN, Jiří, Vítězslava CHRÁPAVÁ, Eva JANČOVIČOVÁ a Jaromír ŠIMŠA. *Matematika: Podobnost a funkce úhlu*. Dotisk 1. vyd. Praha: Prometheus, 2005, ©2000. 175 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-206-6.

[2] CHAJDA, Radek. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy*. Praha: Ottovo nakladatelství, 2012. 208 s. ISBN 978-80-7451-222-3.

[3] KOPÁČEK, Jiří. *Matematická analýza nejen pro fyziky (I)*. 4. přeprac. vyd. Praha: Matfyzpress, 2004. 187 s. ISBN 80-86732-25-8.

[4] KOPÁČEK, Jiří et al. *Příklady z matematiky nejen pro fyziky [II]*. 3. přeprac. vyd. Praha: Matfyzpress, 2006. 280 s. ISBN 80-86732-82-7.

[5] KOPÁČEK, Jiří. *Matematická analýza nejen pro fyziky (III)*. 3. upr. vyd. Praha: Matfyzpress, 2007. 224 s. ISBN 978-80-7378-020-3.

[6] KŘÍŽ, Pavel a Karel ŠROT. Taylorova a Maclaurinova řada. *Mocninné řady s Maple: Taylorova aproximace a obor konvergence* [online]. 2006 [cit. 2015-07-15]. Dostupné z: https://cgi.math.muni.cz/kriz/pseries/teorie.htm.

[7] MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky: Stručná historie královny věd*. 2. rev. vyd. Příbram: Pistorius & Olšanská, 2011. 334 s. ISBN 978-80-87053-64-5.

[8] MOLNÁR, Josef, Libor LEPÍK, Hana LIŠKOVÁ, Jan SLOUKA a Bronislava RŮŽIČKOVÁ. *Matematika 9*. Olomouc: Prodos, ©2001. 127 s. ISBN 80-7230-109-8.

[9] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: Goniometrie*. Dotisk 2. vyd. Praha: Prometheus, 1996, ©1994. 127 s. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-000-4.

[10] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. Dotisk 6. vyd. Praha: Prometheus, 1998, ©1991. 608 s. ISBN 80-85849-78-X.

[11] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. Dotisk 9. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2012, ©2008. 659 s. ISBN 978-80-7196-356-1.

[12] REKTORYS, Karel et al. *Přehled užité matematiky*. 4. nezm. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1981, ©1963. 1139 s.

[13] SEIBERT, Jaroslav. *Matematická analýza IV: Posloupnosti a řady*. 3. vyd. Hradec Králové: Gaudeamus, 1999. 164 s. ISBN 80-7041-399-9.

[14] SEIBERT, Jaroslav. *Matematika III.* 1. vyd. Pardubice: Univerzita Pardubice, Dopravní fakulta Jana Pernera, 2000, ©1999. 127 s. ISBN 80-7194-275-8.

[15] SMÝKALOVÁ, Radka. *Metody a užití goniometrických funkcí v elementární matematice* [online]. Brno, 2011 [cit. 2015-07-10]. Disertační práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce Jaromír Šimša. Dostupné z: http://theses.cz/id/d0a6so/.

[16] ŠMAKAL, Stanislav a Bruno BUDINSKÝ. *Goniometrické funkce*. 1. vyd. Praha: Mladá fronta, 1968. 144 s. Škola mladých matematiků, sv. 20.

[17] Trigonometric functions. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. Last revision on 23. 7. 2015 [cit. 2015-07-28]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Trigonometric_functions.

[18] VESELÝ, Jiří. *Matematická analýza pro učitele: První a Druhý díl*. 2. uprav. vyd. Praha: Matfyzpress, 2001. 454 s. ISBN 80-85863-62-6.

Seznam obrázků

Seznam tabulek