UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
Přírodovědecká fakulta
Katedra algebry a geometrie

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

# Princip inkluze a exkluze v úlohách školské matematiky

Vedoucí bakalářské práce:
**RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.**
Rok odevzdání: 2015

Vypracoval:
**Lukáš Adamčík**
M–Z, III. ročník

**Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně pod vedením pana RNDr. Jaroslava Švrčka, CSc., s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne 18. srpna 2015

**Poděkování**

Rád bych poděkoval vedoucímu bakalářské práce, panu RNDr. Jaroslavu Švrčkovi, CSc., za čas, ochotu a trpělivost při jejím vedení a zejmena pak za cenné rady a připomínky, jež mi pomohly zpracovat tuto práci. Tato spolupráce byla pro mě přínosná a velice si jí vážím.

# Obsah

# Seznam použitých symbolů

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ | množina přirozených čísel |
| $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ | množina celých čísel |
| $\mathbb{Z}_0^+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ | množina celých nezáporných čísel |
| $\mathbb{R}$ | množina reálných čísel |
| $n! = n \cdot (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}$, $0! = 1$ | $n$-faktoriál |
| $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ | kombinační číslo |
| $\lvert A \rvert$ | počet prvků konečné množiny $A$ |
| $A \cup B$ | sjednocení množin $A$ a $B$ |
| $A \cap B$ | průnik množin $A$ a $B$ |
| $\emptyset$ | prázdná množina |
| $\lfloor x \rfloor$ | dolní celá část reálného čísla $x$ |
| $\mathrm{NSD}(a, b)$ | největší společný dělitel čísel $a$, $b$ |
| $\square$ | konec důkazu věty |

# Úvod

Cílem této bakalářské práce bylo sestavit rozšiřující studijní materiál, který může pomoci k lepšímu a hlubšímu pochopení kombinatorického principu inkluze a exkluze nejen studentům matematických seminářů na gymnáziích i dalších středních školách a jejich učitelům, ale také zájemcům o matematiku. Principu inkluze a exkluze není na středních školách v současnosti věnován dostatek hodinové dotace, spíše minimum. Podle rámcového vzdělávacího programu je tento princip vyučován pouze okrajově jako součást kombinatoriky, což k pochopení uvedeného principu jako matematické metody není dostačující.

Práce je rozčleněna do čtyř kapitol. První kapitola je zaměřena na základní kombinatorické pojmy, jako jsou variace či kombinace prvků dané množiny. Dále jsou zde uvedeny některé významné kombinatorické identity, které je nutno znát k dobrému pochopení celého textu. Druhá kapitola je věnována vlastnímu principu inkluze a exkluze a jeho odvození. Tato kapitola obsahuje kromě teorie především řešené úlohy, při jejichž řešení jsou prezentovány přímé aplikace principu inkluze a exkluze. Ve třetí kapitole je popsán duální princip inkluze a exkluze a jeho využití v příkladech. Poslední, čtvrtá kapitola obsahuje neřešené příklady k procvičení studované problematiky.

Práce je zpracována v systému LaTeX.

# 1 Vybrané kombinatorické identity

Při řešení kombinatorických úloh a dokazování některých kombinatorických vět se často využívá kombinačních čísel. V úvodní kapitole proto uvedeme základní vlastnosti kombinačních čísel, a také některé významné identity, které pro ně platí.

Pro hodnotu kombinačního čísla $\binom{n}{k}$ uvedeme nejprve definice a tvrzení, které se týkají výpočtu variací a kombinací $k$-té třídy z dané $n$-prvkové množiny objektů. Pro naše účely budeme uvažovat (pokud nebude řečeno jinak) pouze tyto skupiny (objekty) *bez opakování*. Věty a definice v této kapitole jsou převzaty především z [17].

**Definice 1.1**

Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$ a nechť $A$ je $n$-prvková množina. Každou uspořádanou $k$-tici z množiny $A$ nazveme $k$-člennou variací prvků dané $n$-prvkové množiny $A$ (variací $k$-třídy z $n$-prvkové množiny $A$).

**Věta 1.2**

Označíme-li $V_k(n)$ počet všech variací $k$-třídy z $n$-prvkové množiny $A$, pak platí

$$V_k(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

*Důkaz.* Důkaz je triviální, viz např. [3].

**Definice 1.3**

Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$ a nechť $A$ je konečná $n$-prvková množina. Pak každou neuspořádanou $k$-tici (podmnožinu) množiny $A$, nazveme $k$-člennou kombinací z $n$ prvků (kombinací $k$-třídy z dané $n$-prvkové množiny $A$).

**Věta 1.4**

Označíme-li $C_k(n)$ počet všech kombinací $k$-třídy z $n$-prvkové množiny $A$, pak platí

$$C_k(n) = \frac{1}{k!} \cdot V_k(n) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

*Důkaz.* Důkaz je triviální, viz např. [3].

Zápis $C_k(n)$ se často nepoužívá, mnohem častější je užití tzv. kombinačního čísla $\binom{n}{k}$ , pro které platí

$$C_k(n) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

**Věta 1.5**

Nechť $k \leq n$ jsou celá nezáporná čísla. Pak platí

a) $\displaystyle\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$

b) $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$

c) $\displaystyle\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$

*Důkaz.*

ad a) Pro libovolné celé nezáporné číslo $n$ podle věty 1.5 platí

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \binom{n}{n},$$

ad b) podobně pro libovolná celá nezáporná čísla $0 \leq k \leq n$ platí

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}.$$

ad c) Pro libovolná celá nezáporná čísla $0 \leq k \leq n$ (s využitím definice faktoriálu) platí

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$$
$$= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} =$$
$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1},$$

což jsme chtěli dokázat. □

**Věta 1.6** (binomická věta)

Pro každá dvě reálná (komplexní) čísla $a$, $b$ a libovolné číslo $n$ celé nezáporné platí

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \quad (1)$$

*Důkaz.* Ukážeme, že koeficient u členu $a^{n-k}b^k$ je $\binom{n}{k}$. Výraz $(a+b)^n$ můžeme přepsat ve tvaru součinu následujícím způsobem

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)}_{n-krát}$$

Člen $a^{n-k}b^k$ jsme získali tak, že jsme $b$ vybrali z $k$ závorek, což znamená, že ze zbylých $n-k$ závorek jsme vybrali $a$. Nejdříve vybereme $k$ závorek z celkového počtu $n$. Toto lze učinit $\binom{n}{k}$ způsoby. Poté vybereme $n-k$ závorek ze zbylých, což lze provést jediným způsobem. Odtud již plyne, že u sčítance $a^{n-k}b^k$ je koeficient $\binom{n}{k}$. Tím je důkaz ukončen. □

Speciální volbou $a = b = 1$ dostáváme identitu

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n. \quad (2)$$

Jestliže zvolíme $a = 1$ a $b = -1$ (nebo naopak), získáme další důležitou identitu

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0. \quad (3)$$

Sečtením obou předchozích identit (2) a (3) potom dostáváme po snadné úpravě identitu

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \ldots = 2^{n-1}. \tag{4}$$

Pokud od identity (2) odečteme identitu (3) a poté ji vynásobíme číslem $\frac{1}{2}$, získáme následující identitu

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \binom{n}{7} + \ldots = 2^{n-1}. \tag{5}$$

Podobně z identit (4) a (5) plyne následující rovnost

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \binom{n}{7} + \ldots.$$

Následující identity uvedeme bez důkazů, pouze s naznačením postupů důkazů. Uvedené důkazy je možno nalézt např. v [17] nebo v [6].

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right), \tag{6}$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right), \tag{7}$$

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n+2)\pi}{3}\right). \tag{8}$$

Ve všech třech důkazech je vhodným způsobem použita Moiverova věta, binomická věta a popř. také identita (2).

**Věta 1.7** (Cauchyho kombinatorická formule)

Nechť $m, n \in \mathbb{Z}_0^+$. Pak pro libovolné $k \in \mathbb{Z}_0^+$, $k \leq \min\{m, n\}$ platí

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}. \tag{9}$$

K dokázaní této věty využíváme rovnost $(1+x)^m \cdot (1+x)^n = (1+x)^{m+n}$, která platí pro všechna reálná čísla $x$ a pro všechna celá nezáporná čísla $m$, $n$ a dále binomickou větu v binomických rozvojích výrazů $(1+x)^m$, $(1+x)^n$ a $(1+x)^{m+n}$.

Speciální volbou parametrů $m = n = k$ v Cauchyho kombinatorické formuli (9) dostaneme identitu

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{3}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}, \tag{10}$$

kde $n \in \mathbb{Z}_0^+$.

**Věta 1.8**

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí následující identita

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}. \tag{11}$$

*Důkaz.* Při důkazu této identity (11) budeme využívat definice kombinačního čísla a identitu (2). Platí tak

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + 3 \cdot \binom{n}{3} + \ldots + n \cdot \binom{n}{n} = \\
&= \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} + 2 \cdot \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} + 3 \cdot \frac{n!}{3! \cdot (n-3)!} + \ldots + n \cdot \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \\
&= \frac{n(n-1)!}{0!(n-1)!} + 2 \cdot \frac{n(n-1)!}{2![(n-1)-1]!} + 3 \cdot \frac{n(n-1)!}{3![(n-1)-2]!} + \ldots + \\
&\quad + n \cdot \frac{n(n-1)!}{n![(n-1)-n]!} = n\binom{n-1}{0} + n\binom{n-1}{1} + n\binom{n-1}{2} + \ldots + \\
&\quad + n\binom{n-1}{n-1} = n\left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \ldots + \binom{n-1}{n-1}\right].
\end{aligned}$$

Podle formule (2) víme, že

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \ldots + \binom{n-1}{n-1} = 2^{n-1}.$$

Platí tedy rovnost

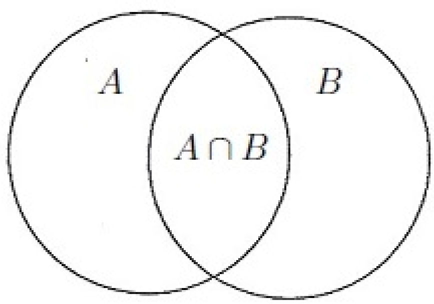
$$n\left[\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}+\ldots+\binom{n-1}{n-1}\right]=n\cdot 2^{n-1}.$$

Tím jsme dokázali danou identitu. $\square$

# 2 Princip inkluze a exkluze (a jeho aplikace)

V této kapitole se budeme detailně věnovat principu inkluze a exkluze, který patří mezi nejdůležitější kombinatorické principy. Jeho aplikace jsou využitelné v řadě úloh školské matematiky. Dříve, než přistoupíme k popisu principu inkluze a exkluze, budeme uvažovat se známou skutečností o sjednoceních a průnicích *konečných* množin, tj. množin, které mají konečný počet prvků. To znamená, že jsou buď prázdné nebo počet jejich prvků lze vyjádřit přirozeným číslem. Nejjednodušší případ, který má smysl uvažovat, jsou dvě množiny. Pro názornost budeme užívat známé Vennovy diagramy. Mějme dvě konečné množiny $A, B$ (ne nutně disjunktní). Pro počet prvků jejich sjednocení pak platí (viz obrázek níže)

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$




Obrázek 1: Vennův diagram pro 2 množiny

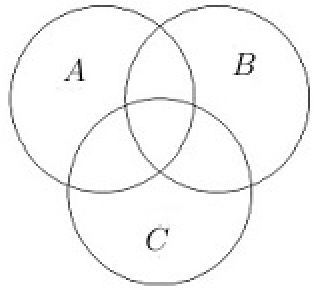
K důkazu lze využít názorně obrázek 1.

V případě tří množin $A, B, C$ je analogická formule jen o trochu složitější. V tomto případě platí

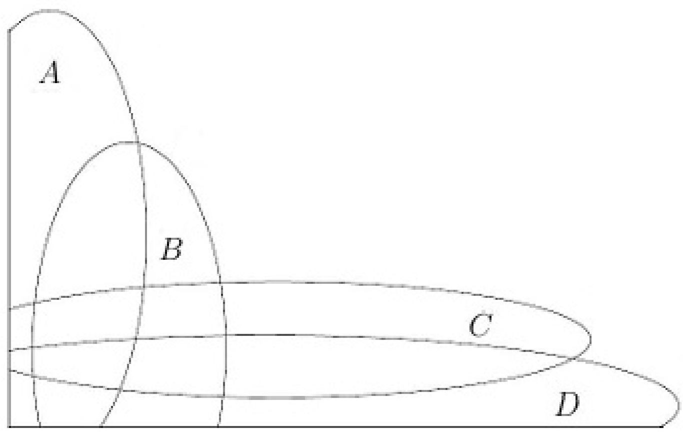
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|,$$

což lze opět v tomto případě poměrně snadno ověřit např. za použití Vennova[1] diagramu.

[1] *John Venn*, anglický matematik. Žil v letech 1834 – 1923.




Obrázek 2: Vennův diagram pro 3 množiny




Obrázek 3: Vennův diagram pro 4 množiny

Tímto způsobem jsme získali prvotní představu o tom, jakým způsobem princip inkluze a exkluze funguje pro $n = 2$ a $n = 3$. Nyní přistoupíme k zobecnění výše uvedených dvou formulí pro sjednocení $n$ konečných množin.

**Věta 2.1** (princip inkluze a exkluze)

Nechť $A_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ jsou konečné množiny. Pak platí

$$| A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| =$$

$$= \sum (-1)^{r+1} |A_{j1} \cap A_{j2} \cap \ldots \cap A_{jr}|, \tag{12}$$

kde se sčítá přes všechny neprázdné podmnožiny $\{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ indexové množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

*Důkaz.* Mějmě libovolný prvek $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Tento prvek je na levé straně rovnice započítán právě jednou. Pro dokázání rovnosti musíme ukázat, že tento prvek je započten na pravé straně rovnice také právě jednou.
Nechť $k$ je počet množin z $A_1, A_2, \ldots, A_n$, v nichž je $x$ členem. Tedy $k$ nabývá hodnot od 1 do $n$. Pro každé $l \in \{1, 2, \ldots, k\}$ je prvek $x$ započten v $\binom{k}{l}$ sčítancích, což znamená, že prvek $x$ je započten v $\binom{k}{1}$ sčítancích jednotlivých množin, v $\binom{k}{2}$ sčítancích průniků dvou množin atd., až v $\binom{k}{k}$ sčítancích průniku $l$ množin.
Každý z těchto sčítanců bude započten se znaménkem $(-1)^{l+1}$. Tedy $x$ je na pravé straně započteno

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \ldots + (-1)^{k+1}\binom{k}{k},$$

což s ohledem na kombinatorickou identitu (3), dává výsledek

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \ldots + (-1)^{k+1}\binom{k}{k} = \binom{k}{0} = 1.$$

Ukázali jsme, že prvek $x$ je na pravé straně rovnice započten také právě jednou a tím je důkaz uzavřen. □

V další části uvedeme několik ilustrativních příkladů, v nichž bude osvětlen princip inkluze a exkluze při řešení úloh, které se mohou vyskytnout ve školské praxi.

**Příklad 2.1**

V oddělení výzkumného ústavu pracuje několik osob, z nichž každá zná aspoň jeden z těchto tří světových jazyků – angličtinu, němčinu nebo francouzštinu. Šest osob ovládá angličtinu, šest němčinu a sedm francouzštinu. Čtyři osoby hovoří anglicky i německy, tři osoby německy i francouzsky, dvě osoby francouzsky i anglicky, jeden pracovník ovládá všechny tři uvedené jazyky.

a) Kolik osob pracuje v oddělení?

b) Kolik z nich hovoří pouze anglicky?

c) Kolik z nich hovoří pouze francouzsky?

*Řešení.* Označíme $A$ množinu všech pracovníků hovořících anglicky, $F$ množinu všech pracovníků hovořících francouzsky a $N$ množinu všech pracovníků mluvících německy. Ze zadání je zřejmé, že anglicky umí 6 lidí, tedy $|A| = 6$, francouzsky hovoří 7 lidí, tedy $|F| = 7$ a německy hovoří 6 lidí, tzn. $|N| = 6$. Dále víme, že $|A \cap F| = 2$, $|A \cap N| = 4$ a $|F \cap N| = 3$. Všemi třemi zmíněnými jazyky hovoří jediný člověk, tzn. $|A \cap F \cap N| = 1$.

ad a) Vyřešíme pouhým dosazením do vzorce principu inkluze a exkluze, tedy

$$\begin{aligned} |A \cup F \cup N| &= |A| + |F| + |N| - |A \cap F| - |A \cap N| - |F \cap N| + \\ &+ |A \cap F \cap N| = 6 + 7 + 6 - 2 - 4 - 3 + 1 = 11. \end{aligned}$$

*Závěr.* V oddělení pracuje 11 osob.

ad b) Od počtu lidí, kteří mluví anglicky, odečteme počet lidí, kteří mluví dvěma jazyky, tedy kromě angličtiny i němčinou nebo francouzštinou. Odečetli jsme tak dvakrát počet lidí mluvících všemi třemi jazyky, avšak tento počet je třeba ještě jednou znovu přičíst. Výsledný počet pak získáme následujícím způsobem

$$|A| - |A \cap F| - |A \cap N| + |A \cap F \cap N| = 6 - 2 - 4 + 1 = 1.$$

*Závěr.* Z těchto 11 osob mluví 1 osoba pouze anglicky.

ad c) Vypočítáme stejným způsobem jako část b), pouze zaměníme francouzštinu za angličtinu, tedy

$$|F| - |A \cap F| - |F \cap N| + |A \cap F \cap N| = 7 - 2 - 3 + 1 = 3.$$

*Závěr.* Z těchto 11 osob mluví 3 osoby pouze francouzsky.

Uvažujme konečnou množinu $U$ i s podmnožinami $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Nechť počet prvků množiny $U$ je $m$ ($|U| = m$). Doplněk množiny $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ v množině $U$ budeme značit $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)'$. Počet prvků množiny $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)'$ získáme z rovnice

$$\begin{aligned} |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)'| &= |U \backslash (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)| = \\ &= m - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \\ &= m - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| - \ldots + \\ &\quad +(-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| = m_0. \end{aligned}$$

O znaménku u posledního členu rozhoduje zda je $n$ liché nebo sudé, pro $n$ liché jej započteme s kladným znaménkem a pro $n$ sudé zase se znaménkem záporným.

**Příklad 2.2**

Je dána množina $A = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$. Určete počet všech přirozených čísel této množiny, která

a) jsou dělitelná současně prvočísly 2, 5 a 7,

b) nejsou dělitelná současně prvočísly 2, 3 a 5.

*Řešení.*

ad a) Nejprve si určíme podmnožiny

$$A_m = \{x \in A \,|\, m \,\text{dělí číslo}\, x\}.$$

Potřebujeme určit $|A_2 \cup A_5 \cup A_7|$. Abychom mohli užít (12), musíme nejdříve vypočítat velikosti $A_2$, $A_5$ a $A_7$ a velikosti jejich průniků, což získáme tím, že číslo 1000 dělíme příslušným $m$ a z výsledku poté stanovíme dolní celou část.

Pro $m = 2$, $|A_2| = \left\lfloor \dfrac{1000}{2} \right\rfloor = 500.$

Pro $m = 5$, $|A_5| = \left\lfloor \dfrac{1000}{5} \right\rfloor = 200.$

Pro $m = 7$, $|A_7| = \left\lfloor \dfrac{1000}{7} \right\rfloor = 142.$

Pro součin právě dvou dělitelů z množiny $\{2, 5, 7\}$ platí:

Pokud $m = 2 \cdot 5 = 10$, $|A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \dfrac{1000}{10} \right\rfloor = 100.$

Pokud $m = 2 \cdot 7 = 14$, $|A_2 \cap A_7| = \left\lfloor \dfrac{1000}{14} \right\rfloor = 71.$

Pokud $m = 5 \cdot 7 = 35$, $|A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \dfrac{1000}{35} \right\rfloor = 28.$

A nakonec pro součin všech tří dělitelů, tj. $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ platí

$m = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$, $|A_2 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \dfrac{1000}{70} \right\rfloor = 14.$

Nyní podle (12)

$$| \ A_2 \cup A_5 \cup A_7| = |A_2| + |A_5| + |A_7| - |A_2 \cap A_5| - |A_2 \cap A_7| -$$
$$-|A_5 \cap A_7| + |A_2 \cap A_5 \cap A_7| = 500 + 200 + 142 - 100 - 71 - 28 + 14 =$$
$$= 657.$$

*Závěr.* Počet celých čísel z množiny $A$, která jsou dělitelná 2, 5 nebo 7 je roven 657.

ad b) V tomto případu opět označíme

$$A_m = \{x \in A \,|\, m \,\text{dělí číslo}\, x\},$$

množinu čísel z množiny $A$, která jsou dělitelná $m$ a budeme počítat s množinou $A'_m$. Potřebujeme vypočítat hodnotu $|{A_2}' \cap {A_3}' \cap {A_5}'|$, toto lze s využitím De Morganova zákonu přepsat následovně

$${A_2}' \cap {A_3}' \cap {A_5}' = (A_2 \cup A_3 \cup A_5)'.$$

Tedy potřebujeme vypočítat

$$|A_2{}' \cap A_3{}' \cap A_5{}'| = |(A_2 \cup A_3 \cup A_5)'| = |A| - |A_2 \cup A_3 \cup A_5|. \qquad (13)$$

Tímto jsme opět došli k tomu, že potřebujeme spočíst velikost $A_2$, $A_3$, $A_5$ i s jejich průniky.

Pro $m = 2$, $|A_2| = \left\lfloor \dfrac{1000}{2} \right\rfloor = 500$.

Pro $m = 3$, $|A_3| = \left\lfloor \dfrac{1000}{3} \right\rfloor = 333$.

Pro $m = 5$, $|A_5| = \left\lfloor \dfrac{1000}{5} \right\rfloor = 200$.

Pro součin právě dvou dělitelů z množiny $\{2, 3, 5\}$ pak platí:

Pokud $m = 2 \cdot 3 = 6$, $|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \dfrac{1000}{6} \right\rfloor = 166$.

Pokud $m = 2 \cdot 5 = 10$, $|A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \dfrac{1000}{10} \right\rfloor = 100$.

Pokud $m = 3 \cdot 5 = 15$, $|A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \dfrac{1000}{15} \right\rfloor = 66$.

A nakonec pro součin všech tří dělitelů, tedy $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ platí

$m = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, $|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \dfrac{1000}{30} \right\rfloor = 33$.

Po dosazení do formule (13)

$$\begin{aligned}(|A_2 \cup A_3 \cup A_5|)' &= |A| - |A_2 \cup A_3 \cup A_5| = \\ &= |A| - (|A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_6| - |A_{10}| - |A_{15}| + |A_{30}|) = \\ &= 1000 - (500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33) = 266.\end{aligned}$$

*Závěr.* Mezi celými čísly 1 až 1000 je 266 čísel, která nejsou dělitelná žádným z čísel 2, 3 a 5.

**Příklad 2.3**

V atletickém klubu trénuje 67 osob; 47 z nich běh, 35 skok daleký a 20 hod koulí, 23 atletů trénuje běh i skok daleký, 12 osob běh i hod koulí a 11 svěřenců navštěvuje skok daleký i hod koulí. Všechny tři disciplíny pěstuje 5 osob. Určete, kolik osob nepěstuje žádnou z těchto disciplín.

*Řešení.* Označíme $A$ množinu všech osob, které trénují v atletickém klubu, $B$ množinu všech osob, které běhají, $S$ množinu všech osob, které jsou zaměřené na skok daleký a $H$ množinu všech osob, které hází koulí. Nejprve spočítáme, kolik osob trénuje všechny tři disciplíny a poté k tomuto výsledku dopočítáme doplněk. Za použití principu inkluze a exkluze určíme velikost sjednocení $B \cup H \cup S$. Ze zadání víme, že počet osob trénujících běh je 47 ($|B| = 47$), počet osob trénujících hod koulí je 20 ($|H| = 20$) a počet osob trénujících skok daleký je 35 ($|S| = 35$). Počet osob, které se zabývají alespoň dvěmi z těchto disciplín, je pro běh i hod koulí roven 12 ($|B \cap H| = 12$). Běh i skok daleký trénuje 23 osob ($|B \cap S| = 23$) a skokem dalekým s hodem koulí se zabývá 11 osob. ($|H \cap S| = 11$). Všechny tři disciplíny provozuje 5 osob ($|B \cap H \cap S| = 5$). Tedy

$$\begin{aligned}|B \cup H \cup S| &= |B| + |H| + |S| - |B \cap H| - |B \cap S| - |H \cap S| + |B \cap H \cap S| = \\ &= 47 + 20 + 35 - 12 - 23 - 11 + 5 = 61.\end{aligned}$$

Máme spočteno, kolik osob trénuje aspoň jednu z disciplín. Nyní pomocí doplňku vypočteme, kolik osob netrénuje žádnou z nich.

$$|A \backslash (B \cup H \cup S)| = 67 - |B \cup H \cup S| = 67 - 61 = 6.$$

*Závěr.* Počet osob atletického klubu, které netrénují žádnou z těchto disciplín, je roven 6.

V další části této kapitoly popíšeme speciální případ principu inkluze a exkluze včetně jeho aplikací. V některých případech, kdy jsou si všechny, z $\binom{n}{k}$ sčítanců $k$-prvkových podmnožin průniků rovny, lze princip inkluze a exkluze zjednodušit následujícím způsobem.

Uvažujme formuli (12). Nechť každý z $\binom{n}{k}$ sčítanců tvaru $|A_{l_1} \cap A_{l_2} \cap \ldots \cap A_{l_k}|$ má stejnou hodnotu. Označme $|A_{l_1} \cap A_{l_2} \cap \ldots \cap A_{l_k}| = a_k$. Pro každé přirozené číslo $k$ z intervalu $\langle 1, n\rangle$ potom platí podle principu inkluze a exkluze

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \binom{n}{1}a_1 - \binom{n}{2}a_2 + \binom{n}{3}a_3 - \ldots +$$
$$+ (-1)^{n+1}\binom{n}{n}a_n = \sum(-1)^{k+1}\binom{n}{k}a_k. \qquad (14)$$

V další části ukážeme některé konkrétní aplikace speciálního principu inkluze a exkluze při řešení praktických úloh.

**Příklad 2.4**

Určete počet všech variací s opakováním $k$-té třídy z dané $n$-prvkové množiny, v nichž je každý prvek této množiny zastoupen alespoň jednou.

*Řešení.* Počet hledaných variací označíme $V_k^*(n)$. Mějme množinu $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Pro $k < n$, je počet hledaných variací roven nule. Zaměříme se tedy na případ, kdy $k \geq n$, a označme $A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ množinu všech $k$-prvkových variací s opakováním, které neobsahují prvek $a_i$. Odtud vidíme, že platí

$$V_k^*(n) = V_k^{'}(n) - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = n^k - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|. \qquad (15)$$

Je-li $\emptyset \neq \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, pak množina $A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_r}$ zahrnuje všechny variace, v nichž se nevyskytuje žádný z $r$ zvolených prvků množiny $M$. Platí tedy

$$|A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_r}| = m_r = (n-r)^k,$$

což po dosazení do (14) vede k rovnici

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\binom{n}{r}(n-r)^k.$$

Po dosazení do (15) pak dostaneme

$$V_k^*(n) = n^k - \sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\binom{n}{r}(n-r)^k = \sum_{r=0}^{n}(-1)^{r}\binom{n}{r}(n-r)^k. \qquad (16)$$

Pro $k < n$, můžeme provést tutéž úpravu. Nyní máme $V_k^*(n) = 0$, v tomto případě dostaneme identitu

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r \binom{n}{r}(n-r)^k = 0.$$

Princip inkluze a exkluze můžeme kromě kombinatoriky využít i v jiných odvětvích matematiky, jako je například teorie čísel, kde jej můžeme použít k odvození tzv. Eulerovy funkce. Tato funkce nám udává počet všech přirozených čísel menších než $n$, která jsou s $n$ nesoudělná. Značíme ji $\varphi(n)$. Pro přirozené číslo jedna klademe $\varphi(1) = 1$ (to znamená, že číslo 1 považujeme za nesoudělné s každým přirozeným číslem).

**Věta 2.2**

Nechť $n$ je libovolné přirozené číslo, $n \geq 2$ a také $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ je rozklad čísla $n$ na prvočinitele. Pak platí

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Důkaz tohoto tvrzení zde uvádět nebudeme, je uveden například v [17].

Při řešení následující úlohy budeme využívat pojem permutace dané $n$ prvkové množiny a základní vlastnosti pevného bodu permutace. Z tohotu důvodu uvedeme definice uvedených pojmů a některé jejich základní vlastnosti.

**Definice 2.3**

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $A$ je konečná $n$-prvková množina. Pak všechny $n$-prvkové variace (uspořádané $n$-tice z $n$ prvků) z $n$-prvkové množiny $A$ budeme nazývat permutace.

**Věta 2.4**

Označíme-li $P(n)$ počet všech permutací z $n$ prvkové množiny $A$, pak platí

$$P(n) = V_n(n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!.$$

*Důkaz.* Důkaz je triviální, viz např. [3]

**Definice 2.5**

Nechť $A$ je konečná $n$-prvková množina, dále nechť $f : A \to A$ je permutace množiny $A$. Prvek $a \in A$ nazveme pevným bodem permutace $f$, právě když platí $f(a) = a$.

**Příklad 2.5**

Roztržitý pošťák má doručit $n$ dopisů na $n$ různých adres. Kolika způsoby může doručit poštu tak, aby každý dopis doručil na jinou adresu a žádný z dopisů nebyl doručen na tu správnou?

*Řešení.* Nejdříve potřebujeme zjistit počet permutací, které neobsahují pevné body. Toto číslo označíme $P_n$.
Označíme si $X_i$ množinu všech permutací, které mají na $i$-té pozici pevný bod. Počet prvků $X_i$, lze snadno spočítat, je jich přesně $(n-1)!$. Dále víme, že $X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \ldots \cap X_{i_k}$ je množina všech permutací, které mají na $i_j$-té pozici pevný bod $\forall j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Počet těchto permutací lze opět snadno zjistit. Platí, že $|X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \ldots \cap X_{i_k}| = (n-k)!$. Počet způsobů, kterými lze vybrat těchto $k$ množin, je roven kombinačnímu číslu $\binom{n}{k}$. Nyní si uvědomme, co reprezentuje množina $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$. Tato množina obsahuje všechny permutace, které mají aspoň jeden pevný bod. Počet jejich prvků získáme následujícím způsobem užitím principu inkluze a exkluze

$$|X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n| = \sum (-1)^{k-1} |X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \ldots \cap X_{i_k}|,$$

kde se sčítá přes všechny neprázdné podmnožiny $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ indexové množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

$$n! - P_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (n-k)! \binom{n}{k}.$$

Tedy

$$
\begin{aligned}
P_n &= n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!} = \\
&= n! \left( \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) = \\
&= n! \left( \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) = n! \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.
\end{aligned}
$$

V poslední části této kapitoly uvedeme několik složitějších příkladů na aplikaci principu inkluze a exkluze.

**Příklad 2.6**

Kolika způsoby můžeme vybrat z klasického karetního balíčku padesáti dvou karet pět karet tak, abychom měli aspoň jednu kartu z každé barvy?

*Řešení.* Nejprve označme $U$ množinu všech možných kombinací. Dále si označme $\clubsuit$ množinu karet neobsahujících kříže, $\spadesuit$ množinu všech karet neobsahujících piky, $\heartsuit$ množinu všech karet neobsahujících srdce a $\diamondsuit$ množinu všech karet neobsahujících kára. Počet kombinací, které obsahuje množina $U$, je roven $\binom{52}{5}$. Pro množiny $\clubsuit$, $\spadesuit$, $\heartsuit$ a $\diamondsuit$ již nevybíráme z 52 karet, ale pouze z $52 - 13 = 39$ karet, protože neobsahují jednu barvu. Tedy počet kombinací je roven $\binom{39}{5}$ pro každou z těchto množin ($|\clubsuit| = |\spadesuit| = |\heartsuit| = |\diamondsuit| = \binom{39}{5}$). Pro průniky libovolných dvou z těchto množin se počet karet, z nichž vybíráme, sníží o dalších 13. Tedy počet kombinací v jejich průniku je roven $\binom{26}{5}$ ($|\clubsuit\cap\spadesuit| = |\clubsuit\cap\heartsuit| = |\clubsuit\cap\diamondsuit| = |\spadesuit\cap\heartsuit| = |\spadesuit\cap\diamondsuit| = |\heartsuit\cap\diamondsuit| = \binom{26}{5}$). Podobně pro průnik tří z těchto množin je počet těchto kombinací $\binom{13}{5}$ ($|\clubsuit\cap\spadesuit\cap\heartsuit| = |\clubsuit\cap\spadesuit\cap\diamondsuit| = |\clubsuit\cap\heartsuit\cap\diamondsuit| = |\spadesuit\cap\heartsuit\cap\diamondsuit| = \binom{13}{5}$). Je nemožné vynechat všechny čtyři barvy, tedy $\clubsuit\cap\spadesuit\cap\heartsuit\cap\diamondsuit = \emptyset$ ($|\clubsuit\cap\spadesuit\cap\heartsuit\cap\diamondsuit| = 0$). S využitím speciálního principu inkluze a exkluze a doplňku množiny $\clubsuit\cup\spadesuit\cup\heartsuit\cup\diamondsuit$ v množině $U$ dostaneme

$$
\begin{aligned}
&|(\clubsuit \cup \spadesuit \cup \heartsuit \cup \diamondsuit)'| = |U| - |(\clubsuit \cup \spadesuit \cup \heartsuit \cup \diamondsuit)| = \\
&= \binom{52}{5} - \binom{4}{1} \cdot \binom{39}{5} + \binom{4}{2} \cdot \binom{26}{5} - \binom{4}{3} \cdot \binom{13}{5} + \binom{4}{4} \cdot 0 =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{52!}{5!\cdot 47!} - \frac{4!}{1!\cdot 3!}\cdot\frac{39!}{5!\cdot 34!} + \frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{26!}{5!\cdot 21!} - \frac{4!}{3!\cdot 1!}\cdot\frac{13!}{5!\cdot 8!} + \frac{4!}{4!\cdot 0!}\cdot 0 =$$

$$= 2598960 - 2303028 + 394680 - 5148 = 685464.$$

*Závěr.* Z klasického balíčku padesáti dvou karet lze vybrat 5 karet tak, aby karta každé barvy byla zastoupena alespoň jednou, 685 464 způsoby.

**Příklad 2.7**

Petr chce umístit pět rozdílných sladkostí do tří různých kapes tak, aby měl všechny tři plné. Kolika způsoby to může udělat?

*Řešení.* V tomto příkladu využijeme výsledku z příkladu 2.4. Víme, že pět sladkostí můžeme do tří kapes umístit $3^5$ způsoby. Nyní si musíme uvědomit, že tento počet zahrnuje i možnosti, kdy jsou jedna nebo dvě kapsy prázdné. Výsledný počet způsobů, kterými může Petr kapsy zaplnit sladkostmi označíme $K_v$. S využitím vztahu (16) dostaneme

$$\begin{aligned}
K_v &= \sum_{r=0}^{3}(-1)^r\binom{3}{r}(3-r)^5 = \\
&= \binom{3}{0}(3-0)^5 - \binom{3}{1}(3-1)^5 + \binom{3}{2}(3-2)^5 - \binom{3}{3}(3-3)^5 = \\
&= \frac{3!}{0!\cdot 3!}\cdot 3^5 - \frac{3!}{1!\cdot 2!}\cdot 2^5 + \frac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot 1^5 - \frac{3!}{3!\cdot 0!}\cdot 0 = \\
&= 3^5 - 3\cdot 2^5 + 3\cdot 1 - 0 = 243 - 96 + 3 = 150.
\end{aligned}$$

*Závěr.* Petr může sladkosti do kapes umístit 150 způsoby.

**Příklad 2.8**

Určete počet prvočísel, které jsou menší nebo rovna číslu 111.

*Řešení.* Máme danou množinu $A = \{1, 2, 3, \ldots, 111\}$. Nechť $z$ je složené číslo (číslo 1 nepovažujeme ani za prvočíslo, ani za číslo složené) z množiny $A$.

Pokud je přirozené číslo $y$ dělitelem $z$, potom $x \cdot y = z \leq 111$, kde $x$ je také přirozené číslo. Jedno z čísel $x$ nebo $y$ je tedy menší než $\lfloor\sqrt{111}\rfloor$, což je rovno 10. Všechna složená čísla množiny $A$ jsou dělitelná aspoň jedním z prvočísel 2, 3, 5 a 7. Označme $A_x = \{z \in A \,|\, x \,\text{dělí číslo}\, z\}$, množinu čísel z množiny $A$, která jsou dělitelná $x$ a budeme počítat s množinou $A_x$. Dále je nutno stanovit $|A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7|$. Abychom mohli užít (12), musíme nejdříve vypočítat velikosti $A_2$, $A_3$, $A_5$ a $A_7$ a velikosti jejich průniků, což získáme tím, že číslo 111 dělíme příslušným $x$ a z nalezeného výsledku určíme dolní celou část.

Pro $m = 2$, $|A_2| = \left\lfloor \dfrac{111}{2} \right\rfloor = 55$.

Pro $m = 3$, $|A_3| = \left\lfloor \dfrac{111}{3} \right\rfloor = 37$.

Pro $m = 5$, $|A_5| = \left\lfloor \dfrac{111}{5} \right\rfloor = 22$.

Pro $m = 7$, $|A_7| = \left\lfloor \dfrac{111}{7} \right\rfloor = 15$.

Pro součin právě dvou dělitelů z množiny $\{2, 3, 5, 7\}$ platí:

Pokud $m = 2 \cdot 3 = 6$, $|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \dfrac{111}{6} \right\rfloor = 18$.

Pokud $m = 2 \cdot 5 = 10$, $|A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \dfrac{111}{10} \right\rfloor = 11$.

Pokud $m = 2 \cdot 7 = 14$, $|A_2 \cap A_7| = \left\lfloor \dfrac{111}{14} \right\rfloor = 7$.

Pokud $m = 3 \cdot 5 = 15$, $|A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \dfrac{111}{15} \right\rfloor = 7$.

Pokud $m = 3 \cdot 7 = 21$, $|A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \dfrac{111}{21} \right\rfloor = 5$.

Pokud $m = 5 \cdot 7 = 35$, $|A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \dfrac{1000}{35} \right\rfloor = 3$.

Pro součin právě tří dělitelů z množiny $\{2, 3, 5, 7\}$ platí

$m = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, $|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \dfrac{111}{30} \right\rfloor = 3$,

$m = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$, $|A_2 \cap A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{111}{42} \right\rfloor = 2$,

$m = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$, $|A_2 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{111}{70} \right\rfloor = 1$,

$m = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$, $|A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{111}{105} \right\rfloor = 1$.

Nakonec pro součin všech čtyř dělitelů, tedy $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ platí

$m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$, $|A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{111}{210} \right\rfloor = 0$.

Nyní podle (12)

$$\begin{aligned} |\ & A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| = |A_2| + |A_3| + |A_5| + |A_7| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - \\ & - |A_2 \cap A_7| - |A_3 \cap A_5| - |A_3 \cap A_7| - |A_5 \cap A_7| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| + \\ & + |A_2 \cap A_3 \cap A_7| + |A_2 \cap A_5 \cap A_7| + |A_3 \cap A_5 \cap A_7| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \\ = \quad & 55 + 37 + 22 + 15 - 18 - 11 - 7 - 7 - 5 - 3 + 3 + 2 + 1 + 1 - 0 = 85. \end{aligned}$$

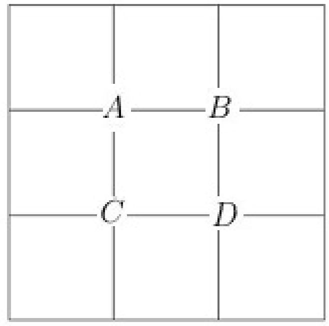
Tímto jsme získali počet složených čísel množiny $A$. Počet prvočísel získáme z následující rovnice $111 - 1 - 85 + 4 = 29$.

*Závěr.* Počet prvočísel, které jsou menší nebo rovna než 111, je 29.

**Příklad 2.9**

Je dán čtverec složený z devíti menších stejně velkých čtverců. Každý z těchto menších čtveců je buď zelený nebo žlutý. Každý z nich je se stejnou pravděpodobností bude buď žlutý, nebo zelený. Jaká je pravděpodobnost, že v tomto čtverci $3 \times 3$ nebude obsažen žádný zelený čtverec $2 \times 2$?

*Řešení.* Nejprve spočítáme pravděpodobnost, že bude aspoň jeden čtverec $2 \times 2$ zelený. Označme si $A$ možnost, že je levý horní čtverec $2 \times 2$ zelený, $B$ možnost, že je pravý horní čtverec $2 \times 2$ zelený, $C$ možnost, že je levý dolní čtverec $2 \times 2$ zelený a $D$ možnost, že je pravý dolní čtverec $2 \times 2$ také zelený. Dále nechť $p(X)$ je pravděpodobnost, že nastane možnost $X$. Nyní užijeme princip inkluze a exkluze, abychom zjistili, s jakou pravděpodobností bude aspoň jeden čtverec $2 \times 2$ zelený.




$$p(A) \cup p(B) \cup p(C) \cup p(D) = p(A) + p(B) + p(C) + p(D) -$$

$$-p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(A \cap D) - p(B \cap C) - p(B \cap D) - p(C \cap D) +$$

$$+p(A \cap B \cap C) + p(A \cap B \cap D) + p(A \cap C \cap D) + p(B \cap C \cap D) -$$

$$-p(A \cap B \cap C \cap D) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 -$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^7 - \left(\frac{1}{2}\right)^7 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 -$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{4}{16} - \frac{4}{64} - \frac{2}{128} + \frac{4}{256} - \frac{1}{512} = \frac{95}{512}$$

Pravděpodobnost, že bude aspoň jeden čtverec $2\times 2$ zelený je $\frac{95}{512}$. Nyní dopočítáme pravděpodobnost, že nebude žádný čtverec $2 \times 2$ zelený z rovnice

$$1 - p(A) \cup p(B) \cup p(C) \cup p(D) = 1 - \frac{95}{512} = \frac{417}{512}.$$

*Závěr.* Pravděpodobnost, že nebude žadný čtverec $2 \times 2$ zelený je $\frac{417}{512}$.

**Příklad 2.10**

Je dán kvádr o rozměrech $150 \times 324 \times 375$, který je tvořen krychličkami o rozměrech $1 \times 1 \times 1$. Kolik těchto krychliček protne tělesová úhlopříčka?

*Řešení.* Označme v tomto kvádru šířku $h$ ($h = 150$), délku $d$ ($d = 324$) a výšku $v$ ($v = 375$). Nejprve si jeden vrchol určíme za počátek $O$ ($O[0; 0; 0]$) a vrchol od něj nejvzdálenější jako $Z$ ($Z[150; 324; 375]$). Spojnice vrcholů $O$, $Z$ je tělesová úhlopříčka tohoto kvádru. Mějme také bod $X$ ($X[x; y; z]$), což je libovolný bod úhlopříčky $OZ$. Pro souřadnice tohoto bodu platí:

i) Právě jedna ze souřadnic $x$, $y$ nebo $z$ je přirozené číslo právě, když bod $X$ leží ve stěně některé krychličky.

ii) Právě dvě ze souřadnic $x$, $y$ nebo $z$ jsou přirozená čísla pravě, když bod $X$ leží na hraně jedné z těchto krychliček.

iii) Všechny souřadnice $x$, $y$ a $z$ jsou přirozená čísla právě, když bod $X$ je vrcholem některé krychličky.

Víme, že bod $X$ se pohybuje libovolně po diagonále $OZ$. Nyní již také víme, že bod $X$ opouští vnitřní oblast krychličky, když aspoň jedna ze souřadnic $x$, $y$, $z$ je přirozené číslo. Díky tomuto víme, že počet krychliček, jimiž úhlopříčka prochází, je roven počtu bodů na úhlopříčce s aspoň jednou kladnou celočíselnou souřadnicí. Body s kladnou celočíselnou souřadnicí na úsečce $OZ$ jsou ve tvaru

$$X = (hp; dp; vp), \text{ kde } p \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Nyní si opět musíme uvědomit:

i) První souřadnice $hp$ bude přirozené číslo, když $p = \frac{s}{h}$, kde $s = 1, 2, \ldots, h$, neboli $s$ nabývá $h$ různých hodnot .

ii) Druhá souřadnice $dp$ bude přirozené číslo, když $p = \frac{s}{d}$, kde $s = 1, 2, \ldots, d$, neboli $s$ nabývá $d$ různých hodnot .

iii) Třetí souřadnice $vp$ bude přirozené číslo, když $p = \frac{s}{v}$, kde $s = 1, 2, \ldots, v$, neboli $s$ nabývá $v$ různých hodnot .

Součet $h + d + v$ započítává dvakrát body se dvěmi celočíselnými souřadnicemi a třikrát body se všemi třemi celočíselnými souřadnicemi. První dvě souřadnice budou přirozená čísla právě, když $p = \frac{r}{\mathrm{NSD}(h, v)}$, kde $r$ je přirozené číslo mezi 1 a $\mathrm{NSD}(h,d)$ včetně. Podobně první a třetí souřadnice bude přirozené číslo právě, když $p = \dfrac{r}{\mathrm{NSD}(h,v)}$, kde $1 \leq r \leq \mathrm{NSD}(h,v)$ a druhá a třetí souřadnice bude kladné celé číslo právě, když $p = \dfrac{r}{\mathrm{NSD}(d,v)}$, kde $1 \leq r \leq \mathrm{NSD}(d,v)$. Všechny tři souřadnice budou přirozená čísla, pokud $p = \dfrac{r}{\mathrm{NSD}(h,d,v)}$, kde $1 \leq r \leq \mathrm{NSD}(h,d,v)$. Nyní vypočteme všechny zmíněné největší společné dělitele. Nejjednodušším způsobem, jak tato čísla získat, je rozložením čísel odpovídajících šířce, délce a výšce na prvočísla a vybrat společná prvočísla s nejvyšší společnou mocninou. Tedy

- $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$,
- $324 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^4$,
- $375 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3 \cdot 5^3$.

Odtud

- $\mathrm{NSD}(h,d) = 2 \cdot 3 = 6$,
- $\mathrm{NSD}(h,v) = 3 \cdot 5^2 = 75$,
- $\mathrm{NSD}(d,v) = 3$,
- $\mathrm{NSD}(h,d,v) = 3$.

V této chvíli užitím principu inkluze a exkluze vypočteme, kolik existuje na tělesové úhlopříčce bodů s aspoň jednou kladnou celočíselnou souřadnicí. Toto číslo odpovídá počtu krychliček, jimiž tato úhlopříčka prochází.

$$\begin{aligned}&\text{počet krychliček} = h + d + v - \mathrm{NSD}(h,d) - \mathrm{NSD}(h,v) - \mathrm{NSD}(d,v) + \\ &+\mathrm{NSD}(h,d,v) = 150 + 324 + 375 - 6 - 75 - 3 + 3 = 768\end{aligned}$$

*Závěr.* Tělesová úhlopříčka kvádru o rozměrech $150 \times 324 \times 375$ složeného z krychliček o rozměrech $1 \times 1 \times 1$ prochází 768 těmito krychličkami.

**Příklad 2.11**

Jsou dány konečné množiny $A$ a $B$, kde $a$ je počet prvků množiny $A$ a $b$ je počet prvků množiny $B$, kde $a \geq b$. Určete počet $s_{A,B}$ všech surjektivních zobrazení $f : A \to B$.

*Řešení.* Nechť $B = \{1, 2, \dots, b\}$, dále nechť $B^A$ označuje množinu všech zobrazení $f : A \to B$. Označme $B_i$ pro každé $i$ takové, že $1 \leq i \leq b$ množinu zobrazení $f : A \to B$, takovou, že $i \notin f(A)$. Množina surjektivních zobrazení $f : A \to B$ je tedy

$$B^A \backslash (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_b).$$

Vidíme, že $|B^A| = b^a$, $|B_i| = (b-1)^a$, $|B_i \cap B_j| = (b-2)^a$, $|B_i \cap B_j \cap B_k| = (b-3)^a$, a tak dále. Užitím speciálního případu principu inkluze a exkluze dostaneme

$$\begin{aligned} s_{A,B} = b^a - \binom{b}{1}(b-1)^a + \binom{b}{2}(b-2)^a - \binom{b}{3}(b-3)^a + \ldots + \\ +(-1)^b\binom{b}{b}(b-b)^a = \binom{b}{0}b^a - \binom{b}{1}(b-1)^a + \binom{b}{2}(b-2)^a - \\ -\binom{b}{3}(b-3)^a + \ldots + (-1)^b\binom{b}{b}(b-b)^a = \sum_{i=0}^{b}(-1)^i\binom{b}{i}(b-i)^a. \end{aligned}$$

Surjektivní zobrazení $f : A \to B$ jsou přesně ty bijektivní, pro $a = b$. Tedy počet takových zobrazení je přesně $a!$. Když $a < b$, pak neexistuje žádné surjektivní zobrazení $f : A \to B$. Tímto jsme získali tzv. Eulerovu identitu

$$s_{A,B} = \sum_{i=0}^{b}(-1)^i\binom{b}{i}(b-i)^a = \begin{cases} a! & \text{pro } a = b, \\ 0 & \text{pro } a < b. \end{cases}$$

*Závěr.* Počet surjektivních funkcí $f : A \to B$ je roven $s_{A,B} = \begin{cases} a! & \text{pro } a = b, \\ 0 & \text{pro } a < b. \end{cases}$

**Příklad 2.12**

Najděte počet celočíselných řešení rovnice $a_1 + a_2 + a_3 = 24$ s podmínkami, že $1 \leq a_1 \leq 5$, $12 \leq a_2 \leq 18$ a $-1 \leq a_3 \leq 12$.

*Řešení.* Označme $b_1 = a_1 - 1$, $b_2 = a_2 - 12$ a $b_3 = a_3 + 1$. Z těchto rovnic vyjádříme $a_1$, $a_2$ a $a_3$, ty dosadíme do rovnice ze zadání. Získáme rovnici $b_1 + b_2 + b_3 = 12$. Nyní chceme získat nezáporná celočíselná řešení s podmínkami $b_1 \leq 4$, $b_2 \leq 6$ a $b_3 \leq 13$. Dále nechť $A$, $B$ a $C$ v tomto pořadí jsou množiny všech řešení $(b_1, b_2, b_3)$ taková, že $b_1 > 4$, $b_2 > 6$ a $\mathrm{b}_3 > 13$. Dále

- $A \cap B$ je množina řešení, kde $b_1 > 4$ a $b_2 > 6$,
- $A \cap C$ je množina řešení, kde $b_1 > 4$ a $b_3 > 13$,
- $B \cap C$ je množina řešení, kde $b_2 > 6$ a $b_3 > 13$,
- $A \cap B \cap C$ je množina řešení, kde $b_1 > 4$, $b_2 > 6$ a $b_3 > 13$.

Počet nezáporných celočíselných řešení rovnice $b_1 + b_2 + b_3 = 12$ je roven $k = \binom{3-1+12}{12} = \frac{14!}{12! \cdot (14-12)!} = \frac{14 \cdot 13}{2} = 91$. Dále

- $|A| = \binom{3-1+7}{7} = \dfrac{9!}{7! \cdot 2!} = \dfrac{9 \cdot 8}{2} = 36$,
- $|B| = \binom{3-1+5}{5} = \dfrac{7!}{5! \cdot 2!} = \dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$,
- $|C| = 0$,
- $|A \cap B| = \binom{3-1+0}{0} = \dfrac{2!}{0! \cdot 2!} = \dfrac{2}{2} = 1$,
- $|A \cap C| = 0$,
- $|B \cap C| = 0$,
- $|A \cap B \cap C| = 0$.

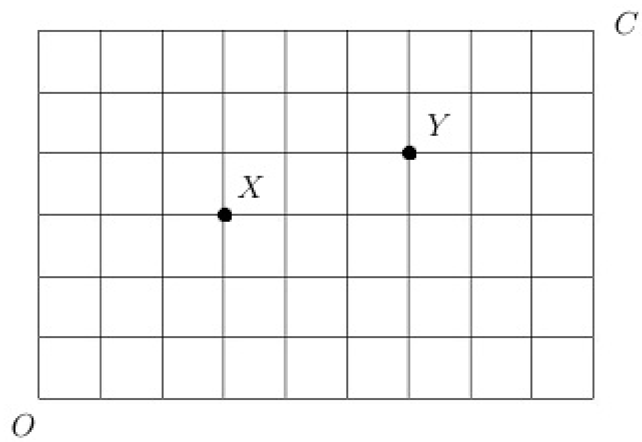
Užitím principu inkluze a exkluze dostaneme

$$|(A \cup B \cup C)'| = 91 - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + \\ + |A \cap B \cap C| = 91 - 36 - 21 - 0 + 1 + 0 + 0 - 0 = 35.$$

*Závěr.* Počet celočíselných řešení rovnice $a_1 + a_2 + a_3 = 24$ je roven 35.

**Příklad 2.13**

Najděte počet způsobů, kterými dojdeme z bodu $O[0;0]$ do bodu $C[9;6]$ tak, aby cesta neprocházela místy $X[3;3]$ a $Y[6;4]$. Je povoleno pohybovat se pouze v kladném směru osy $x$ a $y$ (to znamená doprava nebo nahoru), a to vždy jen o jeden krok.




*Řešení.* Budeme vycházet z předpokladu, že v poli o šířce $a$ a výšce $b$ dojdeme z levého dolního rohu do pravého horního rohu po $a+b$ krocích. Množinu všech těchto cest označíme $U_0(a,b)$ a její počet je roven $|U_0(a,b)| = \binom{a+b}{b}$. V našem případě budeme v závorce místo vzdálenosti uvádět body odkud kam potřebujeme dojít. Počet všech možných cest z místa $O$ do místa $C$ je roven

$$|U_0(O,C)| = \binom{9+6}{9} = \frac{15!}{6! \cdot 9!} = 5005.$$

Nyní spočítáme cesty, které procházejí buď přes bod $X$ nebo $Y$, nebo oběma těmito body,

$$|U(O,X,C)| = \binom{3+3}{3} \cdot \binom{6+3}{6} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{9!}{6! \cdot 3!} = 20 \cdot 84 = 1680,$$

$$|U(O,Y,C)| = \binom{6+4}{6} \cdot \binom{3+2}{3} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 210 \cdot 10 = 2100,$$

$$|U(O,X,Y,C)| = \binom{3+3}{3} \cdot \binom{3+1}{3} \cdot \binom{3+2}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} =$$
$$= 20 \cdot 4 \cdot 10 = 800.$$

S využitím principu inkluze a exkluze získáme počet cest z rovnice

$$|U(O,C)| = |U_0(O,C)| - |U(O,X,C)| - |U(O,Y,C)| + |U(O,X,Y,C)| =$$
$$= 5005 - 1680 - 2100 + 800 = 2025.$$

*Závěr.* Počet cest z místa $O$ do místa $C$ tak, aby cesta neprocházela místy $X$ a $Y$, je roven 2 025.

**Příklad 2.14**

Kolika způsoby můžeme usadit čtyři manželské páry do řady tak, aby žádná osoba neseděla vedle svého partnera?

*Řešení.* Máme 8! způsobů, kterými můžeme těchto osm lidí náhodně usadit. Bez újmy na obecnosti označíme ženy $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ a muže $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$. Páry označíme jako $m_i z_i$ pro $i = 1, 2, 3, 4$. Nyní vypočteme, kolika způsoby můžeme tyto páry usadit tak, aby aspoň jeden pár seděl vedle sebe. Označme $A_i$ množinu usazení, kde sedí pár $m_i z_i$ vedle sebe. Pro vypočítání hodnoty $|A_i|$ musíme uvažovat o dvou možnostech, že buď muž sedí nalevo od ženy nebo opačně. Pro každou z těchto dvou možností existuje 7! způsobů usazení, protože permutujeme pár $m_i z_i$ a dalších šest lidí. Odtud je zřejmé, že $|A_i| = 2 \cdot 7!$ pro každé $i$. Dále vypočítáme $|A_i \cap A_j|$ tak, že usadíme par $i$ a pár $j$ a zbylé čtyři lidi usazujeme libovolně. Odtud dostáváme 6! způsobů, jak tyto dva páry a zbylé čtyři lidi usadit. Opět nesmíme zapomenout, že pár $i$ i pár $j$ může sedět v pořadí muž-žena, nebo žena-muž. Tím dostaneme $2 \cdot 2 = 4$ způsoby jak usadit tyto dva páry. Tedy $|A_i \cap A_j| = 4 \cdot 6!$. Stejným postupem získáme $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 2^3 \cdot 5!$ a $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 2^4 \cdot 4!$. S využitím speciálního případu principu inkluze a exkluze vypočítáme počet způsobů, kterými můžeme tyto páry usadit tak, aby vždy vedle sebe seděl aspoň jeden pár z rovnice

$$
\begin{aligned}
|\,A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= \binom{4}{1} \cdot 2 \cdot 7! - \binom{4}{2} \cdot 2^2 \cdot 6! + \binom{4}{3} \cdot 2^3 \cdot 5! - \\
&- \binom{4}{4} \cdot 2^4 \cdot 4! = \frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot 2 \cdot 7! - \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 2^2 \cdot 6! + \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot 2^3 \cdot 5! - \\
&- \frac{4!}{4! \cdot 0!} \cdot 2^4 \cdot 4! = 40320 - 17280 + 3840 - 384 = 26496.
\end{aligned}
$$

Nyní toto číslo odečteme od počtu způsobů, kterými můžeme libovolně usadit osm lidí, což je již zmíněných 8! a získáme hledaný počet usazení

$$8! - 26496 = 13824.$$

*Závěr.* Počet způsobů, jimiž můžeme 4 páry usadit do řady tak, aby žádná osoba neseděla vedlo svého partnera, je roven 13 824.

# 3 Duální princip inkluze a exkluze

**Věta 3.1** (duální princip inkluze a exkluze)

Nechť $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ jsou konečné množiny. Pak platí

$$|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cup A_j| +$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cup A_j \cup A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| =$$

$$= \sum (-1)^{r+1} |A_{j1} \cup A_{j2} \cup \ldots \cup A_{jr}|, \quad (17)$$

kde sčítáme přes všechny neprázdné podmnožiny $\{j_1, j_2, j_3, \ldots, j_r\} \neq \emptyset$ indexové množiny $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

*Důkaz.* Důkaz provedeme užitím principu matematické indukce vzhledem k počtu konečných množin $A_i$ (vzhledem k přirozenému číslu $n$).

(i) Pro $n = 1$ je tvrzení splněno triviálně.
Pro $n = 2$ lze tvrzení věty snadno ověřit pomocí Vennova diagramu pro dvě konečné množiny.

(ii) Předpokládejme, že formule (17) platí pro $n \geq 2$. Ukážeme, že tvrzení platí také pro $n + 1$. Mějme tedy kromě konečných množin $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ i konečnou množinu $A_{n+1}$. Užitím asociativity průniku konečných množin dle (i), distributivity těchto množin vzhledem ke sjednocení a nakonec využitím indukčního předpokladu (ii). Tak postupně dostaneme

$$|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}| = |(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cap A_{n+1}| =$$

$$= |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cup A_{n+1}| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cup A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cup A_j \cup A_k| - \ldots +$$

$$+ (-1)^{n+1} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cup A_{n+1}|.$$

Využitím distributivity v posledním členu vzhledem ke sjednocení a indukčního předpokladu (ii) na výraz

$$\begin{aligned}&|(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cap A_{n+1}| = \\ &= |(A_1 \cup A_{n+1}) \cap (A_2 \cup A_{n+1}) \cap (A_3 \cup A_{n+1}) \cap \ldots (A_n \cup A_{n+1})|,\end{aligned}$$

po provedení potřebných úprav získáme

$$\begin{aligned}&|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}| = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n+1} |A_i \cup A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n+1} |A_i \cup A_j \cup A_k| - \ldots + \\ &+ (-1)^{n+2} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}|.\end{aligned}$$

Spojením předpokladu (i) a indukčního předpokladu (ii) je dokázáno, že dané tvrzení platí pro libovolné $n$ přirozené. □

**Příklad 3.1**

V jistém městě M jsou provozovány tři volnočasové aktivity, a to šipky, volejbal a kuželky. Tyto tři kroužky navštěvuje dohromady 56 dětí. Z toho 12 dětí chodí hrát šipky, volejbalový kroužek má třikrát více členů než hra šipek a kuželky provozuje poloviční počet dětí než volejbal. Šipky nebo volejbal hraje 31 dětí, šipky nebo kuželky dělá o 10 dětí méně než šipky nebo volejbal a volejbal nebo kuželky provozuje 47 dětí. Kolik dětí navštěvuje všechny tyto aktivity současně?

*Řešení.* Nejprve označíme $S$ počet dětí hrající šipky, $V$ počet dětí hrajících volejbal a $K$ počet osob hrajících kuželky. Ze zadání je zřejmé, že šipky hraje 12 dětí ($|S| = 12$), na volejbal chodí třikrát více dětí než na šipky ($|V| = 3 \cdot |S| = 36$) a kuželky hraje o polovinu dětí méně než volejbal ($|K| = \frac{1}{2} \cdot |V| = 18$). Dále víme, že šipky nebo volejbal navštěvuje 31 dětí ($|S \cup V| = 31$), šipky nebo kuželky navštěvuje o 10 dětí méně než volejbal nebo šipky ($|S \cup K| = |S \cup V| - 10 = 21$) a volejbal nebo kuželky provozuje 47 dětí ($|V \cup K| = 47$). Nesmíme opomenout, že celkový počet členů všech tří kroužků je 56 dětí ($|S \cup V \cup K| = 56$) .

Nyní užijeme duální princip inkluze a exkluze pro určení počtu dětí, které navštěvují všechny tři kroužky.

$$|S \cap V \cap K| = |S| + |V| + |K| - |S \cup V| - |S \cup K| - |V \cup K| + \\ + |S \cup V \cup K| = 12 + 36 + 18 - 31 - 21 - 47 + 56 = 23.$$

*Závěr.* Všechny tři volnočasové aktivity navštěvuje 23 dětí.

**Příklad 3.2**

Skupina 30 přátel se rozhodla, že půjdou do zábavního parku. Na řetízkový kolotoč šlo 20 z nich, o dva méně se vydalo na ruské kolo. Jedenáct z nich se šlo podívat do strašidelného hradu a 9 nejodvážnějších se vydalo na horskou dráhu. Na řetízkový kolotoč nebo horskou dráhu jich šlo 21, stejný počet šel i na ruské kolo nebo do strašidelného hradu. Na horskou dráhu nebo ruské kolo se jich vydalo 20, o dvě osoby více šlo na řetízkový kolotoč nebo do strašidelného hradu a o další dvě více si sjelo na ruském kole nebo řetízkovém kolotoči. Na horskou dráhu nebo do strašidelného hradu si trouflo 15 osob a o 10 více navštívilo atrakce řetízkový kolotoč nebo horskou dráhu nebo si zašlo do strašidelného hradu. Na ruské kolo nebo horskou dráhu nebo na strašidelný hrad si trouflo 23 osob, o tři více se vydalo na řetízkový kolotoč nebo ruské kolo nebo horskou dráhu a o další 3 osoby navíc se vydalo na řetízkový kolotoč nebo ruské kolo nebo navštívili strašidelný hrad. Kolik z přátel navštívilo všechny čtyři atrakce dohromady?

*Řešení.* Označme $K$ návštěvníky řetízkového kolotoče, $R$ osoby, které se svezly na ruském kole, $S$ návštěvníky strašidelného hradu a $H$ osoby, které se projely na horské dráze. Počet osob, které byly na řetízkovém kolotoči, je 20 ($|K| = 20$), o dvě osoby méně bylo na ruském kole ($|R| = |K| - 2 = 18$). Strašidelný hrad navštívilo 11 osob ($|S| = 11$) a horskou dráhu vyzkoušelo 9 osob ($|H| = 9$). Na řetízkový kolotoč nebo horskou dráhu šel stejný počet osob jako do strašidelného hradu nebo na ruské kolo a to 21 ($|K \cup H| = |S \cup R| = 21$). Na horské dráze nebo ruském kole se svezlo 20 osob ($|H \cup R| = 20$). Na řetízkový kolotoč nebo do strašidelného hradu šlo o dvě osoby více, než na horskou dráhu nebo ruské kolo

($|K \cup S| = |\mathrm{H} \cup R| + 2 = 22$) a o další dvě osoby navíc se svezlo na řetízkovém kolotoči nebo ruském kole ($|K \cup R| = |K \cup S| + 2 = 24$). Na horskou dráhu nebo do strašidelného hradu se vydalo 15 osob ($|H \cup S| = 15$), o 10 osob více se vydalo na řetízkový kolotoč nebo horskou dráhu nebo navštívili strašidelný hrad ($|K \cup H \cup S| = |H \cup S| + 10 = 25$). Ruské kolo nebo horskou dráhu nebo strašidelný hrad navštívilo 23 osob ($|R \cup H \cup S| = 23$), o tři osoby více si vyzkoušely řetízkový kolotoč nebo ruské kolo nebo horskou dráhu ($|K \cup R \cup H| = |R \cup H \cup S| + 3 = 26$). Řetízkový kolotoč nebo ruské kolo nebo strašidelný hrad navštívilo o 3 osoby více, než řetízkový kolotoč nebo ruské kolo nebo horskou dráhu ($|K \cup R \cup S| = |K \cup R \cup H| + 3 = 29$). Do zábavního parku přišlo dohromady 30 přátel ($|H \cup R \cup K \cup S| = 30$). Nyní, již s využitím duálního principu inkluze a exkluze vypočítáme počet osob, které navštívily všechny čtyři atrakce.

$$\begin{aligned}
| H \cap R \cap K \cap S| &= |H| + |R| + |K| + |S| - |K \cup H| - |S \cup R| - |H \cup R| - \\
&-|K \cup S| - |K \cup R| - |H \cup S| + |K \cup H \cup S| + |R \cup H \cup S| + |K \cup R \cup H| + \\
&+|K \cup R \cup S| - |H \cup R \cup K \cup S| = 9 + 18 + 20 + 11 - 21 - 21 - 20 - 22 - \\
&-24 - 15 + 25 + 23 + 26 + 29 - 30 = 8.
\end{aligned}$$

*Závěr.* Všechny čtyři atrakce navštívilo 8 z těchto přátel.

# 4 Archiv dalších úloh

**Příklad 4.1** [2]

Na začátku florbalové sezóny se 10 hráčů týmu seřadilo do řady, aby udělali týmovou fotografii. Na konci vítězné sezóny se hráči rozhodli udělat další týmovou fotografii ale tak, aby měl každý po pravé straně jiného spoluhráče, než na fotografii ze začátku sezóny. Kolika způsoby to mohli provést?

[1468457]

**Příklad 4.2** [1]

Najděte počet přirozených čísel mezi 1 až 1000 včetně, která nejsou dělitelná žádným z čísel 2, 3 a 7.

[286]

**Příklad 4.3** [17]

Najděte počet přirozených čísel menších než 967, která jsou dělitelná čísly 3, 7 a 11.

[464]

**Příklad 4.4** [1]

Najděte počet přirozených čísel mezi 1 až 1000000 včetně, která nejsou druhými, třetími ani čtvrtými mocninami některých přirozených čísel.

[998910]

**Příklad 4.5** [1]

Najděte počet kladných celočíselných řešení rovnice $x_1+x_2+x_3=15$. S podmínkou, že $x_1 \leq 5$, $x_2 \leq 6$ a $x_3 \leq 7$.

[10]

**Příklad 4.6** [7]

Najděte počet kladných celočíselných řešení rovnice $x_1+x_2+x_3 = 10$. S podmínkou, že $x_1 \leq 5$, $x_2 \leq 6$ a $x_3 \leq 8$.

[38]

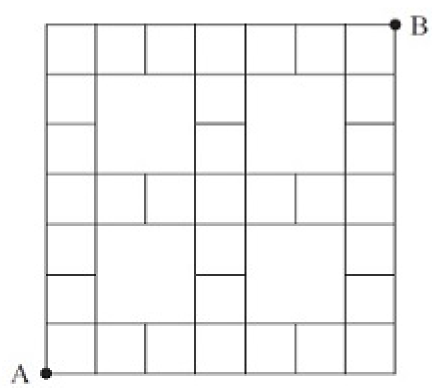
**Příklad 4.7** [10]

Maminka má 3 děti a chce mezi ně rozdělit pět žvýkaček a pět lízátek. Kolika způsoby mohla tyto sladkosti rozdat tak, aby každé z nich dostalo nějakou sladkost?

[336]

**Příklad 4.8** [64. MO, A-S-1]

Určete počet cest délky 14, které vedou po hranách sítě na obrázku z bodu A do bodu B. Délka každé hrany je jedna.




[678]

**Příklad 4.9** [7]

Je dána množina $S = \{1, 2, 3, \ldots, 14\}$ a dále vlastnosti $V_1$, $V_2$, $V_3$ a $V_4$. Prvek $x \in S$ má vlastnost $P_y$, právě tehdy, když je v následující tabulce pozice $(x, y)$ označena . Pomocí principu inkluze a exkluze zjistěte, kolik prvků z množiny

$S$ nemá žádnou z vlastností $V_1$ až $V_4$.

| $S$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_1$ | • | | | • | | | | • | • | | | • | | |
| $V_2$ | • | • | • | • | | • | | • | | • | • | | • | |
| $V_3$ | • | | • | | | | | • | • | | • | | | • |
| $V_4$ | • | | • | | | | | • | | • | • | | | • |

[2]

**Příklad 4.10** [13]

Na vánočním večírku je $n$ hostů. Každý z nich přinesl dárek. Dárky budou náhodně rozdány tak, aby každý host dostal jeden z nich. Jaká je pravděpodobnost, že žádný host nedostane dárek, který přinesl?

$$\left[\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!}\right]$$

**Příklad 4.11**

Na začátku školního roku dostala paní učitelka novou třídu s 30 studenty. Aby o nich něco zjistila, zeptala se jich, co dělali o prázdninách. Všichni z nich byli buď na brigádě nebo na horách nebo u moře. Brigádu mělo 20 studentů, na horách jich bylo o dva méně a nejméně z nich bylo u moře, to je 15. Na brigádě nebo u moře bylo 28 studentů, o čtyři studenty více bylo na brigádě nebo na horách a na horách nebo u moře jich bylo 18. Kolik jich bylo o prázdninách současně na brigádě,na horách i u moře ?

[5]

# Závěr

Tato bakalářská práce byla vytvořena především s cílem usnadnit žákům středních škol a jejich učitelům přístup k použití kombinatorického principu inkluze a exkluze. Ten se často využívá při řešení nestandardních kombinatorických úloh. Lze ji využít jako podpůrný materiál v seminářích speciálně zaměřených na problematiku kombinatoriky. Práce obsahuje celou řadu řešených i neřešených úloh.

V první části bakalářské práce byly položeny kombinatorické základy, které byly využity v následujících kapitolách. Nejprve jsme vyslovili definice a věty o vlastnostech variací a kombinací (bez opakování). Poté jsme si ukázali, jaký je vztah mezi počtem kombinací (bez opakování) a hodnotou kombinačního čísla. Toto jsme využili u následujících důkazů kombinatorických identit, z nichž některé budeme využívat v dalších kapitolách.

V druhé kapitole jsme nejprve pracovali se sjednocením dvou a tří množin, poté jsme na základě získaných poznatků odvodili princip inkluze pro konečný počet konečných množin. Dále jsme ukázali využití tohoto principu při řešení několika jednoduchých úloh. Následně jsme vysvětlili, co je doplněk sjednocení podmnožin dané množiny a také způsob, kterým získáme počet prvků tohoto doplňku. Následně jsme při řešení ilustračních příkladů ukázali, jak lze doplňku využít při řešení úloh. V další části této kapitoly jsme vysvětlili, jak můžeme princip inkluze a exkluze zjednodušit, pokud všechny z $\binom{n}{k}$ sčítanců $k$-prvkových podmnožin průniků mají stejný počet prvků. Následně jsme ukázali, že princip inkluze a exkluze lze využít i v jiných odvětvích matematiky a to například v teorii čísel, kde jsme za jeho pomoci odvodili tzv. Eulerovu funkci. Poslední část této kapitoly je věnována řešení několika složitějších úloh, kde se princip inkluze a exkluze využívá.

V třetí kapitole jsme vyslovili duální princip inkluze a exkluze. Ten je zde dokázán užitím principu matematické indukce vzhledem k počtu množin. Následně jsme ukázali také jeho využití při řešení několika původních autorových úloh, což představuje vlastní přínos autora.

Poslední kapitola obsahuje soubor neřešených příkladů, při jejichž řešení je možno procvičit si získané znalosti, a to s použitím principu inkluze a exkluze.

Při vypracování celé práce jsem čerpal především z cizojazyčné literatury, neboť v České republice neexistuje žádný speciální učební materiál věnovaný zkoumané problematice.

# Literatura


[1] Achaya, V., V., Katre, S., A., Modak, M., R., Sholapurkar, V., M.: *An Excursion in Mathematics*. Pune: Bhaskaracharya Pratishthana, 2008.

[2] Andreescu, T., Feng, Z.: *A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies*. Boston: Birkhäuser, 2004.

[3] Calda, E., Dupač, V.: *Matematika pro gymnázia - Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika*. 4. vyd.. Praha: Prometheus, 2001.

[4] Di Pasquale, A., Do, N., Mathews, D.: *Problem Solving Tactics*. Cambera: AMT Publishing, 2014.

[5] Hall, M., Jr.: *Combinatoria Theory*. Waltham(Massachusetts)-Toronto-Londýn: Blaisdell Publishing company, 1967.

[6] Herman, J., Kučera, R., Šimša, J.: *Metody řešení matematických úloh II*. 2. vyd.. Brno: Masarykova univerzita, Brno, 1997.

[7] Chuan-Chong, Ch., Khee-Meng, K.: *Principle and techniques in combinatorics*. Singapur: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1992.

[8] Klaška, J.: *Kombinatorická analýza*. Brno: Vysoké učení technické, 1998.

[9] Lozansky, E., Rousseau, C.: *Winning Solutions*. New York: Springer-Verlag, 1996.

[10] Marcus, Daniel A.: *Combinatorics A Problem Oriented Approach*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1998.

[11] Matoušek, J., Nešetřil, J.: *Kapitoly z diskrétní matematiky*. 4. vyd.. Praha: Univerzita Karlova, Praha, 2009.

[12] Matematická olympiáda.: *64. ročník matematické olympiády: Úlohy klauzurní části školního kola kategorie A*. 2014. [cit. 2015-07-16]. Dostupné z http://mo.webcentrum.muni.cz/media/1437484/a64s.pdf

[13] Tuffley, Ch., New Zealand Mathematical Olympiad Committee.: *The Principle of Inclusion-Exclusion*. 2009. [cit. 2015-07-30]. Dostupné z http://www.mathsolympiad.org.nz/wp-content/uploads/2009/02/inclusion-exclusion.pdf

[14] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky*. 9. vyd.. Praha: Prometheus, Praha, 2012.

[15] Riordan, J.: *An Introduction to combinatorial analysis*. New York: John Wiley & son, Inc., 1958.

[16] Riordan, J.: *Combinatorial Identities*. New York-Londýn-Sydney: John Wiley & son, Inc., 1968.

[17] Švrček, J.: *Úvod do kombinatoriky*. 2. vyd.. Olomouc: Univerzita Palackého, Olomouc, 2008.

[18] Vilenin, N., J.: *Kombinatorika*. Polytechnická knižnice, Praha, 1977.

[19] Zeitz, P.: *The art and craft of problem solving*. USA: John Wiley & son, Inc., 1999.