Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta
Katedra algebry a geometrie

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Sbírka úloh z axonometrie – hranatá tělesa

Vypracovala:	**Adéla Pantělejevová**
Studijní program:	B1101 Matematika
Studijní obor:	Deskriptivní geometrie, Matematika
Forma studia:	prezenční
Vedoucí bakalářské práce:	RNDr. Marie Chodorová, Ph.D.
Termín odevzdání práce:	květen 2019

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením RNDr. Marie Chodorové, Ph.D., a že jsem použila zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci dne 16. května 2019

. . . .

Adéla Pantělejevová

Poděkování

Na prvním místě bych ráda poděkovala vedoucí své bakalářské práce paní RNDr. Marii Chodorové, Ph.D., za její vedení a odbornou pomoc. Její rady pro mne byly velmi cenné a jsem jí vděčná za všechen čas, který si na mě ochotně našla.

Dále chci poděkovat panu Mgr. Jiřímu Kratochvílovi Ph.D., jehož konzultace pro mě byly také velmi přínosné.

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Adéla Pantělejevová
Název práce	Sbírka úloh z axonometrie – hranatá tělesa
Typ práce	Bakalářská
Pracoviště	Katedra algebry a geometrie
Vedoucí práce	RNDr. Marie Chodorová, Ph.D.
Rok obhajoby práce	2019
Abstrakt	Bakalářská práce se věnuje pravoúhlé axonometrii a konkrétně řešeným úlohám v této metodě. Slouží k procvičení základních konstrukcí, konstrukci těles a jejich řezů. První kapitola se věnuje teorii a další dvě pak samotným úlohám. Rozděleny jsou na jednodušší příklady a příklady o tělesech. Úlohy jsou určeny jak k samostudiu, tak i jako učební materiál.
Klíčová slova	axonometrie, pravoúhlá axonometrie, sbírka úloh, řešené úlohy, hranatá tělesa, jehlany, hranoly
Počet stran	84
Počet příloh	0
Jazyk	český

Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Adéla Pantělejevová
Title	Collection of Tasks from Axonometry – Polyhedrons
Type of thesis	Bachelor
Department	Department of Algebra and Geometry
Supervisor	RNDr. Marie Chodorová, Ph.D.
The year of presentation	2019
Abstract	This bachelor thesis deals with orthogonal axonometry, more specifically with solved problems with this method. It serves as a practice of basic constructions: solid constructions and their sections. The first chapter is concerned with the theoretical part and the following two with solving the problems. The problems are divided into simpler tasks and tasks about solids. The exercises can be used both for self-study, or as a teaching material.
Keywords	axonometric projection, orthogonal axonometry, collection task, solved exercises, polyhedrons, pyramids, prisms
Number of pages	84
Number of appendices	0
Language	czech

Obsah

Úvod

Tato bakalářská práce je koncipována jako sbírka příkladů zobrazovací metody pravoúhlé axonometrie. Cílem práce je procvičit si základní konstrukce potřebné pro sestrojování těles jak v obecných polohách, tak i v polohách speciálních, a také konstrukci hranatých těles a jejich řezů. Je určena především pro druhý semestr předmětu zobrazovacích metod a je vhodná pro samostudium i jako učební materiál.

Aby si každý student procvičil danou problematiku, je potřeba mít k dispozici velkou baterii příkladů a myslím si, že pro tuto metodu jich dostatek dostupných není. Na internetu neexistuje mnoho sbírek, které se tímto tématem zabývají, a příkladů obsahují poskrovnu. Nestačí-li studentovi ke studiu příklady z hodin zobrazovacích metod, jelikož pro jejich časovou náročnost jich je méně než u metod ostatních, další rozličné pravděpodobně nenajde. Toto zjištění mne motivovalo k sestavení této sbírky.

Sbírka je tvořena ve formě pracovních listů řešených úloh, do nichž je možné ihned vpisovat, rýsovat, a tím předejít ztátě času nad někdy velmi časově náročným přerýsováním zadání. I tak jsou ale u všech příkladů uvedeny souřadnice a je možné je rýsovat od začátku. Úlohy jsou vždy řešeny a koncipovány tímto způsobem: na jedné straně se nachází zadání příkladu zapsané v souřadnicích i graficky znázorněné a na straně další je zapsáno řešení příkladu a příklad na obrázku vyřešen.

Obsahově je práce tvořena tak, že v první kapitole se seznámíme s metodou, stručně nastíníme teorii a také popíšeme konstrukci základních prvků a jejich vztahů.

Ve druhé kapitole již přejdeme k samotným úlohám, budeme se zde věnovat polohovým a metrickým úlohám, které jsou později potřeba k sestrojování těles. Téměř vždy je možné najít body, přímky i roviny v příkladech jak v obecné poloze, tak i v polohách speciálních, kdy je řešení specifičtější.

Hlavní částí je třetí kapitola, kde se dostáváme k tělesům. Kapitola je rozdělena na dvě podkapitoly: jehlany a hranoly. V obou těchto částech jsou příklady na konstrukci těles, ale převážně příklady na řezy i průniky přímky s tělesem. Tato část obsahuje i autorské příklady.

V celé sbírce se předpokládá znalost osové afinity a středové kolineace a nebude tedy nikde probírána.

K vytvoření bakalářské práce bylo užito typografického programu LaTeX a všechny obrázky jsou tvořeny autorkou v programu AutoCad.

Použité symboly a značení

A, B, C .... body roviny
a, b, c .... přímky
α, β, γ .... roviny
AB .... přímka určená body A,B
$|AB|$ .... délka úsečky AB
ABC .... rovina určená body ABC
$\sphericalangle ABC$ .... úhel, jehož vrchol je B
$|\sphericalangle ABC|$ .... velikost (ostrého) úhlu ABC
$|\sphericalangle pq|$ .... velikost (ostrého) úhlu, který svírají přímky p a q
$k(S; r)$ .... kružnice k se středem S a poloměrem r
$\triangle ABC$ .... trojúhelník ABC
π .... půdorysna
ν .... nárysna
μ .... bokorysna
p^ρ .... půdorysná stopa roviny ρ
n^ρ .... nárysná stopa roviny ρ
m^ρ .... bokorysná stopa roviny ρ
$P = P^a$ .... půdorysný stopník
$N = N^a$ .... nárysný stopník
$M = M^a$ .... bokorysný stopník

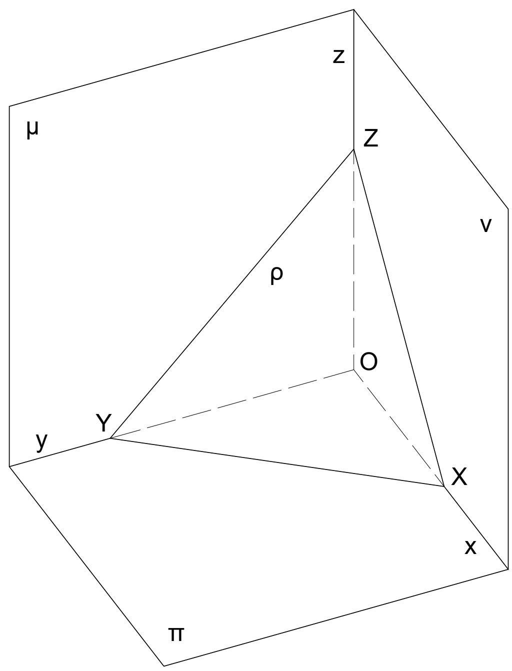
Kapitola 1

Úvod do zobrazovací metody pravoúhlé axonometrie

V úvodní části se seznámíme s pojmem pravoúhlá axonometrie, principem, jakým tato metoda funguje a také jakým způsobem v ní můžeme zobrazovat jednotlivé prvky. Pravoúhlé axonometrie užíváme především k názornému zobrazování těles.

1.1 Základní pojmy

Zobrazovací metoda, jejímž základem je rovnoběžné promítání na jednu průmětnu ρ, která má obecnou polohu k souřadnicovým rovinám π, ν, μ, se nazývá *axonometrie*. Je-li směr promítání do axonometrické průmětny kolmý, potom tuto promítací metodu nazveme *pravoúhlou (ortogonální) axonometrií*, viz obrázek 1.1.



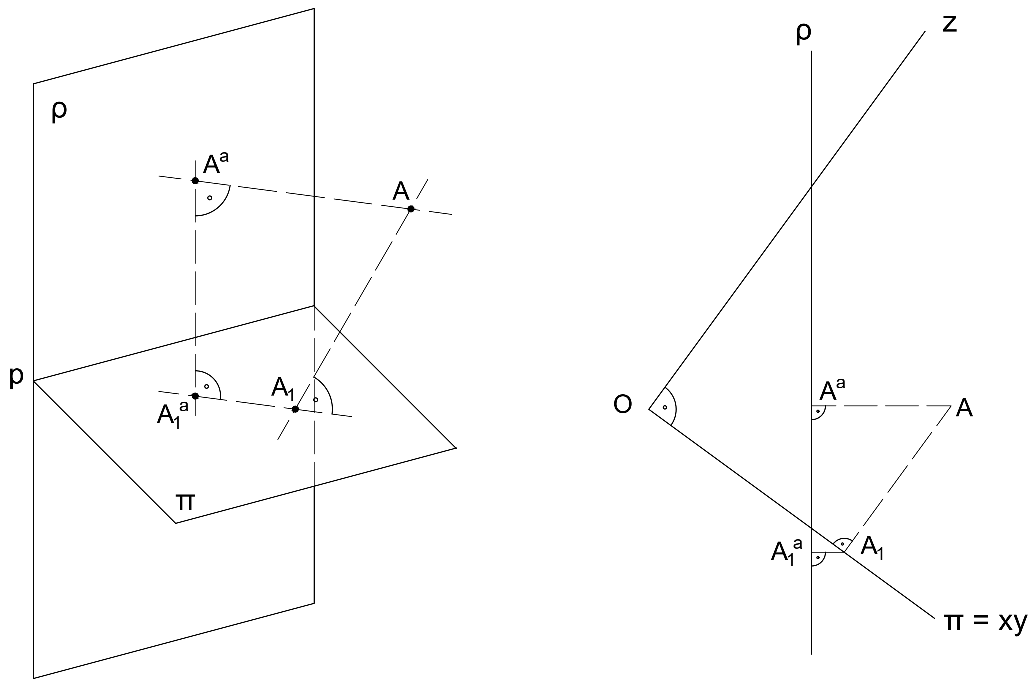
Obrázek 1.1: *Průmětny a axonometrický trojúhelník.*

V pravoúhlé axonometrii promítáme pravoúhle na dvě k sobě vzájemně kosé průmětny. Nákresnu ztotožníme s axonometrickou průmětnou, druhá průmětna je pomocná. Stejně jako u ostatních zobrazovacích metod požadujeme i u axonometrie, aby se jednalo o vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru do roviny. Doplníme ji tedy ještě o rovnoběžné promítání do další průmětny.

Princip tohoto zobrazení je takový, že bod A v prostoru promítneme současně pravoúhle do axonometrické průmětny do bodu A^a (což je axonometrický průmět bodu A) a pravoúhle do pomocné průmětny π do bodu A_1 (první průmět bodu A). První průmět A_1 bodu A pak promítneme pravoúhle do axonometrické průmětny do bodu A_1^a (axonometrický první průmět nebo také axonometrický půdorys bodu A).

Bod A prostoru je zobrazen do uspořádané dvojice bodů (A_1^a, A^a) nákresny, přičemž oba průměty leží na kolmici k průsečnici obou průměten (tzv. *ordinále*). Naopak každé uspořádané dvojici bodů (A_1^a, A^a) nákresny, které leží na ordinále, lze jednoznačně přiřadit právě jeden bod A prostoru.

Pravoúhlá axonometrie je vzájemně jednoznačné zobrazení bodu prostoru na uspořádané dvojice průmětů, které leží na ordinálách. Princip metody lze vidět na obrázku 1.2.



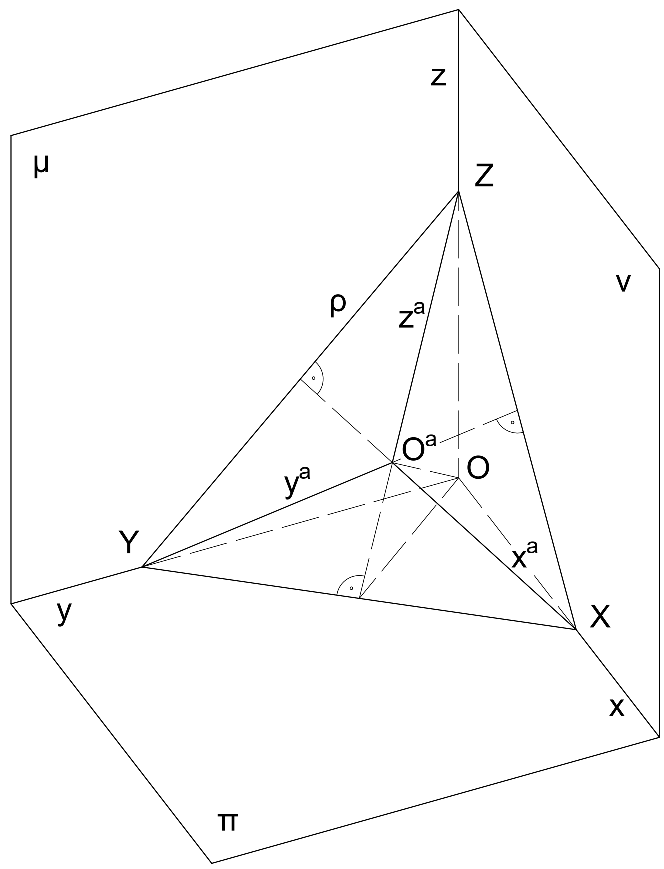
Obrázek 1.2: *Promítání pravoúhlé axonometrie.*

V pravoúhlé axonometrii vycházíme z pravoúhlé soustavy souřadnic $\{O,x,y,z\}$. Souřadnicové roviny volíme za pomocné průmětny π, ν, μ. Axonometrická průmětna, která neprochází začátkem, protíná souřadnicové osy x, y a z po řadě v bodech X, Y a Z, které tvoří *axonometrický trojúhelník.* Přímky XY, XZ a YZ jsou průsečíky pomocných průměten π, ν a μ s axonometrickou průmětnou, tedy axonometrické stopy těchto rovin. Viz obrázek 1.3. Dále si uveďme několiv vlastností axonometrie.

Axonometrický trojúhelník je vždy ostroúhlý.[1]

Souřadnicové osy se promítají do výšek axonometrického trojúhelníku.

[1] Jelikož důkazy nejsou předmětem této sbírky, je možné je najít například v [1] nebo jiné učebnici zobrazovacích metod.



Obrázek 1.3: *Průměty souřadných os.*

Axonometrický osový kříž je tvořen výškami axonometrického trojúhelníku.

Pravoúhlá axonometrie je jednoznačně určena buď axonometrickým trojúhelníkem, nebo osovým křížem.

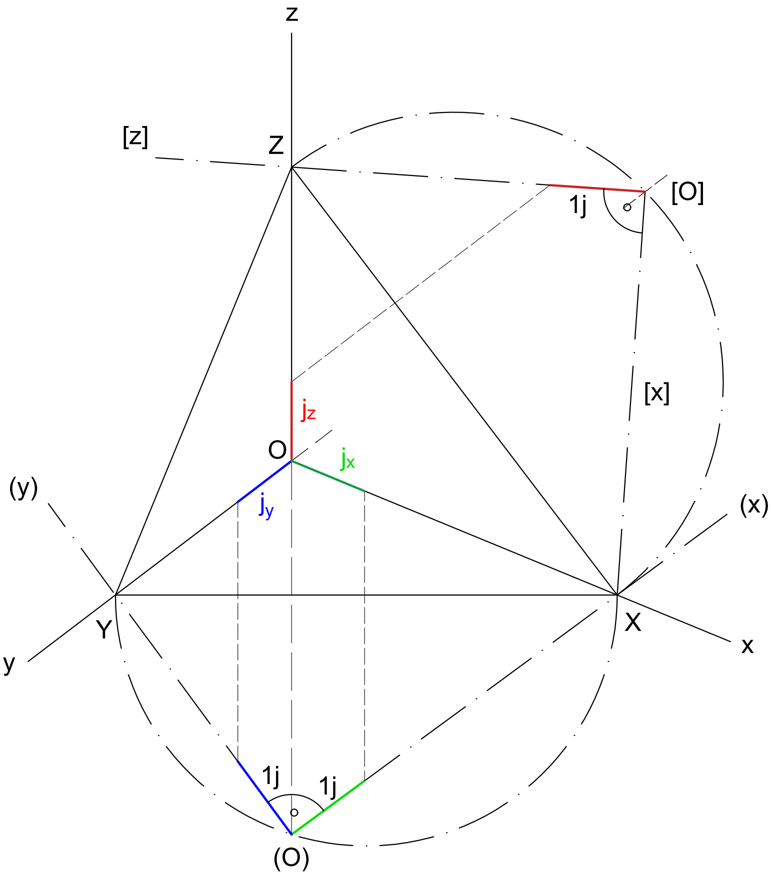
Je-li dán ostroúhlý trojúhelník, pak existují dvě pravoúhlé axonometrie (tj. podhled a nadhled), pro něž je daný trojúhelník axonometrickým trojúhelníkem. Dále budeme uvažovat pouze nadhled.

Každá z přímek axonometrického osového kříže leží v tupém úhlu zbývajících dvou přímek.

K axonometrickému osovému kříži existuje nekonečně mnoho axonometrických průměten, tj. nekonečně mnoho axonometrických trojúhelníků, které jsou navzájem stejnolehlé podle O^a, ale všechny patří témuž axonometrickému promítání. Jsou tedy pouhým přiblížením či oddálením od počátku.

Jednotky na osách

Jelikož základem pravoúhlé axonometrie je pravoúhlé promítání, úsečky na osách x, y, z nebo na přímkách s nimi rovnoběžných se zkracují, násobí se kosinem úhlu příslušné osy s axonometrickou průmětnou.



Obrázek 1.4: *Nanášení jednotek.*

Jsou-li α, β, γ úhly, které svírají po řadě osy x, y, z s axonometrickou průmětnou, pak jednotka délky, na osách x, y, z se promítne do úsečky velikosti $j_x = j \cdot \cos\alpha$, $j_y = j \cdot \cos\beta$, $j_z = j \cdot \cos\gamma$. [1] Úsečky j_x, j_y, j_z se nazývají axonometrické jednotky na osách x, y, z. Nanášení viz obrázek 1.4.

Na tomto obrázku je rovněž znázorněno otáčení půdorysny π (resp. nárysny ν) kolem axonometrické stopy XY (resp. XZ) do axonometrické průmětny.

Pravoúhlá axonometrie, pro kterou všechny tři axonometrické jednotky jsou vzájemně různé, se nazývá pravoúhlá trimetrie (tento název se příliš nepoužívá, říkáme pouze pravoúhlá axonometrie). Axonometrie, pro kterou jsou právě dvě jednotky stejně veliké, se nazývá *dimetrie* a nakonec ta, pro kterou všechny jednotky jsou stejně veliké, je *izometrie*.

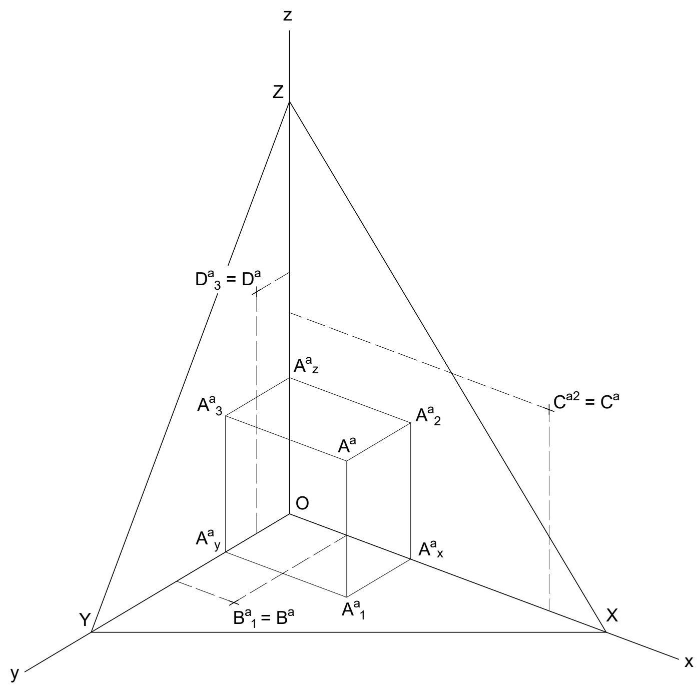
1.2 Zobrazení bodu, přímky a roviny

1.2.1 Bod

Nyní přejdeme k zobrazení bodu. Bod prostoru se zobrazí do uspořádané dvojice (A_1^a,A^a), kde A_1^a je axonometrický půdorys bodu A a A^a jeho axonometrický průmět. Zbývající průměty bodu A získáme doplněním souřadnicového kvádru bodu A.

Z obrázku 1.5 lze vidět, že bod je zadán jakýmikoliv dvěma průměty a ostatní je možné z nich získat.

Spojnice axonometrického průmětu A^a bodu A s axonometrickým půdorysem A_1^a,



Obrázek 1.5: *Průměty bodu A v obecné poloze a bodů B, C, D.*

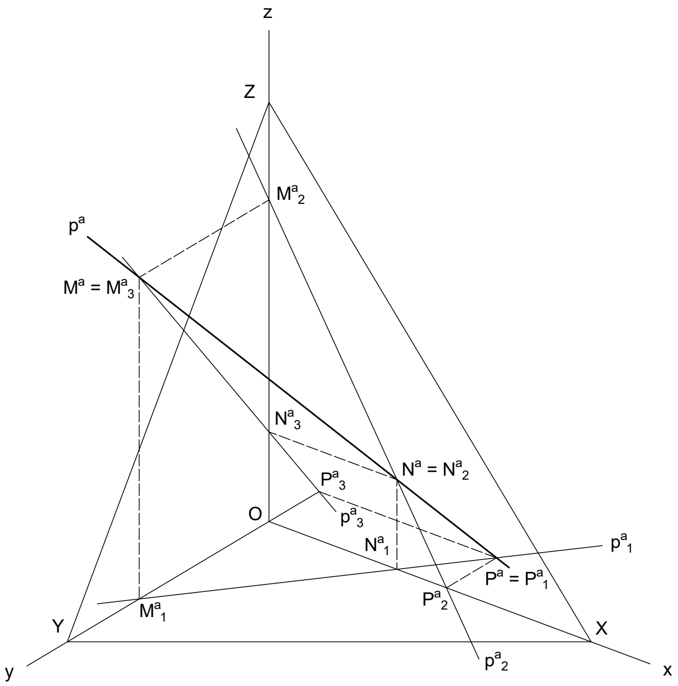
resp. nárysem A_2^a, resp. nárysem A_3^a se nazývá první, resp. druhá, resp. třetí ordinála a je rovnoběžná se souřadnou osou Z, resp. y, resp. x. Leží-li bod v pomocné průmětně po řadě v půdorysně, nárysně a bokorysně, splývá jeho axonometrický průmět po řadě s axonometrickým půdorysem, s axonometrickým nárysem a s axonometrickým bokorysem.

1.2.2 Přímka

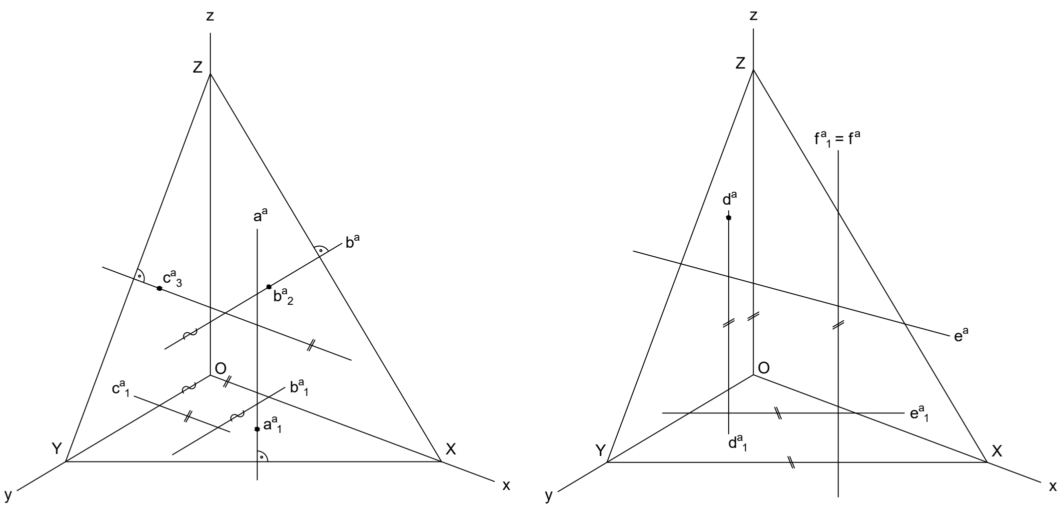
Průmět přímky je určen průměty dvou jejích různých bodů. K jejímu určení nám opět stačí dva její libovolné průměty, z nichž můžeme získat ty zbylé. Většinou se však udává její axonometrický průmět a její axonometrický půdorys. Průsečíky s průmětnami π, ν, μ, nazýváme stopníky. Půdorysný stopník značíme P a platí $P^a = P_1^a$ a je průsečíkem axonometrického průmětu přímky a jejího axonometrického půdorysu, nárysný stopník značíme N a platí $N^a = N_2^a$ a je průsečíkem axonometrického průmětu přímky a jejího axonometrického nárysu, bokorysný stopník značíme M a platí $M^a = M_3^a$ a je průsečíkem axonometrického průmětu přímky a jejího axonometrického bokorysu. Viz 1.6.

Nyní si všimněme zvláštních poloh přímky. Na obrázku 1.7(a) jsou přímky kolmé k průmětnám, $a \perp \pi$, $b \perp \nu$, $c \perp \mu$. Dále na obrázku 1.7(b) jsou znázorněny další polohy přímky. Přímka d je kolmá k axonometrické průmětně, přímka e je s axonometrickou průmětnou rovnoběžná a přímka f, pro jejíž průměty platí $f^a = f_1^a$, $f^a \perp XY$, není určena jednoznačně, musí se na ní dourčit další dva její body.

Náleží-li bod přímce, musí jeho průměty náležet také příslušným průmětům této přímky. Pokud není vztah z předchozí věty splněn, bod není bodem přímky.



Obrázek 1.6: *Zobrazení přímky.*



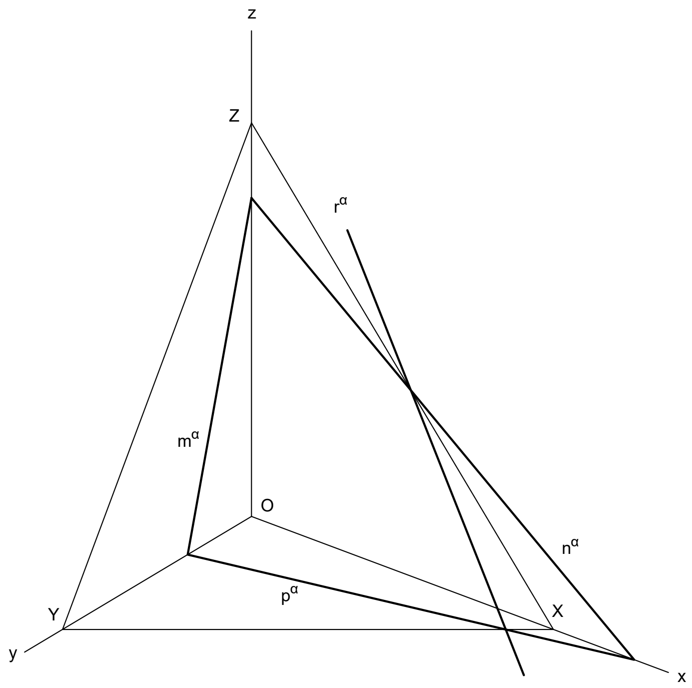
(a) **(b)**

Obrázek 1.7: *Přímky v různých polohách.*

1.2.3 Rovina

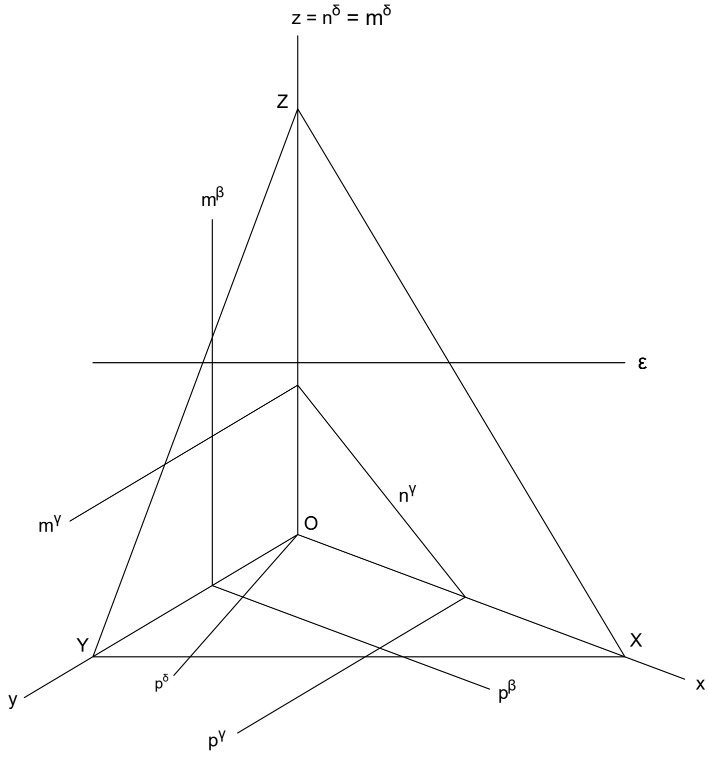
Rovina je určena třemi různými nekolineárními body. Jelikož se každá rovina α, která není kolmá na axonometrickou průmětnu (taková se zobrazí jako přímka), zobrazí na celou nákresnu, je potřeba znát alespoň dvě různé přímky této roviny. Většinou se využívá stop dané roviny. Ty můžeme najít dvojím způsobem: nalezením stopníkového trojúhelníku, nebo jako průsečnice s průmětnami π, ν, μ. Axonometrická stopa je potom průsečnicí axonometrického trojúhelníku s tím stopníkovým, což lze vidět na obrázku 1.8.

Uvedeme několik příkladů rovin ve zvláštní poloze. Například rovinu $\beta \parallel \nu$, rovinu



Obrázek 1.8: *Zobrazení roviny.*

$\gamma \parallel y$, rovinu δ procházející osou z a také rovinu ε, která je kolmá k axonometrické průmětně a současně rovnoběžná s π. Viz obr. 1.9.

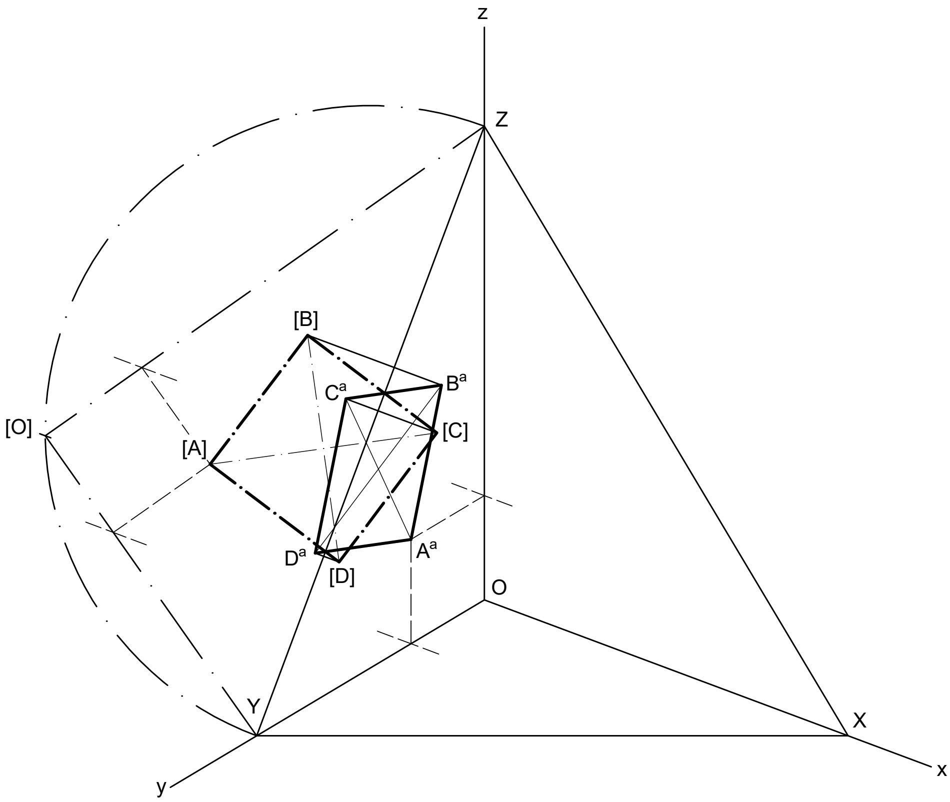


Obrázek 1.9: *Specialní polohy rovin.*

Pokud přímka náleží rovině, musí její stopníky ležet na příslušných stopách roviny.

1.3 Pomocné konstrukce

Nejdříve si ukážeme sklápění daného objektu. V případě průměten π, ν, μ jsme sklápění už nevědomky provedli při nanášení jednotek. Leží-li nějaký objekt v některé z těchto průměten, např. μ, lze ho zde ve sklopení vidět ve skutečné velikosti a funguje zde afinita $\mathcal{A} = (o = YZ, A \to [A])$, jelikož YZ je axonometrická stopa μ. Viz obrázek 1.10.

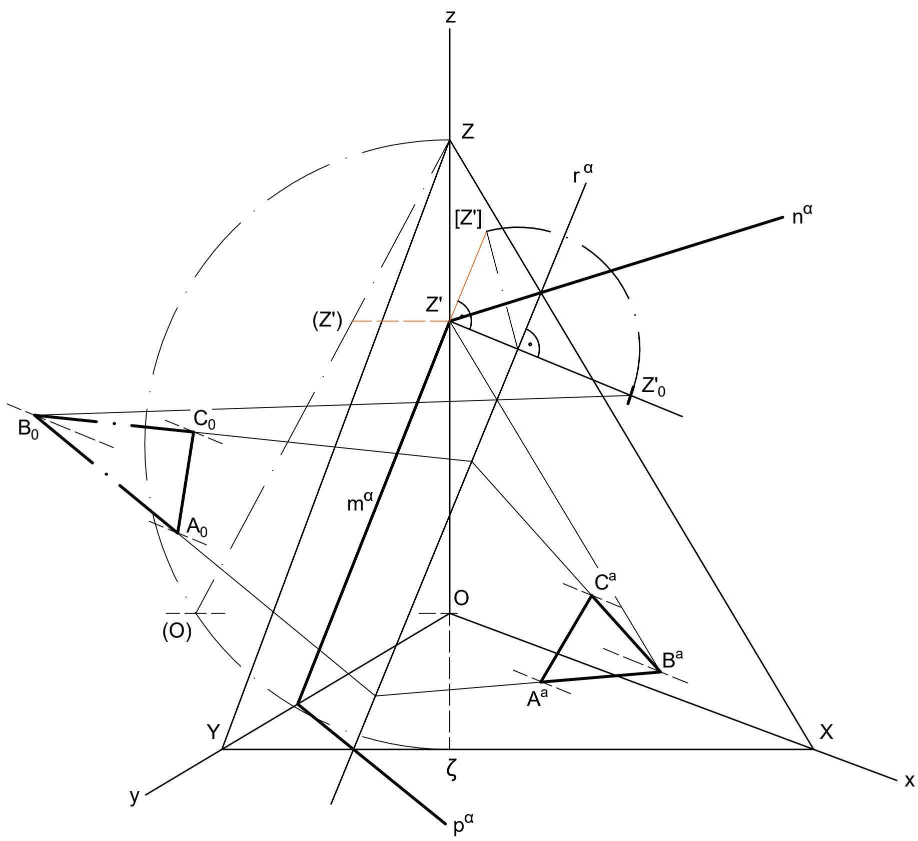


Obrázek 1.10: *Sklopení útvaru v μ.*

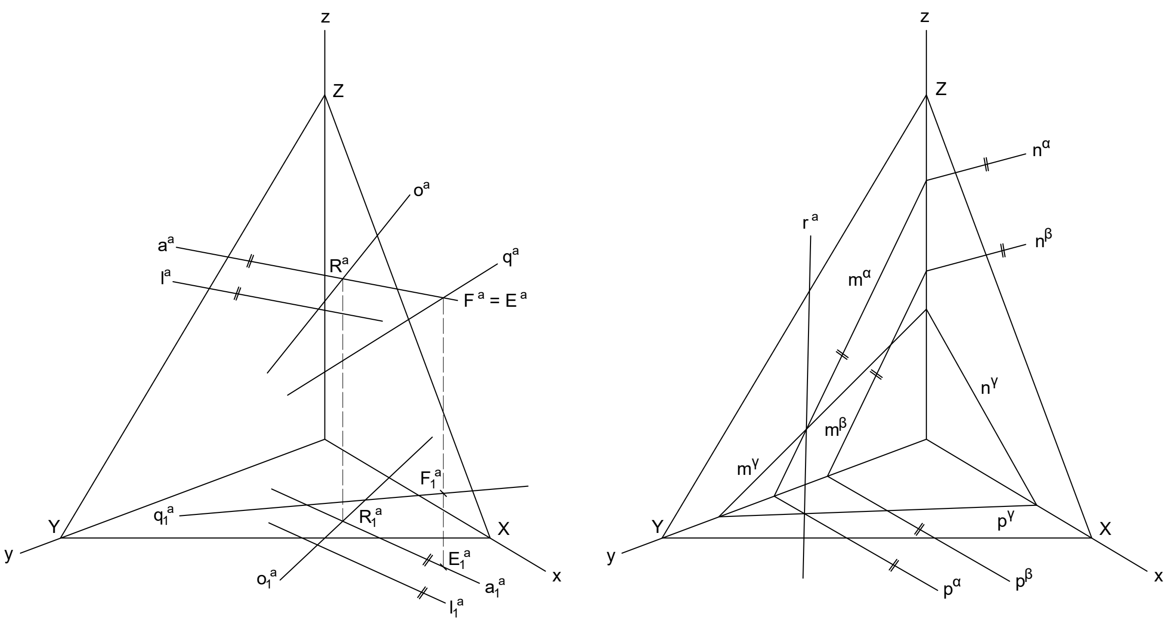
Leží-li objekt v obecné poloze, jeho skutečnou velikost nalezneme v otočení. Otáčíme kolem axonometrické stopy roviny, které objekt náleží. Opět zde platí afinita $\mathcal{A} = (o = r^{\alpha}, A \to (A))$, tudíž stačí otočit jeden bod a ostatní si můžeme doplnit. Znázorněno na obrázku 1.11.

1.4 Vzájemná poloha přímek a rovin

Nejdříve si ukážeme polohy dvou přímek a rovin. Mějme dánu přímku a a přímku l s ní rovnoběžnou, o s ní různoběžnou (jejich průsečík je bod R) a q s ní mimoběžnou, dále rovinu α a s ní rovnoběžnou rovinu β a různoběžnou rovinu γ (jejich průsečnice je přímka r). Viz obrázek 1.12.



Obrázek 1.11: *Otočení útvaru v obecné rovině α.*

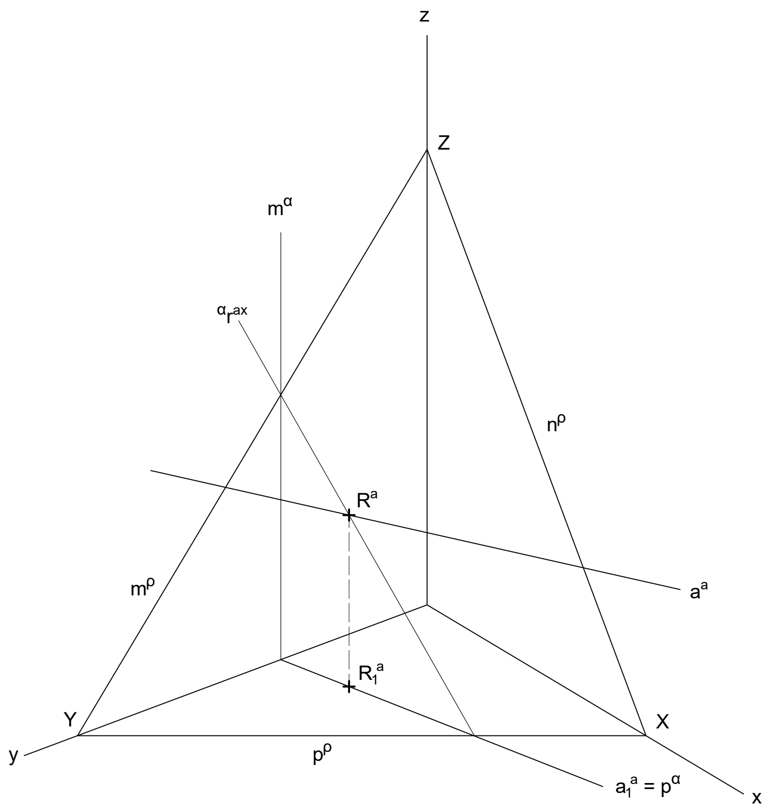


Obrázek 1.12: *Vzájemné polohy přímek a rovin.*

1.5 Průnik přímky a roviny

Pro jednoduchost si sestrojíme průsečík přímky $a = (a^a, a_1)$ s ax. průmětnou. Stejným způsobem bychom postupovali pro libovolnou rovinu. Přímkou a proložíme vhodnou rovinu, praktické bude zvolit rovinu kolmou k π $(a_1^a = p^\alpha)$. Sestrojíme průsečnici rovin, potom hledaný průsečík je průsečíkem průsečnice r a zadané přímky a.

Průsečík lze sestrojit i metodou krycí přímky. Viz obrázek 1.13.



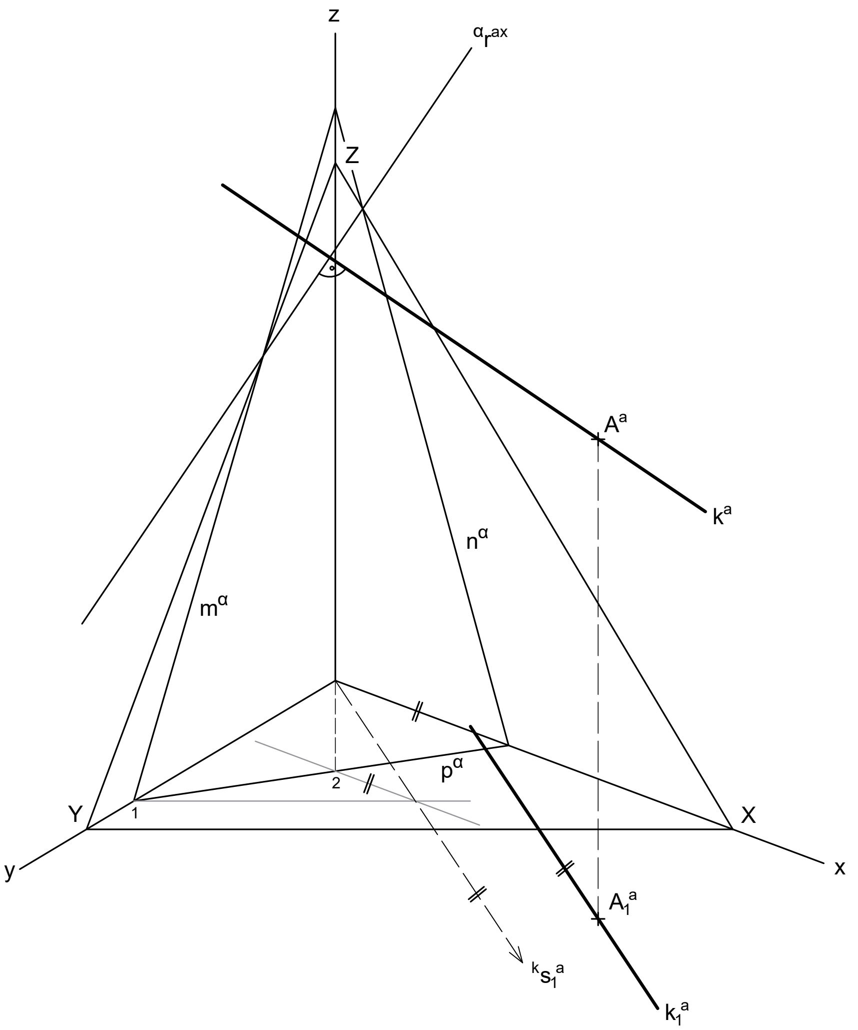
Obrázek 1.13: *Průnik přímky a roviny (axonometrické průmětny).*

1.6 Kolmost přímek a rovin

1.6.1 Přímka kolmá k rovině

Nejprve si sestrojíme přímku kolmou k rovině. Máme zadánu rovinu α a bod $A = (A^a, A_1^a)$, kterým má hledaná kolmice k procházet. Axonometrický průmět k^a přímky k je kolmý k axonometrické stopě r^α roviny α, což nám přímo vyplývá z věty o pravoúhlém průmětu pravého úhlu. Půdorys kolmice sestrojíme tak, že nejdříve nalezneme směr kolmý s_1^a k půdorysné stopě roviny α[2]. Axonometrický půdorys kolmice k_1^a patří tomuto směru ${}^k s_1^a$. Viz obrázek 1.14.

[2]Tento směr je sestrojen pomocí výšek v trojúhelníku, pomocný bod 1 náleží některé ze souřadnicových os půdorysny a pomocný bod 2 stopě roviny.

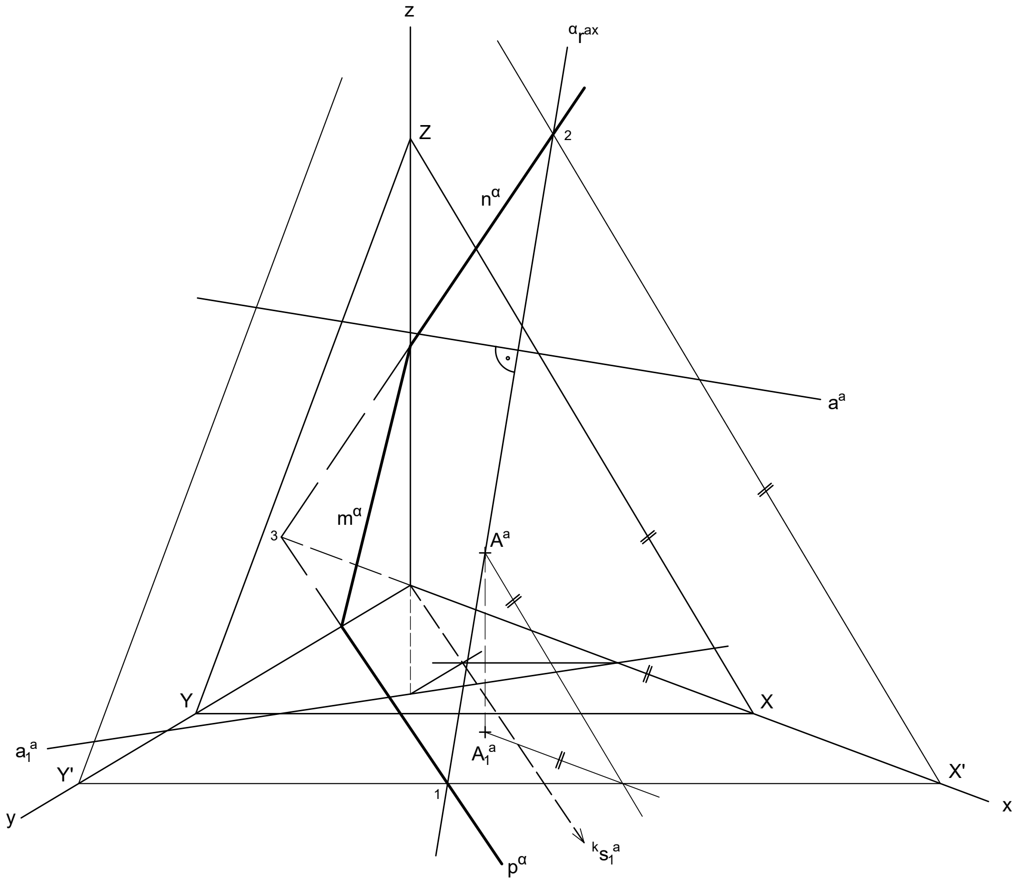


Obrázek 1.14: *Přímka kolmá k rovině.*

1.6.2 Rovina kolmá k přímce

Následně budeme sestrojovat rovinu kolmou k přímce. Je dána přímka a a bod A, kterým má hledaná rovina α kolmá k a procházet. Způsobů, jak tuto rovinu sestrojit, je hned několik, jelikož to však není předmětem této bakalářské práce, uvedeme pouze jeden.

Bodem A proložíme pomocnou axonometrickou průmětnu a bodem A vedeme přímku r kolmou k přímce a. Přímka ${}^{\alpha}r^{ax}$ je axonometrická stopa roviny α v nové axonometrické průmětně. Najdeme směr kolmý na půdorys přímky a (pomocí výšek v trojúhelníku). Body 1,2 jsou průsečíky axonometrické stopy ${}^{\alpha}r^{ax}$ s novým axonometrickým trojúhelníkem. Těmito body bude po řadě procházet půdorysná, resp. nárysná stopa. Půdorysná stopa patří nalezenému směru. Průsečíkem 3 půdorysné stopy p^{α} s osou x bude procházet i nárysná stopa n^{α}, $n^{\alpha} = 32$. Viz obrázek 1.15.



Obrázek 1.15: *Rovina kolmá k přímce.*

Pozn.: Také průměty bodů, přímek a rovin budeme značit bez axonometrického indexu a. Dále ρ nebude označovat axonometrickou průmětnu, ale jakoukoliv libovolnou rovinu.

Kapitola 2

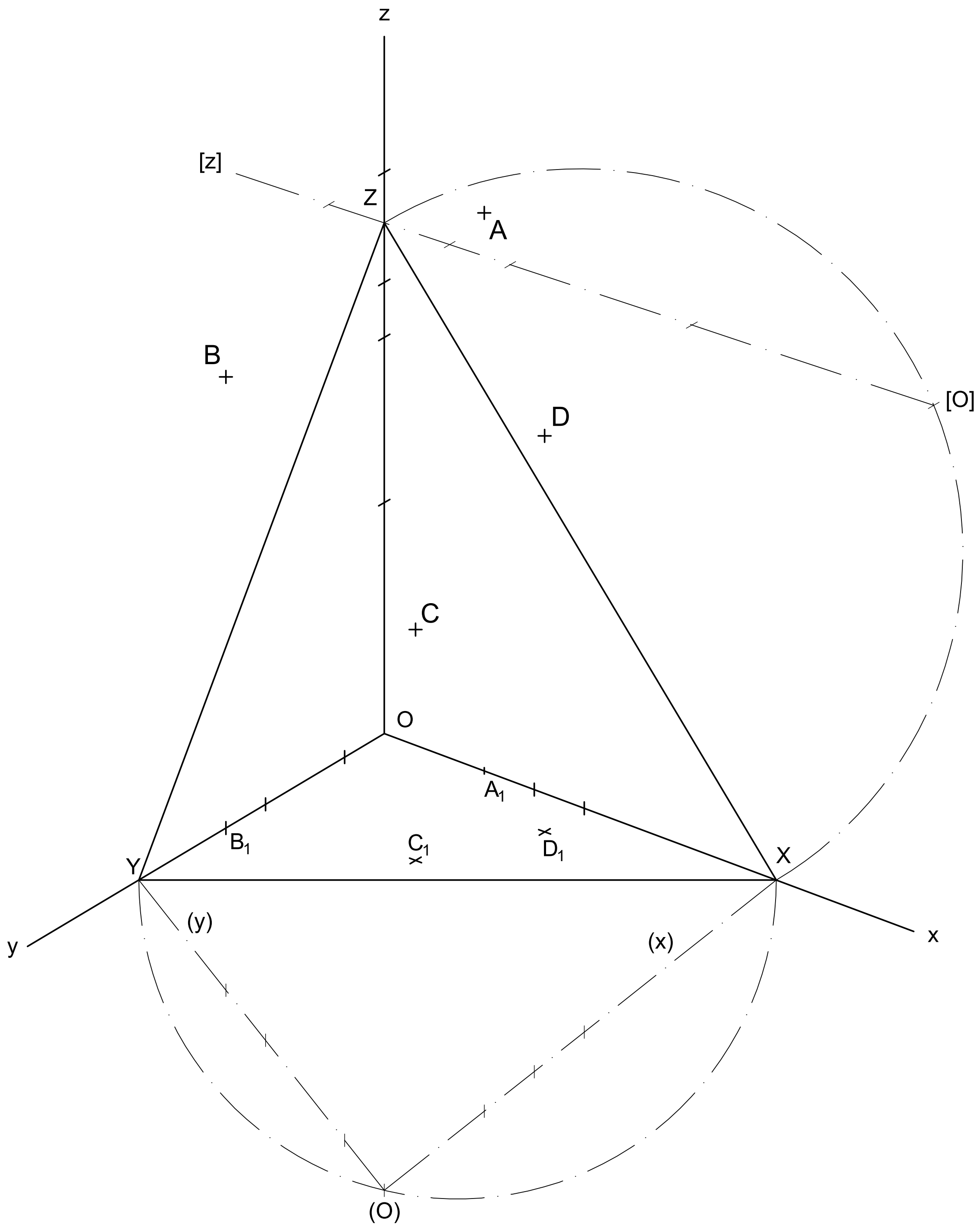
Základní metrické a polohové úlohy

Cílem této kapitoly je zvládnutí základních polohových a metrických úloh. Je zde také uvedeno několik úloh, ve kterých mají přímky a roviny speciální polohu vzhledem k průmětnám nebo osám. Při řešení těchto úloh si studenti mohou uvědomit, že speciální umístění přímky či roviny umožňuje zjednodušení některých úkonů při konstrukci.

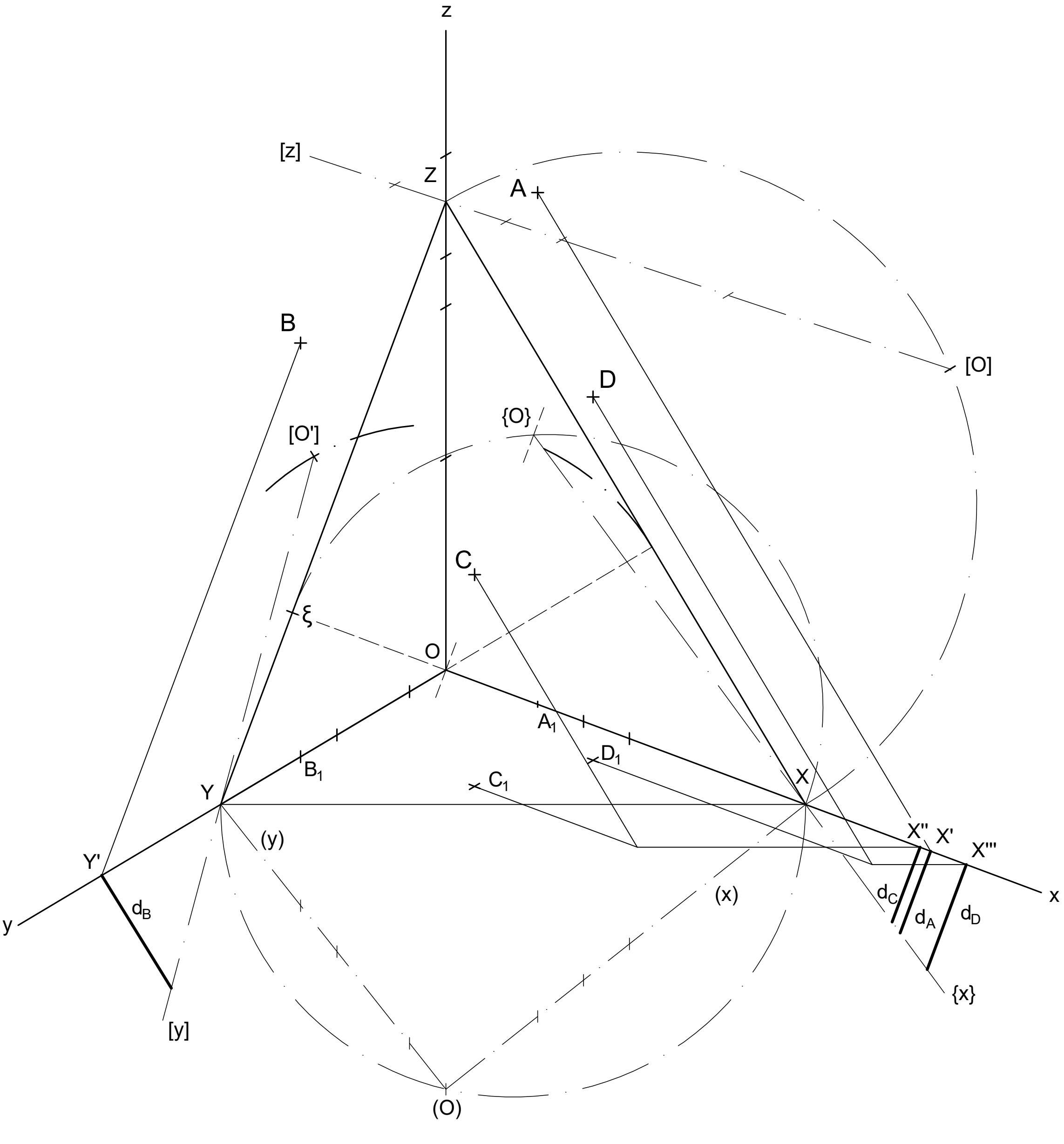
Kapitola obsahuje jedenáct příkladů na vzdálenosti bodů, nalezení odchylek, sestrojení množin bodů dané vlastnosti (přímka kolmá k rovině, ...) i konstrukci šestiúhelníku v obecné rovině.

Příklad 1

Určete vzdálenost bodů A, B, C, D od axonometrické průmětny. Axonometrie je dána: $|XY| = 100$, $|XZ| = 120$, $|YZ| = 110$, a souřadnice bodů jsou: $A[20; 0; 100]$, $B[0; 40; 80]$, $C[30; 30; 40]$, $D[40; 10; 70]$.

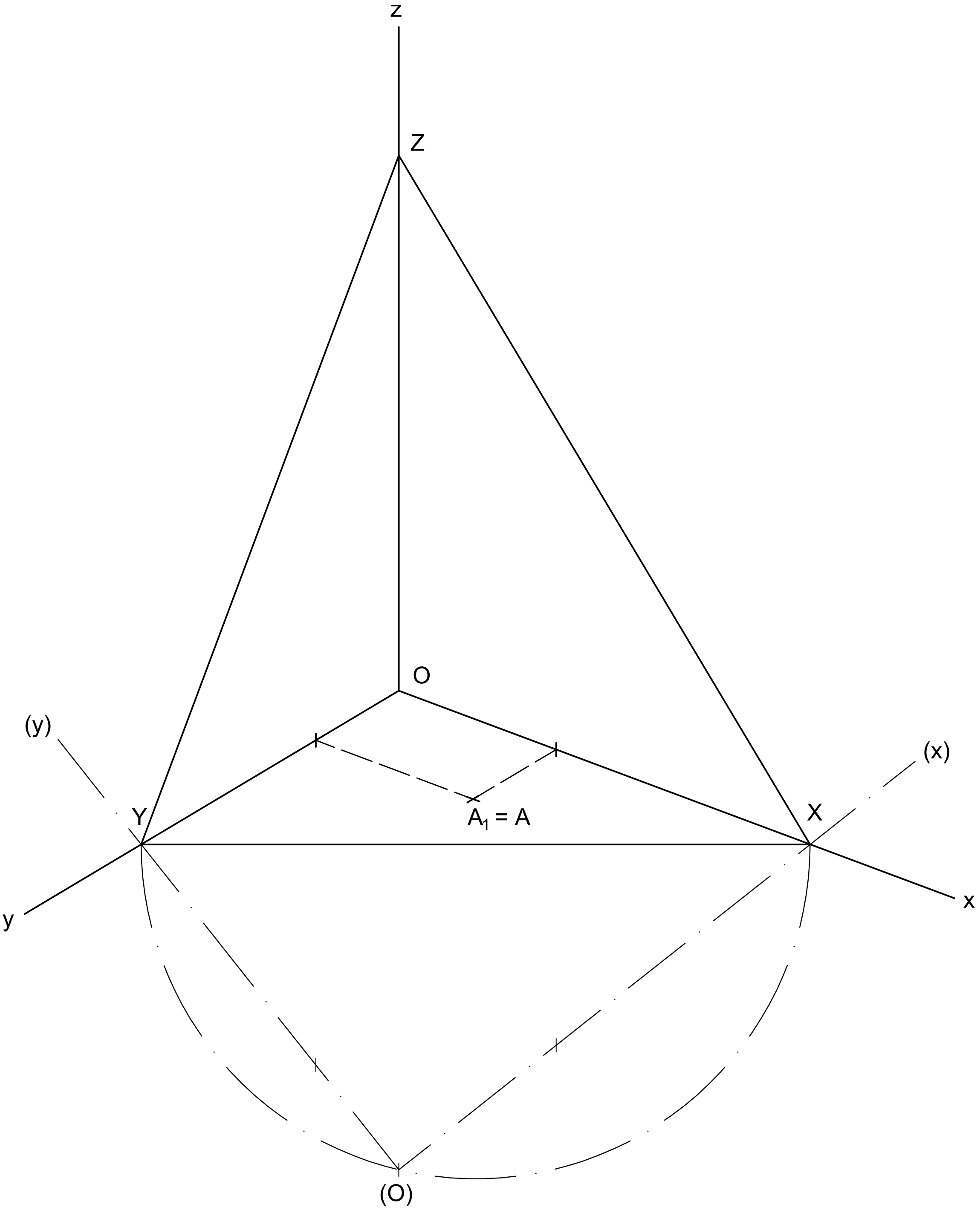


Řešení: Proložíme pomocnou axonometrickou průmětnu daným bodem (nalezneme kótu stopníku, tj. vzdálenost od pomocné axonometrické průmětny).

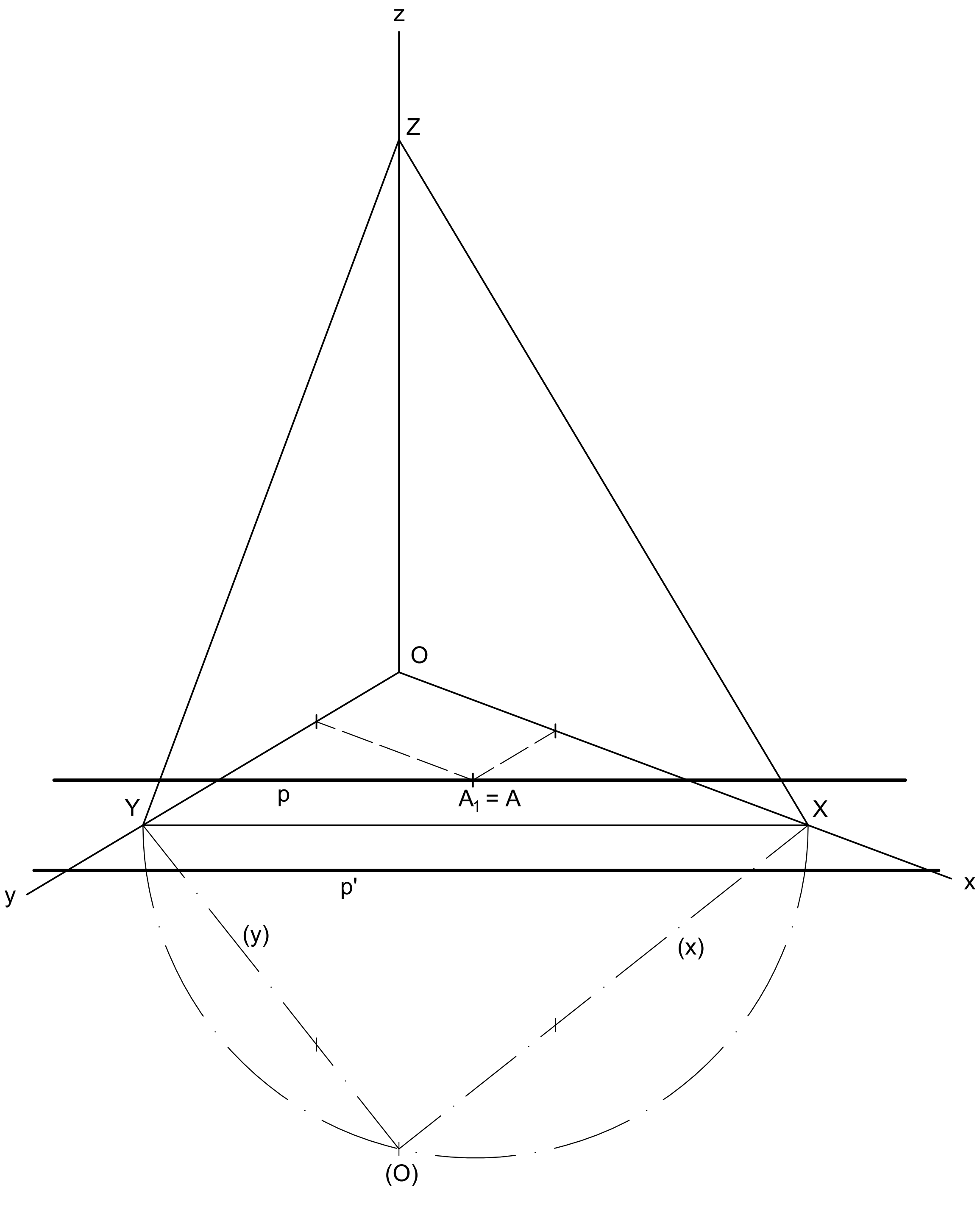


Příklad 2

V průmětně π určete množinu bodů, které mají od axonometrické průmětny stejnou vzdálenost jako bod A. Axonometrie je dána axonometrickým trojúhelníkem o délkách stran $|XY| = 100$, $|XZ| = 120$, $|YZ| = 110$ a souřadnice bodu jsou $A[30; 20; 0]$.

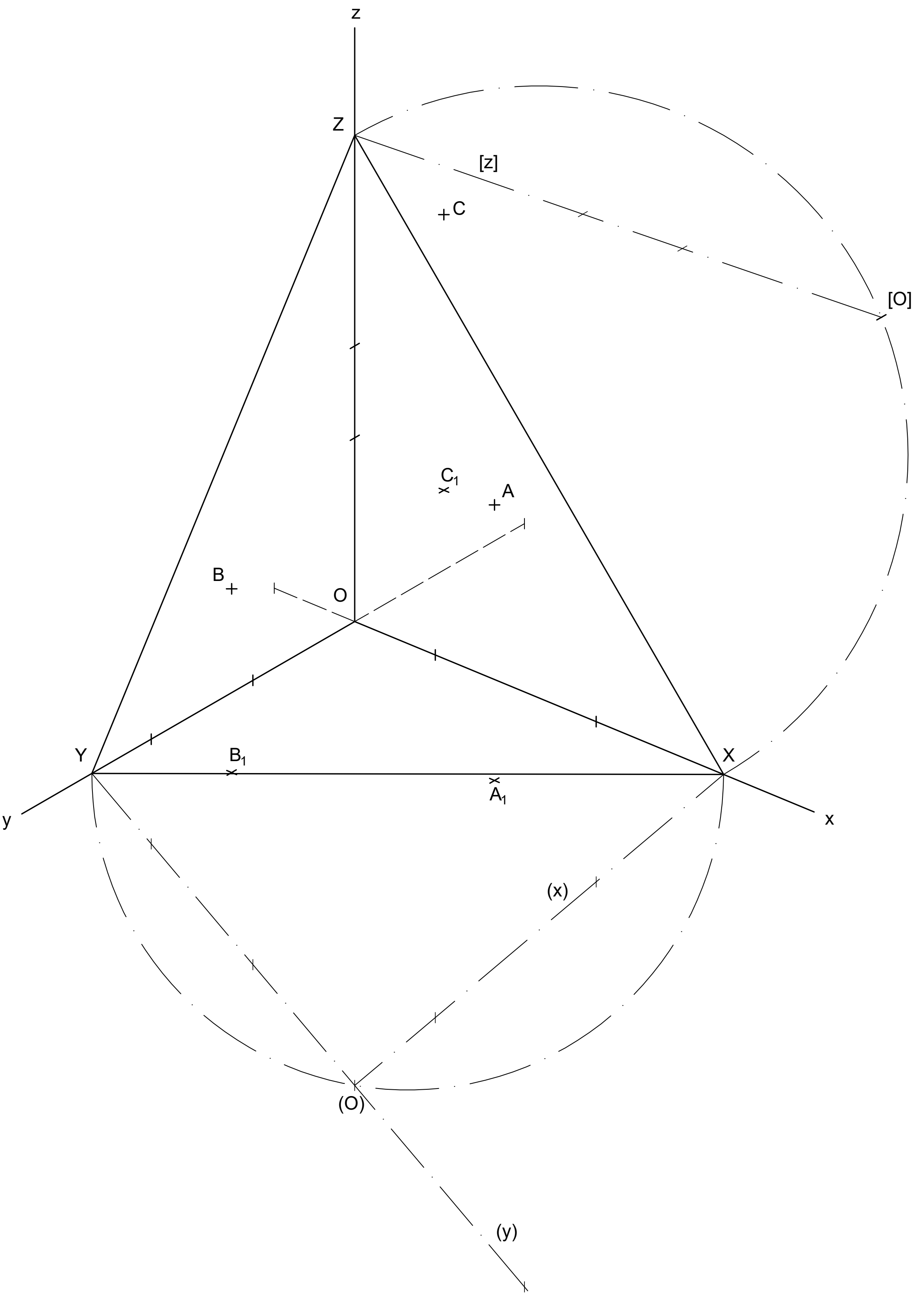


Řešení: Jelikož bod $A \in \pi$, hledanou množinou bodů budou dvě přímky p, p' rovnoběžné s průsečnicí axonometrické průmětny a půdorysny, tzn. s XY. Přímka p jdoucí bodem A a p', pro niž platí $|p,XY| = |p',XY|$, $A \notin p'$.

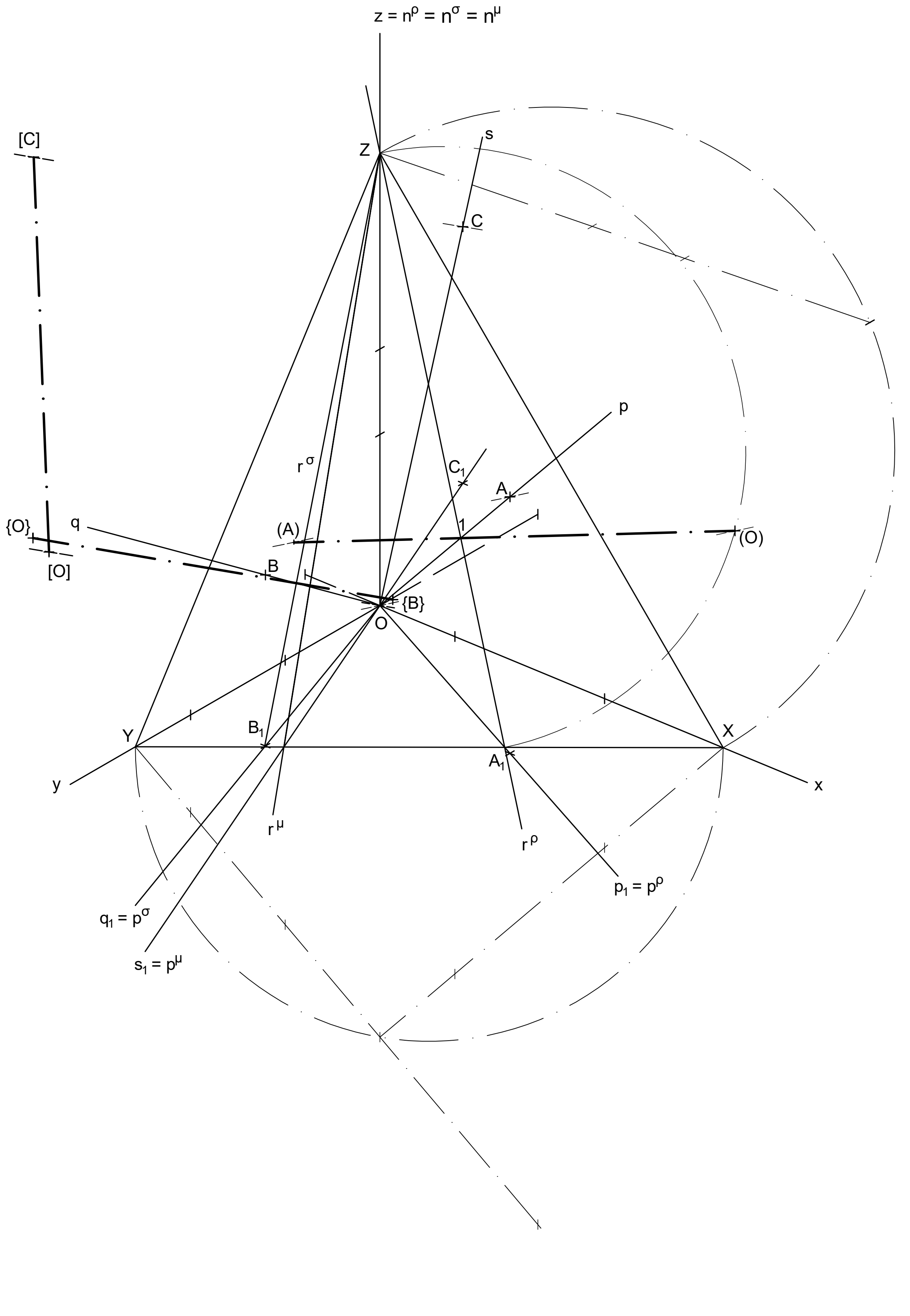


Příklad 3

Určete vzdálenost bodů A, B, C od počátku. Axonometrie je dána úhly souřadných os: $|\sphericalangle xy| = 127{,}5°$; $|\sphericalangle yz| = 120°$; souřadnice bodů jsou: $A[60; 30; 60]$, $B[20; 60; 40]$, $C[-20; -50; 60]$.



Řešení: Proložíme si bodem A a počátkem O přímku p a touto přímkou rovinu ρ kolmou na průmětnu π ($\rho = AA_1O$). Nalezneme axonometrickou stopu roviny ρ. V otočení nalezneme skutečnou velikost OA pomocí afinity $\mathcal{A} = (o = r^\rho; O \to (O))$. Pro body B, C postupujeme stejným způsobem.



Příklad 4

Určete skutečnou velikost úsečky:

a. AB, $A[-20; 30; 0]$, $B[40; 10; 0]$,

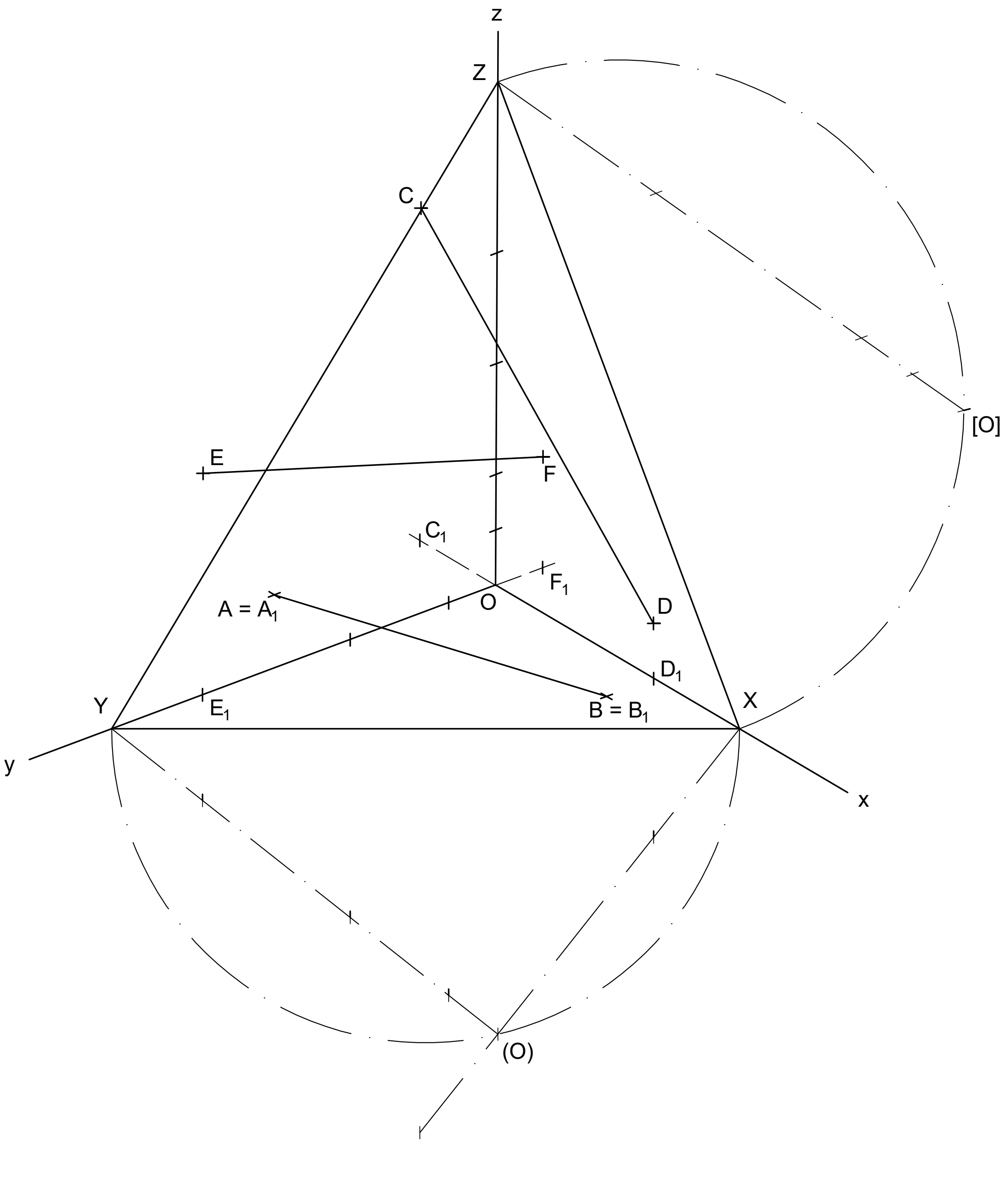
b. CD, $C[-20; 0; 60]$, $D[40; 0; 10]$,

c. EF, $E[0; 60; 40]$, $F[0; -10; 20]$,

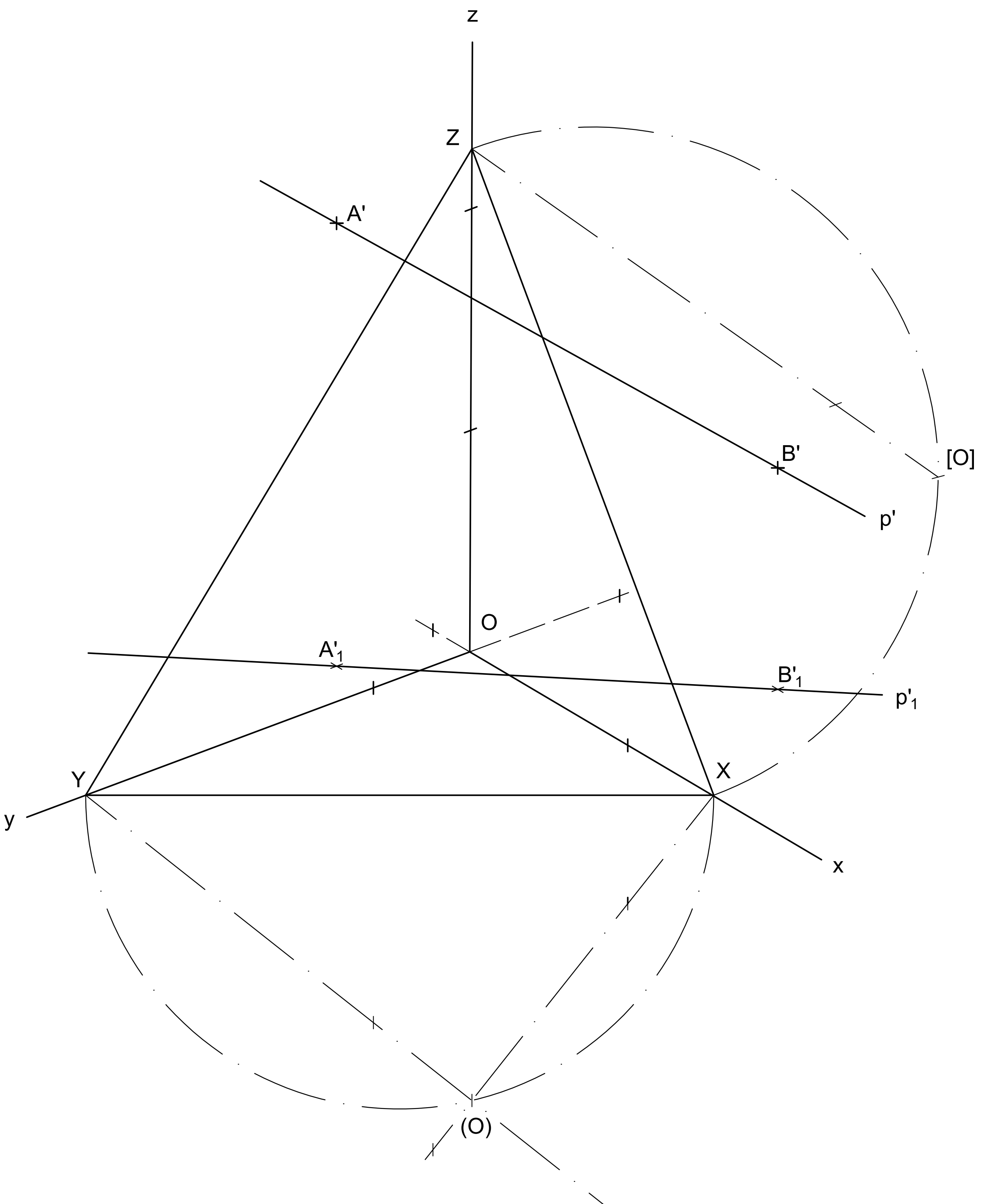
d. $A'B'$, $A'[-10; 20; 80]$, $B'[40; -30; 40]$.

Axonometrie je dána: $|XY| = 100$, $|XZ| = 110$, $|YZ| = 120$.

Zadání a., b., c.



Zadání d.



Řešení:

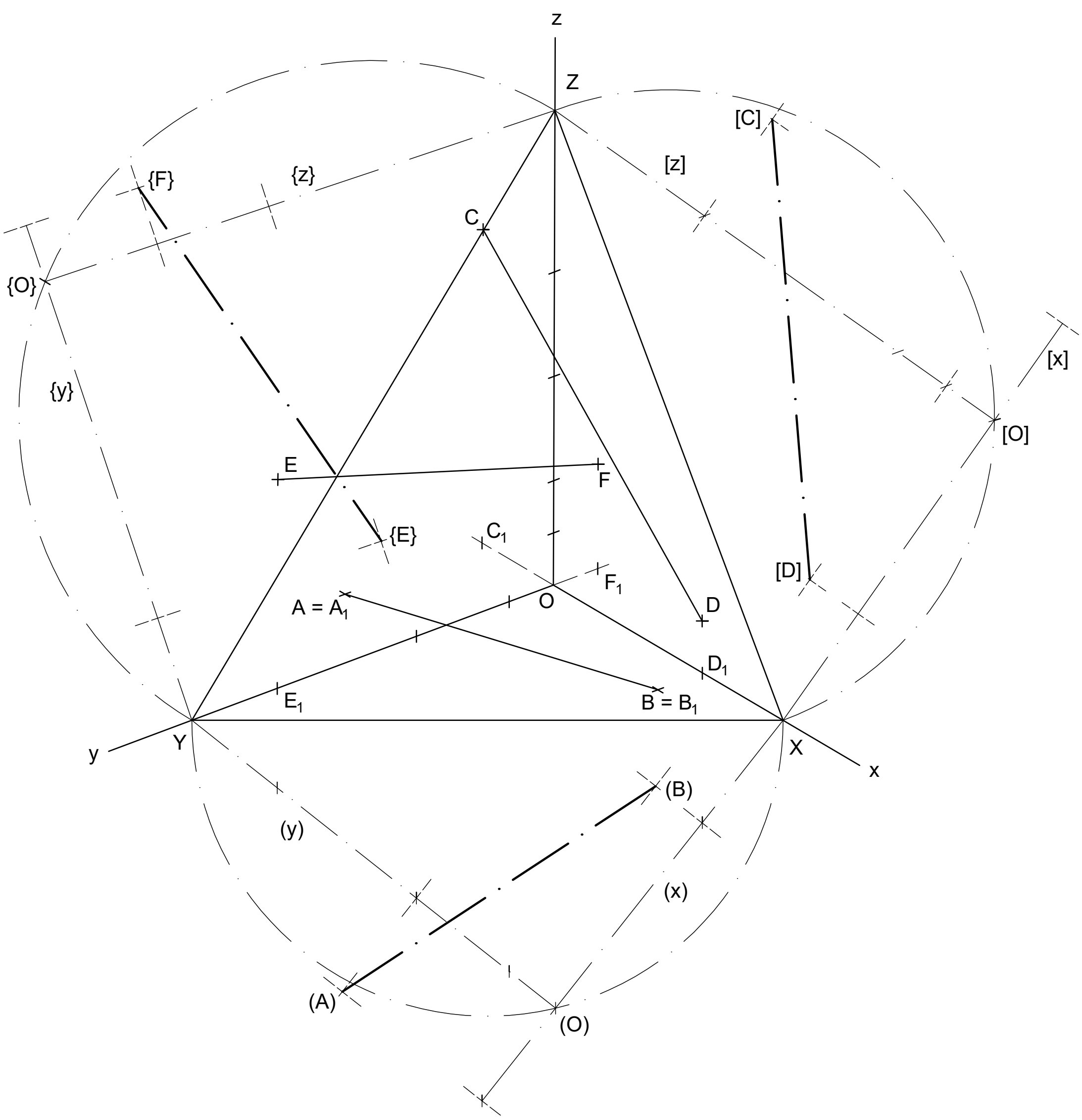
a. Přímka určená body AB leží v půdorysně, tudíž stačí najít skutečnou velikost úsečky těmito body v π.

b. Přímka CD náleží ν, budeme postupovat podobně, ale v nárysně.

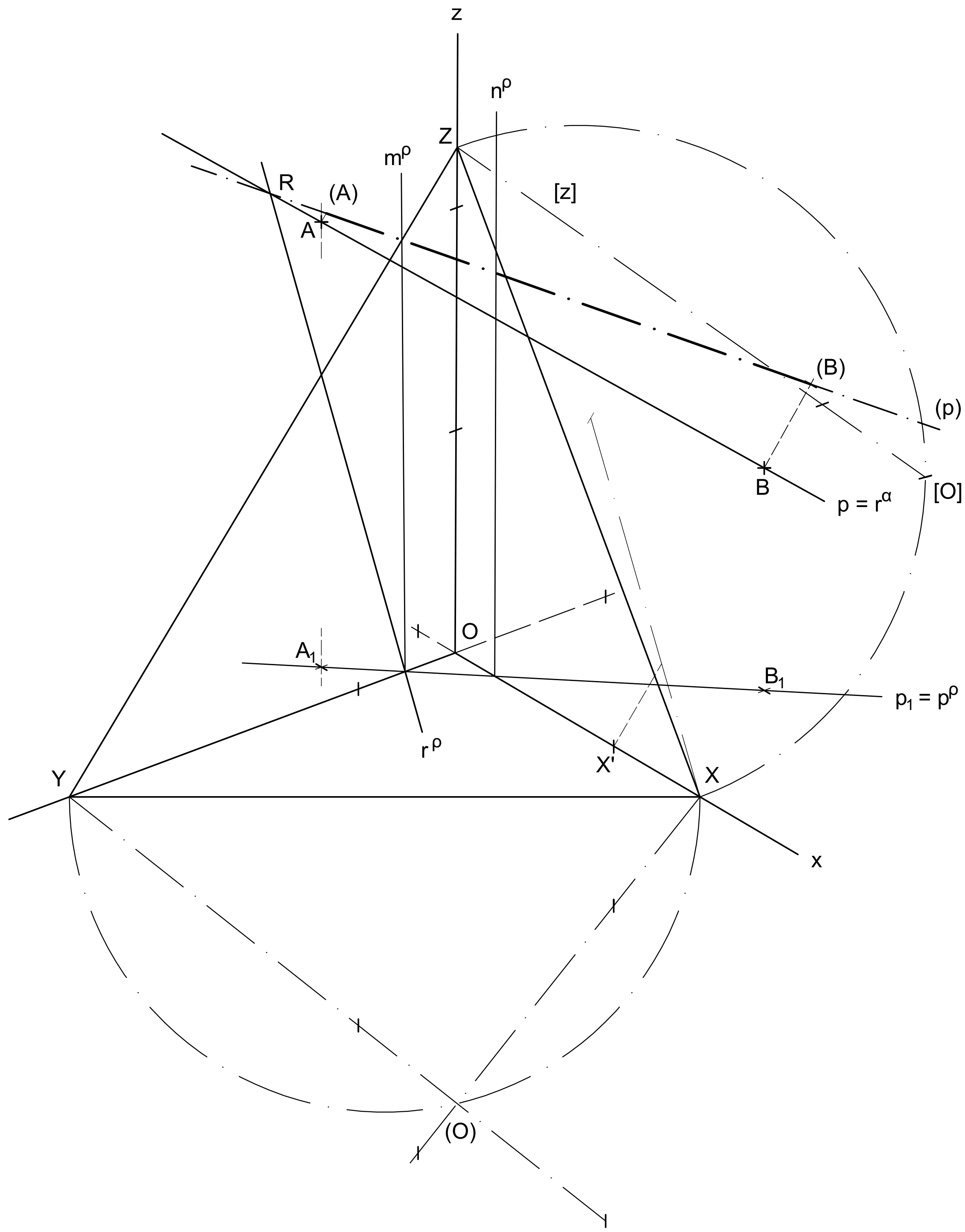
c. Přímka EF leží v μ, budeme opět postupovat stejným způsobem.

d. Přímka AB leží v obecné rovině. Sklopíme ji do axonometrické průmětny, určíme axonometrický stopník R (pomocí roviny ρ, kterou přímkou proložíme) a vzdálenost jednoho bodu úsečky (v našem případě bodu B).

Řešení a., b., c.

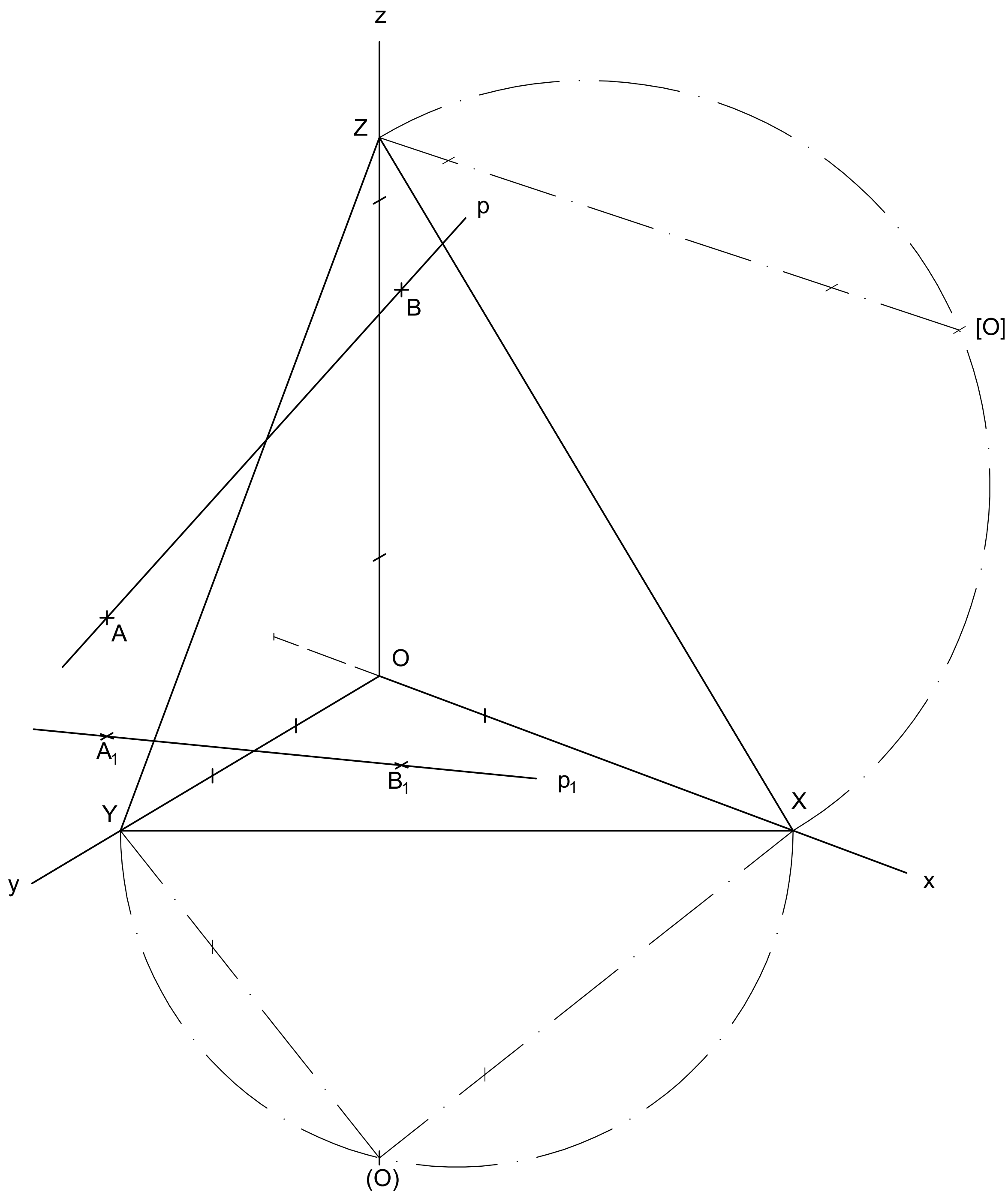


Řešení d.

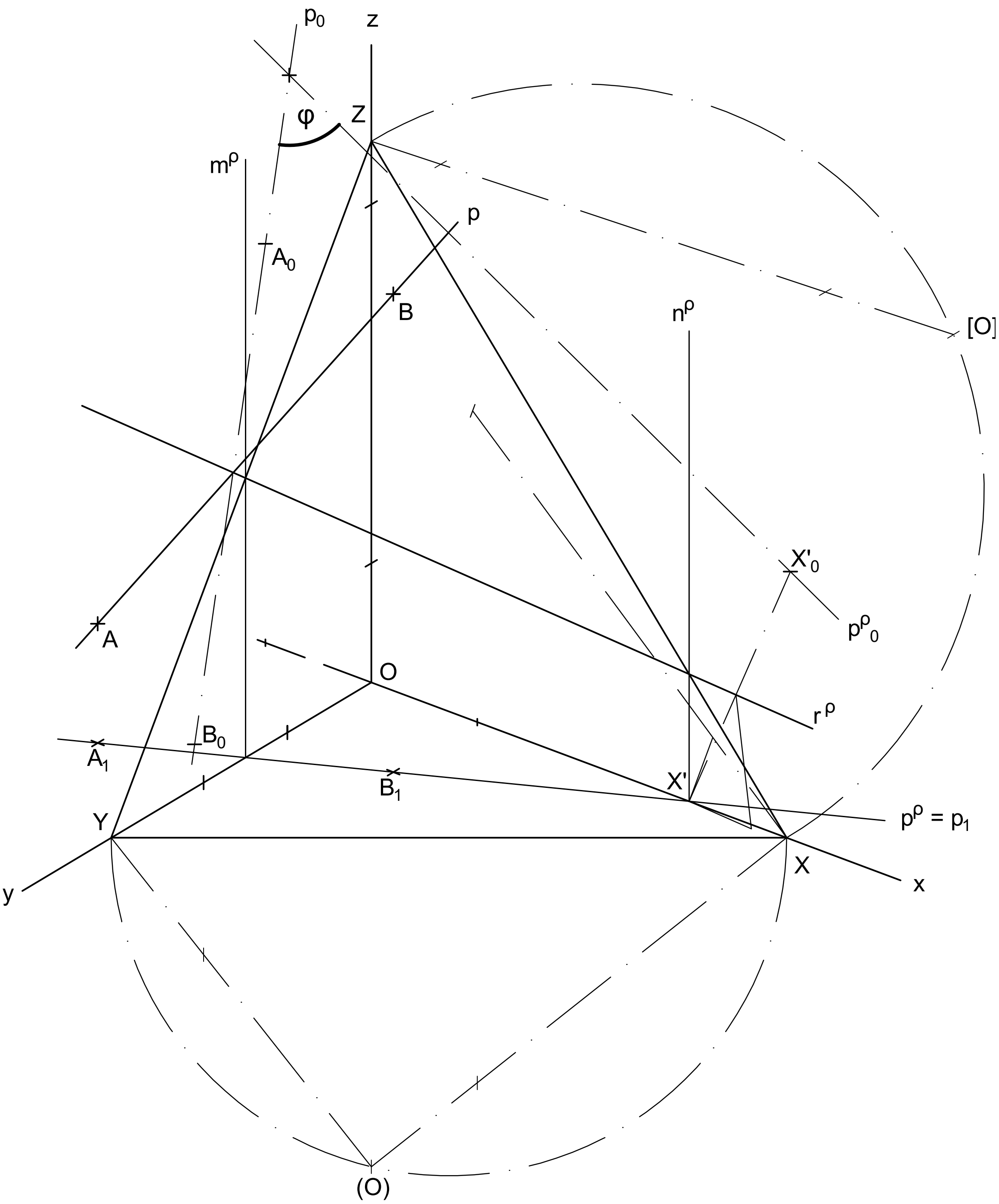


Příklad 5

Sestrojte odchylky přímky $p = AB$ od půdorysny π. Je dáno: $|XY| = 100$, $|XZ| = 120$, $|YZ| = 110$, $A[-20; 40; 20]$, $B[20; 20; 80]$.



Řešení: Zadanou přímkou proložíme rovinu ρ, která je kolmá na průmětnu π. Pak už jen stačí najít odchylku přímky od jejího pravoúhlého průmětu v π, tj. s půdorysnou stopou. Pro nárysnu bychom postupovali podobně, jen bychom zvolili α kolmou na ν a pro bokorysnu opět rovinu na ni kolmou.



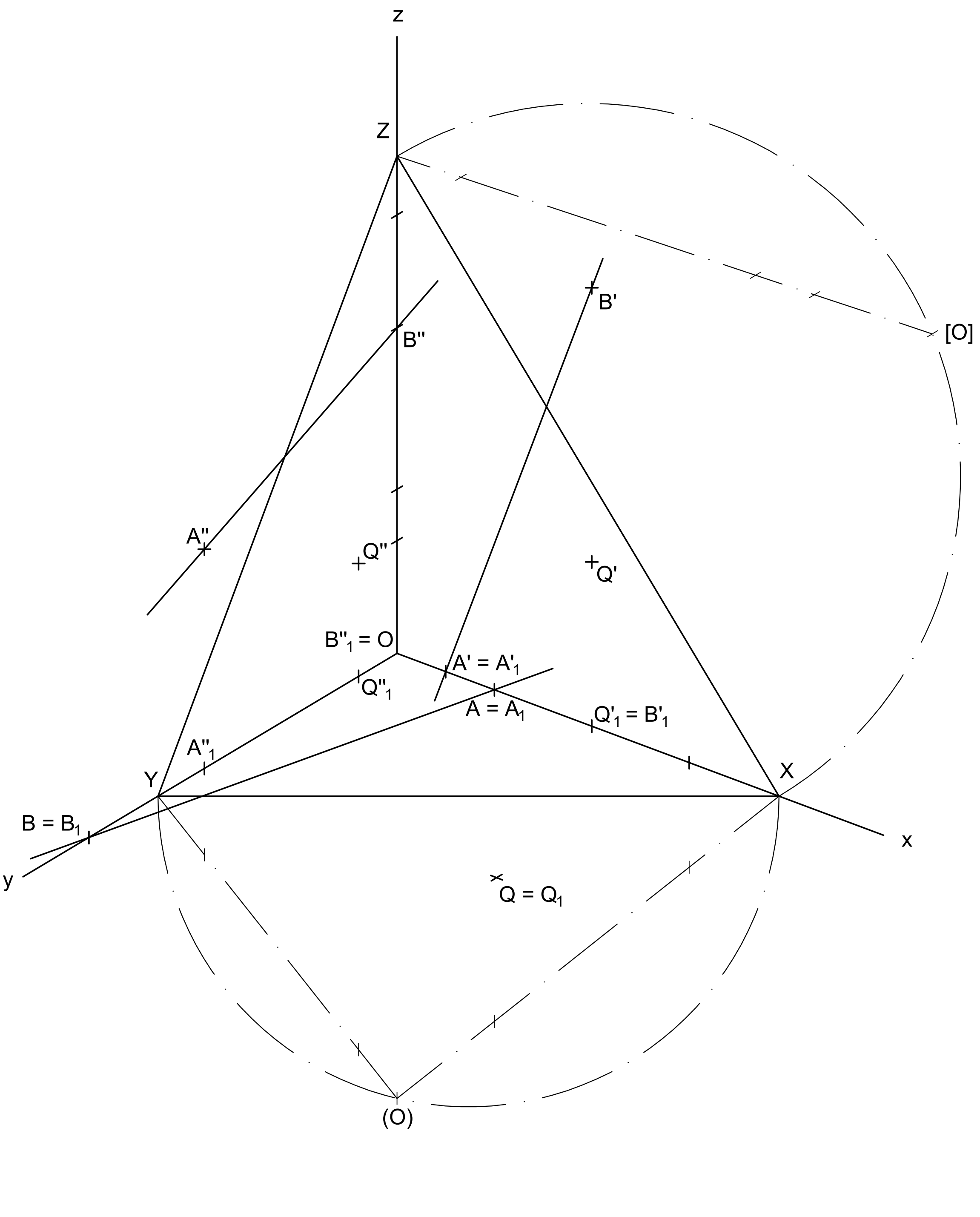
Příklad 6

Bodem Q sestrojte kolmici k přímce AB tak, aby přímku AB protínala. Axonometrie je dána: $|XY| = 100$, $|XZ| = 120$, $|YZ| = 110$, body následovně:

a. $Q[60; 50; 0]$, $A[20; 0; 0]$, $B[0; 80; 0]$,

b. $Q'[40; 0; 30]$, $A'[10; 0; 0]$, $B'[40; 0; 80]$,

c. $Q''[0; 10; 20]$, $A''[0; 50; 40]$, $B''[0; 0; 60]$.

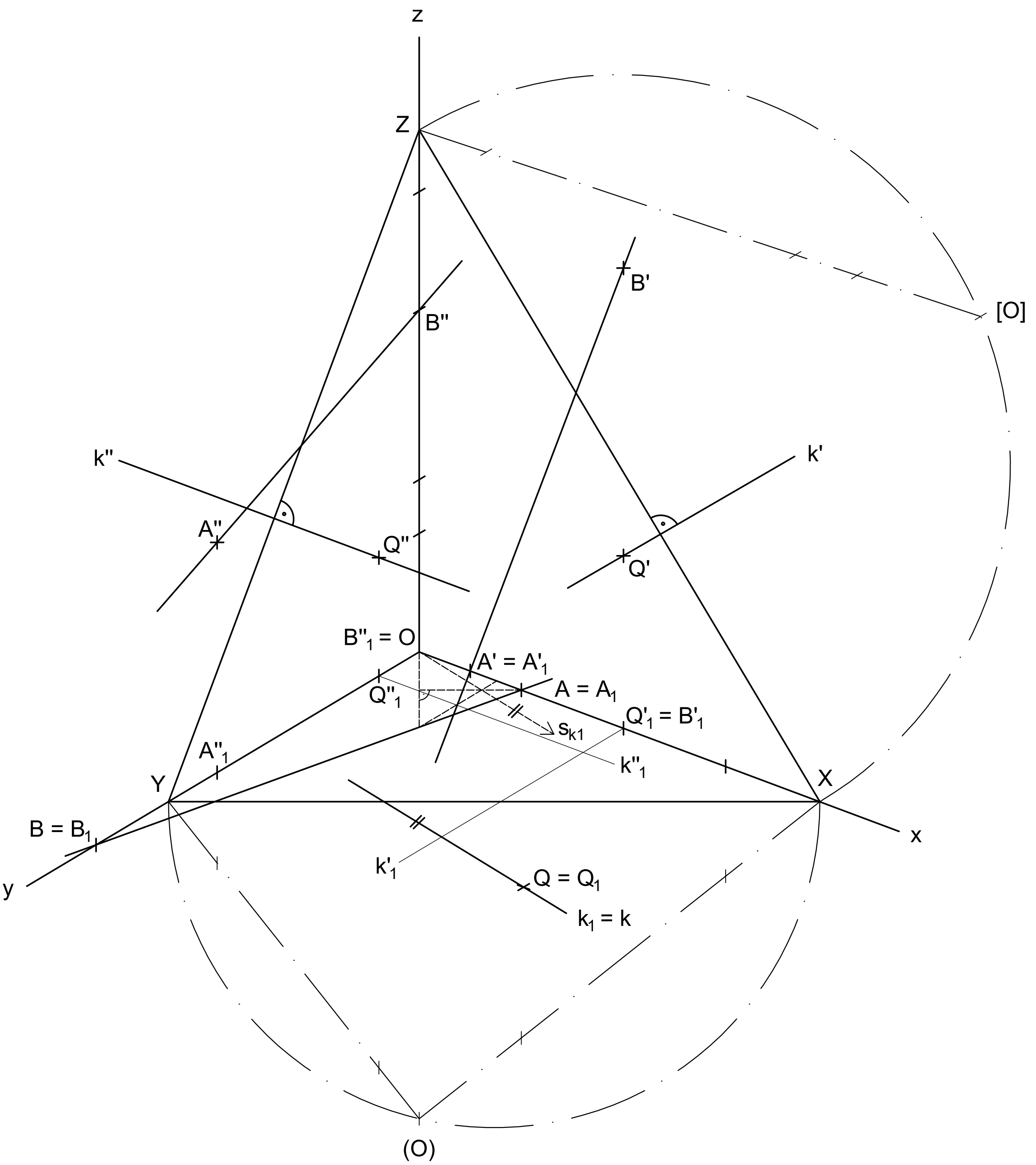


Řešení:

a. Body A, B, $Q \in \pi$, stačí tedy najít směr kolmý v π (pomocí výšek v $\triangle$).

b. Body A', $B' \in \nu$; průsečnice nárysny s axonometrickou průmětnou je $XZ \Rightarrow (k' \perp XZ) \wedge (Q' \in k')$.

c. Obdobně jako b.



Příklad 7

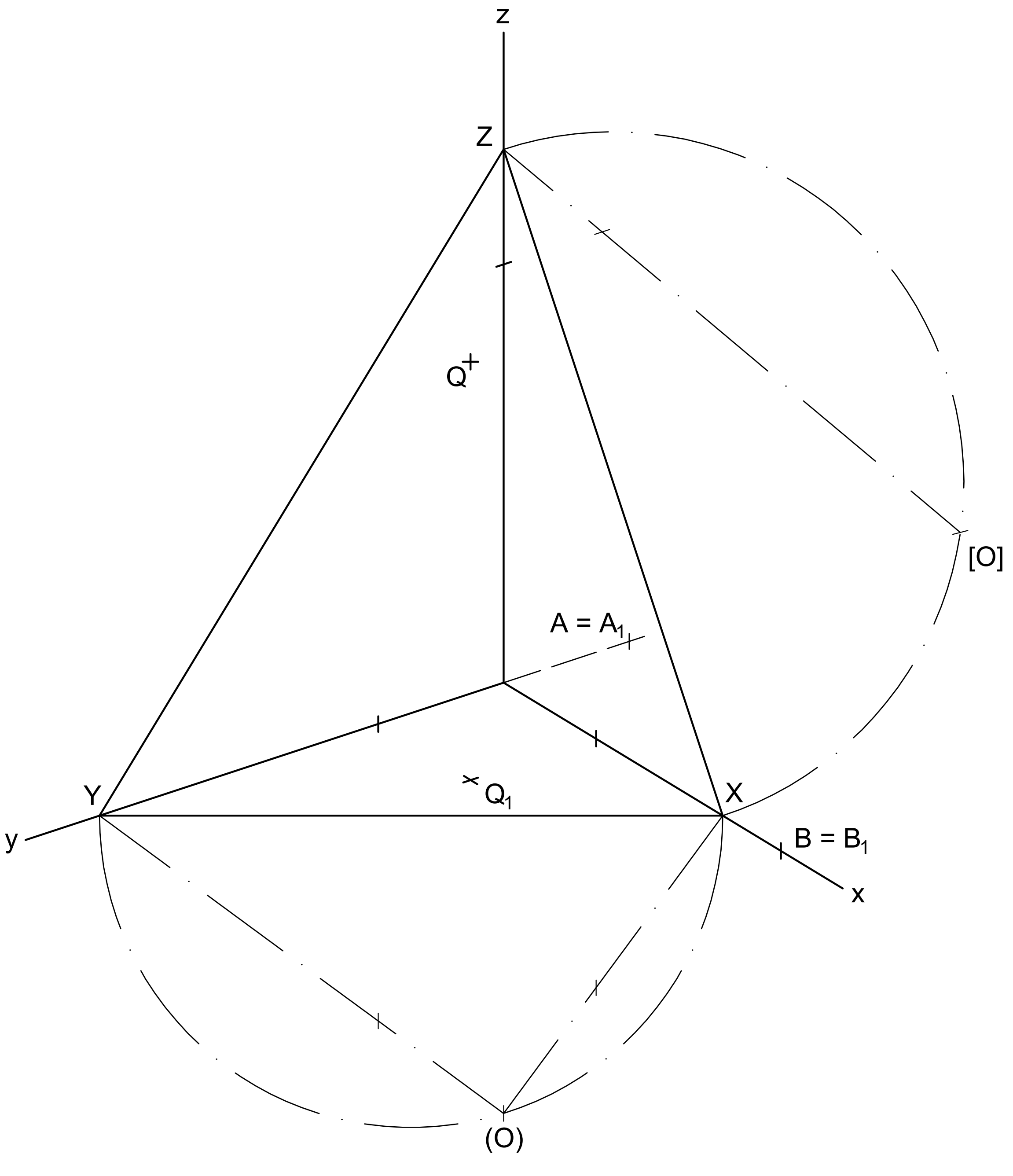
Bodem Q sestrojte kolmici k k přímce AB tak, aby přímku AB protínala. Souřadnice: $|XY| = 80$, $|XZ| = 90$, $|YZ| = 100$, $Q[20; 20; 60]$,

a. $A[0; -20; 0]$, $B[60; 0; 0]$,

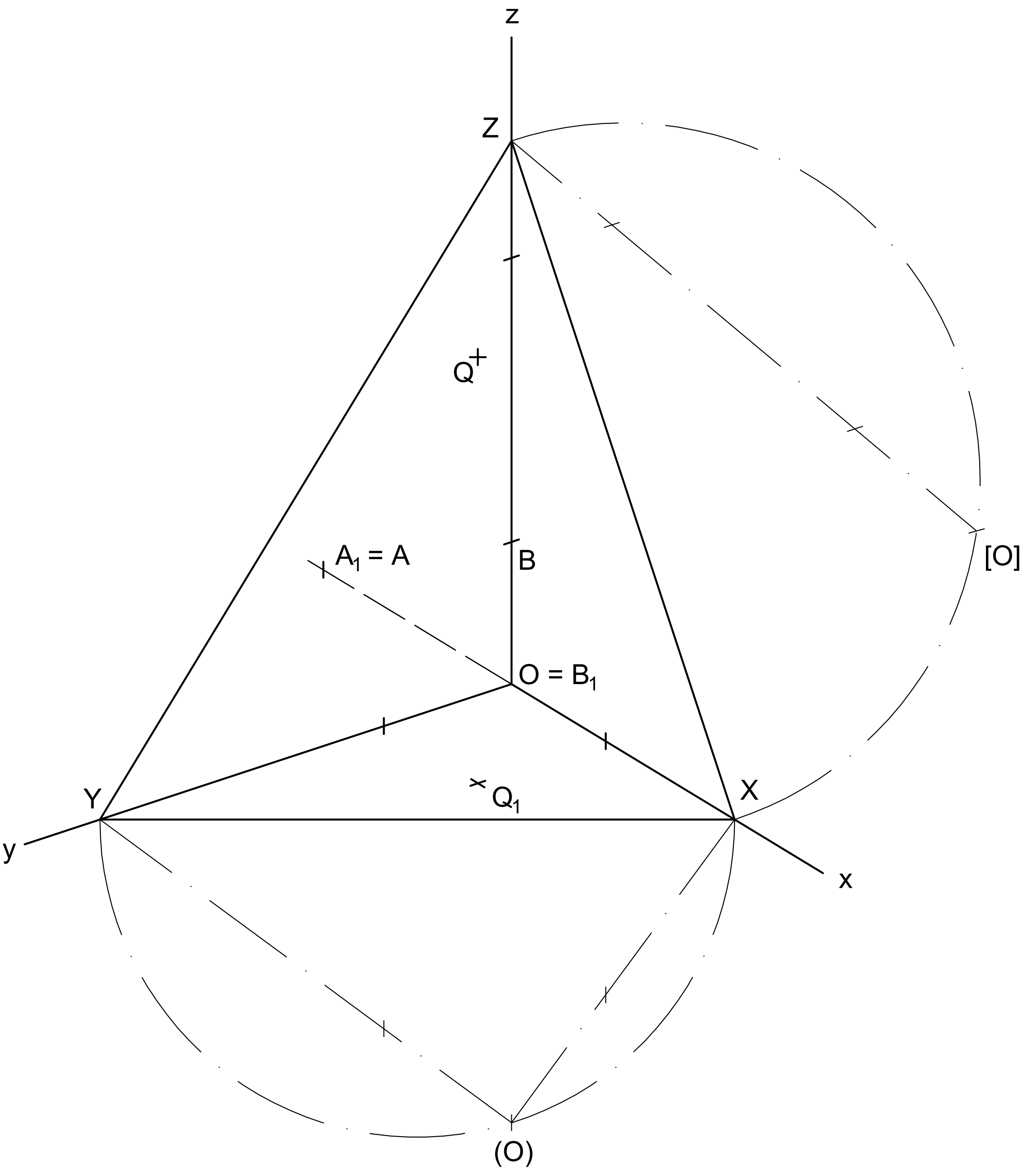
b. $A[-40; 0; 0]$, $B[0; 0; 20]$,

c. $A[0; 0; -50]$, $B[0; 30; 0]$.

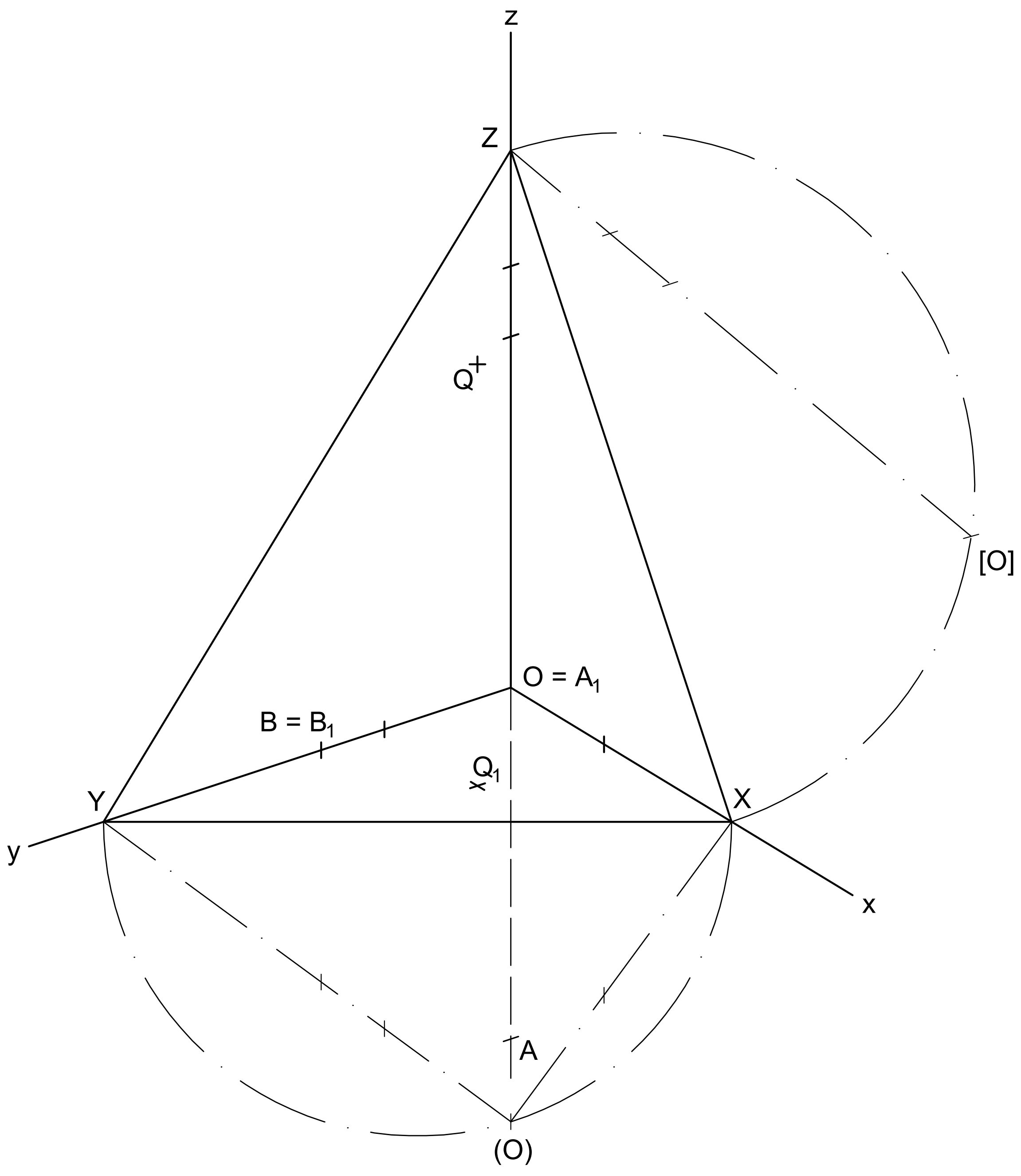
Zadání a.



Zadání b.

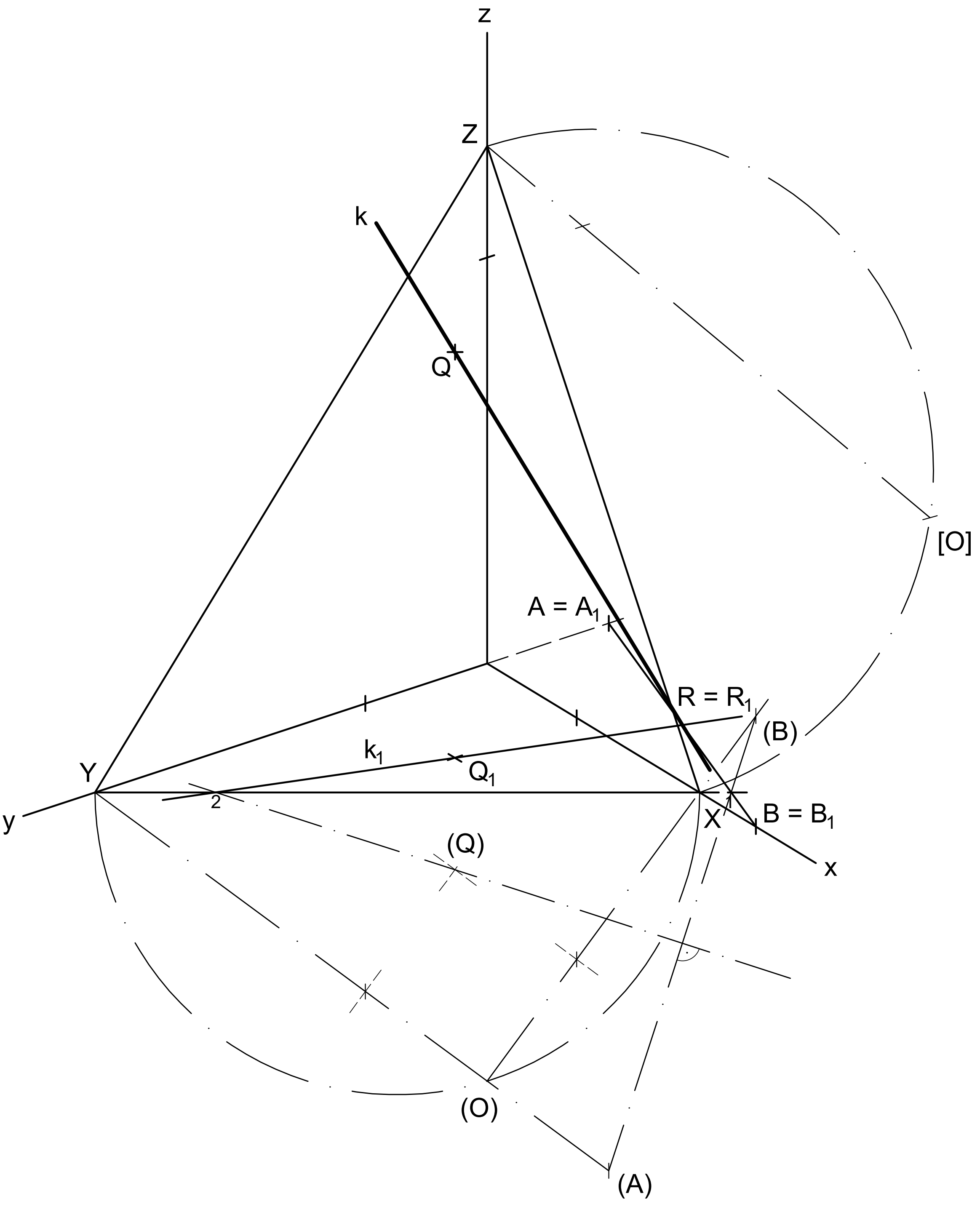


Zadání c.

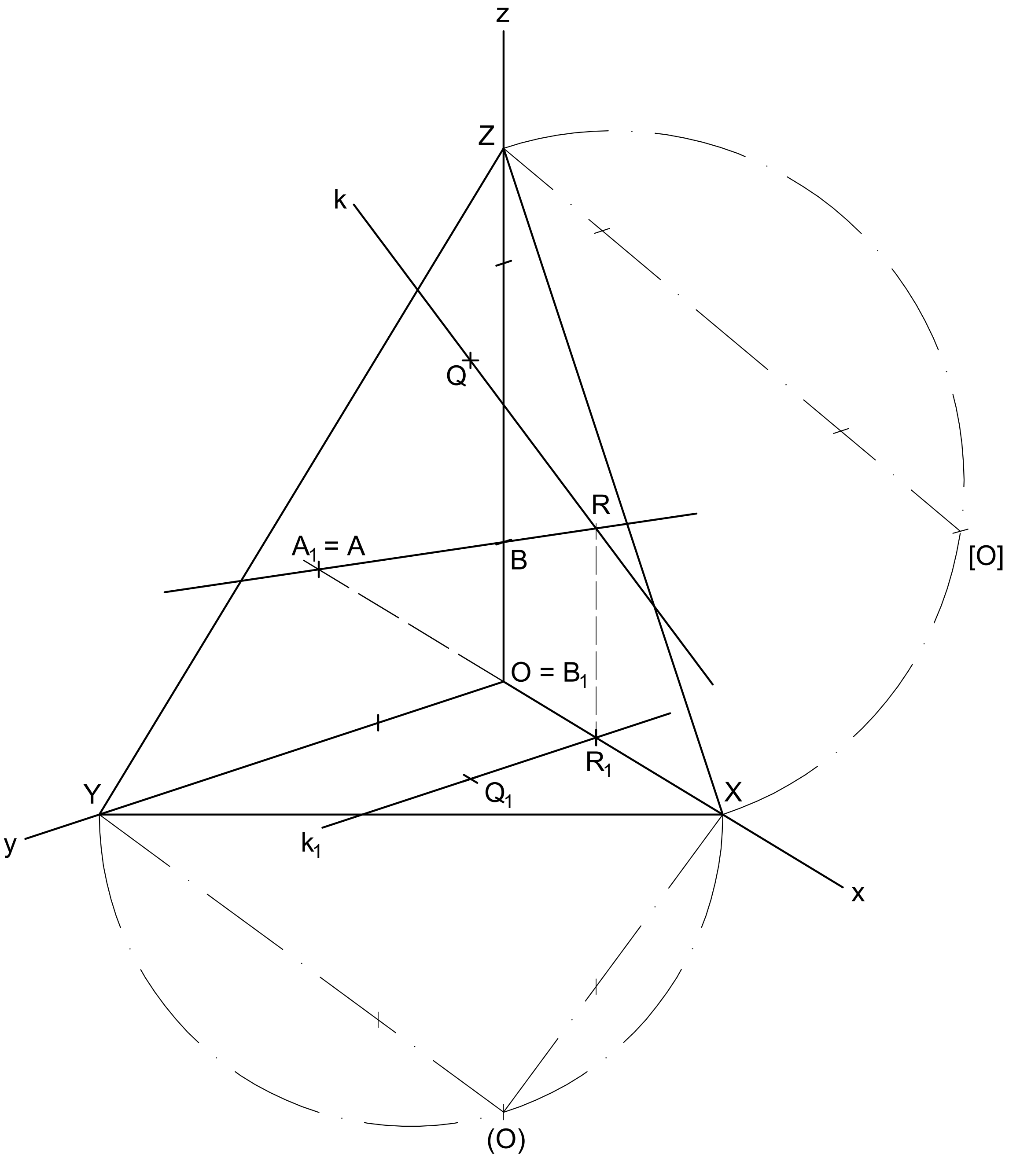


Řešení: Ve všech případech můžeme přímku k kolmou snadno nalézt tak, že nejdříve sestrojíme její první průmět, první průmět průsečíku R přímek AB a k a díky tomu i jeho axonometrický průmět. Spojnice QR je potom hledanou kolmicí k.

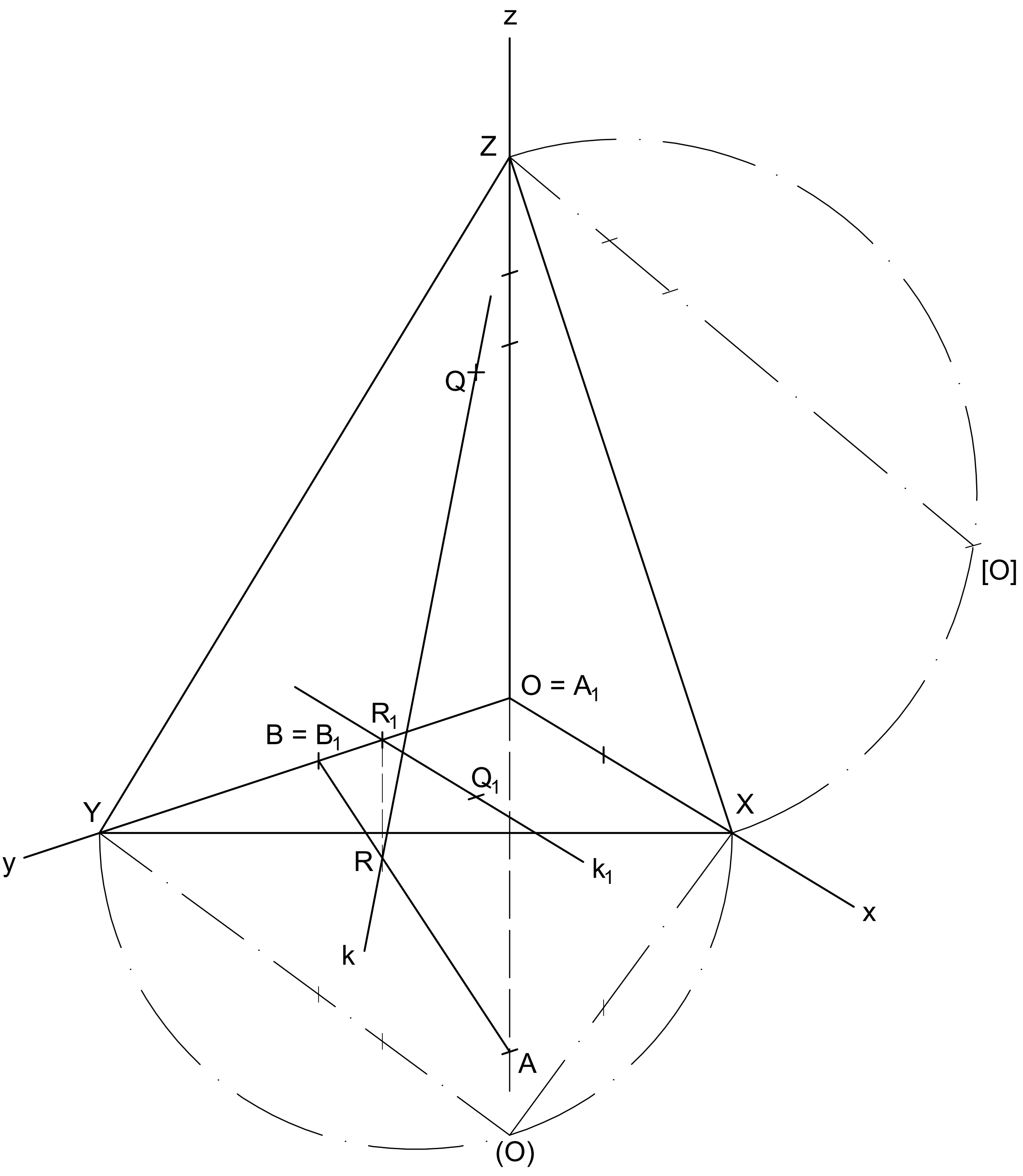
Řešení a.



Řešení b.

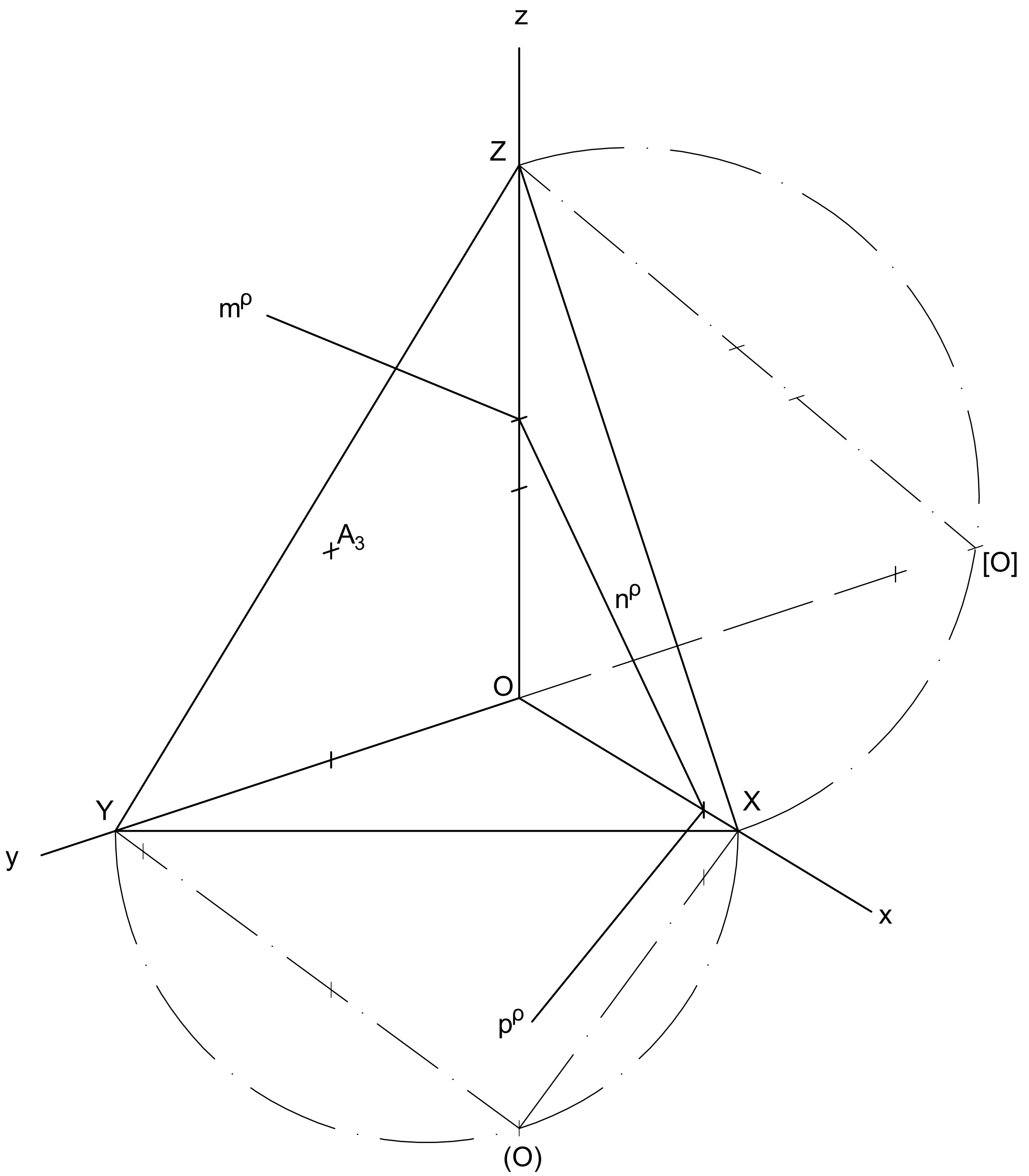


Řešení c.

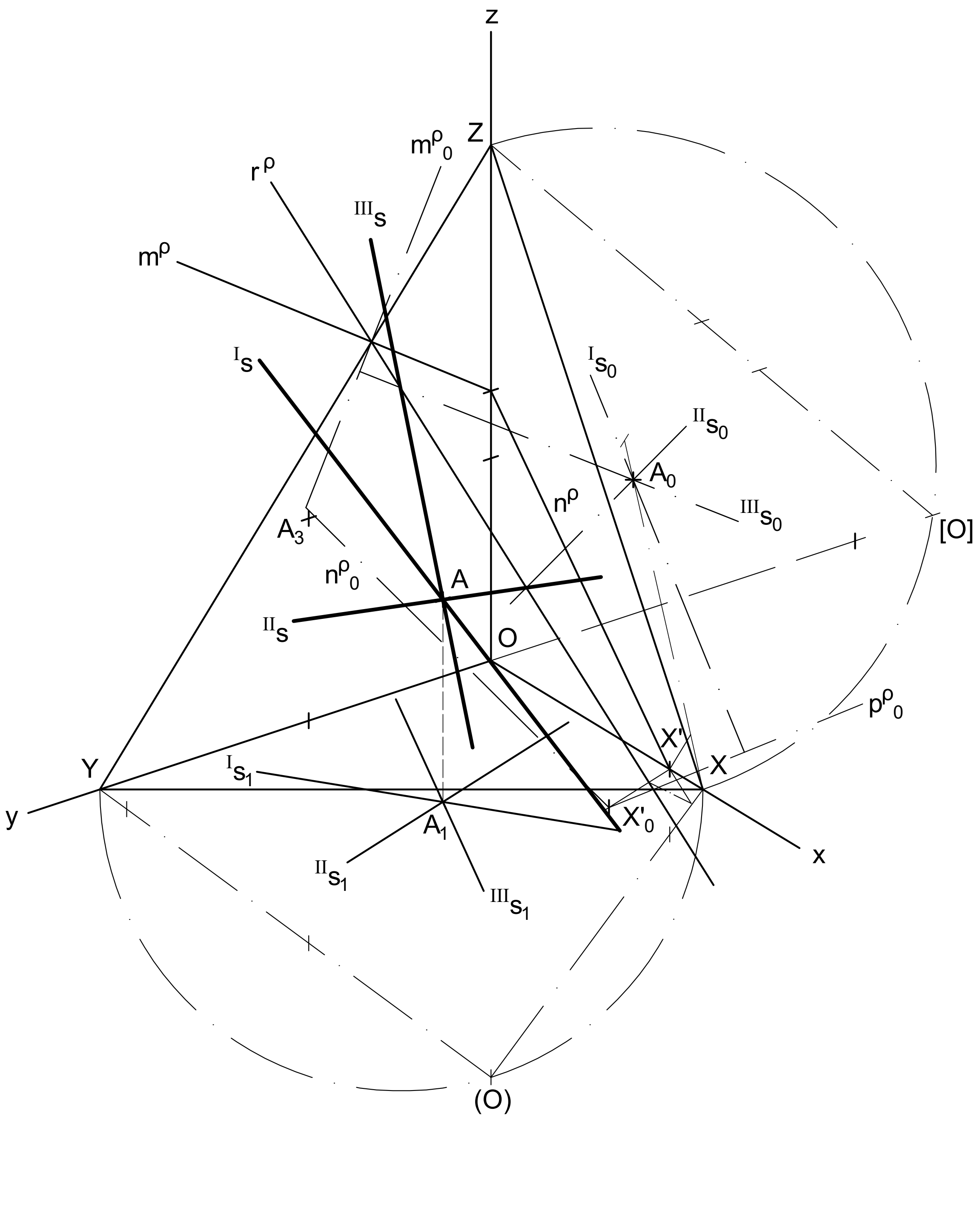


Příklad 8

V rovině ρ veďte bodem A spádovou přímku první, druhé a třetí osnovy. $|XY| = 80$, $|XZ| = 90$, $|YZ| = 100$, $\rho(40; -60; 40)$, $A[?; 30; 30]$.



Řešení: Spádové přímky (dané osnovy) jsou kolmé na příslušnou stopu roviny.



Příklad 9

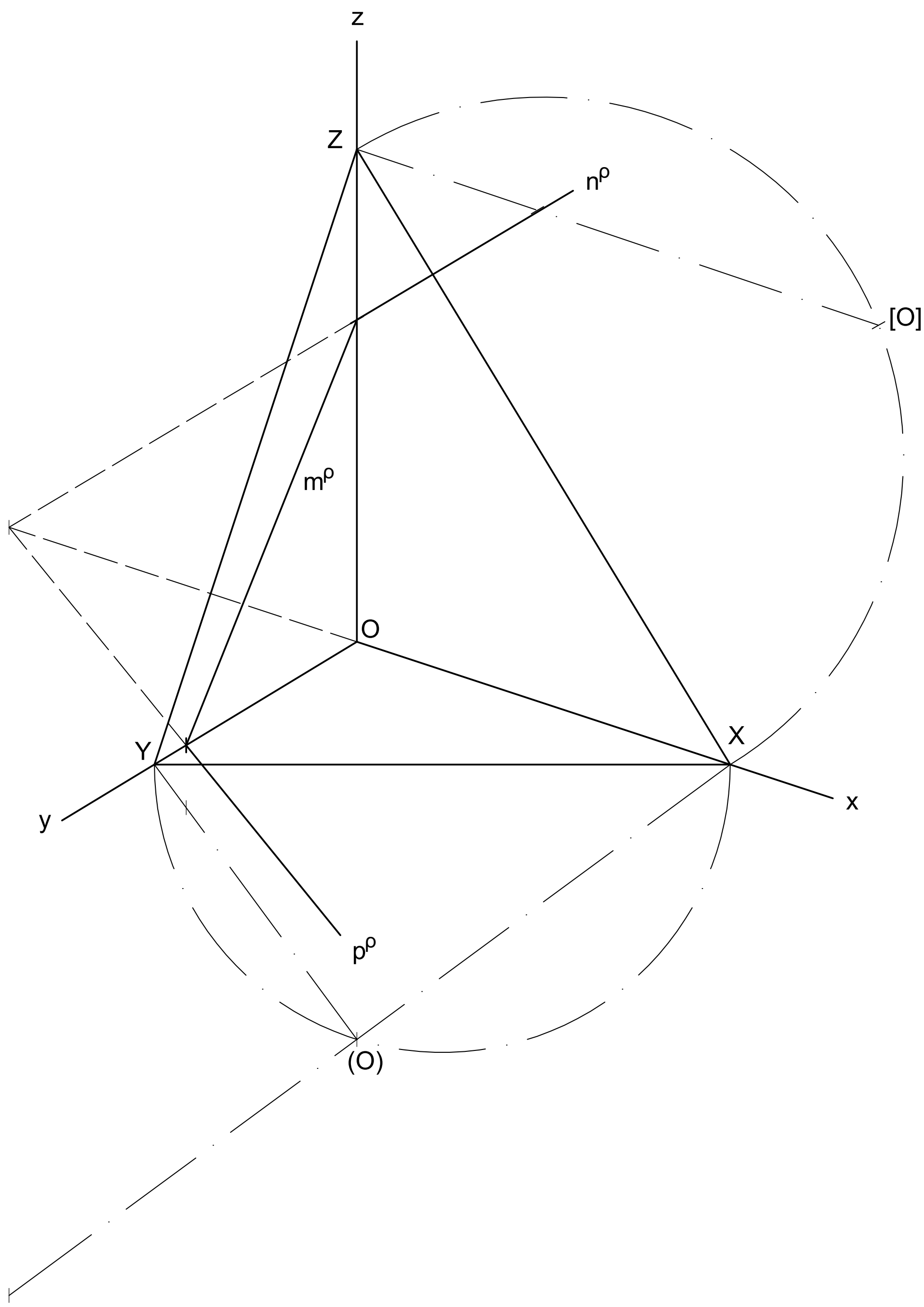
Sestrojte odchylky roviny ρ od průměten π, ν, μ. Axonometrie je zadána: $|XY| = 80$, $|XZ| = 100$, $|YZ| = 90$. Souřadnice roviny jsou:

a. $\rho(-60; 40; 50)$,

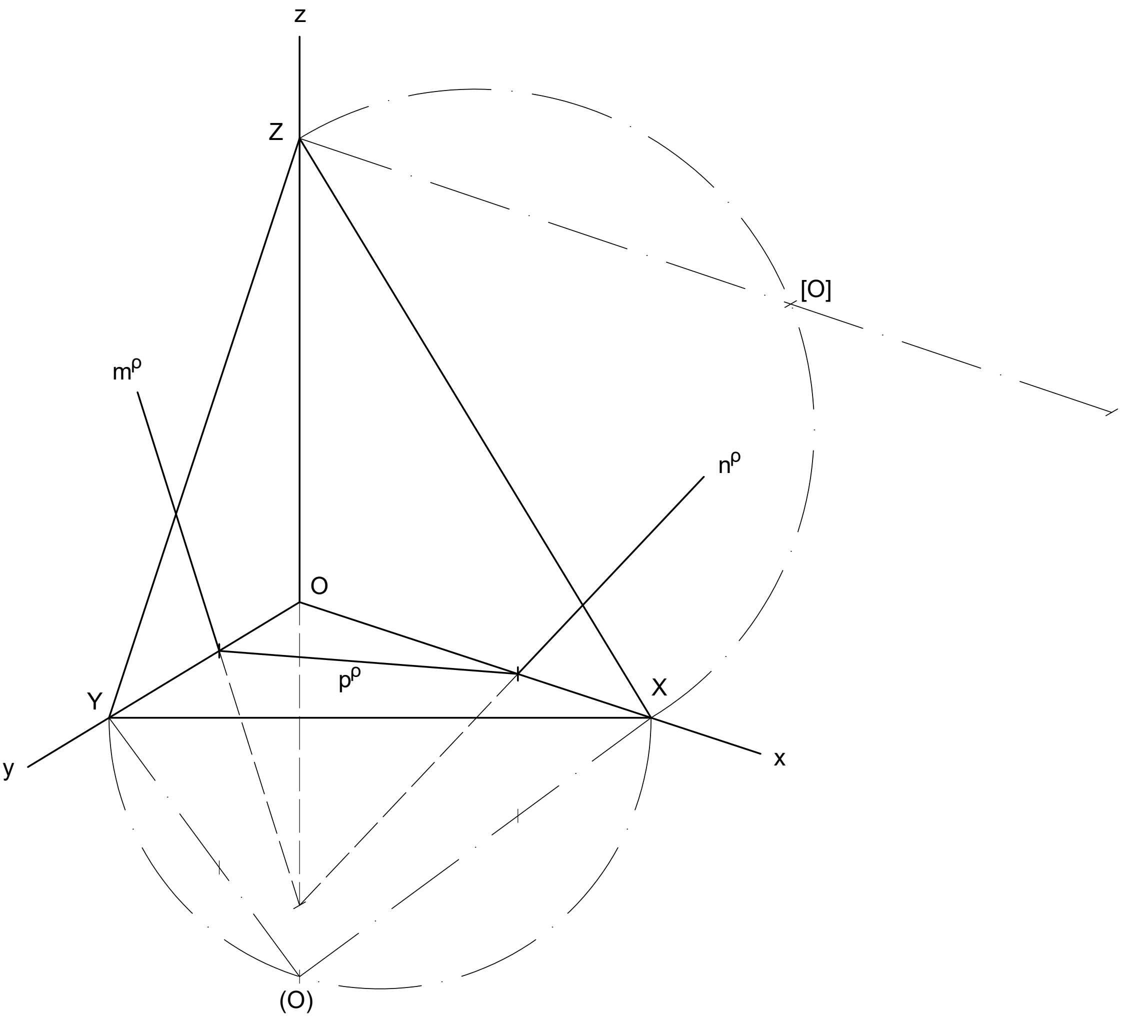
b. $\rho(40; 20; -50)$,

c. $\rho(40; -100; 40)$.

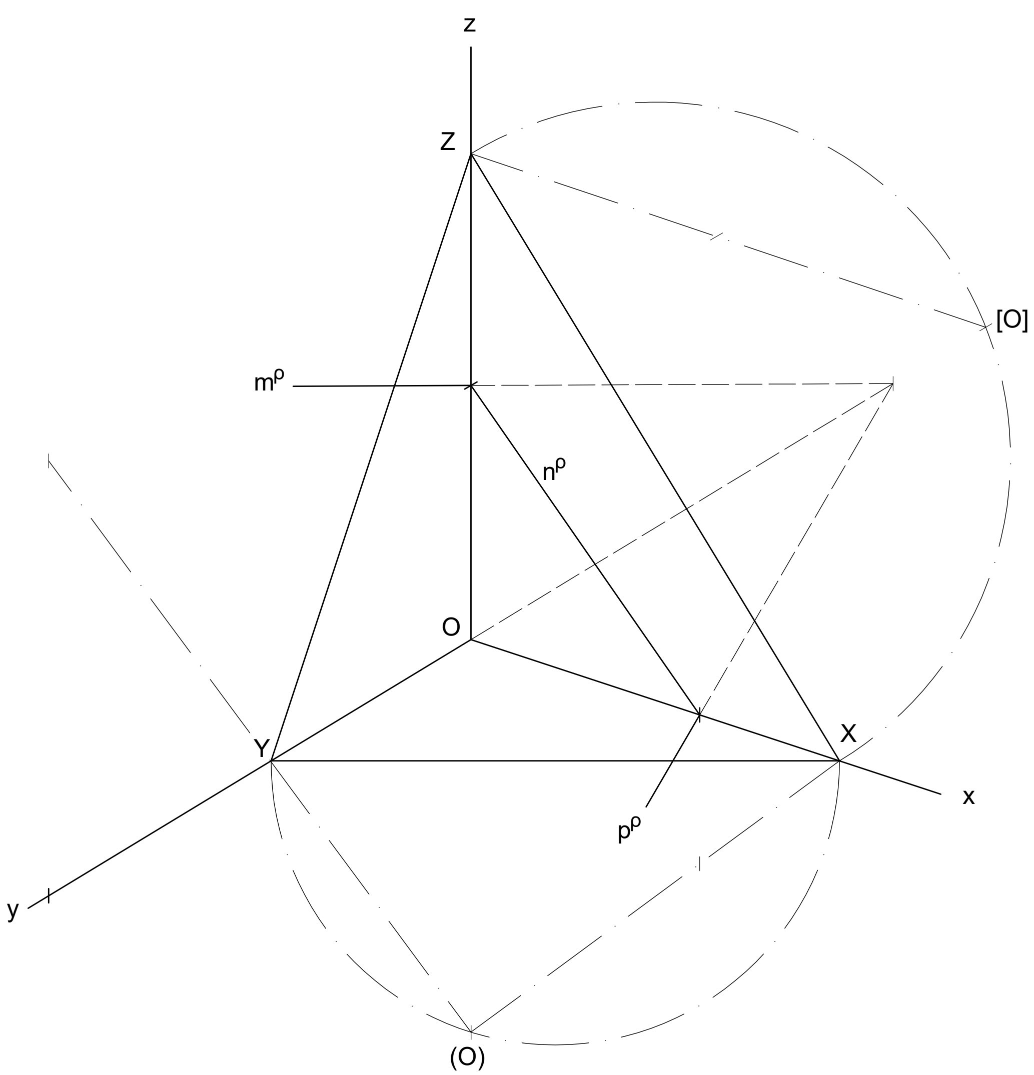
Zadání a. (odchylka od π)



Zadání b. (odchylka od ν)

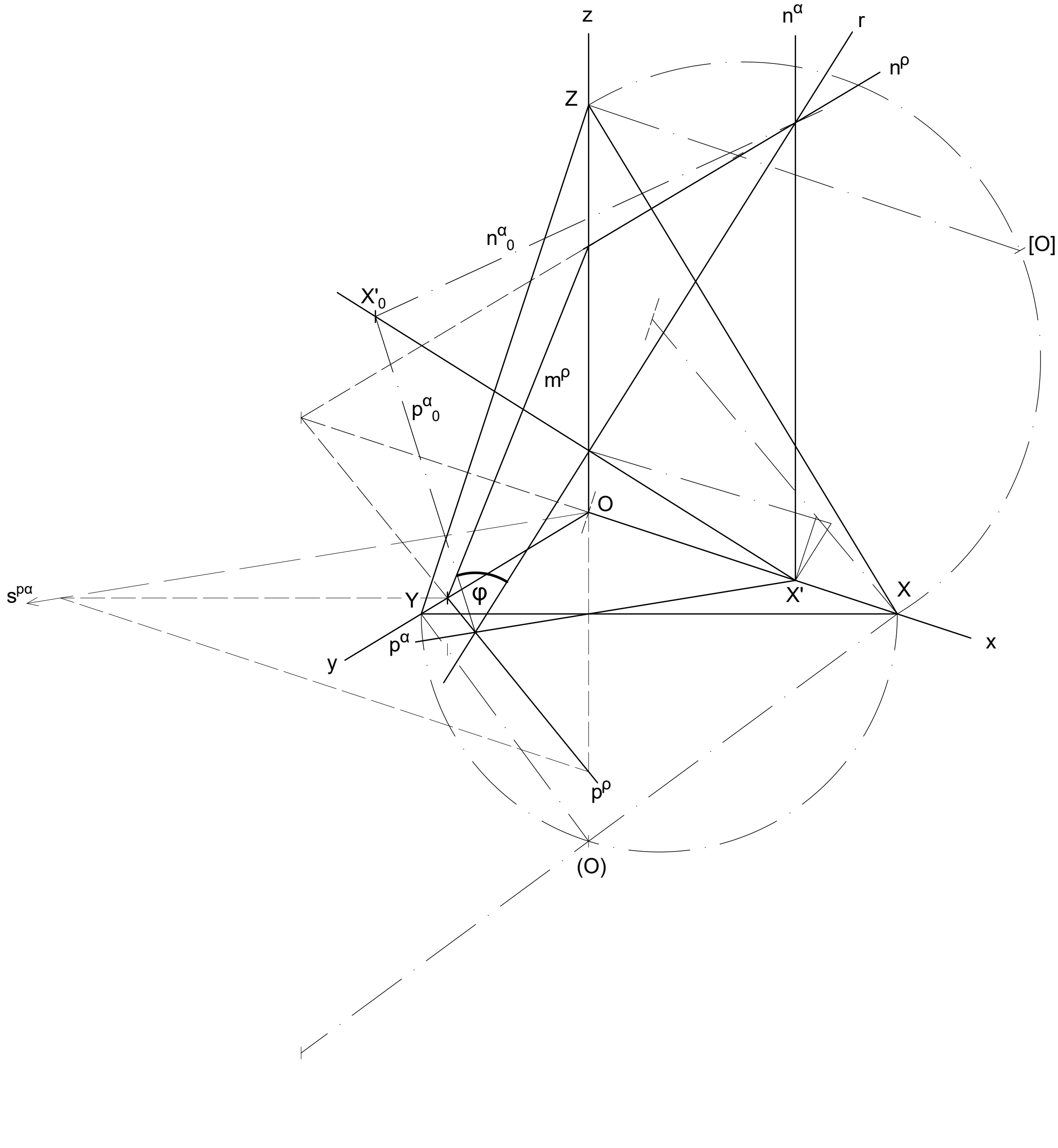


Zadání c. (odchylka od μ)

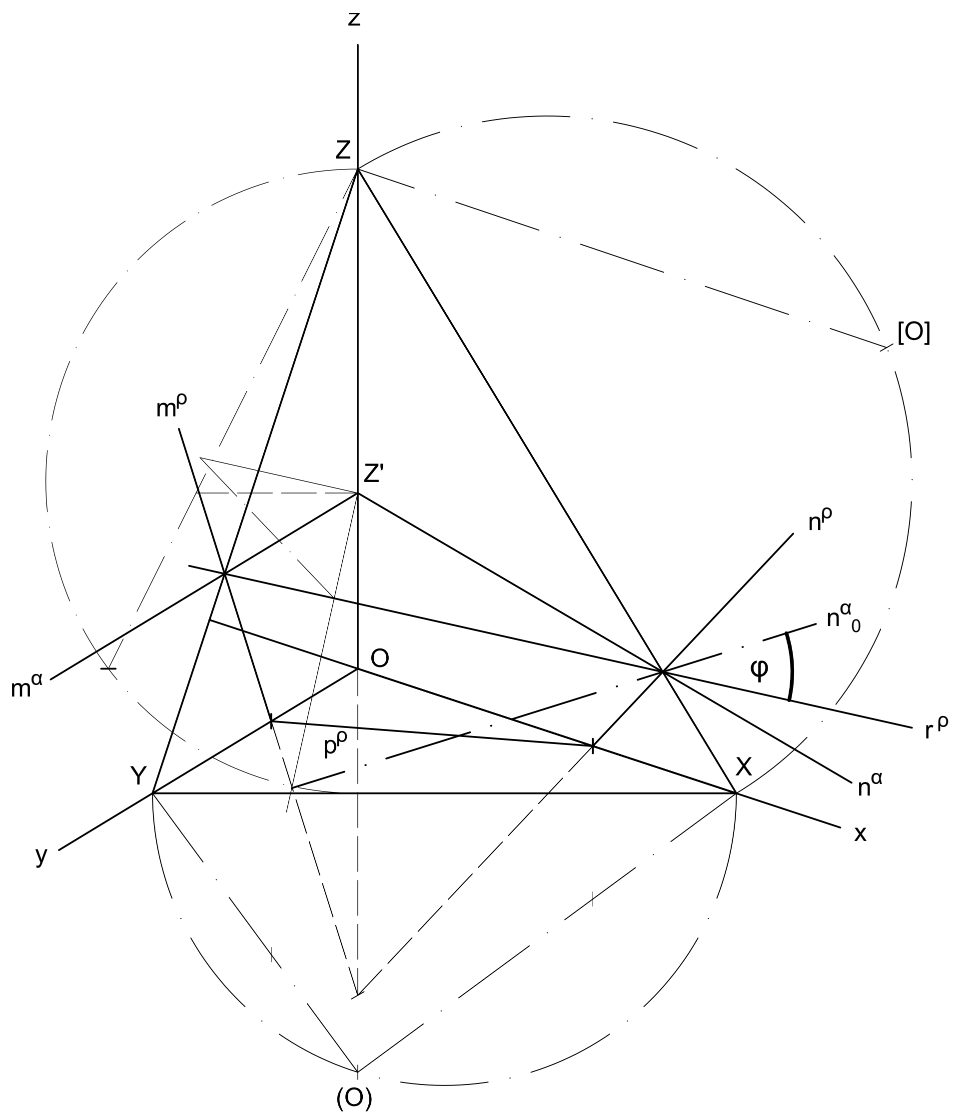


Řešení: Ve všech případech hledáme odchylku roviny od průmětny, budeme tedy postupovat stejně. Abychom našli odchylku, sestrojíme rovinu α kolmou k zadané rovině ρ i dané průmětně π. Nalezneme průsečnice obou rovin s α (r^{ρ} a p^{α}) a jejich odchylka je i odchylkou rovin ρ a π, jelikož jsou to pravoúhlé průměty těchto rovin do roviny α. Pro případy b a c bychom pouze sestrojovali rovinu kolmou k rovině ν (resp. μ).

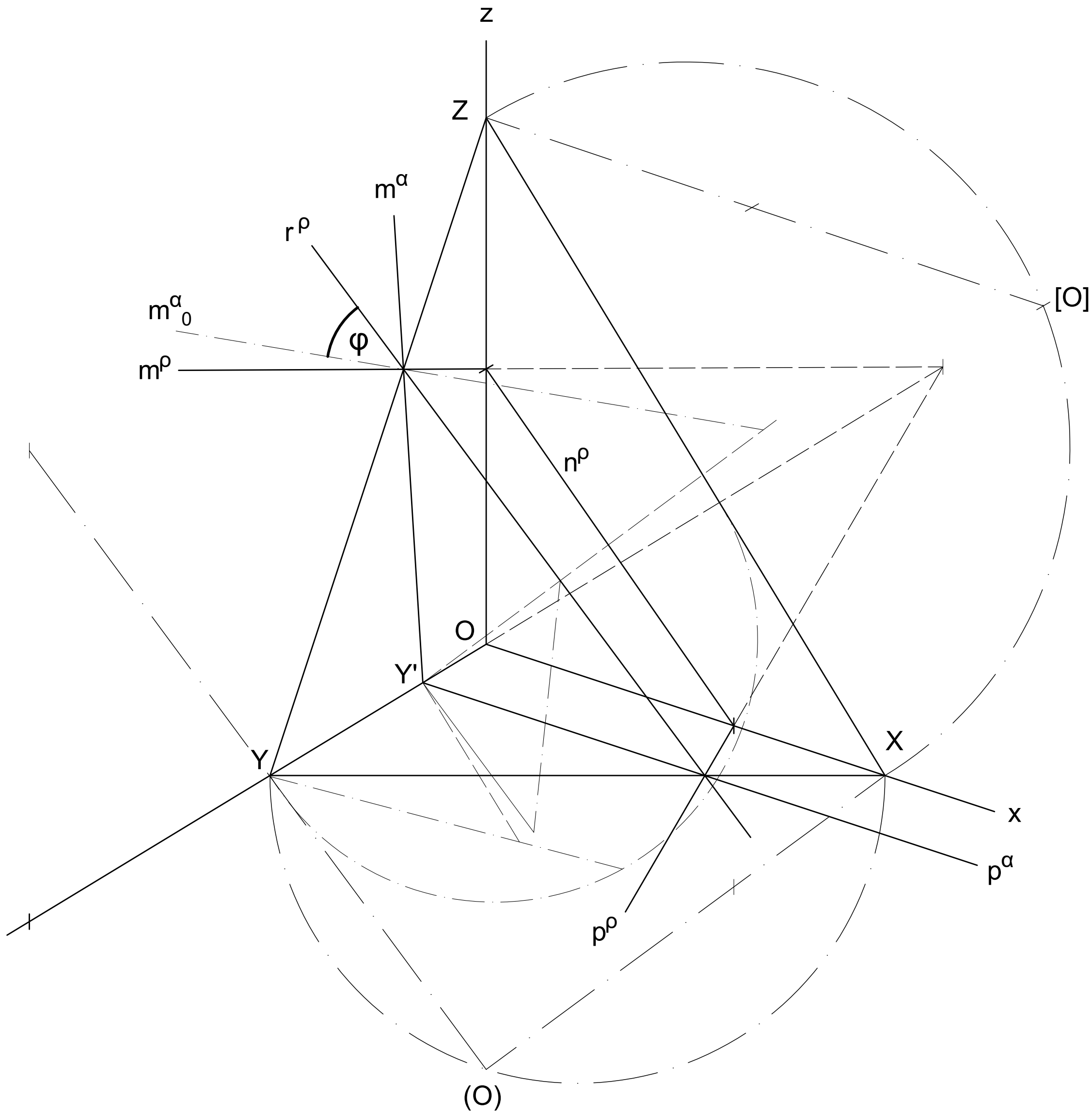
Řešení a. (odchylka od π)



Řešení b. (odchylka od ν)



Řešení c. (odchylka od μ)



Příklad 10

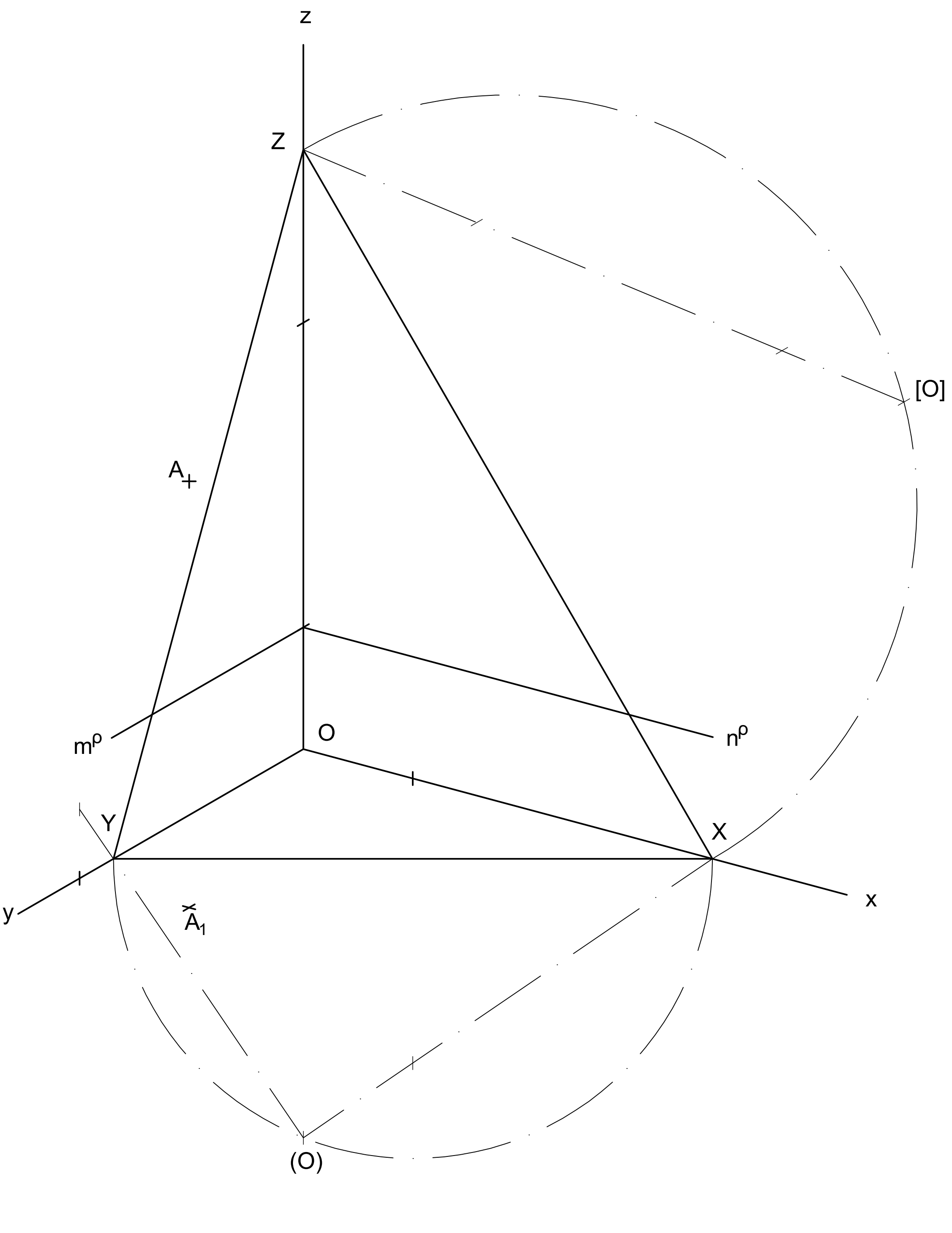
Bodem A sestrojte kolmici k rovině ρ a určete její patu. Souřadnice: $|\sphericalangle xy| = 135°$, $|\sphericalangle yz| = 120°$, $A[20; 60; 70]$,

a. $\rho(\infty; \infty; 20)$,

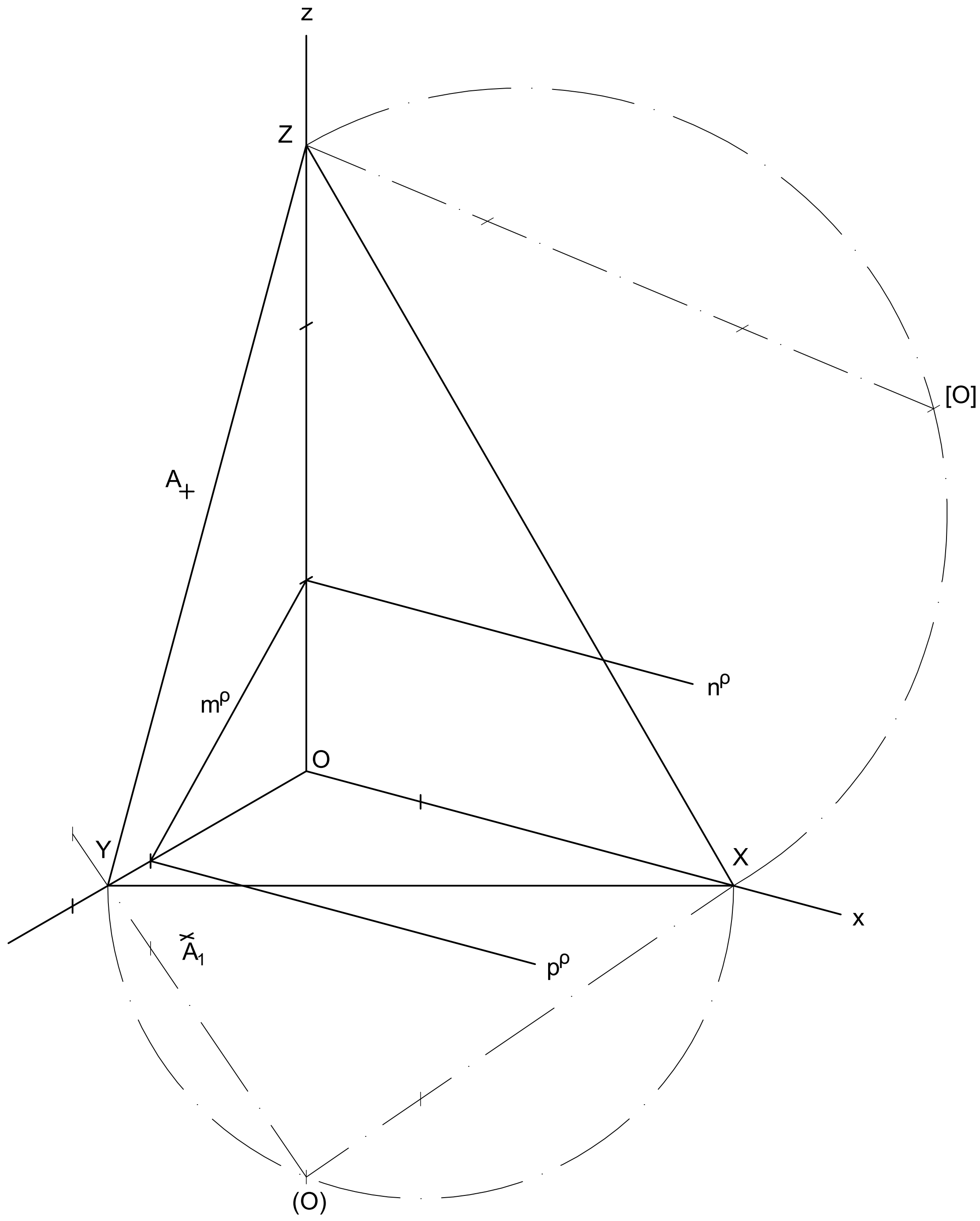
b. $\rho(\infty; 40; 30)$,

c. $\rho(60; 70; 90)$.

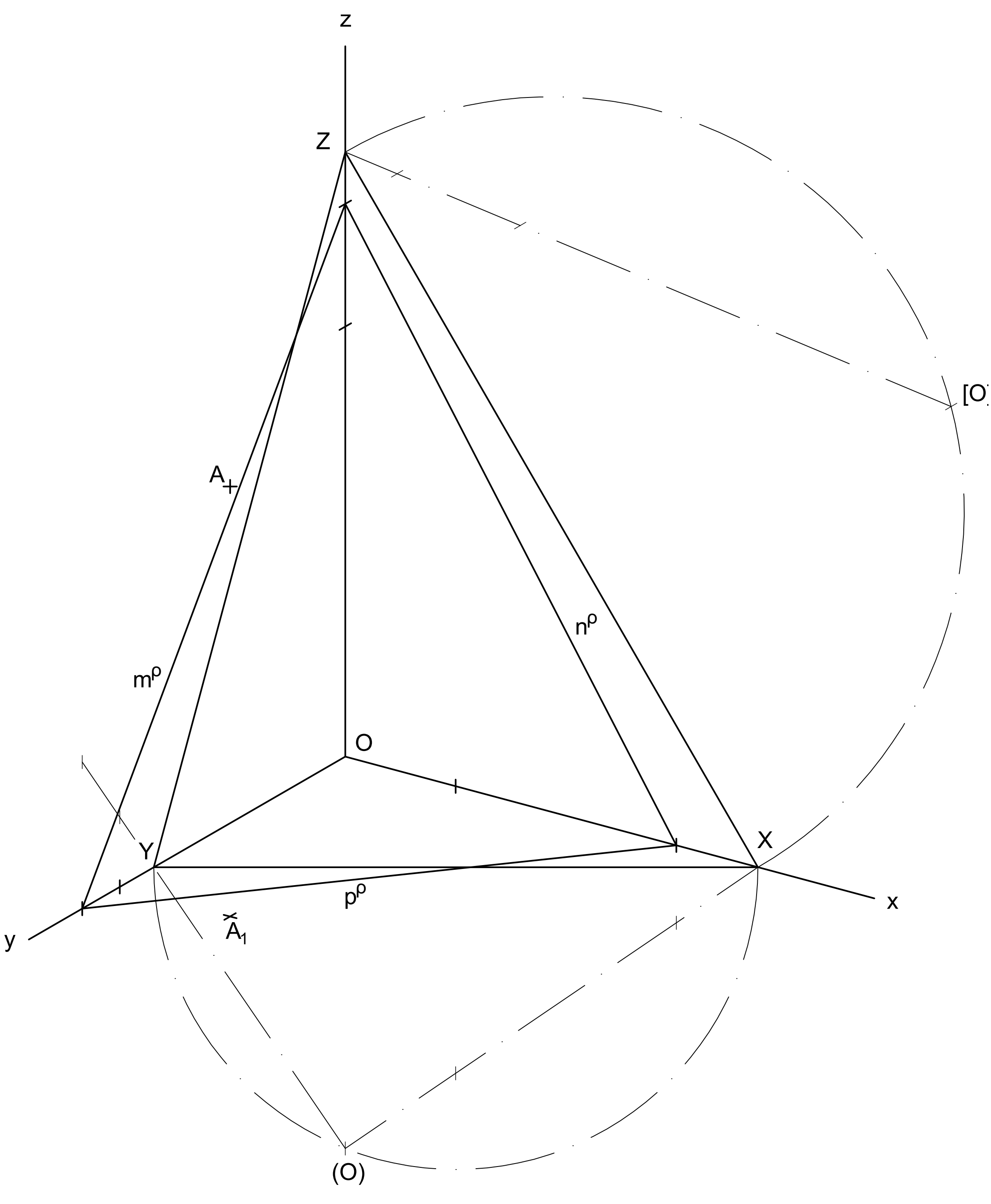
Zadání a.



Zadání b.

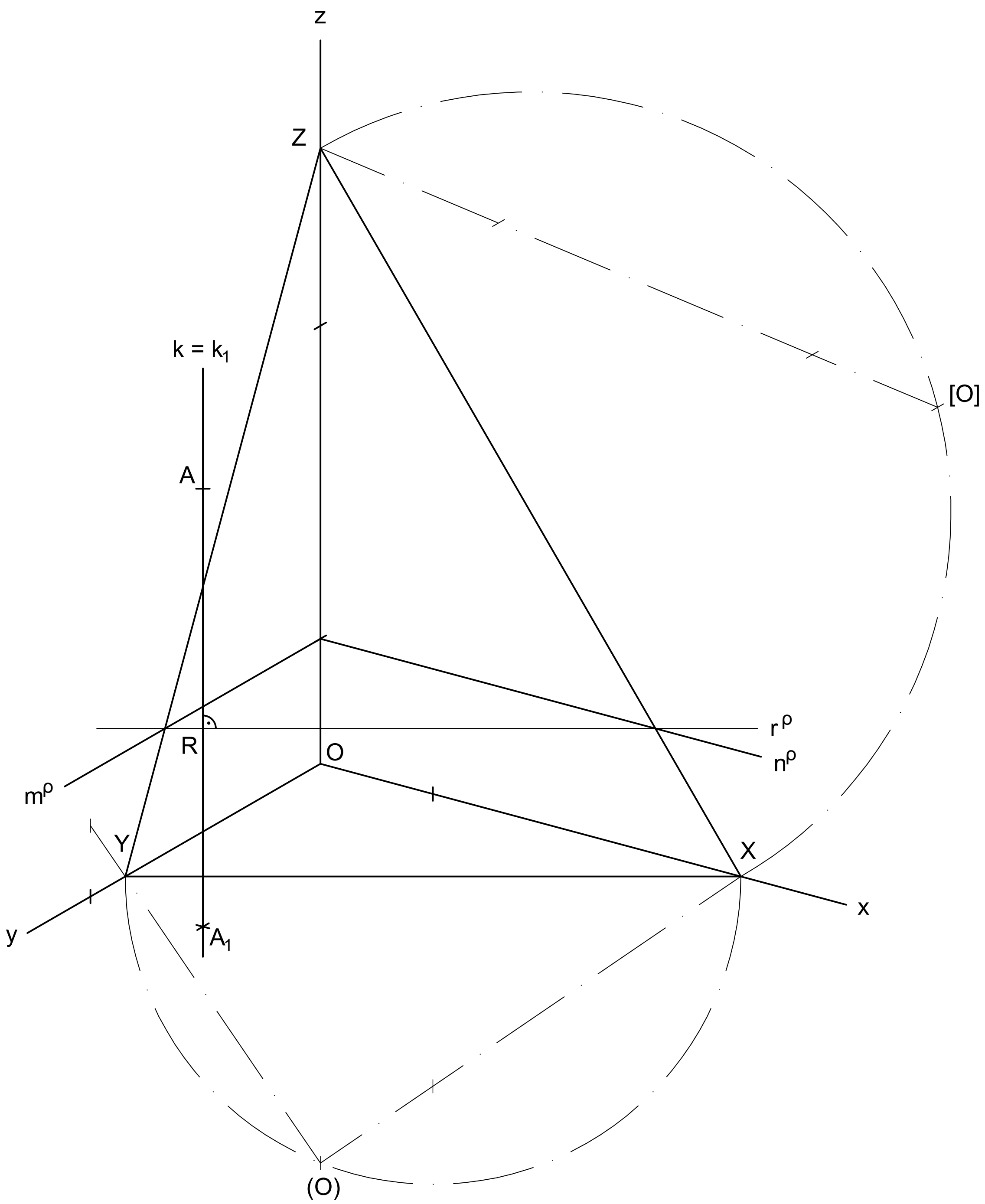


Zadání c.

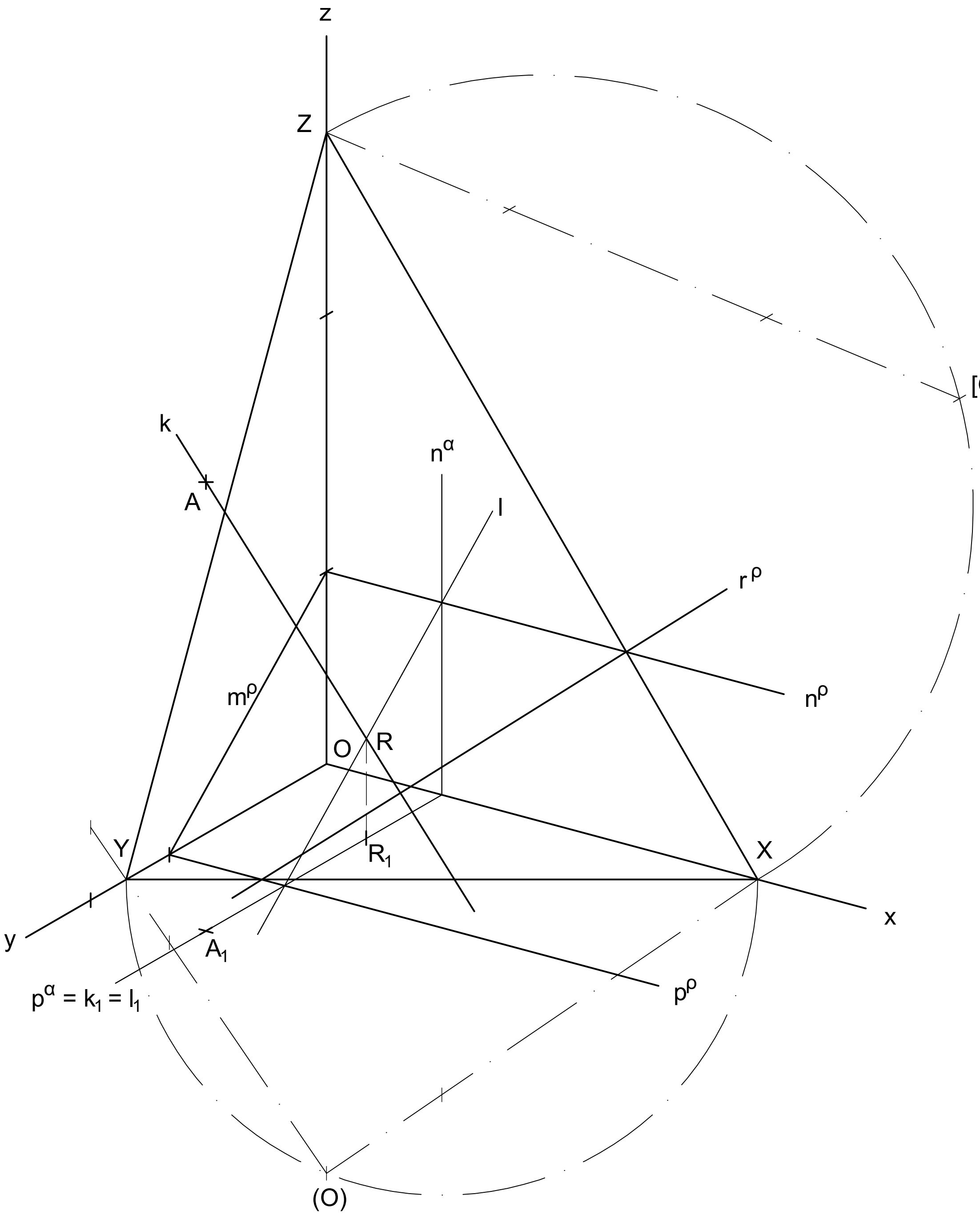


Řešení: Hledaná přímka je vždy kolmá na axonometrickou stopu dané roviny a její patu můžeme nalézt např. metodou krycí přímky.

Řešení a.

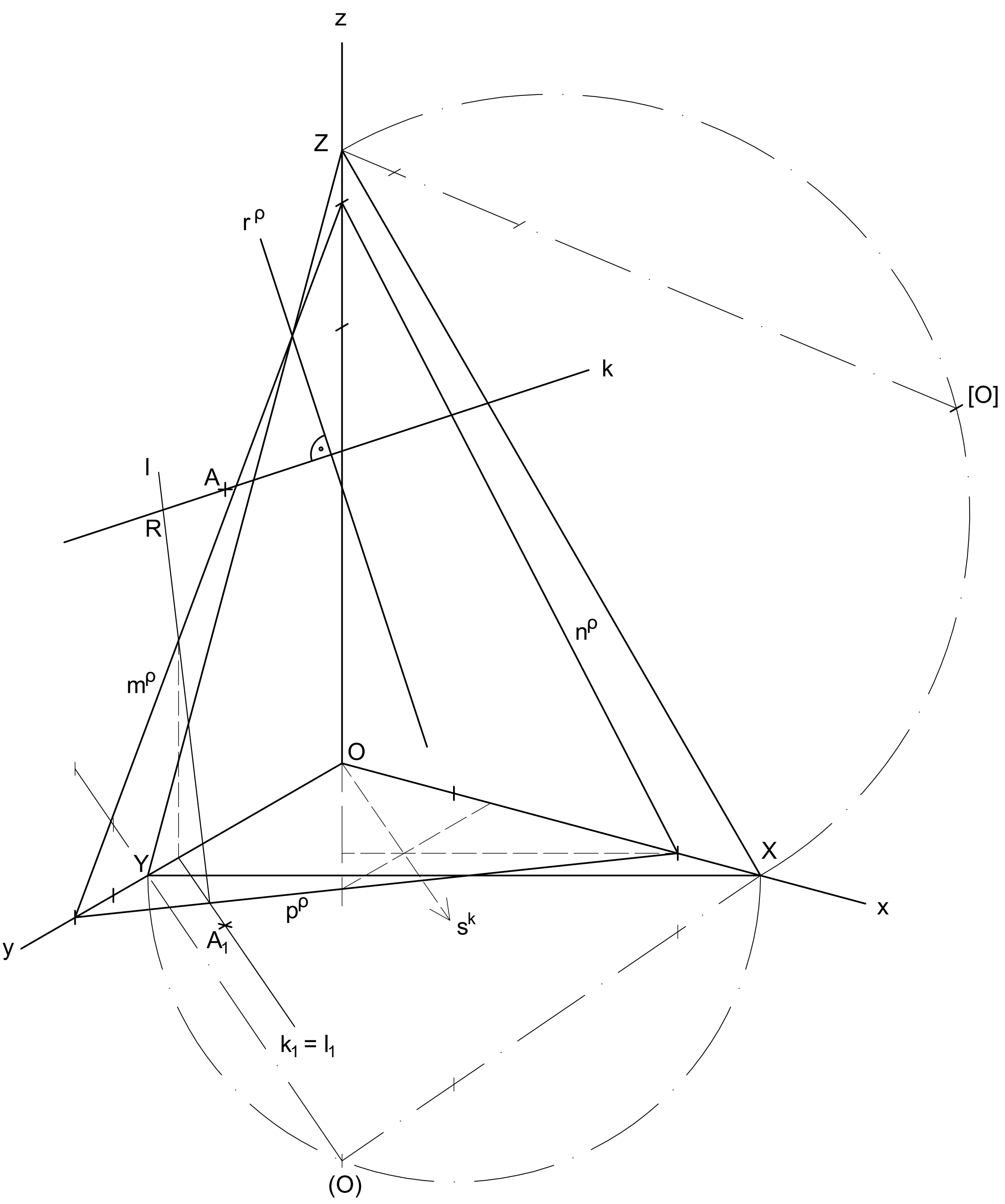


Řešení b.



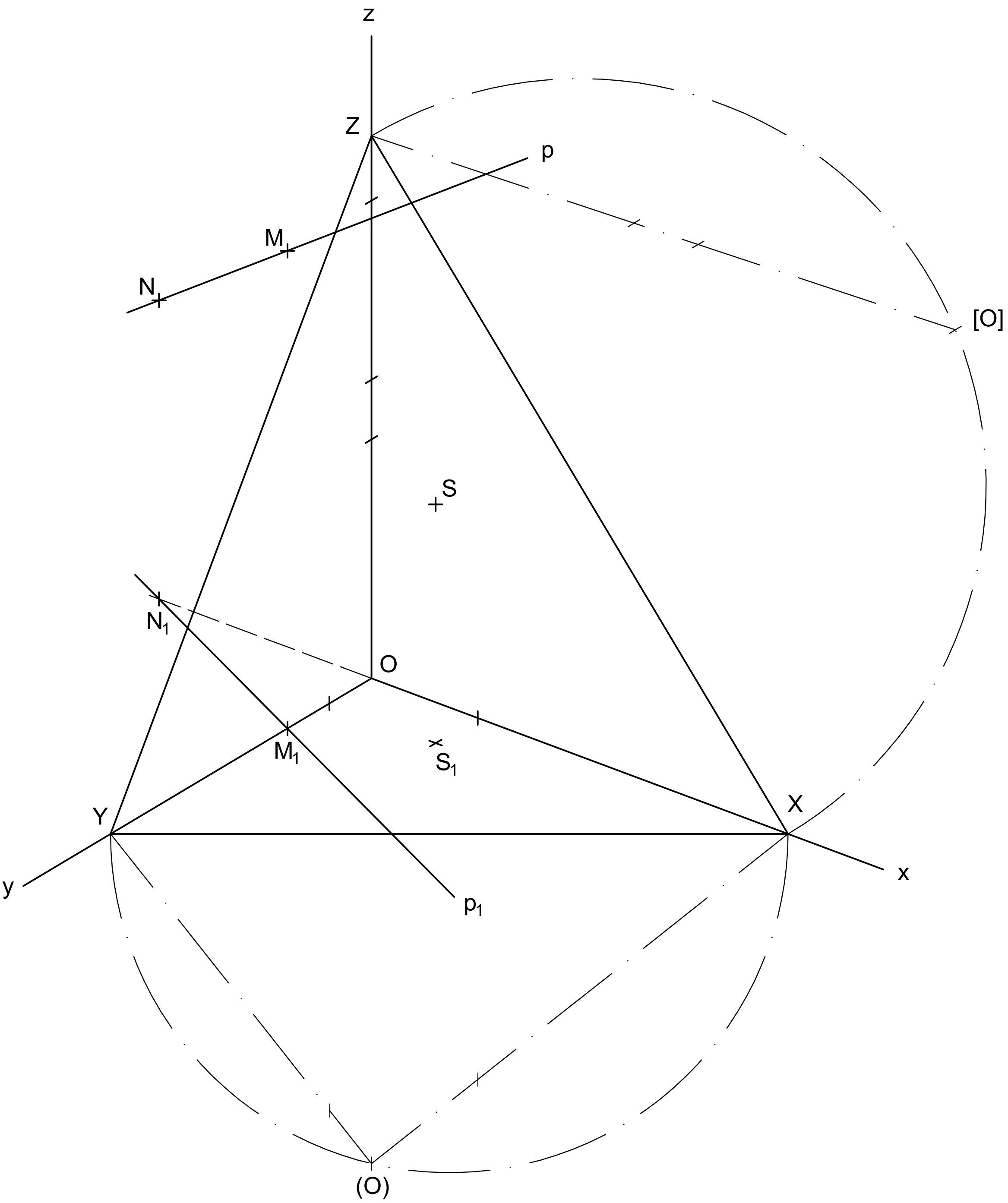
z
Z
[O]
k
A
n^α
l
r^ρ
n^ρ
m^ρ
O
R
Y
X
R_1
l
x
y
A_1
$p^\alpha = k_1 = l_1$
p^ρ
(O)

Řešení c.

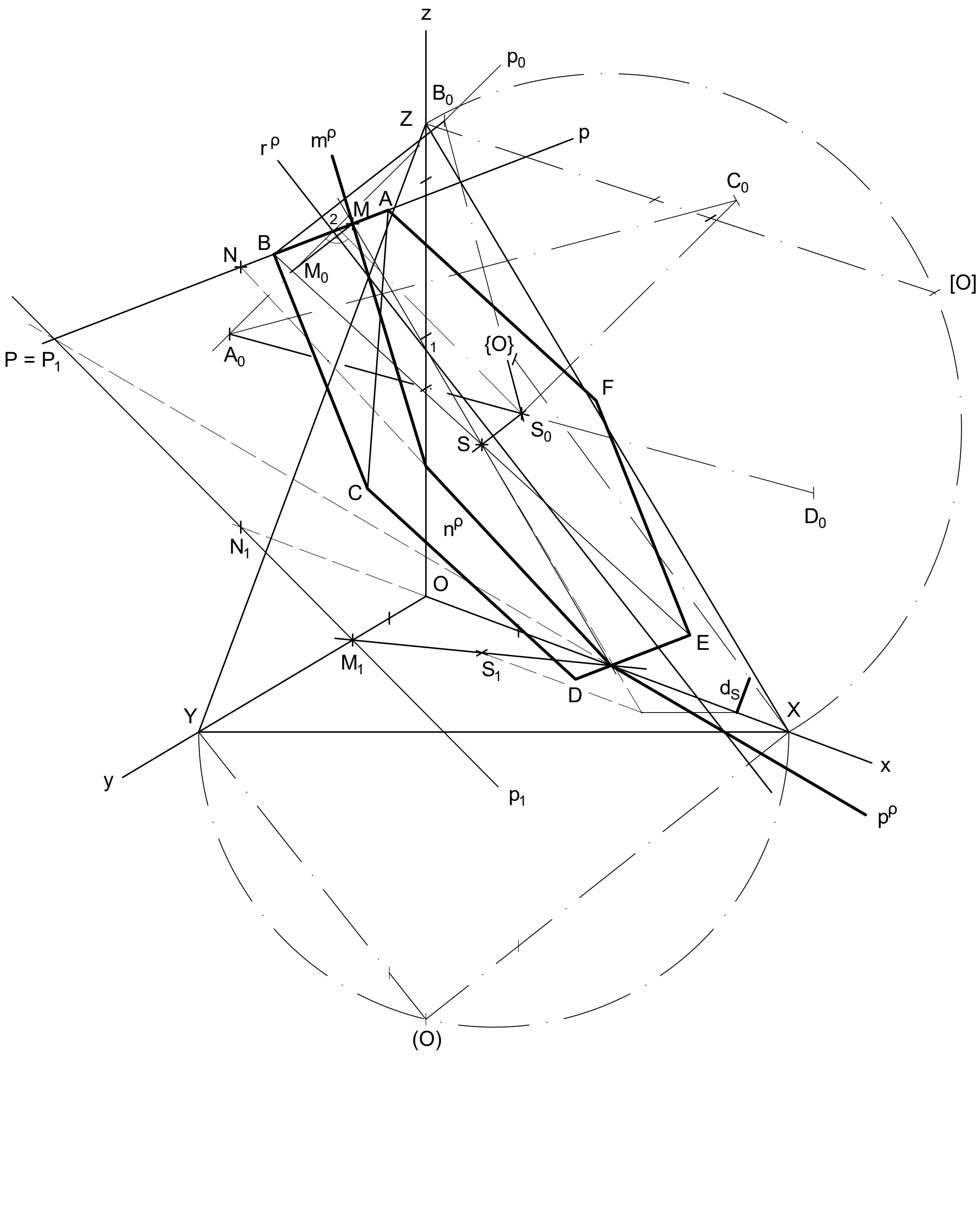


Příklad 11

Sestrojte pravidelný šestiúhelník, je-li dán střed S a přímka $p = MN$, na níž leží strana AB. Souřadnice: $|XY| = 100$, $|XZ| = 120$, $|YZ| = 110$, $S[20; 10; 40]$, $M[0; 20; 80]$, $N[-40; 0; 50]$.



Řešení: Přímka p spolu se středem S tvoří rovinu ρ, ve které šestíúhelník leží. Dále stačí jen sestrojit rovnostranný trojúhelník o jednom vrcholu S a dalších na přímce p a z toho jednoduše i šestiúhelník.



Kapitola 3

Hranatá tělesa

V této kapitole se budeme věnovat vždy nejprve jednomu či dvěma příkladům na konstrukci těles, posléze pár průnikům přímky s tělesem, kdy nalezení průsečíků probíhá pomocí řezu vhodnou rovinou (pro jehlany většinou buď vrcholovou, nebo kolmou na podstavu a u hranolů směrovou, nebo opět kolmou na podstavy). Také se zde nachází příklady na řezy tělesa rovinou.

Kapitola je rozdělena na dvě části: jehlany a hranoly. Bereme, že vlastnosti těles má čtenář již probrané z nižších ročníků a nebude jim tedy věnována pozornost. V příkladech, v nichž není konstrukce těles podstatou, jsou tělesa již sestrojena.

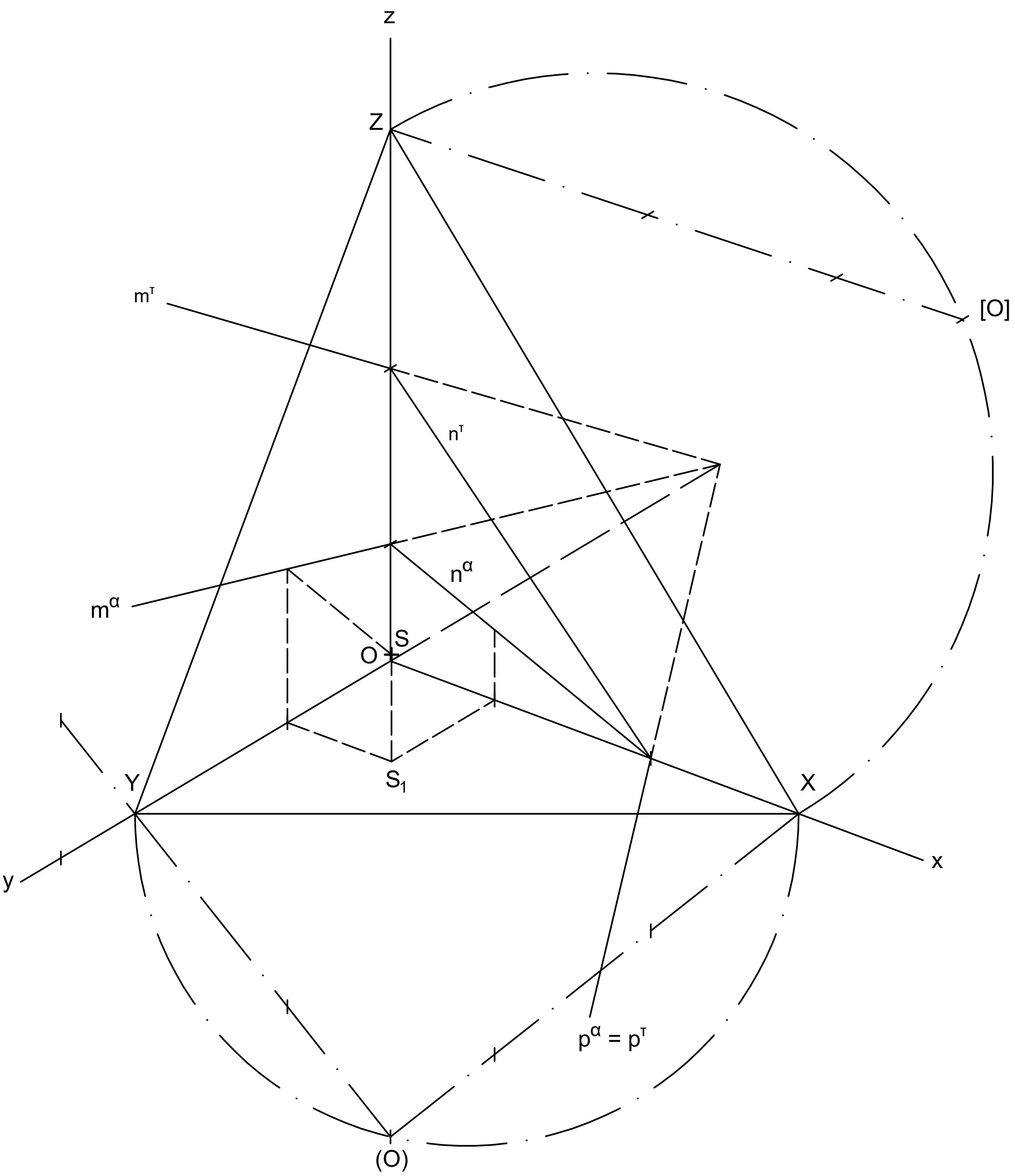
Tato část obsahuje také autorské příklady.

3.1 Jehlan

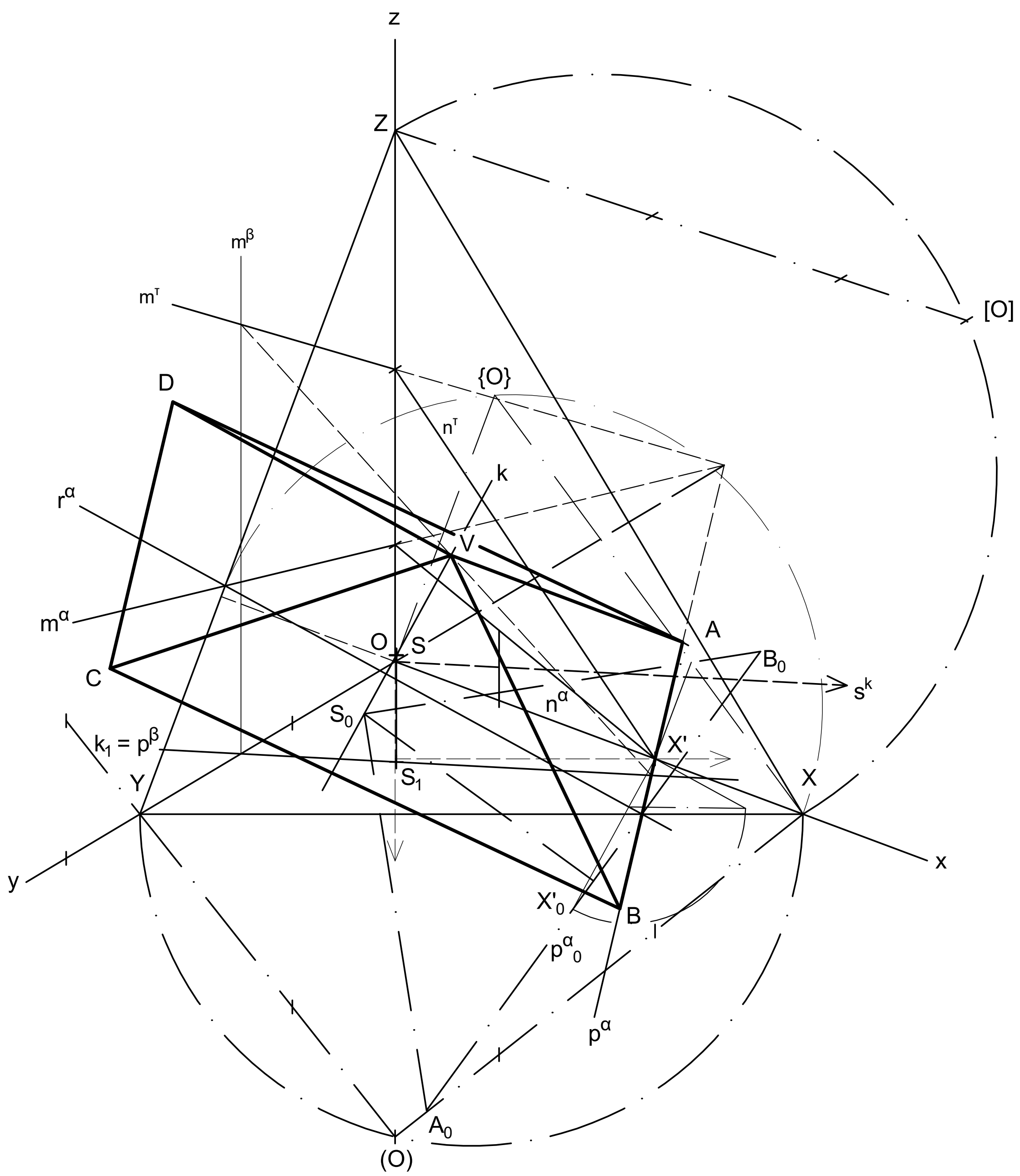
Příklad 12

Sestrojte pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, znáte-li rovinu podstavy α, rovinu jedné stěny τ a střed podstavy S.

Axonometrie je dána souřadnicemi: $|XY| = 100$, $|XZ| = 120$, $|YZ| = 110$, roviny: $\alpha(50; -80; 20)$, $\tau(50; -80; 50)$, a bod: $S[20; 25; ?]$, $S \in \alpha$.



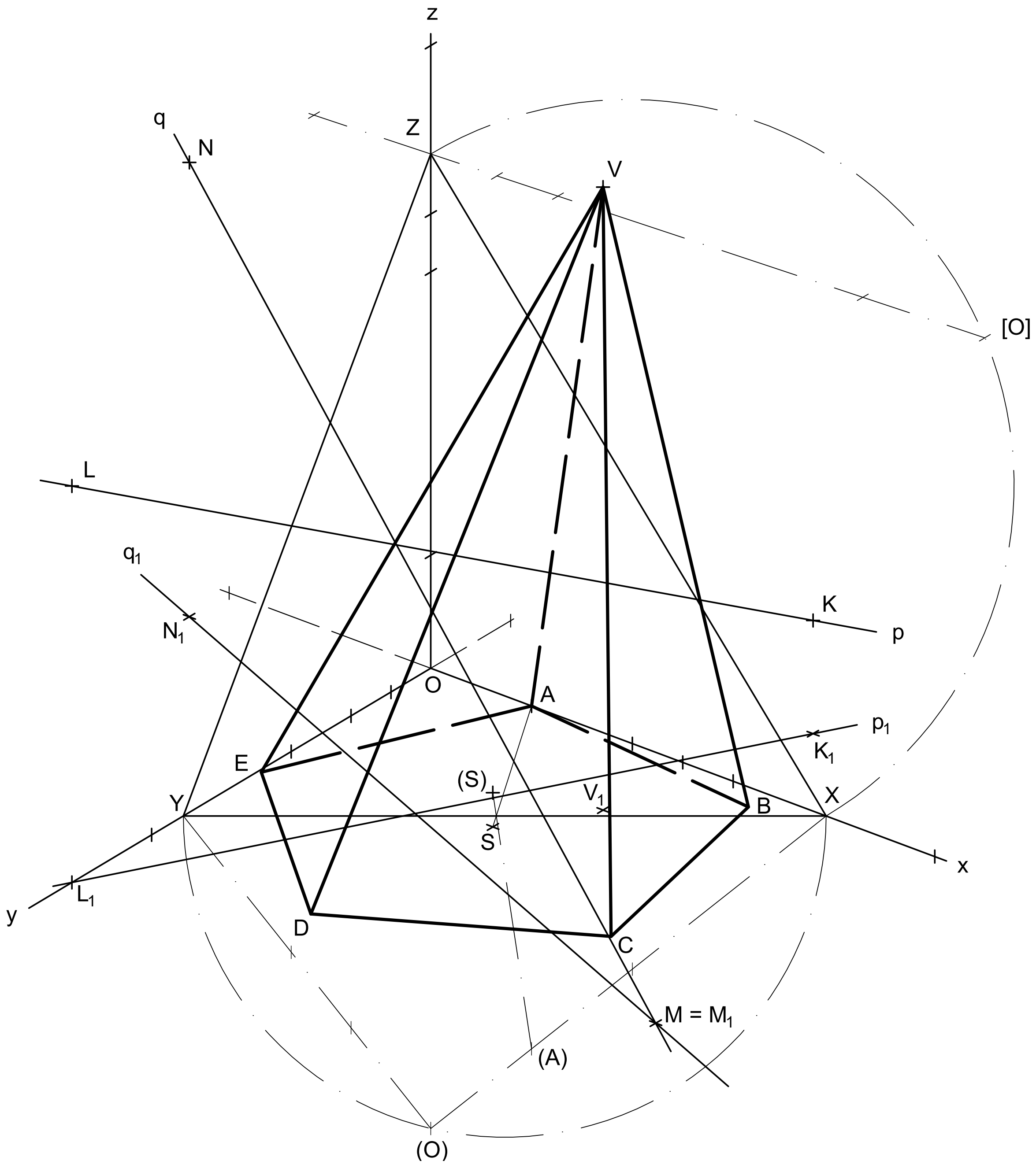
Řešení: Nejprve nalezneme z-ovou souřadnici bodu S pomocí hlavních přímek osnovy druhé roviny α. Hrana podstavy, která leží v rovině τ, je průsečnicí $\alpha \cap \tau$, což je v našem případě přímo půdorysná stopa roviny α, jelikož $p^{\alpha} = p^{\tau}$. Rovinu α otočíme a v otočení sestrojíme čtverec se středem S a jedné straně ležící na p^{α}. Čtverec z otočení vrátíme zpět a tím jsme získali axonometrický průmět podstavy jehlanu. Zbývá nelézt vrchol jehlanu, který musí ležet v rovině τ a také na ose jehlanu. Sestrojíme přímku k kolmou na podstavnou rovinu α a určíme její průsečík s τ. Bodem průniku je hledaný bod V.



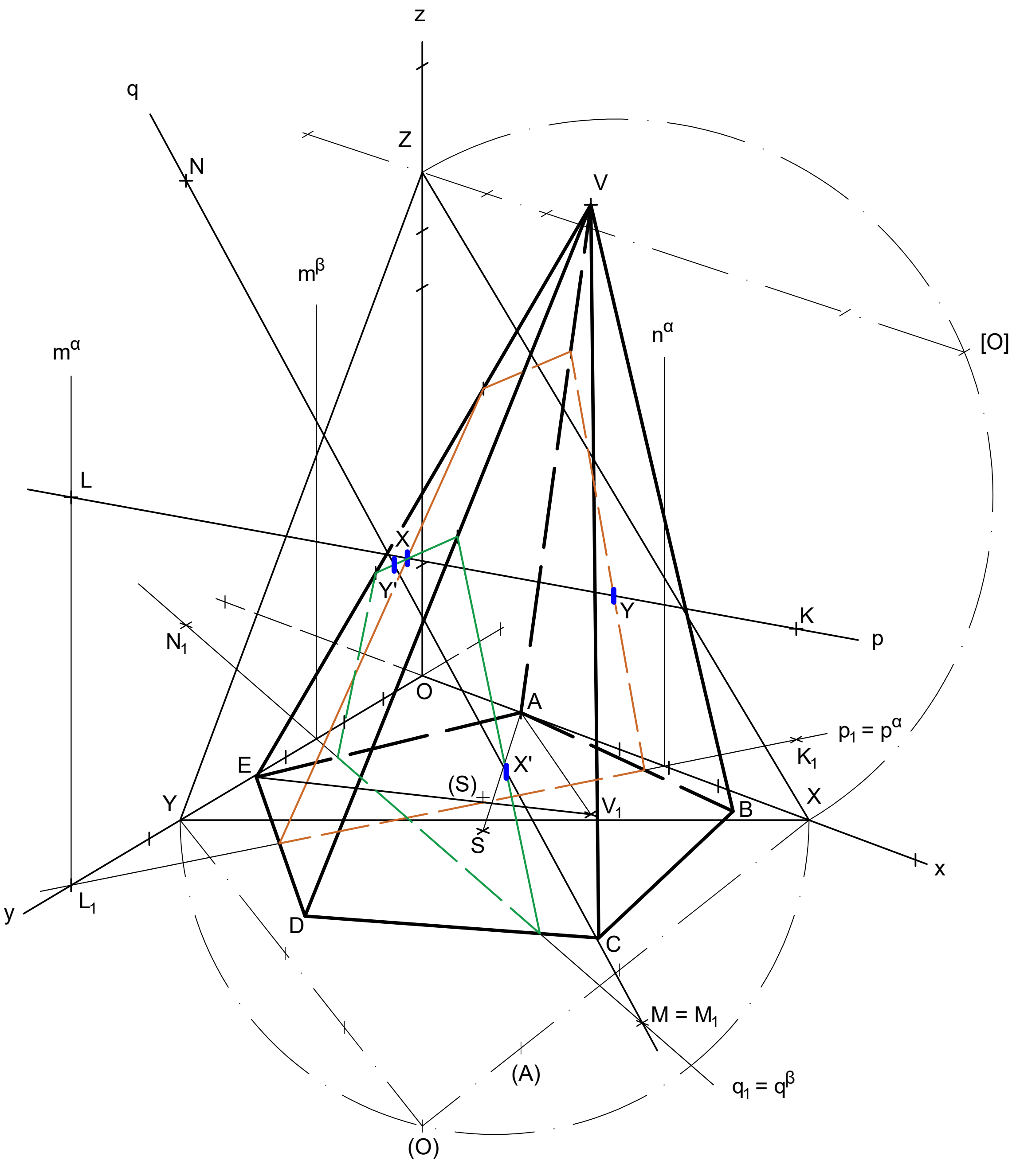
Příklad 13
Sestrojte průsečík přímky p (resp. q) s kosým pětibokým jehlanem, jehož podstavou je pravoúhlý pětiúhelník ležící v průmětně π, určený středem S a vrcholem A, a jehož hlavní vrchol je V. $|XY| = 100$, $|XZ| = 120$, $|YZ| = 110$, $S[40; 35; 0]$, $A[20; 0; 0]$, $V[50; 20; 110]$,

a. $K[60; -20; 20]$, $L[0; 90; 70]$, $p = KL$,

b. $M[100; 70; 0]$, $N[-40; 10; 80]$, $q = MN$.



Řešení: Zadanou přímkou (stejný postup pro p i q) proložíme rovinu kolmou k půdorysně, $p_1 = p^\alpha$, resp. $q_1 = p^\beta$. Sestrojíme řezy rovinou α, resp. β, a průsečíky řezů s příslušnými přímkami jsou naše hledané průsečíky přímek s tělesem.[1]



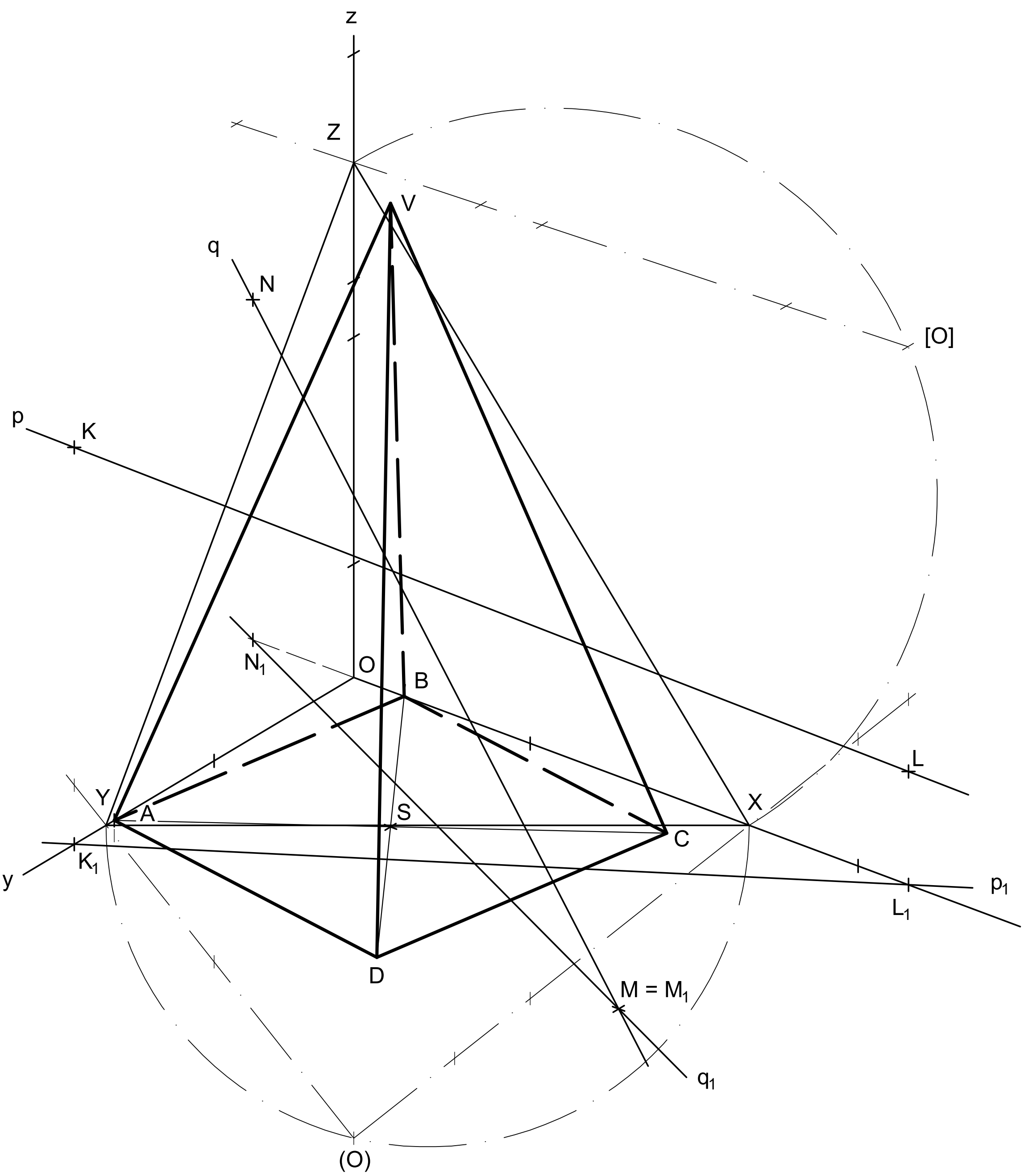
[1] Některý bod řezu sestrojíme pomocí krycí přímky a dále kolineace ($o = XY$, průsečnice axonometrické průmětny a π).

Příklad 14

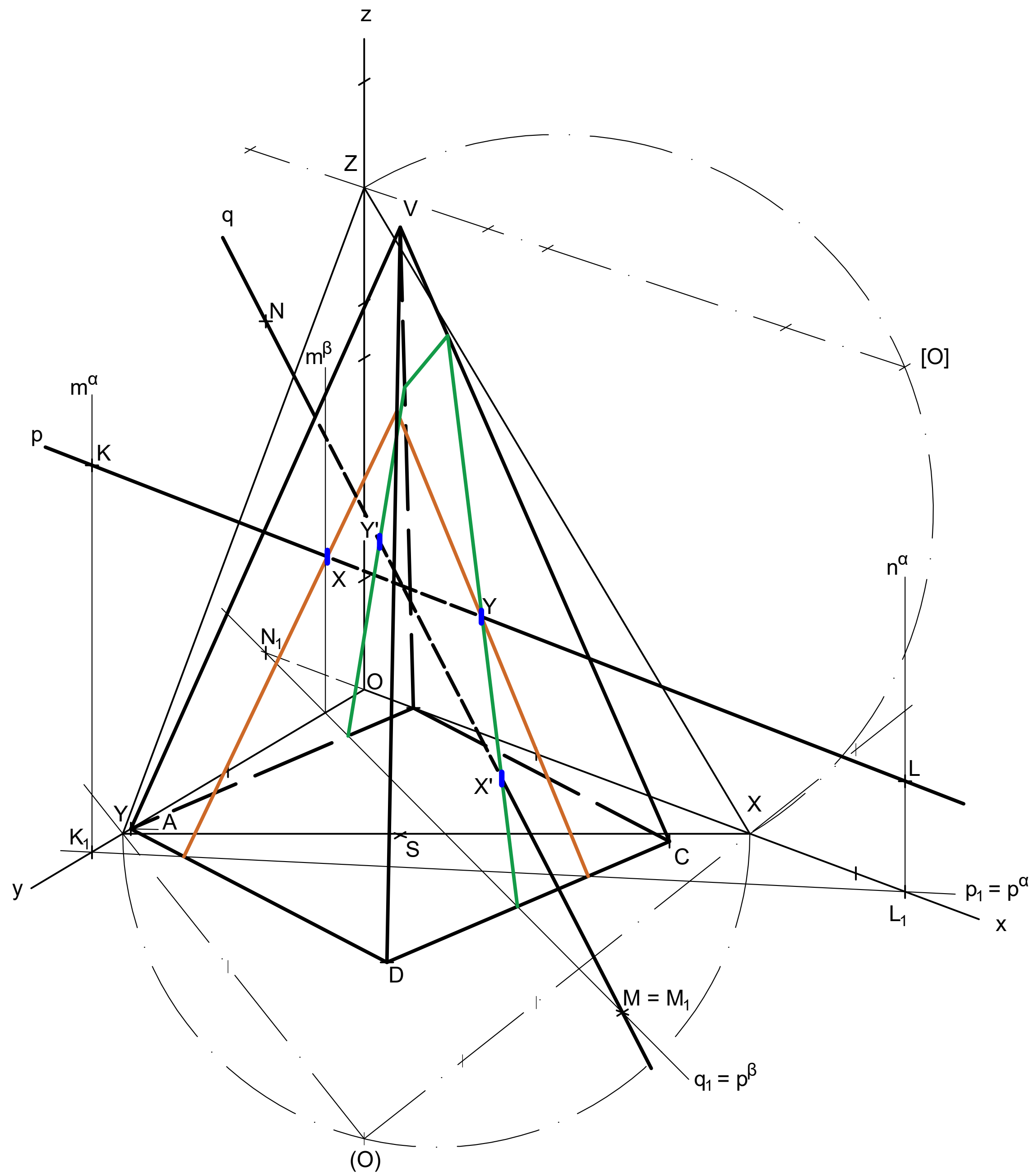
Sestrojte průsečík přímky p (resp. q) s pravidelným čtyřbokým jehlanem, jehož podstava náleží π a je určena středem S a vrcholem A a jehož výška je v. $|XY| = 100$, $|XZ| = 120$, $|YZ| = 110$, $S[35; 35; 0]$, $A[0; 60; 0]$, $v = 110$,

a. $K[0; 70; 70]$, $L[110; 0; 20]$, $p = KL$,

b. $M[100; 60; 0]$, $N[-20; 0; 60]$, $q = MN$.



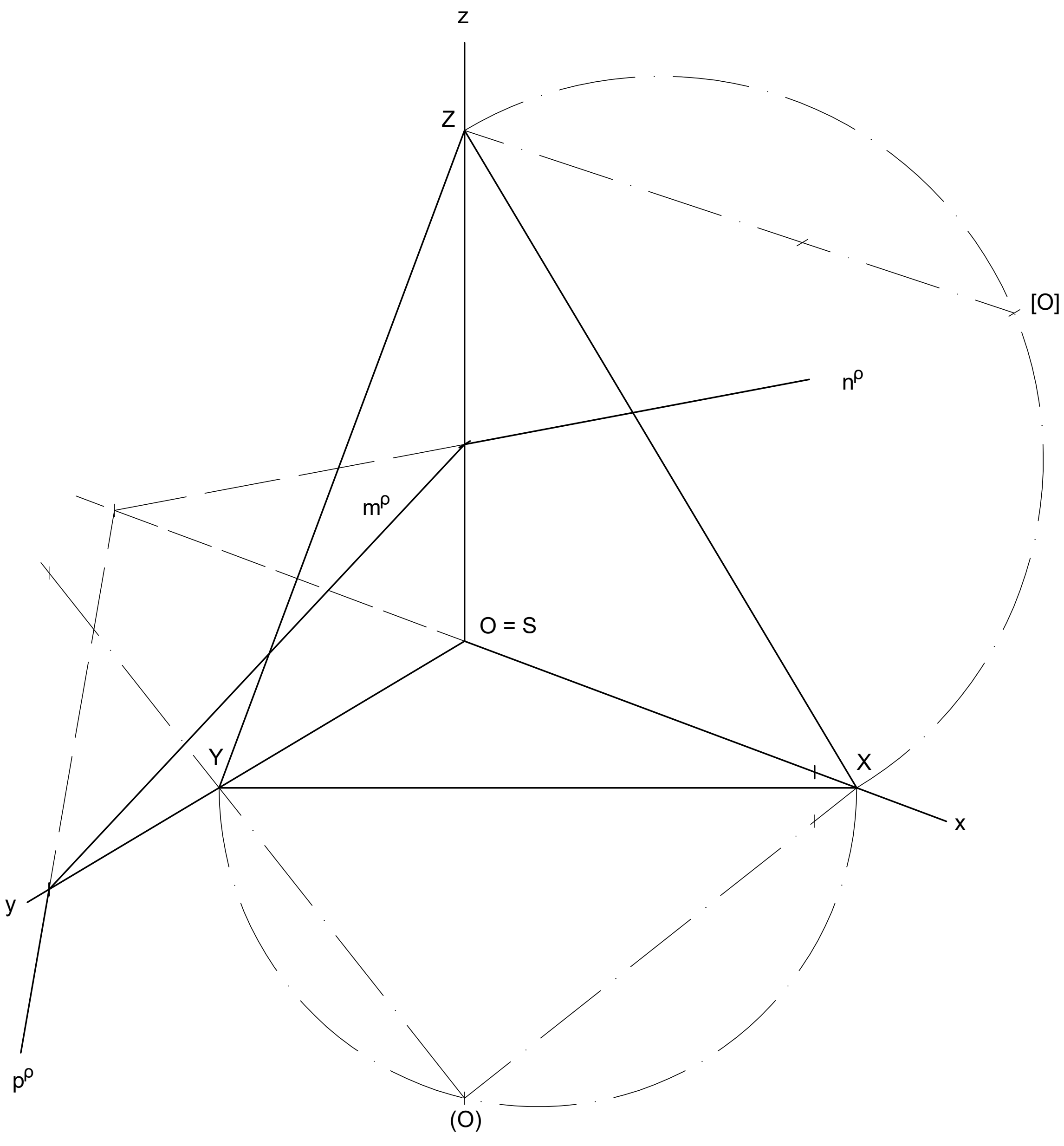
Řešení: Postupujeme stejně jako u předchozího příkladu, prokládáme přímkou vhodnou rovinu, což je v našem případě, kvůli podstavě ležící v půdorysně, například rovina α (resp. β) k půdorysně kolmá. Dále opět nalezneme řez touto rovinou a z toho i hledané průsečíky X, Y (resp. X', Y').[2]



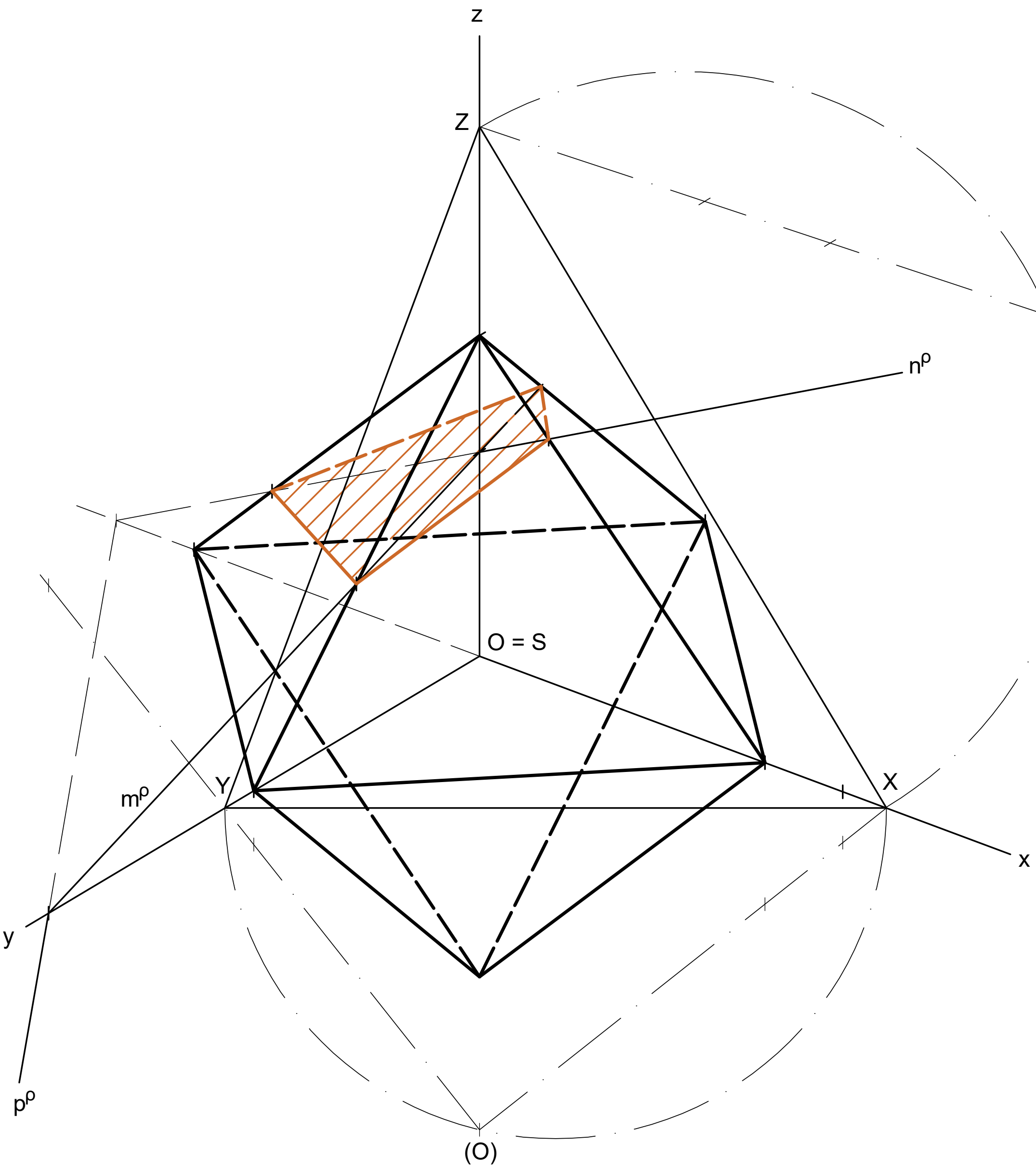
[2]Při rýsování na papíře od ruky může vyjít $(S) = S$, tzn. S ležící na XY.

Příklad 15

Sestrojte řez roviny ρ s pravidelným osmistěnem, který má střed v počátku a úhlopříčky délky d souřadných osách. $|XY| = 100$, $|XZ| = 120$, $|YZ| = 110$, $\rho(-70; 105; 35)$, $d = 110$.



Řešení: Osmistěn sestrojíme snadno, stačí nanést půlku úhlopříčky (tzn. 55 jednotek zkreslených) na všechny osy na obě strany od počátku. Dvě hrany náleží nárysně, tudíž jejich průsečíky přímo se stopou roviny jsou body řezu. Takto můžeme postupovat i pro zbylé průmětny.



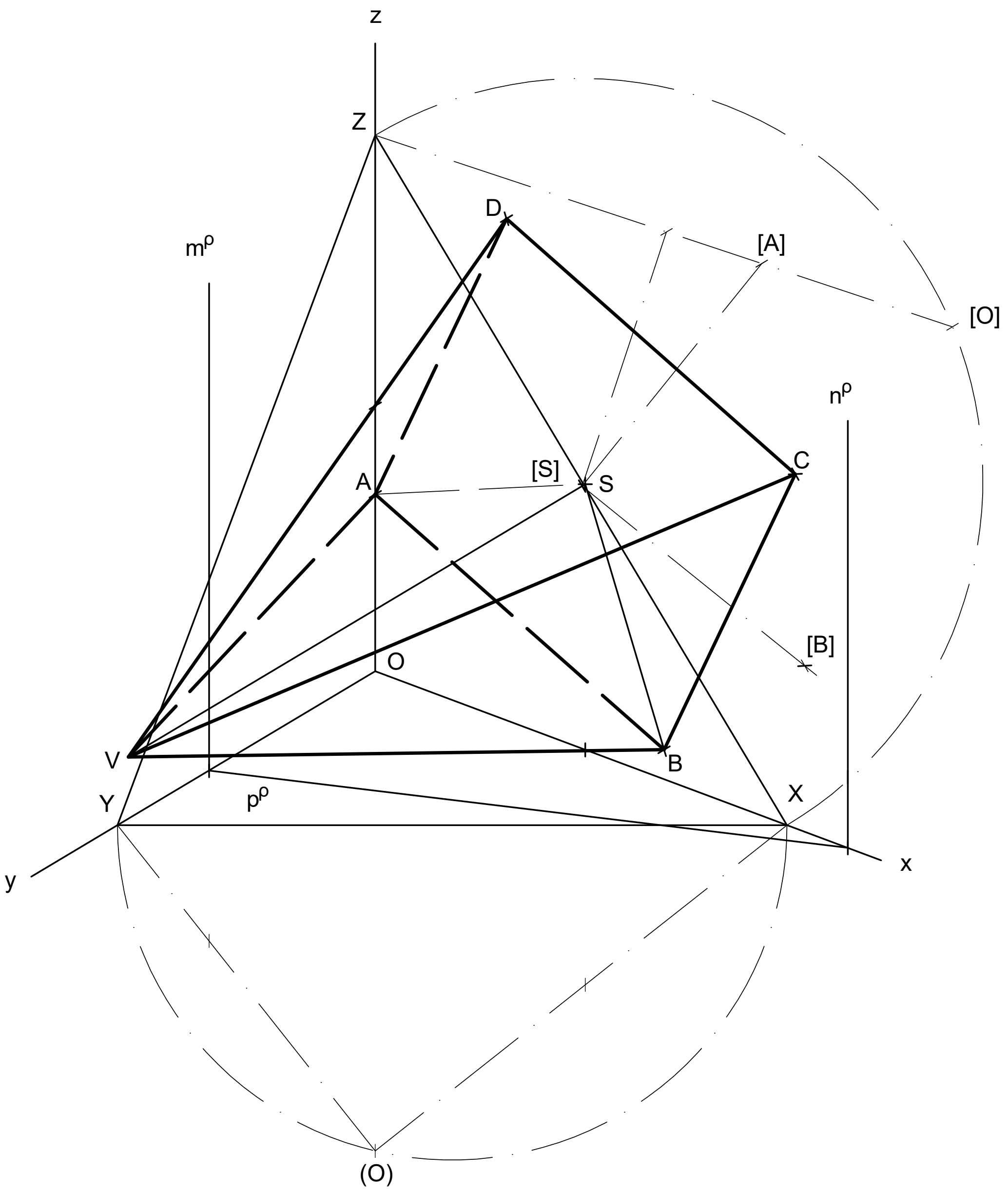
Příklad 16

Pravidelný čtyřboký jehlan, jehož podstava leží v průmětně ν a je určena středem S a vrcholem A a jehož výška je v, protněte:

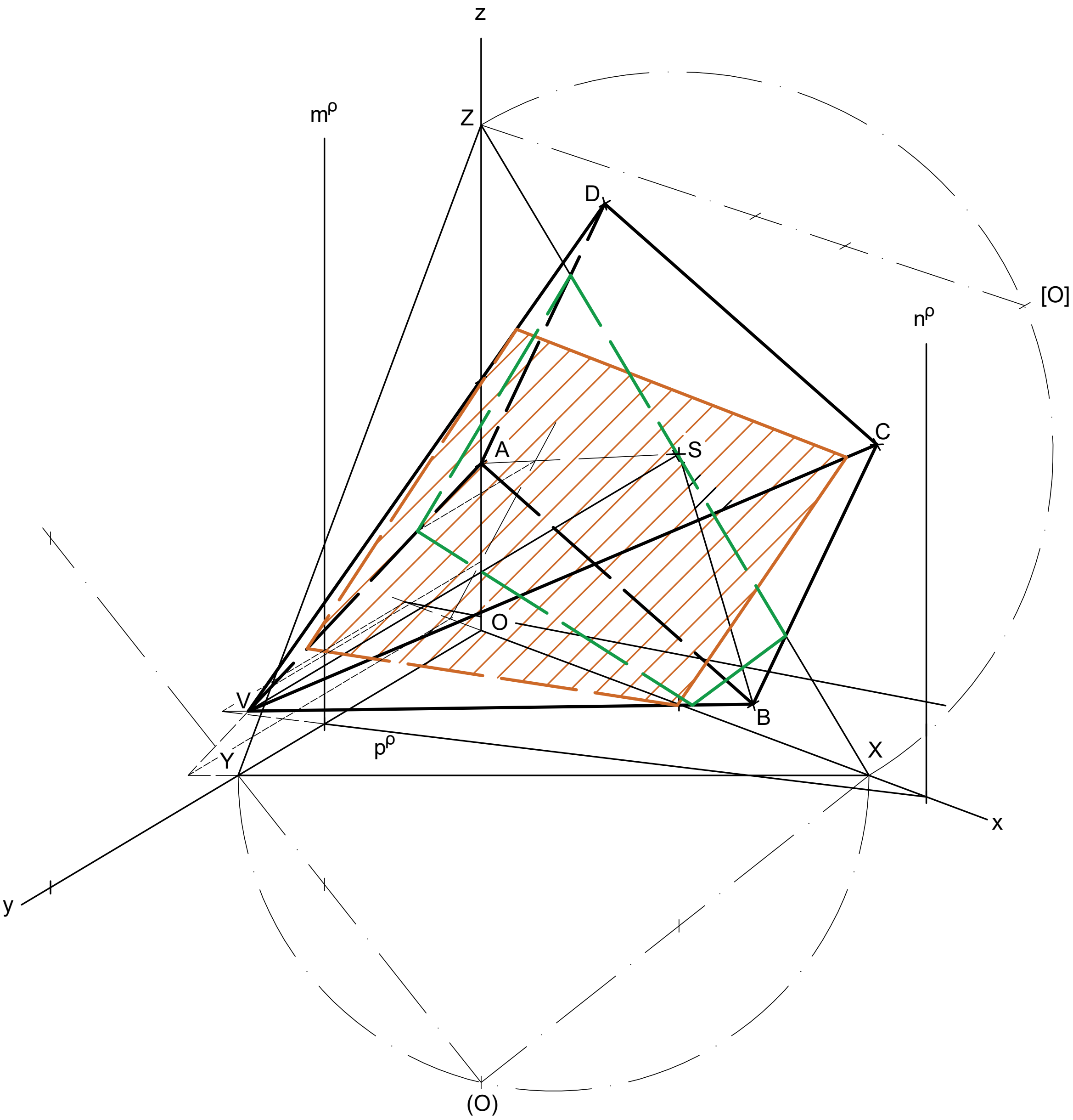
a. rovinou ρ,

b. axonometrickou průmětnou.

Souřadnice: $|XY| = 100$, $|XZ| = 120$, $|YZ| = 110$, $S[40;0;45]$, $A[0;0;30]$, $v = 110$, $\rho(90;40;\infty)$, $\sigma(50;40;-80)$.



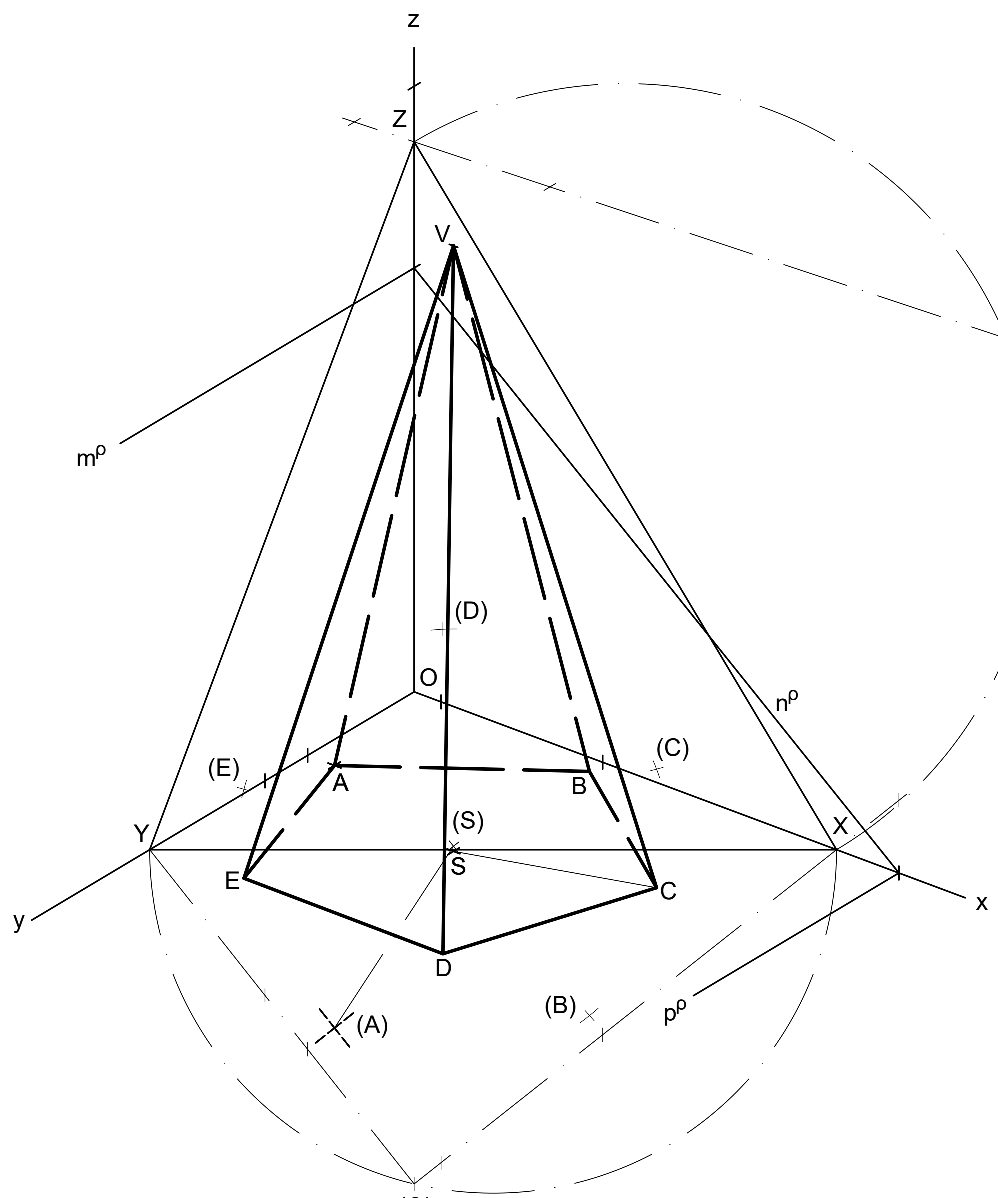
Řešení: Sestrojíme nejdříve řez rovinou ρ. Použijeme vhodně metodu krycí přímky a dále opět kolineaci. Při řezu axonometrickou průmětnou prochází nárysná stopa XZ podstavou, tudíž již máme část řezu a můžeme dále postupovat pomocí kolineace $\mathcal{K}$.[3]



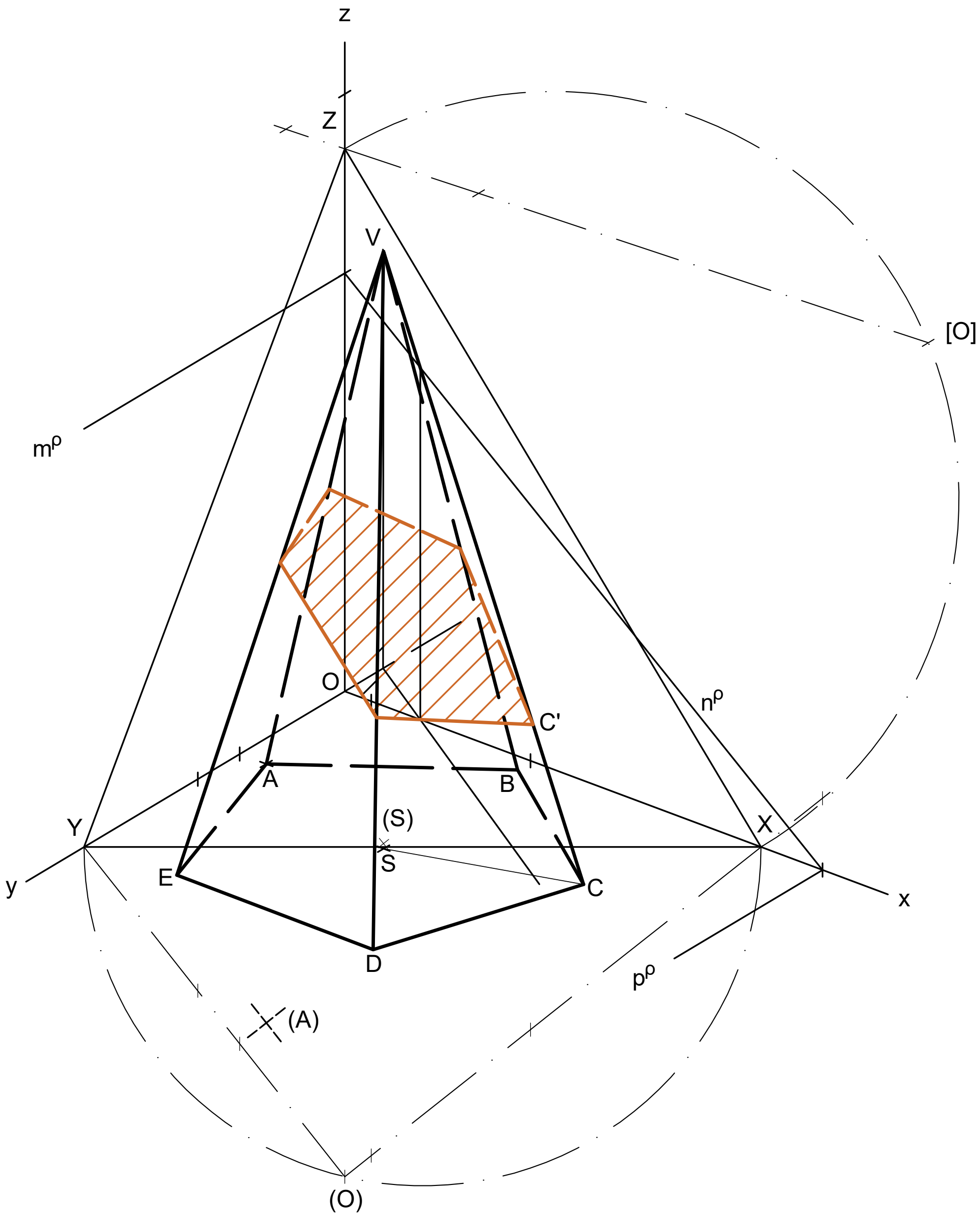
[3]Při rýsování zadání od ruky se $S = [S]$.

Příklad 17

Zobrazte řez pravidelným pětibokým jehlanem rovinou ρ. Jehlan je dán svou podstavou $ABCDE$ o středu $S \in \pi$ a výškou v. $|XY| = 100$, $|XZ| = 120$, $|YZ| = 110$, $S[35; 35; 0]$, $A[5; 25; 0]$, $v = 100$, $\rho(90; \infty; 70)$.



Řešení: Při sestrojení řezu postupujeme obdobně jako v předchozích případech.[4]

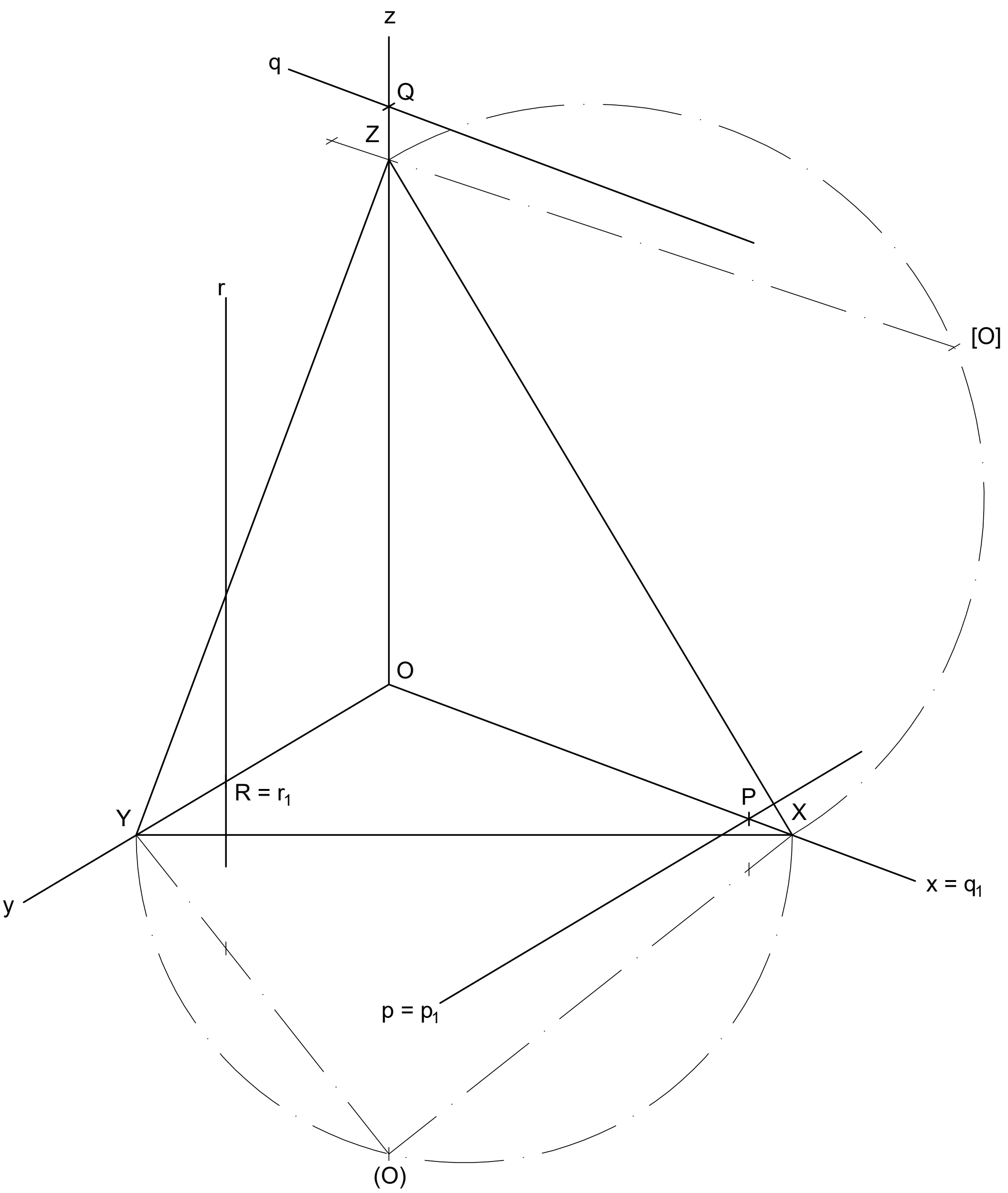


[4] Při mírných nepřesnostech (přerýsování od ruky na papír) $S = (S)$.

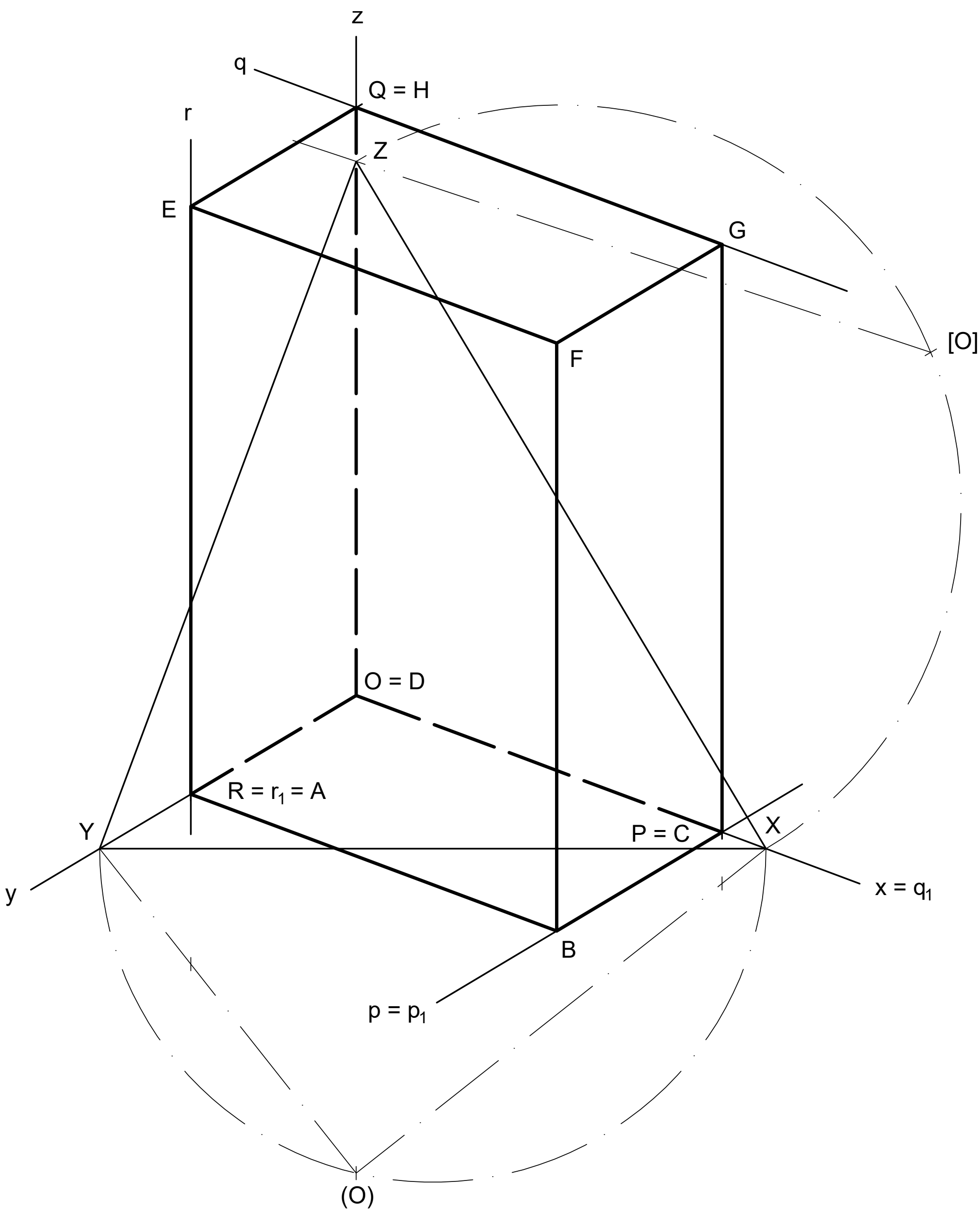
3.2 Hranol

Příklad 18

Sestrojte hranol, jsou-li dány tři mimoběžné přímky p, q, r, na kterých leží hrany hranolu. Axonometrie je dána $\triangle(100; 120; 110)$ a přímka následovně: $(p \parallel y) \wedge (P \in p)$, $(q \parallel x) \wedge (Q \in q)$, $(r \parallel z) \wedge (R \in r)$. Souřadnice bodů jsou: $P = [7; 0; 0]$, $Q = [0; 0; 10]$, $R = [0; 4; 0]$.



Řešení: K sestrojení kvádru budeme hledat osy zadaných mimoběžek. Jelikož mimoběžky p, q, r mají zvláští polohu ($p \subset \pi$, $q \subset \nu$, $r \subset \mu$), řešené úlohy se zjednoduší. Mimoběžkou p proložíme rovinu rovnoběžnou s mimoběžkou q, což je v tomto případě půdorysna. Směr kolmý k π, tedy i k oběma mimoběžkám p, q, je směr, kterému patří třetí mimoběžka r. Průsečík A přímky r s půdorysnou π je jeden z vrcholů kvádru. Další vrchol B leží na p a platí $AB \parallel q$. Přímkou q proložíme rovinu rovnoběžnou s půdorysnou π a určíme její průsečík E s mimoběžkou r. Bod H leží na přímce q a současně platí $EH \parallel p$. Ostatní body kvádru doplníme podobně, pomocí rovnoběžnosti jeho hran a již nalezených vrcholů.

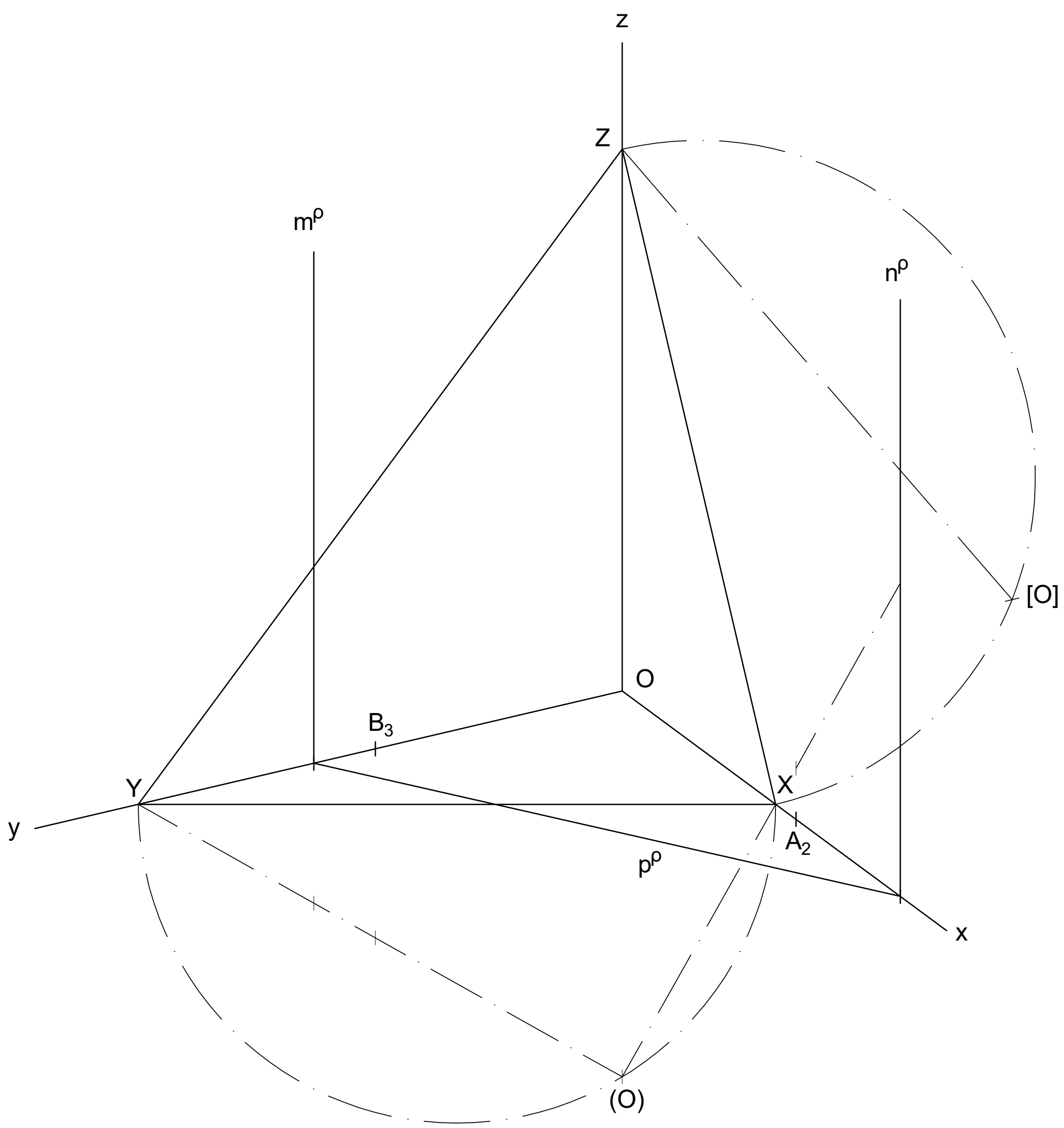


Příklad 19
Zobrazte pravidelný šestiboký:

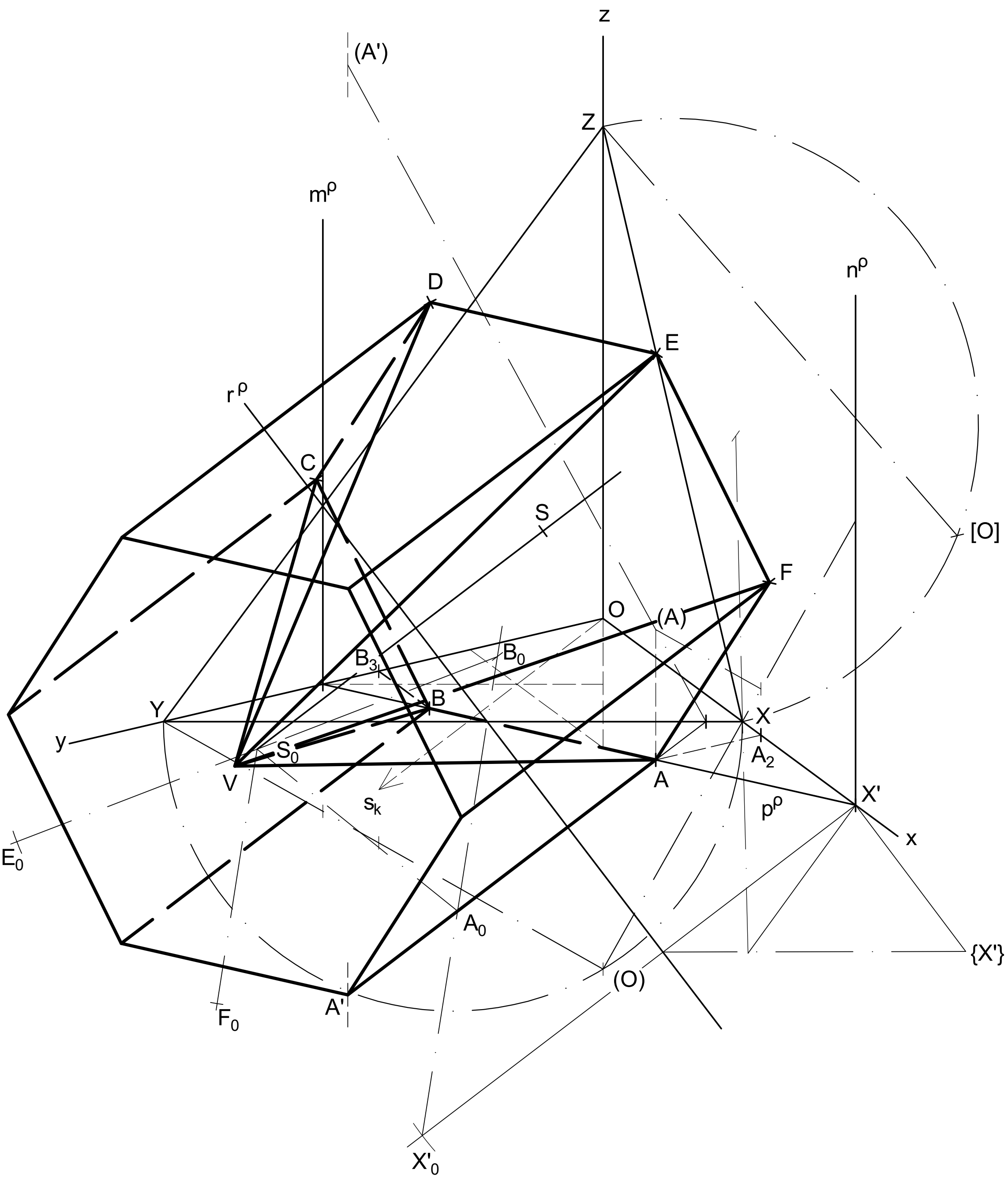
a. jehlan,

b. hranol,

jehož podstava leží v ρ, je-li dána podstavná hrana AB a výška v. Axonometrický $\triangle(90; 95; 115)$, $A[50; ?; 0]$, $B[?; 40; 0]$, $v = 100$, $\rho(80; 50; \infty)$.



Řešení: Sestrojíme hranol s podstavou v obecné rovině. Jelikož A, B, leží v půdorysně a také v ρ, musí ležet na jejich průsečnici, tzn. půdorysné stopě ρ. Směr kolmý na půdorysnu nám tedy stačí nalézt v průmětně π. Stačí nanést výšku na kolmice z příslušných vrcholů a také středu, tudíž stačí nanést na kteroukoliv z nich.

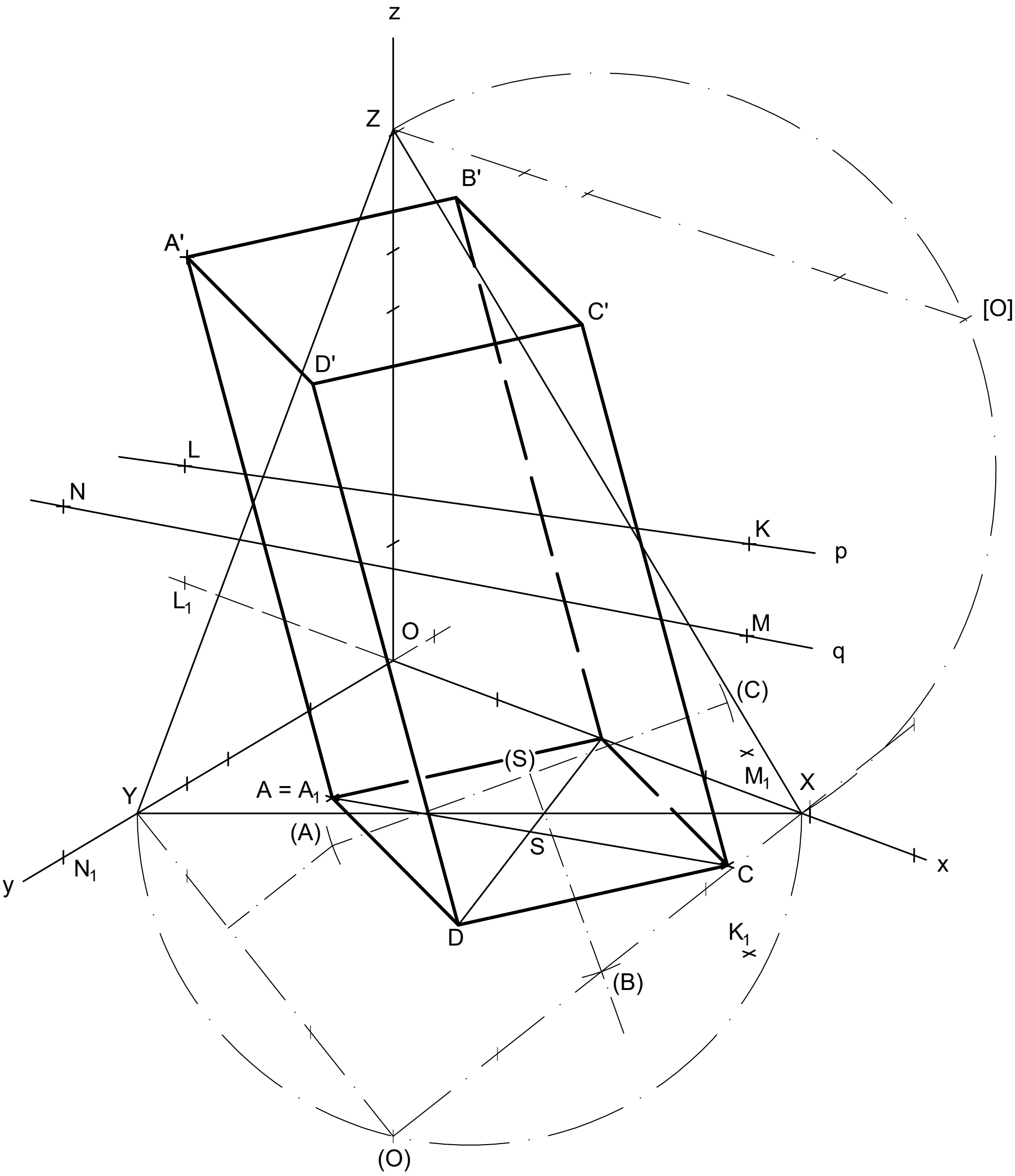


Příklad 20

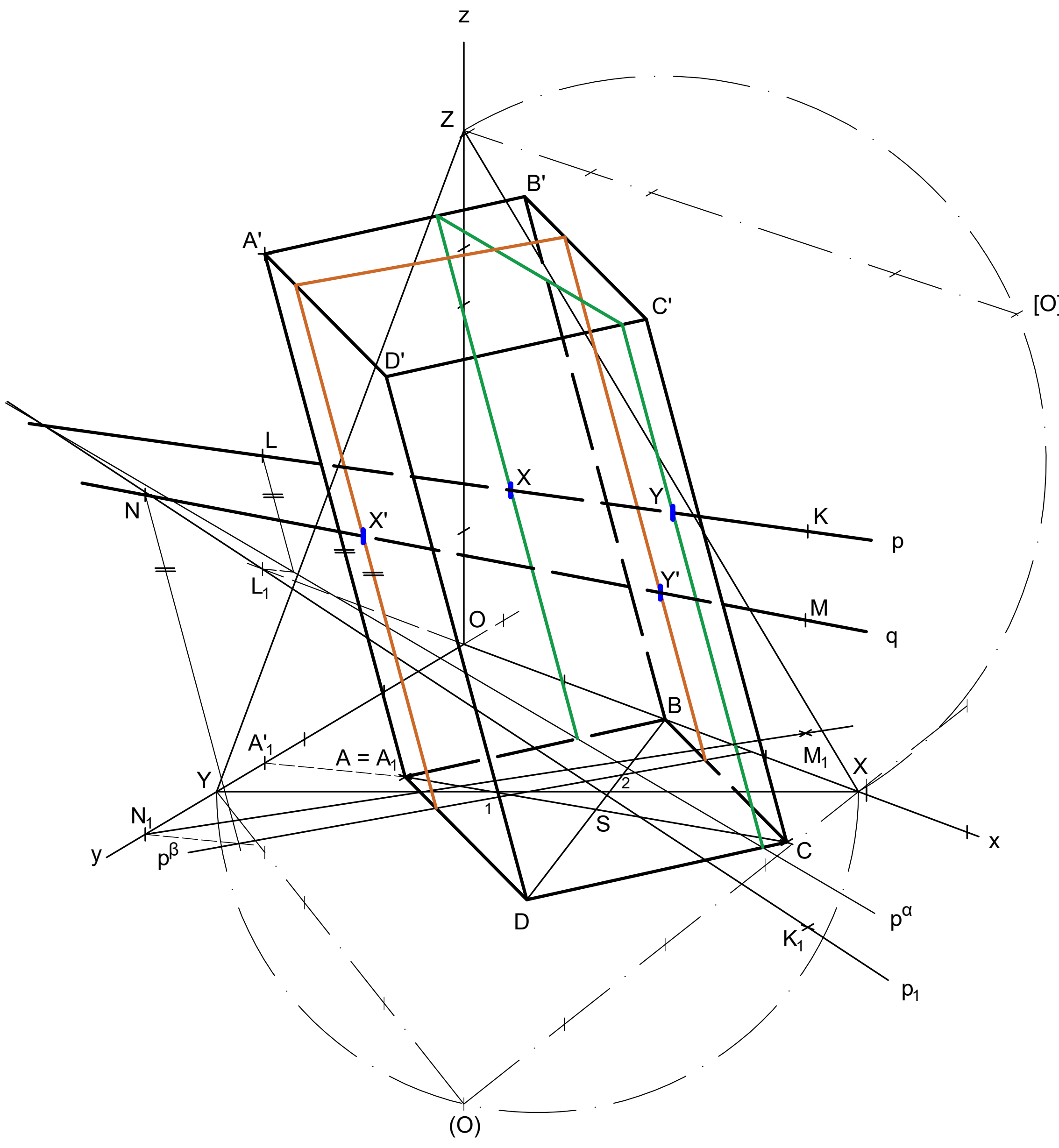
Sestrojte průsečíky přímky p (resp. q) s kosým čtyřbokým hranolem, jehož čtvercová podstava ležící v π je určena úhlopříčkou AC a jehož horní podstava má vrchol A'. Axonometrie je dána: $|XY| = 100$, $|XZ| = 120$, $|YZ| = 110$, a souřadnicemi bodů hranolu: $A[20; 40; 0]$, $C[80; 20; 0]$, $A'[0; 50; 90]$,

a. $K[100; 40; 70]$, $L[-40; 0; 20]$, $p = KL$,

b. $M[60; -10; 20]$, $N[0; 80; 60]$, $q = MN$.

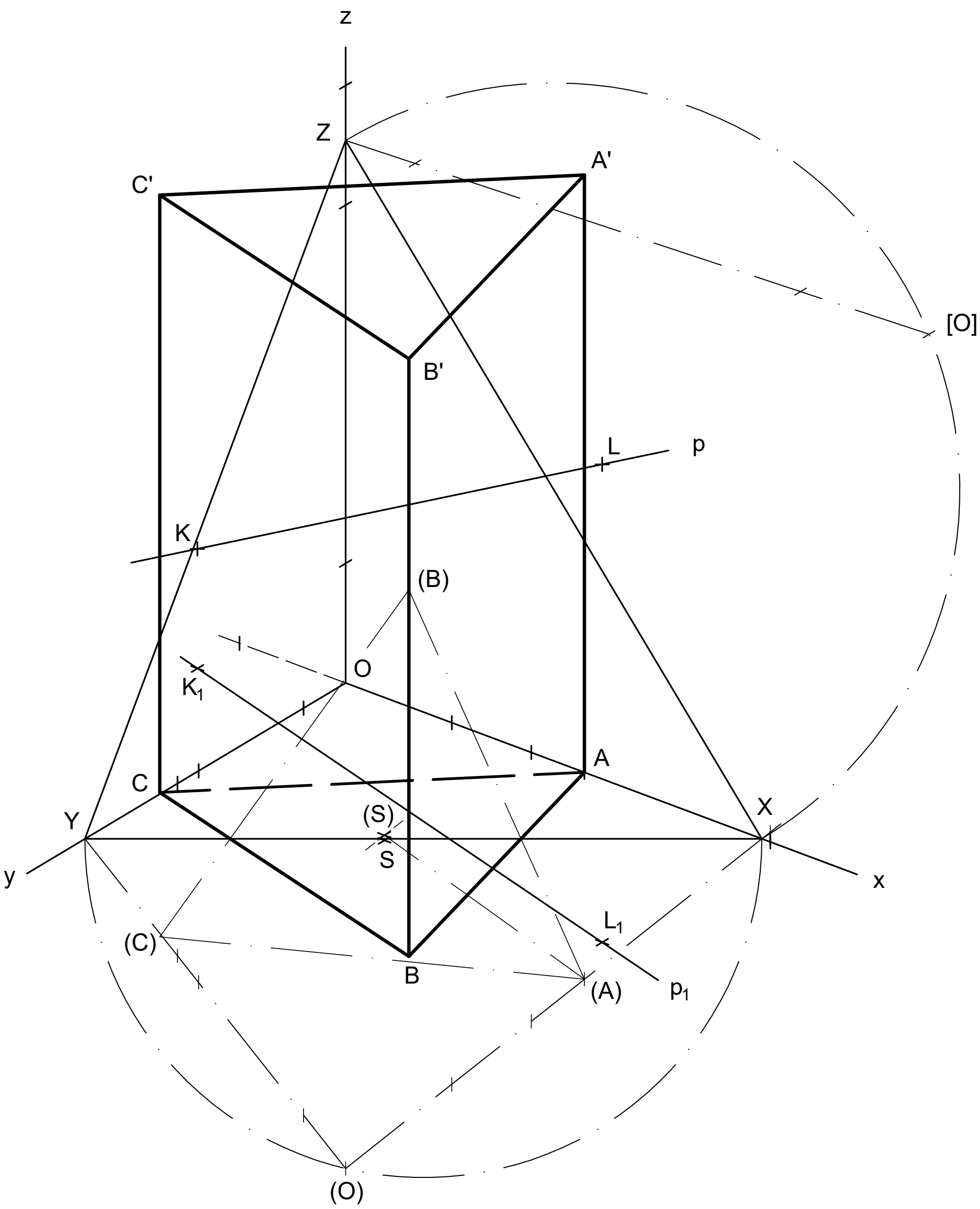


Řešení: Přímkou p (resp. q) proložíme vhodnou rovinu α (resp. β), což je v našem případě směrová ve směru hran hranolu (může být také jiná, např. kolmá na π). Sestrojíme půdorysnou stopu roviny a řez touto rovinou. Průsečíky X, Y, řezu a přímky jsou rovny bodům průniku přímky s hranolem.

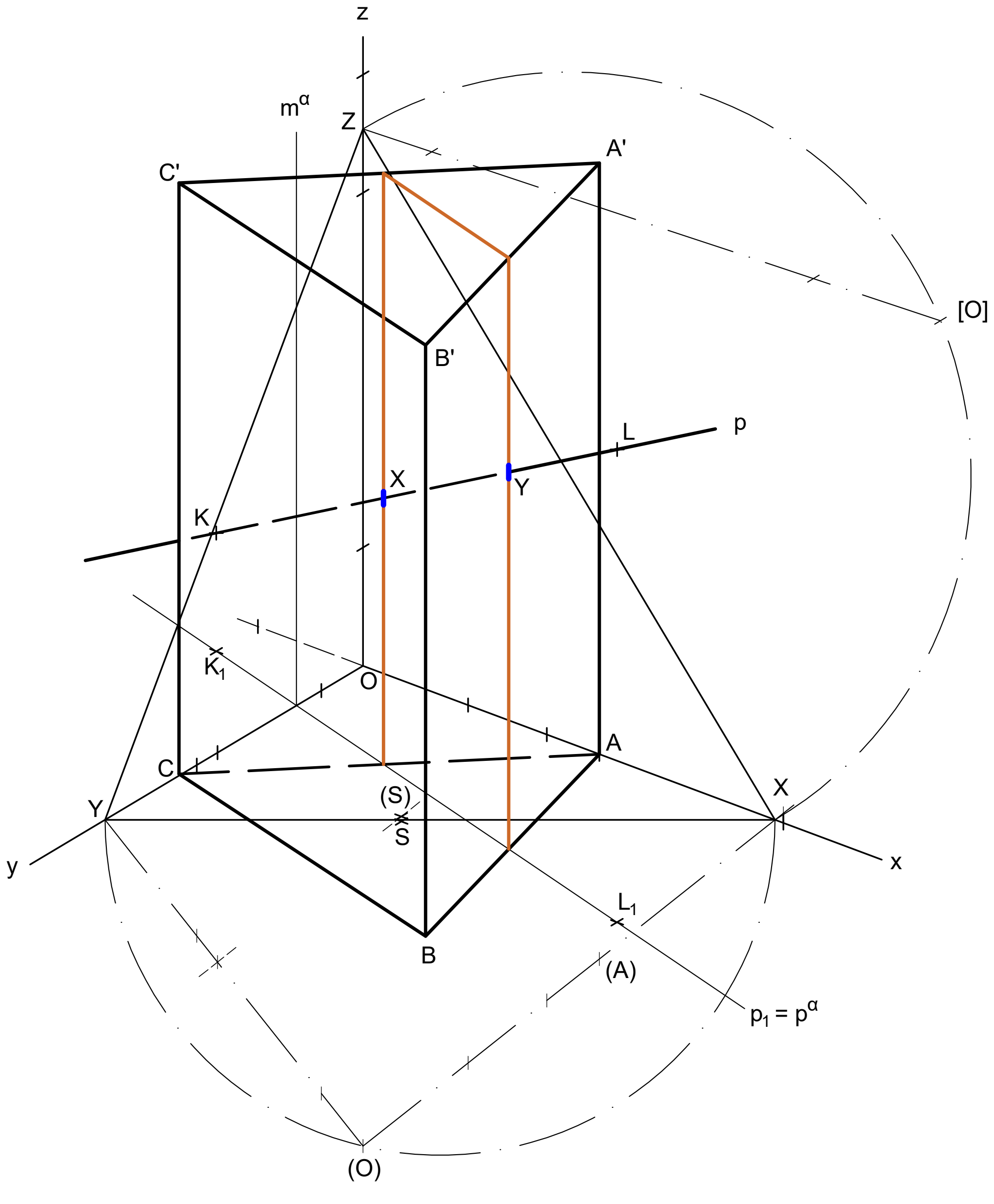


Příklad 21

Sestrojte průsečíky přímky p s pravidelným trojbokým hranolem $ABCA'B'C'$, jehož podstava leží v π a je určena středem S, vrcholem A a jehož výška je v. $\triangle(100{,}120{,}110)$, $S[35;35;0]$, $A[45;0;0]$, $v = 100$, $K[-20;10;20]$, $L[80;40;80]$.



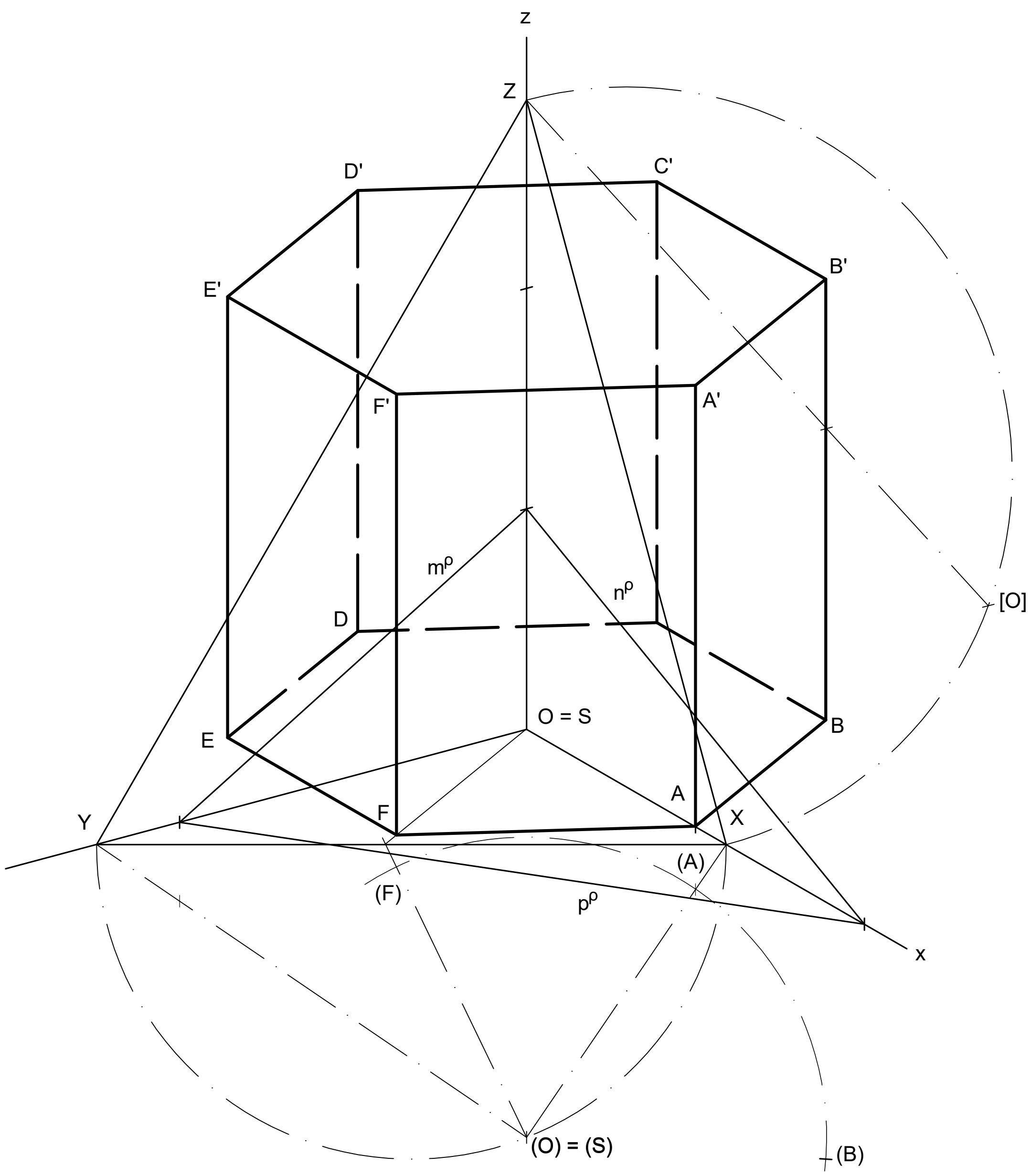
Řešení: Přímkou p proložíme vhodnou rovinu α. Jelikož je hranol kolmý k půdorysně, tak také rovina $\alpha \perp \pi$. Sestrojíme řez touto rovinou a nalezneme průsečíky řezu a přímky, tj. X, Y. Body X, Y jsou také průsečíky přímky a hranolu.[5]



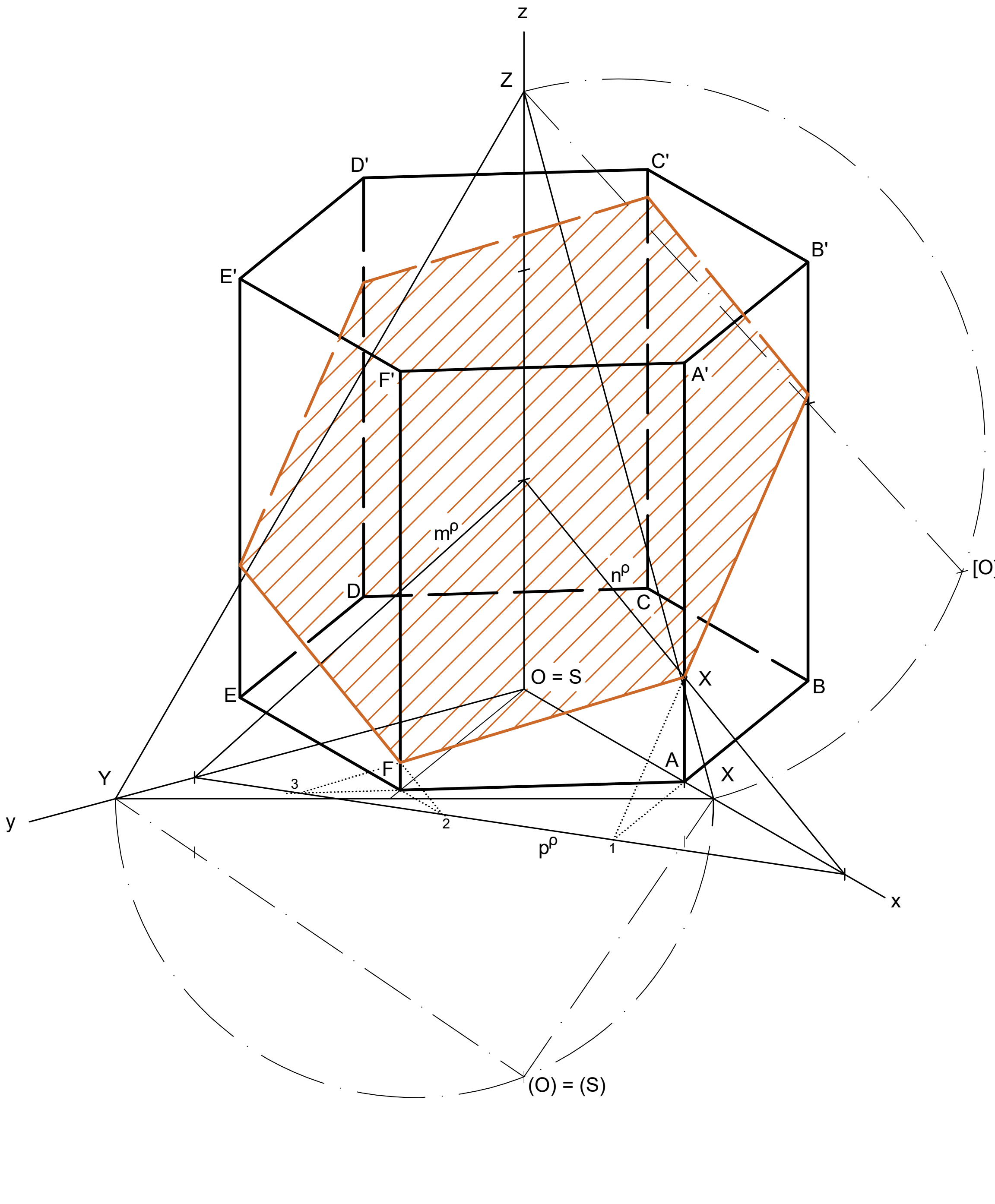
[5]Na papíře může po přerýsování souřadnic vycházet $S = (S)$ a $C \in y$.

Příklad 22

Zobrazte řez roviny ρ s pravidelným šestibokým hranolem, jehož podstava o středu S a vrcholu A leží v průmětně π. Výška hranolu je v. Axonometrie je dána úhly mezi souřadnými osami: $|\sphericalangle xz| = 120°$, $|\sphericalangle yz| = 105°$, hranol: $S[0;0;0]$, $A[50;0;0]$, $v = 80$ a rovina $\rho(100;70;40)$.

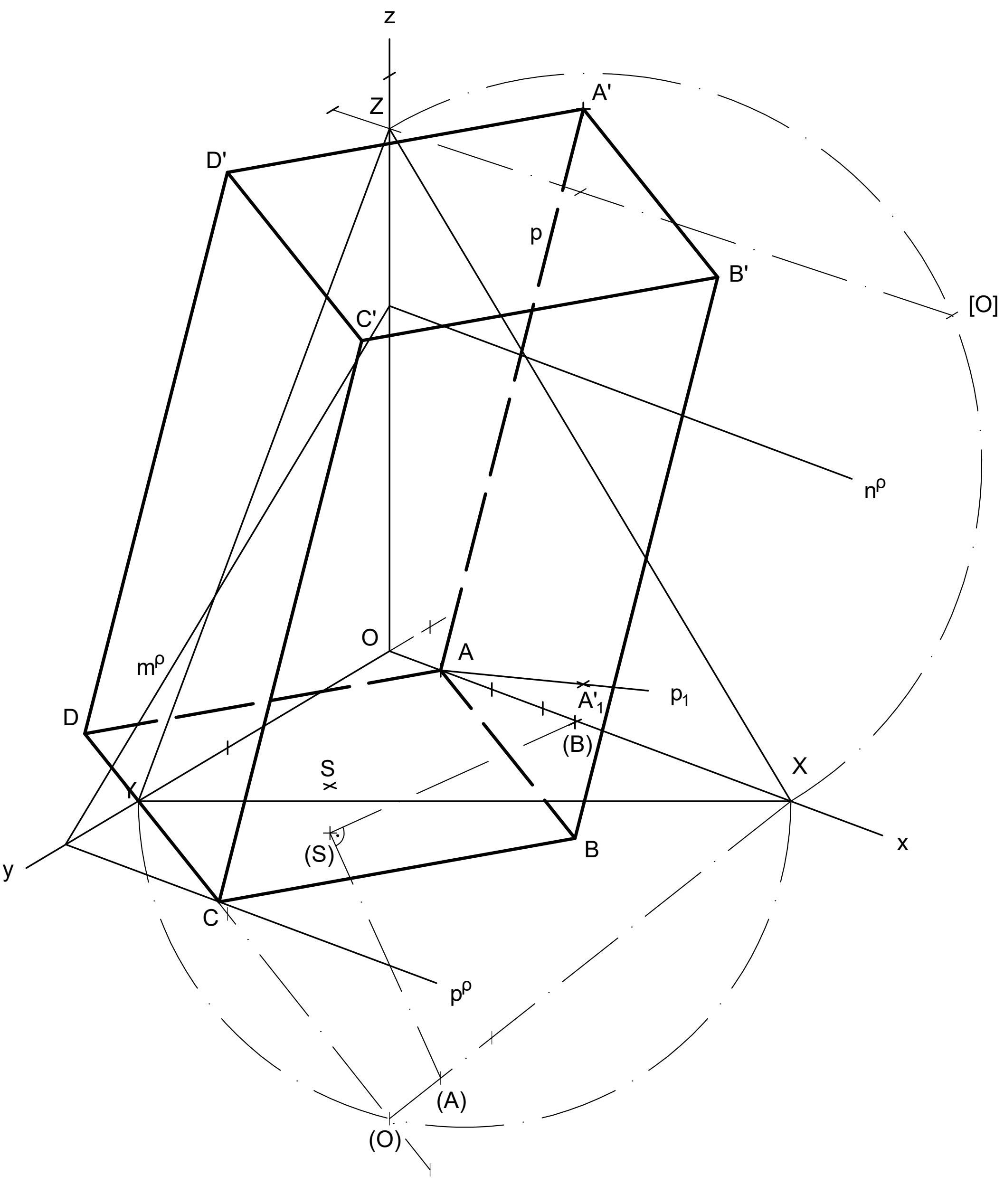


Řešení: Sestrojíme hranol. Jelikož hrana AA' leží v nárysně ν, bude bod řezu $X = AA' \cap \rho$ také průsečíkem této hrany a nárysné stopy roviny ρ. Další body řezu sestrojíme pomocí afinity $\mathcal{A} = (o = p^\rho; A \to X)$.

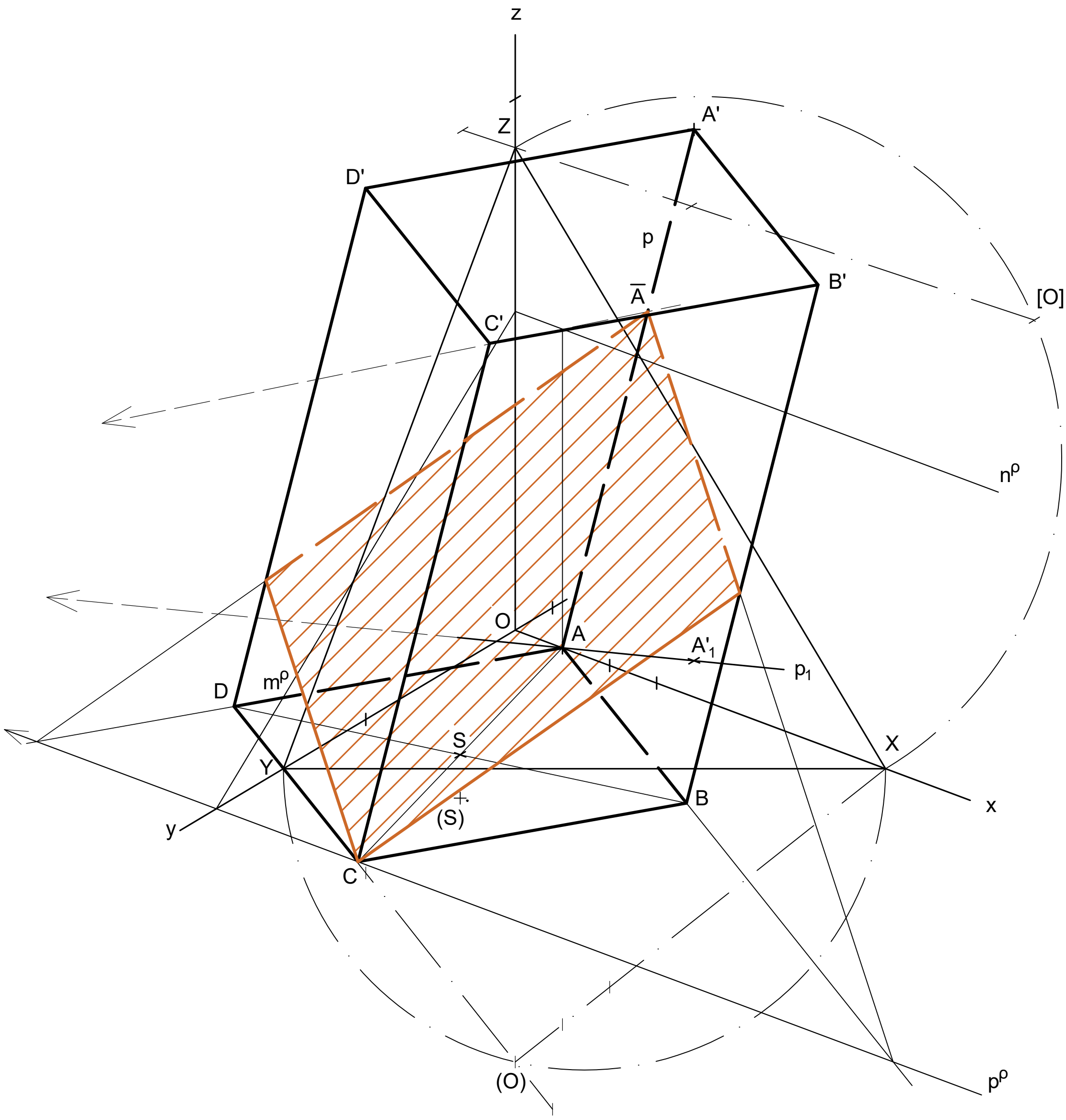


Příklad 23

Kosý čtyřboký hranol, jehož čtvercová podstava určená středem S a vrcholem A ležícím v půdorysně π a jehož horní podstava má vrchol A', protněte rovinou $\rho(\infty; 80; 60)$. Axonometrický $\triangle(100; 120; 110)$, souřadnice bodů jsou: $S[20; 40; 0]$, $A[10; 0; 0]$, $A'[30; -10; 100]$.



Řešení: Dle známých postupů sestrojíme hranol a k sestrojení řezu opět použijeme metodu krycí přímky, např. pro hranu AA' a afinitu zadanou $\mathcal{A} = (o = p^\rho; A \to \bar{A})$.



Závěr

Bakalářská práce obsahuje celkem dvacet tři řešených příkladů zobrazovací metody pravoúhlé axonometrie.

Práce je rozdělena do tří kapitol. V první kapitole je zahrnuta převážně teoretická část, ve které je popsán princip zobrazovací metody, její zásady, volba hlavní průmětny a pomocných průměten tak, aby zobrazení prostoru do roviny bylo vzájemně jednoznačné. Je zde ukázáno zobrazení bodu, přímky a roviny. Dále jsou tady rovněž uvedeny speciální polohy přímek a rovin vůči průmětnám, vzájemné polohy přímek i rovin a pomocné konstrukce. V závěru kapitoly jsou popsány konstrukce přímky kolmé k rovině a opačně roviny kolmé k přímce.

Druhá kapitola představuje jedenáct příkladů na procvičení základních úloh, mezi které patří vzdálenost bodů od axonometrické průmětny, vzdálenost bodů od počátku, velikost úsečky, rovina kolmá k přímce, sestrojení spádových přímek, sestrojení kolmice k rovině a určení její paty. Záměrně jsou zde úlohy, ve kterých jsou přímky a roviny voleny ve zvláštních polohách, aby si studenti uvědomili prostorové vztahy a dospěli k závěru, že postup řešení se mnohdy zjednoduší.

Ve třetí kapitole se věnujeme poslednímu tématu práce, a to jsou hranatá tělesa. Jsou zde příklady jednak na konstrukci jehlanu a hranolu, ale stěžejní část této kapitoly patří řezům hranatých těles a určení průsečíků přímky a tělesa.

Věřím, že sbírka usnadní studium mnoha studentům deskriptivní geometrie a snad také může v budoucnu posloužit jako učební materiál. Současně jsem si díky práci uvědomila, že bych se tomuto tématu ráda věnovala i v budoucnu. Zohledním to například při výběru tématu mé diplomové práce.

Přínosem celé práce pro mne bylo prohloubení mých schopností rýsování v programu AutoCad a zdokonalení se v zobrazovací metodě pravoúhlé axonometrii. Práce byla napsána a vysázena pomocí programu LaTeX, který jsem doposud znala spíše okrajově a díky této práci se v jeho užívání zdokonalila.

Literatura

[1] URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie I.* Praha 1965.

[2] KRAEMER, Emil. *Zobrazovací metody: (Promítání rovnoběžné.): Celostát. vysokoškol. učeb. pro stud. pedag., přírodověd. a matem.-fyz. fak. stud. oboru 76-12-8 Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů (matem.).* Praha: SPN, 1991. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství). ISBN 80-04-21778-8.

[3] POMYKALOVÁ, Eva. *Deskriptivní geometrie pro střední školy.* Praha: Prometheus, 2010. ISBN 978-80-7196-400-1.

[4] ŠTĚPÁNSKÝ, Václav, Oldřich HAJKR, Jan HEBELKA a Josef LÁNÍČEK. *Deskriptivní geometrie. I.*Ostrava: Ediční středisko vysoké školy báňské v Ostravě, [1959].