UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Porovnání rizik založené na výsledcích simulace Monte Carlo

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.**
Vypracovala: **Adriana Crhonková**
Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor Matematika–ekonomie se zaměřením na bankovnictví
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2015

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Adriana Crhonková

Název práce: Porovnání rizik založené na výsledcích simulace Monte Carlo

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2015

Abstrakt: Simulace Monte Carlo se hojně využívá ve finanční sféře, kde slouží k modelování rizikovosti různých investičních projektů. Pomáhá tak vedení firmy při rozhodování, který z projektů uskuteční. Výstupem této simulace je soubor nasimulovaných dat, na jejichž základě budeme tyto projekty porovnávat podle různých metod. Hlavní náplní práce je pak popis těchto metod a jejich názorné použití na ilustračním příkladě. Uvažujeme metody porovnávání podle číselných charakteristik polohy, podle pravidla střední hodnoty a rozptylu, podle aspirační úrovně a podle stochastické dominance.

Klíčová slova: Analýza rizika, simulace Monte Carlo, rizikové varianty, histogram, empirická distribuční funkce, číselné charakteristiky, aspirační mez, stochastická dominance

Počet stran: 37

Počet příloh: 1

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Adriana Crhonková

Title: Comparing of risks based on the results of Monte Carlo simulation

Type of thesis: Bachelor's

Department:
Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.

The year of presentation: 2015

Abstract: The method of Monte Carlo is frequently used in the financial field, where it serves for the simulation of riskiness of various investment projects. It helps management of a company to decide, which of these projects will realize. The result of Monte Carlo is a file of simulated data, on basis of which we will compare investment projects by various methods. The main content of this thesis is a description of these methods and their demonstration on an illustrative example. We will study the comparison according to statistical measures of location, rule of mean and variance, threshold value and stochastic dominance.

Key words: Risk analysis, Monte Carlo simulation, risk variations, histogram, random distribution function, statistical measures of location, threshold value, stochastic dominance

Number of pages: 37

Number of appendices: 1

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením pana RNDr. Ondřeje Pavlačky, Ph.D. s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne ....
podpis

Obsah

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucímu bakalářské práce RNDr. Ondřeji Pavlačkovi, Ph.D. za spolupráci, trpělivost a hlavně za čas, který mi věnoval při konzultacích. Zároveň bych chtěla poděkovat svým rodičům, kteří mi umožnili studium a vyjádřili pochopení a podporu. V neposlední řadě děkuji mojí přítelkyni a mému partnerovi, kteří mi byli psychickou oporou po celou dobu studia.

Úvod

Tato práce se bude zabývat porovnáváním rizik založeným na výsledcích simulace Monte Carlo. Simulace Monte Carlo je metoda, jenž slouží k vygenerování velkého počtu hodnot zvažované výstupní veličiny. Každý scénář vlastně představuje jednu potenciální situaci, která může v budoucnu nastat. V dnešní době je uplatnění této metody stále častější, a to např. ve finanční sféře.

V praxi se často setkáváme s potřebou porovnávat rizika, přičemž jedna z možností, jak to můžeme uskutečnit, je právě pomocí metody Monte Carlo. Výstupem této metody je soubor nasimulovaných dat, který představuje realizace náhodné veličiny, a na jehož základě se snažíme usuzovat o rozdělení pravděpodobnosti této náhodné veličiny. Cílem bakalářské práce je pak studovat, jakým způsobem a pomocí jakých metod je možné takovéto soubory dat porovnávat. Vycházet budeme z metod porovnávání náhodných veličin, u kterých předpokládáme znalost jejich rozdělení pravděpodobnosti. Náhodné veličiny můžeme například porovnávat podle různých číselných charakteristik. U nasimulovaných dat tyto charakteristiky nejsme schopni zjistit, a tak budeme brát jejich empirické protějšky, které reprezentují bodové odhady těchto charakteristik.

V první kapitole zmíníme analýzu rizika a také představíme postoj rozhodovatele k riziku. V následující kapitole vymezíme samotný pojem simulace Monte Carlo a také si připomeneme historii této metody a postup konstrukce. Třetí kapitola je zaměřena na samotné metody, kterými jsou porovnávání podle číselných charakteristik, porovnávání podle pravidla střední hodnoty a rozptylu, porovnávání podle aspirační úrovně a porovnávání podle stochastické dominance. Tyto metody popíšeme a názorně ukážeme na dvou rizikových variantách, přičemž popis konstrukce těchto variant v softwaru MS Excel je také součástí této kapitoly.

1. Analýza rizika

V této kapitole se budeme zabývat rizikem a jeho vlivem na výsledek podnikatelské aktivity. Nejdůležitější část je pak věnována *postoji rozhodovatele k riziku*, který představuje esenciální předpoklad při *porovnávání rizik na základě výsledků simulace Monte Carlo*, jimž je věnována třetí kapitola. Nadcházející text byl sepsán pomocí literatury [3], [4], [8].

Převážná většina lidských aktivit, a to zejména podnikatelských, je doprovázena určitou mírou nejistoty a rizika. Jako příklad těchto aktivit si uveďme plánovaný projekt ve firmě. Předpokládané budoucí výsledky tohoto projektu se mohou od těch reálných značně odlišovat. Velikost odchylky od předpokládaného výsledku pak závisí na mnoha faktorech jako je například kvalita přípravy nebo kvalita realizace projektu, přičemž oba tyto faktory jsme schopni ovlivnit. Co už ovlivnit nemůžeme je právě *riziko* a nejistota, které bychom měli zahrnout a integrovat do každé přípravy. Někdy ovšem není snadné najít všechny možné *rizikové faktory* a odhadnout velikost jejich dopadu na konečný výsledek projektu. A právě k tomuto slouží již zmíněná analýza rizika.

Než si tento pojem zavedeme, vymezme nejprve pojem riziko, který představuje základní stavební kámen celé analýzy rizika.

Riziko

Intuitivně chápeme riziko jako určité nebezpečí, které může vzniknout v souvislosti s realizací nějaké aktivity. Soustředíme se tedy na negativní stránku rizika. V tomto případě mluvíme o *čistém riziku*, které chápeme jako:

- možnost vzniku ztráty;
- možnost výskytu událostí nebo jevů, které nějakým negativním způsobem ovlivní dosažení plánovaných výsledků;
- nebezpečí vzniku negativních odchylek od plánovaných výsledků.

Riziko však může mít také stránku pozitivní. Vnímáme-li obě tyto stránky rizika, mluvíme o *podnikatelském riziku*, jehož použití je v hospodářské praxi častější a je charakterizováno jako:

- variabilita možných výsledků určitých aktivit;
- možnost odchylek (negativních i pozitivních) od plánovaných výsledků;
- pravděpodobnost realizace jiných hodnot, než byly hodnoty plánované.

Jak už jsme výše zmínili, každá podnikatelská aktivita je zatížena rizikem. Pro firmu je pak důležité provést kvalitní přípravu a realizaci této aktivity, díky kterým by bylo dosaženo co nejlepších výsledků a byly vyloučeny takové aktivity, které by znamenaly ohrožení finanční stability firmy. K uskutečnění těchto dvou bodů význačně napomáhá analýza rizika, kterou si nyní vymezíme.

Analýza rizika

Představuje činnost složenou ze dvou fází:

1. *Identifikace rizikových faktorů;*

   Cílem této fáze je dospět k seznamu všech možných rizikových faktorů, které by mohly jakýmkoliv způsobem ovlivnit výsledek zvolené aktivity a poté stanovit jejich významnosti.

   Ke stanovení významnosti rizikových faktorů se používá:

   - *Analýza citlivosti*

     Podstatou této metody je zjišťování citlivosti výsledku projektu na možných změnách hodnot faktorů rizika, které výsledek projektu ovlivňují. Jinými slovy, jakým způsobem změny rizikových faktorů působí na výsledky projektu. Rozlišujeme pak jednofaktorovou analýzu citlivosti, kdy uvažujeme vliv izolovaných změn hodnot jednotlivých rizikových faktorů na výsledky projektu a vícefaktorovou analýzu citlivosti, kdy uvažujeme vliv současných změn hodnot více rizikových faktorů na výsledky projektu.

- *Expertní hodnocení*

  Používáme ke stanovení významnosti rizikových faktorů, které lze velmi těžko kvantifikovat, resp. nelze je kvantifikovat vůbec. Provádí se pomocí *matice hodnocení rizik*, která je založena na hodnocení rizikových faktorů experty, majících potřebné zkušenosti a znalosti v oblastech, kam jednotlivé faktory rizika spadají.

2. *Stanovení velikosti rizika.*

   Jedná se o určení velikosti rizika z hlediska dopadů výskytu rizik na výsledky projektu neboli zvoleného kritéria. Tímto kritériem může být například zisk firmy před zdaněním. Jinými slovy, je to měření velikosti rizika, které můžeme určit dvěma způsoby:

   - *Pomocí číselných charakteristik*

     Tento způsob měří velikost rizika pomocí číselných charakteristik variability zvoleného kritéria. Důležitým předpokladem je kvantitativní povaha tohoto kritéria, ke kterému se riziko určuje, a také znalost jeho rozdělení pravděpodobnosti. Informace o tomto rozdělení je pak klíčová pro další postup. Pro stanovení rozdělení pravděpodobnosti kritéria se používají nástroje analýzy rizika a jedním z nich je právě simulace Monte Carlo, které je věnována další část této práce.

     Mezi číselné charakteristiky rizika patří například:

     – statistické charakteristiky variability, jako je **rozptyl**, **směrodatná odchylka** a **variační koeficient**;

     – **pravděpodobnost nedosažení** nebo i překročení určité hodnoty kritéria;

     – **hodnoty kritéria**, které budou překročeny (nebo nedosaženy) se zvolenou **pravděpodobností**.

   - *Pomocí kvalitativních (verbálních) charakteristik*

     K tomuto způsobu se uchylujeme v případě, že neznáme rozdělení pravděpodobnosti zvoleného kritéria. Může být však použito i při jeho znalosti. Pak velikost rizika charakterizujeme slovně. Příkladem verbálního vyjádření je následující tabulka 1, která je převzata z [3].

Stupeň	Slovní charakteristika rizika
1	velmi malé riziko
2	malé riziko
3	střední riziko
4	vysoké riziko
5	zvláště vysoké riziko

Tabulka 1: Stupnice kvalitativního vyjádření rizika

1.1. Postoj rozhodovatele k riziku

Stanovení velikosti rizika z minulé podkapitoly představuje zásadní informaci pro posouzení, zda je riziko spojené s nějakou aktivitou přijatelné či nepřijatelné. Rozhodujeme-li o realizaci nějaké aktivity, je důležité si stanovit, jak moc velké riziko jsme v souvislosti s touto aktivitou ochotni podstoupit. Přičemž, bude-li riziko větší, než jsme ochotni podstoupit, budeme aktivitu spojenou s tímto rizikem zamítat a naopak.

Zda riziko budeme ochotni přijmout záleží jak na velikosti rizika, které budeme tolerovat, tak na naší rizikové kapacitě. Mluvíme-li konkrétně o firmě, pak uvažujeme *rizikovou kapacitu podniku*, kterou chápeme jako nejvyšší možnou finanční ztrátu, která podnik neovlivní natolik, aby byla ohrožena jeho existence.

Velikost přijatelného rizika představuje takovou výši ztráty, kterou je firma ochotna přijmout v rámci své rizikové kapacity. Konečné rozhodnutí o přijatelné velikosti rizika pak firma učiní v závislosti na:

- **očekávání a požadavcích stakeholderů**, jako jsou akcionáři, věřitelé, finanční instituce, ratingové agentury aj.;
- **postoji rozhodovacího managementu k riziku**, který může mít averzi k riziku nebo naopak sklon k riziku.

Postoj rozhodovatele k riziku může být:

1. *s averzí k riziku;*

   Rozhodovatel dává přednost variantám méně rizikovým, které s velkou pravděpodobností vedou k dosažení výsledků, které jsou pro něj přijatelné. Naopak variantám, které mohou se značným rizikem dosahovat lepších výsledků, se vyhýbá.

2. *se sklonem k riziku;*

   V tomto případě rozhodovatel volí varianty značně rizikové, které dávají šanci na dosažení velice dobrých výsledků, ale zároveň jsou spojeny s pravděpodobností velkých ztrát. Tyto rizikové varianty jsou upřednostňovány před méně rizikovými.

3. *s neutrálním postojem k riziku.*

   U tohoto rozhodovatele jsou averze k riziku a sklon k riziku ve vzájemné rovnováze.

Postoj rozhodovatele k riziku souvisí také s rizikovou kapacitou podniku. Uvažujme případ, kdy riziková kapacita podniku bude v milionech korun, a my budeme mít averzi k riziku. Budeme-li se rozhodovat nad jistou podnikatelskou aktivitou, která bude mít pravděpodobnost dosažení vysokých zisků, ale za velkého rizika určitých ztrát, pak budou-li tyto ztráty v porovnání s kapacitou podniku malé, pak tuto aktivitu můžeme přijmout i přes naši averzi k riziku.

Postoj rozhodovatele k riziku budeme uvažovat ve 3. kapitole, kdy budeme porovnávat rizikové varianty jako výstupy simulace Monte Carlo a posléze vybírat vhodnou variantu dle typu rozhodovatele.

2. Metoda Monte Carlo

V této části bakalářské práce si zavedeme pojem simulace Monte Carlo s pomocí literatury [3] a stručně se seznámíme s historií metody Monte Carlo, která je popsána v literatuře [2]. Následně si představíme postup simulace Monte Carlo, který je sepsán s použitím literatury [3], [7].

Simulace Monte Carlo je stochastická metoda založená na používání náhodných čísel. Její podstatou je generování velkého počtu budoucích scénářů a propočet hodnot zvolených kritérií pro každý scénář, díky čemuž budeme schopni stanovit rozdělení pravděpodobnosti nebo číselné charakteristiky kritérií.

2.1. Historie

Simulace Monte Carlo má v dnešním světě velký význam a její využití je možné v oblastech jako je fyzika, matematika, ekonomie a mnoha dalších. Metoda Monte Carlo je světu známa už více jak šedesát let. Poprvé byla zformulována a použita v USA v době druhé světové války a to významnými vědci jako jsou John von Neumann a Stanislav Ulam. Tito pánové zkoumali chování neutronu a jeho pronikání různými látkami. Došli však k zásadnímu problému, jak určit procento neutronů z určitého svazku, které pronikne například nádrží vody určitých rozměrů.

V tehdejších letech se tato úloha zdála neřešitelná, a to i za předpokladu, že znali všechna důležitá data, jako je průměrná vzdálenost mezi dvěma srážkami neutronu s atomem vodíku nebo atomem kyslíku, pravděpodobnost srážky neutronu s těmito atomy a také množství energie neutronu, ztracené při srážce. I s těmito informacemi nebyli schopni předvídat budoucí chování neutronu neboli „historii jeho života“.

Nakonec přišli s myšlenkou použít techniku kola rulety k předpovědi chování neutronu. Odtud pak plyne název metody, která po tomto pokusu byla trefně pojmenována jako metoda Monte Carlo. Tato metoda umožnila předpovědět historii života neutronu na základě znalostí jeho chování ve vodě. Vědělo se, že neutron se při pronikání vodou sráží s atomem kyslíku nebo atomem vodíku, se kterým se v jednom případě ze sta srazí tak, že dojde k jeho pohlcení.

Pokus tedy spočíval v tom, že na velkých ruletách o sto políčcích se označilo jedno, které představovalo srážku neutronu s atomem vodíku a jeho pohlcení. Následně došlo k roztočení rulety a zaznamenání, zda se ruleta zastavila na označeném políčku. Pokud ano, neutron byl pohlcen a „umřel". V opačném případě neutron dále „žil" a roztočila se druhá ruleta, která značila další srážku a další možnost pohlcení. Toto se opakovalo tak dlouho, dokud neutron nebyl pohlcen, neztratil dostatečné množství energie nebo dokud se mu nepodařilo bezpečně projít celou cestu nádrží s vodou.

Uskutečníme-li velký počet takových simulací, dostaneme poměrně přesnou informaci o procentu neutronů, kterým se podařilo projít nádrží vody. Bude přitom platit, že čím více simulací provedeme, tím bude výsledek přesnější.

Tento nápad byl tehdy geniální, ale bohužel už ne tak snadno proveditelný, neboť takový svazek neutronů může obsahovat sto tisíc těchto částic a pro tak velké množství by byla tato simulace pomocí rulet časově nezvládnutelná. Naštěstí je doba druhé světové války mimo jiné charakteristická rozvojem prvních počítačů, které tuto simulaci značně zjednodušili a to díky možnosti generování náhodných čísel. V dnešní moderní době pak hovoříme o pouhé chvilce, která stačí k vymodelování sta tisíců různých scénářů.

Metoda Monte Carlo byla dříve používána hlavně k řešení složitých fyzikálních úloh. Později byla uplatňována k řešení problémů technických, ekonomických, z oblasti činnosti telefonních centrál, řízení dopravy, hromadné obsluhy, řízení zásob a mnoha dalších.

2.2. Postup simulace Monte Carlo

Uvažujme takovou podnikatelskou aktivitu, že existuje-li více rizikových faktorů majících vliv na výsledky této činnosti, pak vzhledem k velkému počtu možných kombinací těchto výsledků nelze použít klasické nástroje analýzy rizika.[1]. Místo toho použijeme metodu Monte Carlo, která nám umožní pomocí počíta-

[1] např. kvantitativní scénáře, pravděpodobnosti atd.

čového softwaru nasimulovat velký počet scénářů (desetitisíce, statisíce, miliony) pro všechny kombinace rizikových faktorů a následně propočítat hodnoty zvolené kriteriální veličiny (výsledek podnikatelské aktivity) pro každý tento scénář.

Postup simulace Monte Carlo

1. Nejprve si **sestavíme finanční model** odpovídající reálné situaci v podniku. Poté stanovíme cíle a základní pilíře, na kterých bude model položen. To znamená, že nejdříve zvolíme *kriteriální veličiny* neboli výstupy, a následně identifikujeme všechny *faktory rizika*, tedy vstupy. Příkladem takových výstupů může být zisk firmy, cash flow, čistá současná hodnota, hospodářský výsledek a další.

2. Ve druhém kroku vytvoříme **model matematický**, který vznikne převedením finančního modelu do řeči matematiky, a zpracujeme jeho program (např. v tabulkovém procesoru). Vlastně se jedná o konstrukci určitého matematického vzorce, díky němuž dostaneme hodnoty zvolené kriteriální veličiny.

3. Třetí krok je důležitý pro určení **klíčových faktorů rizika**. Dojde k výběru takových rizikových faktorů, které významně ovlivňují nejistotu výstupů matematického modelu. To znamená, že budeme brát ohled na možnou nejistotu těchto faktorů. Tyto klíčové faktory pak vlastně představují náhodné veličiny, zatímco ostatní neklíčové faktory rizika budou brány jako konstanty v podobě bodových odhadů. Dá se předpokládat, že mezi klíčovými faktory rizika budou zahrnuty takové, na jejichž změny jsou výstupy modelu značně citlivé. Je proto vhodné, použít ke stanovení těchto faktorů například analýzu citlivosti.

4. V dalším kroku stanovíme **rozdělení pravděpodobnosti klíčových faktorů rizika**. To je závislé na povaze faktorů rizika, která může být:

   - *diskrétní*, kdy můžeme rozdělení pravděpodobnosti stanovit přímo (vypíšeme hodnoty a jejich pravděpodobnosti) nebo pomocí teoretických rozdělení (Binomické, Poissonovo, atd.);

- *spojitá*, kdy využijeme jedno z teoretických spojitých rozdělení (Normální, Exponenciální, atd.).

Rozhodnutí o rozdělení pravděpodobnosti rizikových faktorů je mnohdy značně náročné a děje se na základě výběru jedné ze dvou možných variant:

- *Statistická analýza historických dat;*

  Existují-li historické informace některého rizikového faktoru, můžeme použít aproximaci nějakým teoretickým rozdělením pravděpodobnosti.

- *Názory expertů.*

  Mnoho projektů je charakteristických svojí neopakovatelností v čase, a tak v tomto případě, kdy neznáme chování rizikového faktoru v minulosti, vycházíme z názorů a znalostí expertů. Důležitým předpokladem je maximální seznámení a pochopení daného modelu experty. Nejčastěji užívaná rozdělení pak jsou:

  - Rovnoměrné rozdělení;
  - Trojúhelníkové rozdělení;
  - BetaPERT rozdělení;
  - Rozdělení modifikované uživatelem.

5. V tomto kroku vyšetříme vzájemnou **statistickou závislost rizikových faktorů**. V praxi se stává, že hodnoty jednoho faktoru reagují na změny hodnot faktoru druhého (typickým příkladem je závislost poptávky po produktu na jeho prodejní ceně). Při simulaci je potřeba respektovat tuto závislost, neboť může dojít ke zkreslení výsledků simulace.

   Statistická závislost faktorů rizika může mít dvě podoby:

   - *Párová závislost*;

     Jedná se o vzájemnou závislost dvou rizikových faktorů v jednom časovém období. Příkladem je výše zmíněná závislost poptávky na prodejní ceně.

- *Časová závislost.*

  Zde se jedná o závislost jednoho faktoru rizika na sobě samém, ale ve dvou časových obdobích. Příkladem je závislost objemu prodeje nějakého výrobku v určitém roce na prodeji tohoto výrobku v roce předcházejícím.

6. Poslední krok představuje **samotnou simulaci** s pomocí nějakého počítačového **softwaru**. Příkladem takového softwaru je CrystalBall, @RISK, Matlab nebo nejvíce známý MS Excel, se kterým budeme pracovat i my.

   Samotná simulace v softwaru je taktéž složená z několika kroků. V prvé řadě dochází k vygenerování libovolně velkého počtu možných scénářů, přičemž jeden scénář představuje jednu kombinaci hodnot vstupních faktorů, které byly získány na základě námi použitých rozdělení pravděpodobnosti. Z takto vzniklých scénářů se pak propočte stejný počet možných výsledků výstupní veličiny.

   Nakonec dostáváme *statistický soubor dat*, který můžeme dále analyzovat. V prvé řadě můžeme zjistit jeho grafické vyjádření, kterým je například empirická distribuční funkce nebo histogram. Dále se nabízí možnost vypočítat číselné charakteristiky této výstupní veličiny jako jsou průměr, výběrová směrodatná odchylka, výběrový rozptyl, pravděpodobnost dosažení či nedosažení určitých výsledků atd.

   V dalším textu budeme o statistickém souboru dat, který je výstupem celé simulace, hovořit jako o *nasimulovaných datech.*

3. Porovnávání rizik založené na výsledcích simulace Monte Carlo

V této kapitole budeme porovnávat rizika u různých rizikových variant na základě čtyř hlavních metod. Předlohou pro tuto část bakalářské práce mi byly metody porovnávání náhodných veličin, založené na znalosti jejich rozdělení pravděpodobnosti, zpracované v [1]. V našem případě tyto metody nemůžeme přímo uplatnit, neboť zmíněné rozdělení pravděpodobnosti neznáme. Máme však nasimulovaná data, z nichž lze rozdělení pravděpodobnosti graficky odhadnout pomocí *histogramů* vykreslených z těchto dat. Histogram chápeme jako empirické rozdělení četností, které se blíží reálnému rozdělení pravděpodobnosti. K této kapitole jsem použila literaturu [3], [5], [6], [7].

V praxi se mnohdy stává, že po zvážení přijatelnosti rizika i rizikové kapacity podniku zůstane více možných variant, které jsme jako firma ochotni přijmout, ale bohužel ne je realizovat. Důvodem bývá omezenost zdrojů (převážně omezenost finančních prostředků, pracovních sil aj.). K rozhodnutí, které varianty uskutečníme, nám pomohou různé metody, díky nimž budeme moci jednotlivé varianty srovnávat mezi sebou a nakonec zvolit ty nejvýhodnější. Při volbě nejlepší varianty budeme také zohledňovat výše zmíněný *postoj rozhodovatele k riziku.*

3.1. Konstrukce ilustračního příkladu

V následujících podkapitolách představíme čtyři druhy metod, které názorně použijeme na dvou rizikových variantách X a Y, jejichž rizikovost byla modelována v softwaru MS Excel s použitím simulace Monte Carlo. Postup konstrukce těchto rizikových variant je potom náplní této části práce a byl následující:

1. Sestavení reálného finančního modelu

Mějme investiční projekt, jehož cílem je výroba nového produktu, který bude obchodován na zahraničních trzích. Naším úkolem je provést analýzu rizika tohoto projektu s využitím simulace Monte Carlo.[2] Sledovaným výstupem neboli

[2]Motivovala jsem se příkladem v [3] na str. 84.

kriteriální veličinou bude roční zisk před zdaněním, který je ovlivněn šesti rizikovými faktory. Tyto rizikové faktory představují vstupy a jsou to: plánovaný počet prodaných kusů za rok, prodejní cena, měnový kurz CZK/EUR, měrná spotřeba materiálu, kupní cena materiálu a fixní náklady za rok. Pro každý z těchto rizikových faktorů byly po zvážení jejich rizika sestaveny tři scénáře. Jedná se o scénáře nejpravděpodobnější neboli realistické, scénáře pesimistické (v případě nepříznivého vývoje uvažovaného faktoru) a scénáře optimistické (v případě příznivého vývoje uvažovaného faktoru), které jsou shrnuty v tabulce 2. Jak již bylo řečeno, sledovaným výstupem bude roční zisk před zdaněním, který bude představovat naši rizikovou variantu X. Riziková varianta Y bude oproti variantě X odlišná v tom, že některé z rizikových faktorů zafixujeme na pevné hodnotě. Rozhodli jsme se zafixovat kupní cenu materiálu na hodnotě 1,55 EUR/kg. Naším cílem pak bude zjistit, zda se nám zafixování kupní ceny materiálu u dodavatele vyplatí či nikoli.

Rizikový faktor	Jednotka	Scénáře		
		pesimis.	nejpravdě.	optimis.
1. Počet prodaných kusů	tis. ks/rok	75	100	120
2. Prodejní cena	euro/ks	135	150	160
3. Měnový kurz	CZK/EUR	24	27	29
4. Měrná spotřeba materiálu	kg/ks	62	60	58
5. Kupní cena materiálu	Kč/kg	46	40	36
6. Fixní náklady	mil. Kč/rok	85	75	70

Tabulka 2: Scénáře hodnot rizikových faktorů

2. Tvorba matematického modelu

Vytvoření matematického vzorce bude v tomto případě jednoduché. Je-li naším výstupem roční zisk před zdaněním, pak ho lze vypočítat jako rozdíl celkových tržeb a nákladů, tj.:

$$Z = T - N.$$

Roční tržby z prodeje nového produktu T vypočítáme jako:

$$T = P \cdot c \cdot m,$$

kde P představuje plánovaný počet prodaných kusů za rok, c je prodejní cena a m je měnový kurz CZK/EUR.

Obdobně také celkové roční náklady N stanovíme jako:

$$N = VN + FN,$$

přičemž variabilní náklady VN pro rizikovou variantu X se vypočítají jako součin plánovaného ročního počtu prodaných kusů P, měrné spotřeby materiálu s a kupní ceny za jednotku materiálu v českých korunách k. Tedy:

$$VN = P \cdot s \cdot k.$$

Pro rizikovou variantu Y tyto náklady vypočítáme jako součin plánovaného ročního počtu prodaných kusů P, měrné spotřeby materiálu s a kupní ceny za jednotku materiálu 1,55 EUR vynásobenou měnovým kurzem m. Tedy:

$$VN = P \cdot s \cdot 1,55 \cdot m.$$

Nakonec dostáváme upravenou rovnici pro výpočet celkového zisku před zdaněním pro variantu X:

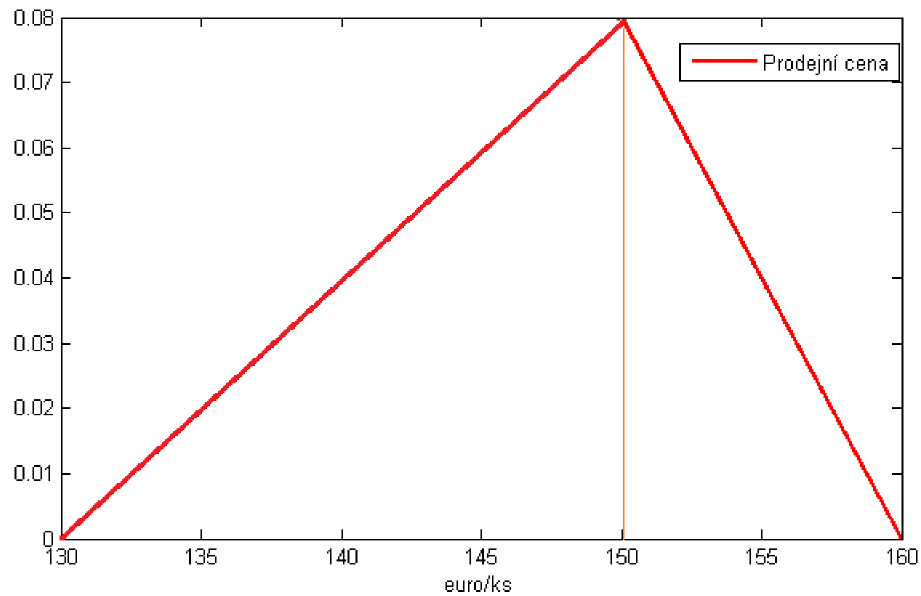
$$Z = P(c \cdot m - s \cdot k) - FN$$

a pro variantu Y:

$$Z = Pm(c - s \cdot 1,55) - FN.$$

3. Stanovení rozdělení pravděpodobnosti rizikových faktorů

Rozdělení pravděpodobnosti klíčových faktorů[3] stanovujeme na základě expertních odhadů. V odborné literatuře, např. [3], [7], se pro tento případ doporučuje použít *trojúhelníkové rozdělení*. Jeho hustota má tvar trojúhelníka se třemi parametry, které jsou definovány jako nejpravděpodobnější (vrcholová) hodnota, pesimistická hodnota (dolní mez) a optimistická hodnota (horní mez). Tyto parametry vlastně představují realistické, pesimistické a optimistické odhady hodnot rizikových faktorů, které jsou zadány v již zmíněné tabulce 2. Pro názornost je



Obrázek 1: Hustota trojůhelníkového rozdělení

na obrázku 1 vykreslena hustota trojúhelníkového rozdělení pro jeden rizikový faktor, konkrétně pro prodejní cenu.

Pro jednoduchost nebudeme předpokládat statistickou závislost mezi jednotlivými faktory rizika.

4. Realizace simulace Monte Carlo v MS Excel

Nakonec provedeme samotnou simulaci. Ta probíhá tak, že MS Excel vygeneruje v našem případě deset tisíc hodnot pro každý výše popsaný rizikový faktor. Z těchto vygenerovaných rizikových faktorů nakonec vypočítáme deset tisíc možných výsledků uvažovaného zisku před zdaněním. A právě tento vygenerovaný zisk před zdaněním bude riziková varianta X. Následně provedeme obměnu rizikové varianty X se zmíněným rozdílem, že zafixujeme vybraný rizikový faktor na zvolené hodnotě. V našem případě jsme zvolili kupní cenu materiálu. Jelikož tento materiál dovážíme od zahraničních dodavatelů, budeme jeho hodnotu fixovat v eurech, avšak následně ji převedeme na měnu českou. Zafixujeme tedy kupní cenu materiálu na hodnotě 1,55 EUR, kterou budeme ještě násobit již ne-

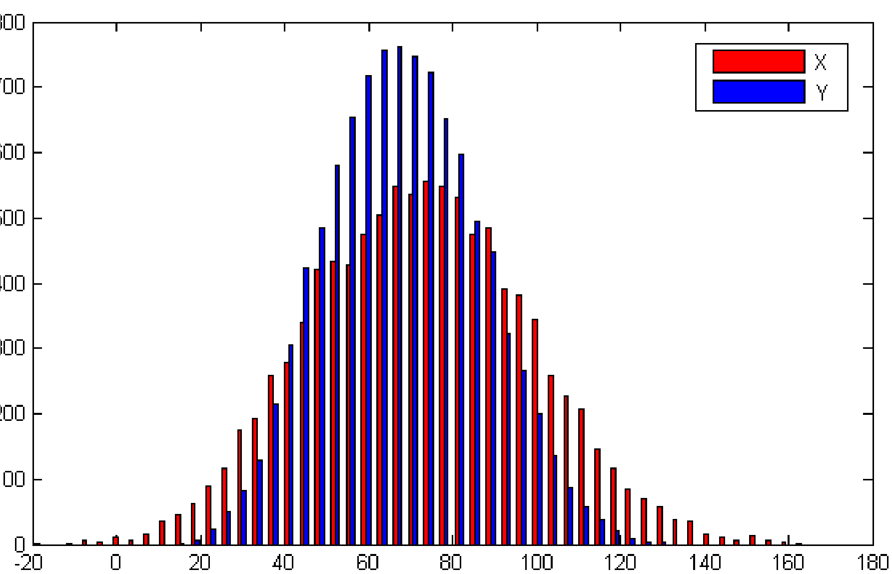
[3]Předpokládáme, že všechny rizikové faktory uvedené v zadání jsou klíčové.

zafixovaným měnovým kurzem CZK/EUR a tím dostaneme rizikovou variantu Y.

Výsledkem této simulace jsou dva soubory nasimulovaných dat, představující zisk v milionech korun. Z těchto dat vykreslíme histogramy rizikových variant znázorněné na obrázku 2 a pro úplnost si tento pojem také zavedeme.

„Histogram chápeme jako grafické zobrazení statisticky vyhodnocovaného jevu tak, že celkový rozsah jeho kvantitativních hodnot je rozdělen na stejnoměrné intervaly (třídy) a jednotlivé hodnoty jsou roztříděny do těchto intervalů a v nich je vyjádřena jejich četnost.“ [9]

Celá simulace je provedena v souboru *simulaceMC.xlsx*, který nalezneme na přiloženém CD. V tomto souboru jsou také provedeny veškeré výpočty potřebné k následujícím metodám.



Obrázek 2: Histogramy rizikových variant

Pro celou tuto kapitolu budeme předpokládat, že kladné hodnoty rizikových variant představují zisk a naopak záporné hodnoty představují ztrátu.

3.2. Porovnávání podle číselných charakteristik polohy

Náhodné veličiny můžeme uspořádávat podle číselných charakteristik polohy, kterými jsou např. *střední hodnota, α-kvantily* a *medián*, jejichž definice můžeme nalézt např. v [5]. Našim úkolem v této práci je obdobně uspořádat nasimulovaná data, jejichž číselné charakteristiky vypočítáme jako bodové odhady zmíněných charakteristik polohy. Těmito odhady myslíme *aritmetický průměr, empirické kvantily* a *medián*, přičemž definice těchto odhadů nalezneme opět v literatuře [5].

S aplikací těchto odhadů se podle [7] pojí jistá specifická situace, kdy dostaneme hodnoty bodových odhadů číselných charakteristik velmi podobné. V takovém případě se doporučuje upustit od jejich porovnávání a považovat je za přibližně shodné, neboť bereme v úvahu, že uspořádání takto přibližných hodnot by se znovu provedením simulace v MS Excel mohlo vyměnit.

Porovnávání na základě číselných charakteristik má nespornou výhodu v tom, že na rozdíl od následujících metod je možné na jejím základě porovnat jakékoliv varianty. Naopak nevýhodou je, že vůbec nezohledňujeme variabilitu porovnávaných veličin. Může se tak stát, že dvě varianty budou mít stejnou hodnotu uvažované charakteristiky a přitom jejich rozptyly budou značně odlišné.

Nyní budeme rizikové varianty X a Y postupně uspořádávat podle jednotlivých charakteristik polohy.

1. **Uspořádání podle aritmetického průměru**

   Aritmetický průměr patří k jedné z nejpoužívanějších charakteristik polohy a také podle [5] se jedná o nejlepší nestranný bodový odhad střední hodnoty. Je zřejmé, že budeme preferovat větší průměr před nižším.

   Značíme ho $\bar{x}$ a vypočítáme jako

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

   kde n je počet nasimulovaných dat.

Z obrázku 2 vyplývá, že většího aritmetického průměru dosahuje riziková varianta X, jejíž hodnota je $\bar{x} = 72,62$ mil. Kč, oproti aritmetickému průměru varianty Y, který je $\bar{y} = 68,24$ mil. Kč. Rozhodovatel bude podle této metody preferovat rizikovou variantu X.

Tato metoda je vhodná pro rozhodovatele s neutrálním postojem k riziku.

2. **Uspořádání podle kvantilu**

   Budeme uvažovat *empirické kvantily* neboli tzv. *p-kvantily*, které se značí jako $\tilde{x}_p$, kde $p \in (0,1)$. Tyto empirické kvantily jsou opět bodovými odhady svých teoretických protějšků, tedy α-kvantilů.

   Pro p-kvantil platí, že nejméně $100p$ % čísel v souboru dat je menších nebo rovno než p-kvantil a nejméně $100(1-p)$ % čísel ze souboru dat je větších nebo rovno než tento p-kvantil. Tyto empirické kvantily lze vypočítat na vzestupně uspořádaném souboru dat, tedy

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq ... \leq x_{(n)}.$$

   Pak platí: (Symbol $[\cdot]$ značí funkci „celá část“.)

$$\tilde{x}_p = \begin{cases} x_{([np]+1)}, & np \neq [np], \\ \frac{x_{(np)}+x_{(np+1)}}{2}, & np = [np]. \end{cases}$$

   Vzorec převzat z [5].

   Pro následující text budeme uvažovat kvantily $\tilde{x}_{0,25}$ a $\tilde{x}_{0,75}$, které se nazývají dolní a horní kvartil a také 5-ti a 95-ti procentní kvantily, značící se jako $\tilde{x}_{0,05}$ a $\tilde{x}_{0,95}$.

   Naměřené výsledky jsou následující:

   - Dolní kvartil: $\tilde{x}_{0,25} = 53,98$ mil. Kč, $\tilde{y}_{0,25} = 55,12$ mil. Kč. Lepší je varianta Y.
   - Horní kvartil: $\tilde{x}_{0,75} = 90,26$ mil. Kč, $\tilde{y}_{0,75} = 80,95$ mil. Kč. Vyšších hodnot nabývá naopak X.

- 5-ti procentní kvantil: $\tilde{x}_{0,05} = 30,31$ mil. Kč, $\tilde{y}_{0,05} = 38,95$ mil. Kč. V tomto případě vychází lépe opět varianta Y.
- 95-ti procentní kvantil: $\tilde{x}_{0,95} = 115,78$ mil. Kč, $\tilde{y}_{0,95} = 99,14$ mil. Kč. Zde je lepší varianta X.

Vidíme, že výsledek našeho rozhodnutí značně závisí na volbě p, neboť pokud bychom se rozhodovali podle 5-procentního kvantilu a dolního kvartilu pak by vyhrála varianta Y. Naopak kdybychom se rozhodovali podle 95-ti procentního kvantilu a horního kvartilu, větších hodnot by dosahovala varianta X. Z hlediska postoje k riziku by platilo, že rozhodovatel s averzí k riziku by se řídil spíše nižším, tj. 5-ti a 25-ti procentním kvantilem. Na druhou stranu, rozhodovatel se sklonem k riziku by volil kvantily vyšší, tedy 75-ti a 95-ti procentní.

3. **Uspořádání podle mediánu**

   Medián je speciální případ p-kvantilu, kde $p = 0,5$ a který budeme značit jako $\tilde{x}_{0,5}$. Jedná se o kvantil, který rozdělí nasimulovaný soubor dat na dvě stejně početné části, neboť platí, že 50 % uspořádaných hodnot v souboru dat je menších nebo rovno než medián a zároveň 50 % hodnot je větších nebo rovno tomuto číslu. Reprezentuje jakýsi střed celého souboru.

   Na našich dvou variantách jsme dostali tyto výsledky: $\tilde{x}_{0,5} = 72,53$ mil. Kč, $\tilde{y}_{0,5} = 67,79$ mil. Kč. Hodnota mediánu u varianty X je vyšší než u variant Y, takže podle mediánu budeme preferovat variantu X.

   Metoda je vhodná pro rozhodovatele s neutrálním postojem k riziku.

3.3. Porovnávání podle pravidla střední hodnoty a rozptylu

Tato metoda je založena na porovnávání dvojic rizikových variant podle střední hodnoty a rozptylu a můžeme ji nalézt např. v [3]. Základem tohoto pravidla je předpoklad, že rozhodovatel si více cení varianty s vyšší střední hodnotou a nižším rozptylem (rizikem). U této metody se předpokládá averze k riziku.

Rozhodovatel bude preferovat rizikovou variantu X před rizikovou variantou Y v případě, kdy:

- varianta X má obě veličiny lepší (větší střední hodnotu a menší rozptyl) než varianta Y;
- varianta X má jednu veličinu značně lepší (střední hodnotu nebo rozptyl) a druhou má shodnou nebo přibližně stejnou jako varianta Y.

V situaci, kdy varianta X má lepší jen jednu charakteristiku a druhou má lepší varianta Y, pak na základě tohoto pravidla nelze rozhodnout.

Důležitým předpokladem uplatnění tohoto pravidla je alespoň přibližně souměrné rozdělení pravděpodobnosti obou porovnávaných variant, v opačném případě by rozptyl nebyl vhodnou mírou rizikovosti. Další podmínkou je požadavek na soubor rizikových variant, aby neobsahoval varianty, které se od ostatních značně odlišují svojí střední hodnotou[4]. Pak bychom museli nahradit rozptyl *variačním koeficientem* V_x, který získáme jako podíl směrodatné odchylky a střední hodnoty. Následně bychom rozhodovali na základě obdobného *pravidla střední hodnoty a variačního koeficientu*. Tyto nutné předpoklady jsou uvedeny v [3].

Jak vidíme, metoda střední hodnoty a rozptylu nemusí zvládnout porovnat všechny dvojice rizikových variant. V takovém případě dostaneme tzv. *nedominované varianty*, tedy takové, které nedokážeme na základě této metody porovnat. Soubor složený z nedominovaných variant se nazývá *efektivní soubor*.

Vraťme se nyní k našim nasimulovaným rizikovým variantám. Místo střední hodnoty a rozptylu budeme uvažovat jejich odhady, tedy aritmetický průměr $\bar{x}$ a *výběrový rozptyl* s_x^2, který vypočítáme na souboru o n datech jako:

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Tento vzorec je převzat z [5].

[4]Odlišnost střední hodnoty může být způsobena např. odlišným rozsahem nebo odlišnou ekonomickou efektivností těchto variant.

Aritmetické průměry těchto variant se významně neodlišují, takže nebude nutné použít variační koeficient. Porovnávání je pak následující:

Riziková varianta X vs. riziková varianta Y.

Aritmetický průměr u varianty X je větší než u varianty Y, neboť $\bar{x} = 72,62$ mil. Kč a $\bar{y} = 68,24$ mil. Kč. Naopak výběrový rozptyl je u varianty X horší než u varianty Y, tedy: $s_x^2 = 681,243$, zatímco $s_y^2 = 337,218$. Dostáváme případ, kdy u obou variant je jedna veličina lepší a druhá horší, takže na základě tohoto pravidla nelze rozhodnout a dostaneme nedominované varianty.

3.4. Porovnávání podle aspirační úrovně

Následující metoda porovnává varianty podle pravděpodobnosti překročení libovolně zvoleného čísla a, které označujeme jako *aspirační úroveň*. Zvolená aspirační úroveň bude v podstatě představovat minimální hodnotu zisku, které chceme dosáhnout, a díky této metodě zjistíme, která z variant bude mít největší šanci na její realizaci. Z výše uvedeného vyplývá, že budeme preferovat větší pravděpodobnost překročení aspirační úrovně před nižší. Tato část je zpracována pomocí [1], [3].

Jak již bylo řečeno, můžeme uvažovat libovolné číslo a, podle toho, která hodnota zisku nás bude zajímat. Například můžeme chtít znát pravděpodobnost, s jakou nedosáhneme záporného zisku, tj. ztráty. V takovém případě volíme $a = 0$. Je jasné, že rozhodovatele s averzí k riziku bude zajímat právě tato pravděpodobnost možné ztráty nebo pravděpodobnost, s jakou dosáhneme minimálního zisku. Naopak rozhodovatel se sklonem k riziku bude cílit k vysokým aspiračním úrovním, které budou reprezentovat pravděpodobnosti dosažení vysokých zisků.

Zaměřme se opět na naše nasimulovaná data. Pravděpodobnost překročení zvoleného čísla a dostaneme tak, že ze souboru deseti tisíc nasimulovaných dat zjistíme počet hodnot, které jsou větší nebo rovny číslu a. Tento počet pak vydělíme celkovým počtem dat, tedy deseti tisíci, a dostaneme odhad požadované pravděpodobnosti.

Z obrázku 2 vidíme, že zisk se pohybuje přibližně mezi -20 až 160 mil. Kč a můžeme z něj zkusit odhadnout, k jakým výsledkům se dobereme, jestliže zvolíme aspirační úrovně a= $2, 20, 60, 100$ a 130 mil. Kč. Výsledky pak budou následující:

- pro $a = 2$ mil. Kč:

  Větší pravděpodobnosti nabývá varianta Y, neboť $P(X \geq 2) = 0,9979$ a $P(Y \geq 2) = 1$.

- pro $a = 20$ mil. Kč:

  Lepších výsledků dosahuje stále varianta Y, tj. $P(X \geq 2) = 0,9826$ a $P(Y \geq 2) = 0,9994$.

- pro $a = 60$ mil. Kč:

  Začíná převládat varianta X, kdy $P(X \geq 2) = 0,6781$ a $P(Y \geq 2) = 0,6607$.

- pro $a = 100$ mil. Kč:

  Větší pravděpodobnosti dosahuje varianta X, jelikož platí: $P(X \geq 2) = 0,1495$ a $P(Y \geq 2) = 0,0455$.

- pro $a = 130$ mil. Kč.

  Nejvyšší pravděpodobnosti překročení stále dosahuje varianta X a varianta Y je skoro nulová, tj. $P(X \geq 2) = 0,0157$, $P(Y \geq 2) = 0,002$.

Jako rozhodovatele s averzí k riziku by nás zajímaly aspirační úrovně $a = 2$, 20 popř. 60 mil. Kč. V takovém případě bychom zvolili spíše variantu Y. Pro rozhodovatele se skolen k riziku by byly zásadní hlavně úrovně $a = 130$, 100 popř. 60 mil. Kč. V této situaci bychom zvolili variantu X.

3.5. Porovnávání podle stochastické dominance

V podkapitole o pravidle střední hodnoty a rozptylu jsme uvedli, že tuto metodu je vhodné použít v případě, kdy rozdělení pravděpodobnosti rizikových variant je přibližně symetrické. V situaci, kdy rozdělení pravděpodobnosti bude nesymetrické, pak se nabízí použít další metodu nazvanou jako *metoda stochastické dominance*, jejíž použití je založeno na znalosti **celého** rozdělení pravděpodobnosti rizikových variant. Stochastická dominance existuje prvního, druhého a vyššího řádu, přičemž středem našeho zájmu bude pouze stochastická dominance prvního a druhého řádu, která je popsána v [1], [3], [6]. Zabývat se budeme také druhým pravidlem stochastické dominance, sepsaným díky [1], [3]. Tato metoda slouží k porovnávaná dvojic rizikových variant.

3.5.1. Porovnávání podle stochastické dominance prvního řádu

Jedná se o nejjednodušší a zároveň nejvíce striktní pravidlo z kategorie stochastické dominance, neboť důležitou podmínkou pro jeho použití je, že distribuční funkce rizikových variant se nesmí protnout.

„Distribuční funkcí $F_X(x)$ náhodné veličiny X rozumíme funkci, která každému reálnému číslu x přiřadí pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude hodnoty menší nebo rovné číslu x.“[10]

V praxi se jen zřídka setkáme se situací, kdy se distribuční funkce neprotnou, a tak je více využívaná stochastická dominance druhého řádu nebo druhé pravidlo stochastické dominance.

Tato metoda je vhodná pro všechny typy rozhodovatelů, neboť bez ohledu na jejich postoj je preferováno dosažení vyššího zisku před nižším.

Podle stochastické dominance prvního řádu budeme preferovat rizikovou variantu X před rizikovou variantou Y (tj. varianta X dominuje variantě Y), jestliže pro každé $x \in R$ platí:

$$F_X(x) \leq F_Y(x),$$

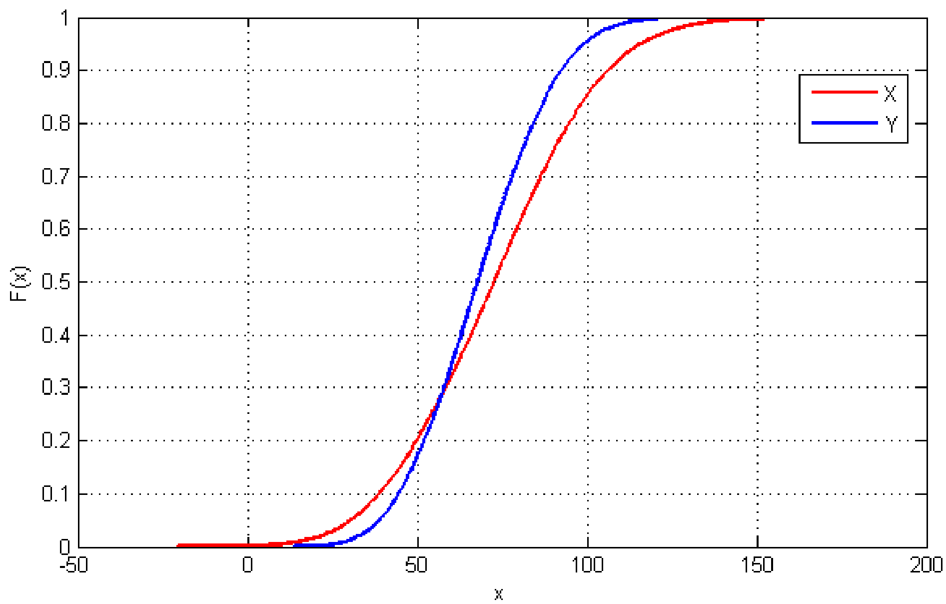
kde $F_X(x)$ a $F_Y(y)$ jsou distribuční funkce rizikových variant X a Y. Tento vztah nám vlastně říká, že pro všechna $x \in R$ platí $P(X \leq x) \leq P(Y \leq x)$. Jinými slovy, pravděpodobnost toho, že se budou varianty X a Y realizovat v hodnotách menších nebo rovných x je vetší u varianty Y. Je-li tento vztah splněn, pak graf distribuční funkce rizikové varianty X leží napravo od distribuční funkce rizikové varianty Y.

Použijme nyní toto pravidlo na nasimulovaných datech. V naše případě budeme porovnávat empirické distribuční funkce, vykreslené na obrázku 3. Pro úplnost si tuto empirickou distribuční funkci nadefinujme.

Empirickou distribuční funkci podle [11] definujeme na souboru o rozsahu n následovně

$$F_n(x) = \frac{N(x_i \leq x)}{n},$$

kde výraz v čitateli značí počet prvků náhodného výběru, jejichž hodnota je menší nebo rovna x. Tato funkce udává pro hodnotu znaku x počet všech pozorování, která mají hodnotu x_i menší nebo rovnu x, dělený celkovým rozsahem souboru n. Je to neklesající funkce s hodnotami mezi 0 a 1.



Obrázek 3: Emprirické distribuční funkce rizikových variant X a Y

Z obrázku jasně vyplývá, že není splněna podmínka pro použití této metody, neboť empirické distribuční funkce se protínají. Na základě tohoto pravidla tedy nemůžeme rozhodnout.

Tento závěr můžeme také početně ověřit pomocí postupu uvedeném v [6]. Podle něj nejprve předpokládejme, že počet hodnot rizikové varianty X je n a počet hodnot rizikové varianty Y je m. Pak zavedeme nové proměnné

$$(z_1, z_2, ...z_{n+m}) = (x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m)$$

a ty uspořádáme:

$$z_{(1)} \leq z_{(2)} \leq ... \leq z_{(n+m)}.$$

Následně si označíme

$$D_1(z) = F_X(z) - F_Y(z),$$

kde $F_X(z)$ a $F_Y(z)$ jsou empirické distribuční funkce pro rizikové varianty X a Y. Pro jejich výpočet pak použijeme následující vzorce:

$$F_X(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}(x_i \leq z), \tag{1}$$

$$F_Y(z) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \mathbf{1}(y_i \leq z), \tag{2}$$

kde **1** označuje indikátor, který je roven 1, je-li splněna podmínka za ním uvedená, tj. je-li $(x_i \leq z)$ resp. $(y_i \leq z)$, v opačném případě bude roven 0. Tvar těchto funkcí vychází z empirických distribučních funkcí $F_X(x), F_Y(x)$.

Potom jestliže

$$D_1(z_i) \leq 0, \text{ pro } i = 1, 2, ..., n+m,$$

pak budeme preferovat rizikovou variantu X před variantou Y.

Tento výpočet je opět proveden v přiloženém souboru *simulaceMC.xlsx*, ve kterém jsme distribuční funkce $F_X(z), F_Y(z)$ vypočítali pomocí předpisu v matematickém softwaru *Matlab*, přičemž tento předpis *SD1.m* je také přiložen k této práci. Zjistili jsme, že nerovnost $D_1(z_i) \leq 0$ není splněna pro všechna i, takže tyto varianty nejsou podle stochastické dominance prvního řádu porovnatelné. Na základě této metody nebudeme preferovat ani jednu z variant.

3.5.2. Porovnávání podle stochastické dominance druhého řádu

Jak jsme si mohli všimnout, ne všechny varianty lze porovnat podle stochastické dominance prvního řádu. To bylo důvodem k zavedení stochastické dominance druhého řádu. Bohužel ani tato metoda nezaručuje možnost porovnání všech rizikových variant.

Řekneme, že preferujeme rizikovou variantu X před rizikovou variantou Y, jestliže pro libovolné $t \in R$ platí:

$$\int_{-\infty}^{t} F_X(x)dx \leq \int_{-\infty}^{t} F_Y(x)dx, \tag{3}$$

kde $F_X(x)$ a $F_Y(x)$ jsou opět distribuční funkce rizikových variant X a Y.

Jinak řečeno, variantu X budeme preferovat před variantou Y, když pro libovolnou realizaci výstupní veličiny bude plocha pod distribuční funkcí varianty X od jejího počátku až po zvolenou hodnotu této veličiny menší než plocha obdobně vypočítaná pro distribuční funkci varianty Y.

V našem případě místo skutečných distribučních funkcí uvažujeme funkce empirické. Zmíněný integrál (3) pak vypočítáme pomocí metody uvedené v [6] a to podle následujícího postupu.

Označme

$$D_2(z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z - x_i) \cdot \mathbf{1}(x_i \leq z) - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(z - y_i) \cdot \mathbf{1}(y_i \leq z), \tag{4}$$

kde **1** značí opět indikátor, jehož význam jsme popsali výše u stochastické dominance prvního řádu. Následně budeme preferovat rizikovou variantu X před rizikovou variantou Y, jestliže nerovnost

$$D_2(z_i) \leq 0, \tag{5}$$

kde $(z_1, z_2, ...z_{n+m}) = (x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m)$ bude splněna pro všechna $i = 1, \ldots, n + m$.

Pro naše nasimulovaná data jsme funkci $D_2(z)$ vypočítali opět pomocí softwaru Matlab. Předpis této funkce nalezneme na přiloženém souboru pod názvem *SD2.m*, ve kterém jsme si vzorec (4) rozdělili na dvě části. Symbol $D_2(x_i)$ představuje první část vzorce, od které odečteme jeho druhou část označenou jako $D_2(y_i)$. Po provedení výpočtů zjistíme, že požadovaná nerovnost (5) není splněna pro všechna i. Podle této metody tedy nebudeme preferovat ani jednu z variant.

3.5.3. Porovnávání podle druhého pravidla stochastické dominance

Poslední metodou, kterou se budeme v této práci zabývat, je druhé pravidlo stochastické dominance, zpracované pomocí [3]. Můžeme ho použít v situaci, kdy selhává stochastická dominance prvního i druhého řádu. Toto pravidlo je založeno na porovnávání ploch vymezených distribučními funkcemi rizikových variant a důležitým předpokladem jeho použití je averze rozhodovatele k riziku.

Riziková varianta X dominuje rizikové variantě Y podle druhého pravidla stochastické dominance, jestliže platí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \max\{0, F_X(x) - F_Y(x)\}dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \max\{0, F_Y(x) - F_X(x)\}dx. \qquad (6)$$

Nejjednodušší případ nastává, když se grafy distribučních funkcí protínají pouze v jednom bodě. V takové situaci budeme preferovat rizikovou variantu X před rizikovou variantou Y, jestliže plocha mezi oběma distribučními funkcemi, kdy distribuční funkce varianty X leží napravo od distribuční funkce varianty Y, je větší než plocha mezi těmito funkcemi, kdy distribuční funkce varianty Y leží napravo od distribuční funkce varianty X.

Jelikož stále pracujeme pouze s empirickými distribučními funkcemi, tak požadovaný integrál (6) budeme počítat obdobnou metodou jako v případě stochastické dominance prvního řádu, zpracovanou podle [6]. Uvažujeme stejné proměnné

$$(z_1, z_2, ...z_{n+m}) = (x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m),$$

které uspořádáme

$$z_{(1)} \leq z_{(2)} \leq ... \leq z_{(n+m)}.$$

Dále uvažujme výše zavedenou funkci

$$D_1(z_i) = F_X(z_i) - F_Y(z_i), \text{ pro } i = 1, 2, ..., n+m,$$

kde $F_X(z_i), F_Y(z_i)$ jsou distribuční funkce, které vypočítáme pomocí vzorců (1), (2). Potom jestliže součet

$$\sum_{i=1}^{n+m-1} (z_{i+1} - z_i) \cdot D_1(z_i)$$

je **kladný**, pak preferujeme rizikovou variantu Y před rizikovou variantou X a naopak je-li **záporný**, preferujeme rizikovou variantu X. Uvažovaný součet interpretujeme jako integrál vypočítaný z funkce $D_1(z_i)$, přičemž právě podle znaménka zjistíme, která z variant dominuje. Vyjde-li součet kladný, pak je plocha spočítaná mezi empirickými distribučními funkcemi, kdy dominuje riziková varianta Y větší než plocha obdobně spočítaná v případě, že dominuje riziková varianta X a obráceně.

Tento postup byl zkonstruován nejprve v Matlabu díky předpisu pro funkce $F_X(z_i)$ a $F_Y(z_i)$, který nalezneme v přiloženém souboru *D_SD.m* Posléze jsme výpočet dokončili v MS Excel a zjistili jsme, že požadovaný součet je záporný. Podle této metody preferujeme rizikovou variantu X před rizikovou variantou Y.

3.5.4. Úskalí při použití metod stochastické dominance

Výše popsaná pravidla stochastické dominance, uplatněná na empirické distribuční funkce, bohužel nejsou dokonalými metodami, které s jistotou rozhodnout o preferenci variant. Ukažme si to na následujícím příkladě, který je popsán v literatuře [6].

Uvažujme náhodné veličiny X a Y z normálního rozdělení, pro které platí, že:

$$X \sim N(0,1;1),$$

$$Y \sim N(0;1).$$

Tyto náhodně veličiny jsou pak porovnatelné podle stochastické dominance prvního a druhého řádu a podle druhého pravidla stochastické dominance. Dokonce platí, že náhodnou veličinu X budeme podle všech tří metod preferovat před náhodnou veličinou Y. Distribuční funkce této preferované veličiny bude ležet po celou dobu o malý kousek napravo od distribuční funkce náhodné veličiny Y a nikdy se neprotnou.

V momentě, kdy bychom si chtěli nasimulovat data těchto náhodných veličin z jejich počátečního rozdělení a následně na ně uplatnit metody použité v této práci, potom bychom zjistili, že ve většině případů by se empirické distribuční funkce protínaly. Podle stochastické dominance prvního řádu by pak byly tyto varianty neporovnatelné.

Tento případ si zkusíme sami ověřit v softwaru Matlab, kde budeme simulovat pro každou z náhodných veličin deset tisíc hodnot z příslušného normálního rozdělení. Dostaneme opět dva soubory nasimulovaných dat, které budeme porovnávat podle třech metod stochastické dominance stejným způsobem jako jsme to učinili v podkapitole 3.5. Tyto výpočty jsou provedené opět v přiloženém souboru a po jejich dokončení jsme zjistili, že podle stochastické dominance prvního i druhého řádu nebudeme preferovat ani jednu z variant. Pouze náhodou pak vyšlo, že podle druhého pravidla stochastické dominance budeme preferovat rizikovou variantu X před rizikovou variantou Y.

Tento příklad nás do jisté míry varuje, že pokud empirické distribuční funkce porovnávaných veličin leží velmi blízko u sebe, pak není nejvhodnější použít na jejich srovnávání metody stochastické dominance.

Závěr

V rámci bakalářské práce jsme se seznámili s pojmem riziko a jeho definicí, na což jsme navázali pojmem analýza rizika, který jsme rozdělili na činnost složenou ze dvou fází. Následně jsme se věnovali významnému tématu postoje rozhodovatele k riziku, jehož tři přístupy jsme zohlednili ve třetí části této práce.

Druhou kapitolu jsme věnovali simulaci Monte Carlo, kde jsme se seznámili s jeho historií a postupem, podle kterého se tato simulace používá. Tento postup jsme uplatnili k nasimulování vlastních dat, na nichž jsme názorně aplikovali metody porovnávání rizikových variant v rámci následující kapitoly.

Ve třetí a také poslední kapitole jsme se zaměřili na samotné téma této práce. Nejprve jsme popsali jakým způsobem, jsme v softwaru MS Excel vytvořili dvě rizikové varianty, které jsme později porovnávali podle čtyř metod, jejichž přesný popis a použití bylo hlavním obsahem této kapitoly. Podle první metody jsme uspořádali rizikové varianty pomocí číselných charakteristik, kterými byly aritmetický průměr, medián a p-kvantily. Zjistili jsme, že preferovaná varianta se s různými charakteristikami mění. Druhou metodou bylo porovnávání podle pravidla střední hodnoty a rozptylu, které bylo vhodné pro rozhodovatele s averzí k riziku. Třetí metoda se týkala uspořádání podle aspirační úrovně, přičemž jsme se dozvěděli, že preferované varianty se mění s uvažovanou úrovní překročení. Poslední metoda se zabývala uplatněním stochastické dominance, kterou jsme rozdělili na stochastickou dominanci prvního řádu, druhého řádu a druhé pravidlo stochastické dominance. Zjistili jsme, že podle stochastické dominance prvního i druhého řádu nebudeme preferovat ani jednu z variant. Podle druhého pravidla vybereme první variantu. Závěrem kapitoly jsme zmínili možná úskalí při používání metod stochastické dominance.

Tato práce prohloubila mé znalosti se softwarem MS Excel a typografickým systémem TEX. Také jsem si procvičila práci v Matlabu a zopakovala základní pojmy z teorie pravděpodobnosti a statistiky. Nakonec jsem se seznámila s analýzou rizika a simulací Monte Carlo, jejichž znalosti mi budou přínosem pro mé další studium.

Literatura

[1] Bittnerová, P.: Bakalářská práce: Preferenční relace na množině náhodných veličin. Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2014.

[2] Fabián, F., Kluiber, Z.: Metoda Monte Carlo a možnosti jejího uplatnění. Prospektrum, Praha, 1998.

[3] Fotr, J., Hnilica, J.: Aplikovaná analýza rizika: ve finančním managementu a investičním rozhodování (2. vydání). Grada, Praha, 2014.

[4] Fotr, J., Vacík, E., Souček, I., Špaček, M., Hájek, S.: *Tvorba strategie a strategické plánování*. Grada, Praha, 2012

[5] Hron, K., Kunderová, P.: *Základy počtu pravděpodobnosti a metod matematické statistiky (1.vydání)*. Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2013.

[6] Schmid, F., Trede, M.: *Finanzmarkt-statistik*. Berlin Heliderberg, Springer, 2006.

[7] Vose, D.: *Risk analysis: a quantitative guide (3rd edition)*. John Wiley Sons, West Sussex 2008.

[8] Rozhodování spotřebitele v podmínkách rizika [online]. [cit. 30.11.2014]

Dostupné z: http://edu.uhk.cz/ jindrvo1/files/miek2/texty/04_rozhodovani_spotrebitele_v_podminkach_rizika.pdf

[9] Histogram [online]. [cit. 07.03.2015] Dostupné z:

https://www.vugtk.cz/slovnik/4873_histogram-cetnosti

[10] Náhodná veličina [online]. [cit. 27.03.2015] Dostupné z:

http://k101.unob.cz/neubauer/pdf/nahodna_velicina.pdf

[11] Základní statistické pojmy [online]. [cit. 27.03.2015] Dostupné z:

http://k101.unob.cz/neubauer/pdf/zakladni_pojmy_zpracovani_dat.pdf