UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁRSKA PRÁCA

Riešenie diferenciálnych rovníc pomocou funkcionálnych radov

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedúci bakalárskej práce: **RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.**
Vypracoval(a): **Katarína Rybárová**
Študijný program: B1101 Matematika
Študijný odbor: Matematika a její aplikace
Forma štúdia: prezenčná
Rok odovzdávania: 2019

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKÁCIA

Autor: Katarína Rybárová

Názov práce: Riešenie diferenciálnych rovníc pomocou funkcionálnych radov

Typ práce: Bakalárska práca

Pracovisko: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedúci práce: RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2019

Abstrakt: Témou tejto bakalárskej práce je riešenie diferenciálnych rovníc pomocou funkcionálnych radov. Postupne oboznamuje čitateľa s problematikou riešenia tohto typu rovníc pomocou Taylorových, mocninových a Fourierových radov. Okrem samotného riešenia rovnice poskytuje aj informáciu o konvergencii riešenia v tvare funkcionálneho radu.

Kľúčové slová: funkcionálny rad, Fourierov rad, Taylorov rad, mocninový rad, diferenciálna rovnica, konvergencia, polomer konvergencie

Počet strán: 58

Počet príloh: 0

Jazyk: slovenský

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Katarína Rybárová

Title: Solving differential equations using function series

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.

The year of presentation: 2019

Abstract: This thesis deals with solving differential equations using functional series. It gradually introduces reader to the problematics of solving this type of equations using Taylor, power and Fourier series. Beside solving the equation itself, it also provides an information about the convergence of a solution in the form of functional series.

Key words: series of functions, Fourier series, Taylor series, power series, differential equation, convergence, radius of convergence

Number of pages: 58

Number of appendices: 0

Language: Slovak

Prehlásenie

Prehlasujem, že bakalársku prácu som spracovala samostatne pod vedením RNDr. Martiny Pavlačkovej, Ph.D., a všetky použité zdroje som uviedla v zozname literatúry.

V Olomouci dňa ....

podpis

Obsah

Poďakovanie

Rada by som poďakovala vedúcej mojej bakalárskej práce RNDr. Martine Pavlačkovej, Ph.D., za odborné rady, ochotu, trpezlivosť a čas, ktorý mi pri spracovaní témy obetovala. Taktiež by som rada poďakovala svojej rodine a blízkym, ktorí mi počas celého štúdia boli oporou a hnacou silou vpred.

Úvod

Diferenciálne rovnice sú matematickými rovnicami, ktoré spájajú funkcie spolu s ich deriváciami. V aplikáciách tieto funkcie zväčša predstavujú určité veličiny, derivácie reprezentujú mieru ich zmeny a rovnica definuje vzťah medzi nimi. Takéto vzťahy sú mimoriadne bežné, preto sa s rovnicami tohto typu stretávame v rôznych vedných disciplínach. Svoje uplatnenie nájdu v biológii, vo fyzike, v ekonómii a v ďaľších.

Témou mojej bakalárskej práce je štúdium riešenia diferenciálnych rovníc pomocou funkcionálnych radov a aplikácia na konkrétnych príkladoch. V troch kapitolách, členených na sekcie a subsekcie, je postupne vybudovaná stručná teória týkajúca sa nekonečných radov a diferenciálnych rovníc a neskôr je aplikovaná na konkrétnych príkladoch.

Prvá kapitola zavádza nekonečné rady. Komplexne rozoberá pojem rad a rôzne jeho typy, konvergenciu a veľký dôraz tiež kladie na rôzne kritériá, ktoré ju zabezpečujú.

V druhej kapitole sa pojednáva o diferenciálnych rovniciach. Stručná teória definuje samotnú diferenciálnu rovnicu, tiež sa zameriava na existenciu a jednoznačnosť jej riešenia.

Posledná, tretia, kapitola je najdôležitejšou časťou práce. Používa vopred zavedenú teóriu na riešenie diferenciálnych rovníc pomocou funkcionálnych radov. Na konkrétnych príkladoch je ukázané riešenie pomocou Taylorových radov, taktiež pomocou mocninových a Fourierových radov. Práve súčasťou riešenia pomocou mocninových radov sú aj Hermitovská a Legendrova diferenciálna rovnica, ktorých dôležitosť ukazuje fyzika a rôzne ďalšie technické obory.

Kapitola 1

Nekonečné rady

V prvej kapitole tejto bakalárskej práce sa budeme zaoberať nekonečnými radmi. Na začiatku rozoberieme číselné rady, neskôr sa budeme sústrediť na rady funkcionálne. Špeciálna pozornosť bude venovaná radom mocninovým a Fourierovým.

Pri spracovaní tejto kapitoly boli použité predovšetkým zdroje [1], [2], [4], [7], [9], [11], [12], [14], [17]-[19].

1.1. Číselné rady

Predmetom tejto sekcie bude uvedenie základných definícií a vlastností potrebných pri práci s číselnými radmi. Budeme sa zaoberať predovšetkým definíciou pojmu rad, ako súčet členov danej postupnosti. Taktiež bude potrebné zodpovedať otázky, ako správne sčítať nekonečný počet sčítancov a tiež to, čo bude ich súčtom.

Definícia 1.1. Ak $\{u_n\}$ značí číselnú postupnosť, potom nekonečným radom (stručne radom) nazývame symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{1.1}$$

ktorý často značíme len $\sum u_n$. Pritom sa čísla $u_1, u_2, \dots$ nazývajú členmi radu (1.1), z ktorých u_n je n-tý (alebo všeobecný) člen radu.

Previesť súčet nekonečného radu sčítancov v bežnom slova zmysle je nemožné. Preto pojem súčtu radu (1.1) zavádzame ako limitu postupnosti čiastnočných súčtov:

$s_1 = u_1,$

$s_2 = u_1 + u_2,$

$\dots$

$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$

$\dots$

Ak existuje vlastná limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ povieme, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ konverguje a má súčet s. Ak neexistuje vlastná limita $\lim s_n$, povieme, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ diverguje.

V prípade divergencie radu rozlišujeme tri nasledujúce prípady:

- Ak limita $\lim s_n = \infty$ hovoríme, že rad určite diverguje k $+\infty$.
- Ak limita $\lim s_n = -\infty$ hovoríme, že rad určite diverguje k $-\infty$.
- Ak $\lim s_n$ neexistuje hovoríme, že rad osciluje.

Ak má konvergentný rad $\sum u_n$ súčet s, píšeme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = s$. Ak je rad divergentný k $\pm\infty$, píšeme $\sum u_n = \infty$, prípadne $\sum u_n = -\infty$.

Veta 1.1 (Nutná podmienka konvergencie radu)**.** *Ak rad* (1.1) *konverguje, potom platí* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Dôkaz. Nech rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ konverguje a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = s$. Teda $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, a pretože $u_n = s_n - s_{n-1}$, plynie odtiaľ $u_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n - s_{n-1} = s - s = 0$. ■

Poznámka 1.1. Ku konvergencii radu (1.1) je nutné, ale nie je postačujúce, aby $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Z Definície (1.1) bezprostredne vyplýva nasledujúca poznámka.

Poznámka 1.2 (Pojem a vlastnosti zvyšku radu)**.**

1. Ak v danom rade vynecháme prvých n členov $u_1, u_2, \dots, u_n$ dostaneme rad tvaru

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k},$$

ktorý nazývame zvyškom radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

2. Je okamžite viditeľné, že nekonečný rad a jeho zvyšok R_n buď oba konvergujú, alebo oba divergujú. To vyplýva z toho, že na konvergenciu alebo divergenciu radu nemá vplyv vynechanie, poprípade pridanie, konečného počtu členov.

3. Ak je daný rad konvergentný a jeho súčet je s, potom pre jeho zvyšok R_n platí vzťah $R_n = s - s_n$. Odtiaľ

$$\lim_{n\to\infty} R_n = s - s = 0. \tag{1.2}$$

Podmienka (1.2) je pre konvergenciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ nutná i postačujúca.

Poznámka 1.3. Okrem (1.2) možno nutnú a postačujúcu podmienku konvergencie radu vyjadriť i nasledujúcou vetou.

Lemma 1.1. *(Bolzano–Cauchyho kritérium konvergencie). Rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *je konvergentný práve vtedy, keď postupnosť jeho čiastočných súčtov je cauchyovská, t.j. ak pre ľubovoľné* $\epsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$*, také, že pre každé* $n \geq n_0$ *a ľubovoľné* $m \in N$ *platí*

$$|s_{n+m} - s_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+m}| < \epsilon.$$

Dôkaz. Dôkaz vyplýva z Definície (1.1) a z úplnosti priestoru $\mathbb{R}$, čo znamená, že každá postupnosť v $\mathbb{R}$ je konvergentná práve vtedy, keď je cauchyovská. ■

Lemma 1.2. *Ak sú* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *konvergentné rady, aj rad v tvare* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ *je konvergentným a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

Dôkaz. Dôkaz vety možno nájsť napríklad v [2].

Lemma 1.3. *Nech* $c \neq 0$. *Potom rady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$ *konvergujú alebo divergujú súčasne. Ak konvergujú, tak platí*

$$c\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} cu_n.$$

Dôkaz. Dôkaz vety možno nájsť napríklad v [2].

1.1.1. Číselné rady s nezápornými členmi

Zistenie súčtu radu je častokrát namáhavé alebo nemožné, preto sa často orientujeme len na vyšetrenie konvergencie či divergencie daného radu.

V tejto podsekcii budú rozoberané práve rôzne pravidlá vyšetrovania konvergencie radov s nezápornými členmi. Tieto pravidlá budeme nazývať **kritériá**.

Možno medzi ne zaradzovať i **nutnú podmienku konvergencie** a tiež, v predchádzajúcom texte už spomínané, **Bolzano–Cauchyho kritérium**.

Veta 1.2. *Rad s nezápornými členmi môže buď konvergovať (pričom jeho súčet je nezáporný), alebo diverguje (k* ∞*). Rad konverguje práve vtedy, keď je postupnosť jeho čiastočných súčtov ohraničená.*

Dôkaz. Dôkaz vyplýva z vlastností limit postupností. Pre číselné rady s nezápornými členmi je postupnosť s_n neklesajúca, a teda bude konvergentná alebo bude divergovať k nekonečnu. ■

Veta 1.3. *(Porovnávacie kritérium). Nech* $\sum u_n$, $\sum v_n$ *sú rady s nezápornými členmi a nech* $u_n \leq v_n$ *pre skoro všetky* $n \in \mathbb{N}$. *Potom platí: ak konverguje rad* $\sum v_n$, *konverguje i rad* $\sum u_n$*; ak diverguje rad* $\sum u_n$, *diverguje i rad* $\sum v_n$.

Veta 1.4. *(Limitné porovnávacie kritérium). Nech* $\sum u_n, \sum v_n$ *sú rady s nezápornými členmi a nech existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = L.$$

Ak je $L < \infty$ *a ak rad* $\sum v_n$ *konverguje, potom konverguje i rad* $\sum u_n$.

Ak je $L > 0$ *a ak rad* $\sum v_n$ *diverguje, potom diverguje i rad* $\sum u_n$.

Veta 1.5. *(D'Alembertovo podielové kritérium). Nech* $\sum u_n$ *je rad s kladnými členmi.*

1. *Ak platí pre všetky* $n \in \mathbb{N}$ *nerovnosť* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q < 1$, *potom rad* $\sum u_n$ *konverguje. Ak platí pre všetky* $n \in \mathbb{N}$ *nerovnosť* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, *potom rad* $\sum u_n$ *diverguje.*

2. *(Limitné podielové kritérium).Ak existuje*

   $$\lim_{n\to\infty} \tfrac{u_{n+1}}{u_n} = q, \quad kde\ q \in \mathbb{R}^*,$$

   potom v prípade $q < 1$ *rad* $\sum u_n$ *konverguje a v prípade* $q > 1$ *rad* $\sum u_n$ *diverguje.*

Poznámka 1.4. Treba upozorniť, že v prípade $q = 1$ limitným podielovým kritériom nemožno rozhodnúť o konvergencii radu.

Veta 1.6. *(Cauchyho odmocninové kritérium). Nech* $\sum u_n$ *je rad s nezápornými členmi.*

1. *Ak pre všetky* $n \in N$ *platí nerovnosť* $\sqrt[n]{u_n} \leq q < 1$, *potom rad konverguje. Ak pre nekonečne mnoho* $n \in N$ *platí nerovnosť* $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, *potom rad diverguje.*

2. *(Limitné odmocninové kritérium). Ak existuje*

   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q, \quad kde\ q \in \mathbb{R}^*,$$

potom v prípade $q < 1$ rad $\sum u_n$ konverguje a v prípade $q > 1$ rad $\sum u_n$ diverguje.

Poznámka 1.5. Treba upozorniť, že v prípade $q = 1$ limitným odmocninovým kritériom nemožno rozhodnúť o konvergencii radu.

Veta 1.7. *(Raabeho limitné kritérium). Nech $u_n > 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a nech*

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = q.$$

V prípade $q > 1$ rad konverguje. Ak $q < 1$, tak bude daný rad divergovať.

Poznámka 1.6. Ide o silnejšie kritérium ako podielové. Znovu platí, že v prípade $q = 1$ daným kritériom nemožno rozhodnúť o konvergencii radu.

Veta 1.8. *(Integrálne kritérium). Buď f nerastúca nezáporná funkcia definovaná na intervale $[1, \infty)$. Nech $f(n) = u_n$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ konverguje práve vtedy, keď konverguje nevlastný integrál $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$.*

Poznámka 1.7. Integrálne kritérium ukazuje vzťah medzi nekonečnými radmi a nevlastnými integrálmi.

Poznámka 1.8. Dôkazy kritérií konvergencie, spomenutých vyššie, možno nájsť napríklad v [2].

Poznámka 1.9. Vzhľadom k tomu, že kapitola týkajúca sa číselných radov je len kapitolou pomocnou, nebudú jednotlivé kritéria ilustrované na príkladoch.

1.1.2. Absolútne a neabsolútne konvergentné rady

V tejto sekcii sa budeme sústrediť na problematiku absolútne a neabsolútne konvergentných radov. Obdobne, ako pri sekcii o číselných radoch s nezápornými členmi, aj teraz uvedieme niekoľko kritérií, ktoré nám pomôžu pri vyhodnocovaní konvergencií jednotlivých radov.

Definícia 1.2. Rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1.3}$$

sa nazýva absolútne konvergentný, ak rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \tag{1.4}$$

absolútnych hodnôt radu (1.3) konverguje. Ak (1.3) konverguje, ale (1.4) diverguje, hovoríme o relatívnej (neabsolútnej) konvergencii.

Poznámka 1.10.

1. Absolútne konvergentný rad je tiež konvergentný.

2. Ak rad (1.3) absolútne konverguje, potom platí

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|.$$

Priamo z kritérií uvedených pre rady s nezápornými členmi vyplývajú nasledujúce tvrdenia.

Veta 1.9. *(Porovnávacie kritérium). Nech* $\sum v_n$ *je konvergentný rad s nezápornými členmi a* $\sum u_n$ *je rad s ľubovoľnými členmi. Ak pre všetky* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $|u_n| \leq v_n$*, potom rad* $\sum u_n$ *konverguje absolútne.*

Veta 1.10. *(Odmocninové a limitné odmocninové kritérium). Ak pre všetky* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $\sqrt[n]{|u_n|} \leq q < 1$*, potom rad* $\sum u_n$ *absolútne konverguje.*
Ak existuje $\lim \sqrt[n]{|u_n|} = q \in \mathbb{R}^*$*, potom v prípade* $q < 1$ *rad* $\sum u_n$ *absolútne konverguje.*

Veta 1.11. *(Podielové kritérium). Nech je* $\sum u_n$ *rad s nenulovými členmi.*
Ak pre všetky $n \in N$ *platí* $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| \leq q < 1$*, potom rad* $\sum u_n$ *absolútne konverguje.*
Ak existuje $\lim |\frac{u_{n+1}}{u_n}| = q$*, potom v prípade* $q < 1$ *rad* $\sum u_n$ *absolútne konverguje.*

Ďalšími kritériami, ktoré možno využiť pri skúmaní konvergencie radov s ľubovoľnými členmi sú Abelovo a Dirichletovo kritérium.

Veta 1.12. *(Dirichletovo a Abelovo kritérium). Nech* $\{v_n\}$ *je monotónna postupnosť a platí jedna z nasledujúcich podmienok.*

1. *(Dirichlet) Postupnosť čiastočných súčtov radu* $\sum u_n$ *je ohraničená a* $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$*;*

2. *(Abel) Rad* $\sum u_n$ *absolútne konverguje a postupnosť* $\{v_n\}$ *je ohraničená.*

Potom rad $\sum u_n v_n$ *konverguje.*

Poznámka 1.11. Dôkazy, vyššie spomenutých, kritérií pre rady s ľubovoľnými členmi možno nájsť napríklad v [11].

1.1.3. Alternujúce rady

Ide o rady, ktorých členy pravidelne menia znamienko.

Definícia 1.3. Nekonečný rad $\sum u_n$ sa nazýva alternujúci, práve vtedy, keď platí

$$sgn\, u_{n+1} = -sgn\, u_n, \text{ pre všetky } n \in \mathbb{N}.$$

Pokiaľ nie sú všetky členy nulové, ide každý alternujúci rad zapísať v tvare $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ alebo tvare $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$, kde $u_n > 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Veta 1.13. *(Leibnitzovo kritérium). Predpokladajme, že je* $u_n \geq 0$ *pre každé* $n \in \mathbb{N}$ *a postupnosť* u_n *nech je nerastúca. Potom* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ *práve vtedy, keď* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ *konverguje.*

Dôkaz. Dôkaz vety možno nájsť napríklad v [12].

1.2. Postupnosti a rady funkcií

V tejto časti práce sa budeme zaoberať pojmami týkajúcimi sa postupností a radov funkcií. Mnohé z nich budú analógiou definícií, ktoré boli spomínané v sekcii o nekonečných číselných radoch.

1.2.1. Funkcionálne postupnosti

Definícia 1.4. Zobrazenie množiny $\mathbb{N}$ do množiny všetkých funkcií definovaných na intervale $M \subset \mathbb{R}$ sa nazýva postupnosť funkcií na M alebo funkcionálna postupnosť na M a značí sa $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Funkcia $f_n(x)$ sa nazýva n-tý člen postupnosti $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Definícia 1.5. Uvažujme postupnosť funkcií $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ na množine M. Povieme, že postupnosť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ na množine M

- je bodovo ohraničená postupnosť, ak
$$\forall x \in M \quad \exists K \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} : |f_n(x)| \leq K;$$
- je rovnomerne ohraničená, ak
$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in M \quad \forall n \in \mathbb{N} : |f_n(x)| \leq K;$$
- má bodovú limitu, ak
$$\forall x \in M \quad \exists \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x);$$
- bodovo konverguje k funkcii f, ak
$$\forall x \in M \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$
(značíme $f_n \to f$ na M);
- rovnomerne konverguje k funkcii f, ak
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall x \in M \quad \forall n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$
(značíme $f_n \rightrightarrows f$);

- lokálne rovnomerne konverguje k f, ak rovnomerne konverguje k f na každej kompaktnej (t.j. ohraničenej a uzavretej) podmnožine množiny M (značíme $f_n \overset{\text{Lok}}{\rightrightarrows} f$);

- je bodovo cauchyovská, ak

$$\forall x \in M \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n > n_0 : |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon;$$

- je rovnomerne cauhyovská, ak

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 \quad \forall x \in M : |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$

Poznámka 1.12. Vyššie uvedené vlastnosti majú medzi sebou radu, na prvý pohľad, zrejmých súvislostí, napr. rovnomerne konvergentná postupnosť je i bodovo konvergentná. To isté platí pre ohraničenosť a cauchyovskosť.

Veta 1.14. *(Bolzano–Cauchyho podmienka). Postupnosť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ bodovo konverguje na M (k určitej funkcii f) vtedy a len vtedy, ak je na M bodovo cauchyovská; konverguje rovnomerne na M, ak je na M rovnomerne cauchyovská.*

Dôkaz. Dôkaz tejto vety možno nájsť napríklad v [2].

Mnohé z vlastností funkcií f_n, $n \in \mathbb{N}$ (spojitosť, diferencovateľnosť, integrovateľnosť,...) sa nemusia prenášať na bodovú limitu. Preto sme dodefinovali silnejšiu, tzv. rovnomernú, konvergenciu. Z rovnomernej konvergencie automaticky vyplýva konvergencia bodová (ako už bolo zmienené vyššie), naopak však vzťah všeobecne neplatí.

Veta 1.15. *Nech postupnosť funkcií $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ spojitých na M konverguje lokálne rovnomerne na M k funkcii f. Potom je f spojitá na M.*

Dôkaz. Dôkaz vety možno nájsť napríklad v [2].

Veta 1.16. *(Diniho). Nech je $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ monotónna postupnosť funkcií, spojitých na kompaktnej množine M. Ak je jej bodová limita f spojitá na M, potom $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k f rovnomerne na M.*

Dôkaz. Dôkaz vety možno nájsť napríklad v [14].

Veta 1.17. *Nech postupnosť* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *spojitých funkcií na uzavretom intervale* $[a,b]$ *rovnomerne konverguje k funkcii* f*. Potom* $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx$*, t.j.,*

$$\int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx. \tag{1.5}$$

Dôkaz. Dôkaz vety možno nájsť napríklad v [2].

Veta 1.18. *Uvažujme postupnosť funkcií* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *na* M*, a nech* f *je funkcia na* M*. Potom* f_n *rovnomerne konverguje k* f *na* M *vtedy a len vtedy, ak postupnosť* $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$*, kde* $S_n = \sup\limits_{x\in M} |f_n(x) - f(x)|$ *konverguje k* 0*.*

Dôkaz. Dôkaz vety možno nájsť napríklad v [14].

Veta 1.19. *Nech postupnosť* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *funkcií spojite diferencovateľných na ohraničenom intervale (a,b) konverguje aspoň v jednom bode tohto intervalu. Nech ďalej postupnosť jej derivácií* $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje rovnomerne na (a,b) k funkcii* f_0*. Potom postupnosť* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje rovnomerne na (a,b) k istej funkcii* f *na (a,b) a platí* $f'(x) = f_0(x) \quad \forall x \in (a,b)$*.*

Dôkaz. Dôkaz vety možno nájsť napríklad v [5].

1.2.2. Funkcionálne rady

Majme postupnosť funkcií $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ definovaných na neprázdnej množine M. Výraz

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{1.6}$$

nazývame nekonečným radom, ktorého členy sú funkcie, alebo funkcionálnym radom. Funkciu f_i, $i = 1, 2, \ldots$ nazývame i-tým členom funkcionálneho radu (1.6).

Funkciu

$$s_i(x) = \sum_{j=1}^{i} f_j(x), \quad i = 1, 2, \dots \tag{1.7}$$

nazývame i-tým čiastočným súčtom funkcionálneho radu (1.6).

Postupnosť

$$\{s_1(x), s_2(x), \dots\} \tag{1.8}$$

nazývame postupnosťou čiastočných súčtov funkcionálneho radu (1.6).

Nekonečný rad

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+k}(x) + \dots$$

nazývame zvyškom funkcionálneho radu (1.6) po n-tom člene.

Definícia 1.6. Funkcionálny rad (1.6) bodovo (resp. rovnomerne) konverguje na množine $I \subseteq M$, ak na I bodovo (resp. rovnomerne) konverguje postupnosť $\{s_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ jeho čiastočných súčtov.

Definícia 1.7. Obor (bodovej) konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nazveme množinu všetkých prvkov $x \in M$ pre ktoré rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje.

Veta 1.20. *Ak rad* (1.7) *konverguje bodovo (resp.rovnomerne) na M, potom postupnosť funkcií $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje bodovo (resp.rovnomerne) k 0 na M.*

V nasledujúcom texte uvedieme niektoré kritériá pre zisťovanie rovnomernej konvergencie funkcionálnych radov. Jednou z možností je overiť rovnomernú konvergenciu radu porovnaním s iným funkcionálnym radom. Najjednoduchšiu sitáciu, kedy budeme schopní priradiť k danému radu funkcií číselný majorantný rad, bude popisovať Weierstrassovo kritérium. Tiež spomenieme kritéria, ktoré sú vhodné aj pre rady, ktoré nekonvergujú absolútne.

Veta 1.21. *(Weierstrassovo kritérium). Buď* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *rad funkcií definovaných na* M*. Nech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *je konvergentný rad nezáporných čísel. Ak pre každé* $x \in M$ *a každé prirodzené* n *platí* $|f_n(x)| \leq u_n$*, potom rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje absolútne a rovnomerne na* M*.*

Dôkaz. Dôkaz tejto vety možno nájsť napríklad v [11].

Veta 1.22. *(Dirichletovo kritérium). Nech* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť reálnych funkcií na množine* M*. Nech*

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \tag{1.9}$$

je rad funkcií. Predpokladajme, že

1. *postupnosť čiastočných súčtov radu* (1.9) *je rovnomerne ohraničená na M;*
2. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *rovnomerne konverguje k 0 na* M *a pre každé* $x \in M$ *je postupnosť* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *monotónna.*

Potom rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x) \tag{1.10}$$

rovnomerne konverguje na M*.*

Veta 1.23. *(Abelovo kritérium). Nech* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť reálnych funkcií na množine M,* (1.9) *je rad funkcií na* M*. Predpokladajme, že*

1. *rad* (1.9) *rovnomerne konverguje na* M*;*
2. *postupnosť* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *je rovnomerne ohraničená na* M *a pre každé* $x \in M$ *je postupnosť* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *monotónna.*

Potom rad (1.10) *konverguje rovnomerne na* M*.*

Poznámka 1.13. Dôkazy dvoch predchádzajúcich kritérií konvergencie možno nájsť napríklad v [11].

Veta 1.24. *Nech funkcie* $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ *sú spojité na* M *a funkcionálny rad* (1.6) *je rovnomerne konvergentný na* M. *Potom súčet* s *funkcionálneho radu* (1.6) *je spojitá funkcia na* M.

Dôkaz. Dôkaz vyplýva z Vety (1.15).

Veta 1.25. *Nech funkcionálny rad* (1.6) *rovnomerne konverguje na množine* M *a má tam súčet* s. *Nech* $a, b \in M$ *a nech existuje* $\int\limits_a^b f_n(x)dx$, *pre každé* $n \in \mathbb{N}$. *Potom existuje aj* $\int\limits_a^b s(x)dx$ *a platí:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right] dx = \int_a^b s(x)dx.$$

Ak platí predchádzajúca rovnosť, hovoríme, že funkcionálny rad (1.6) *môžeme integrovať člen za členom.*

Dôkaz. Dôkaz vyplýva z Vety (1.17).

Veta 1.26. *Nech funkcie* $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ *majú na otvorenej množine* M *spojité derivácie, nech funkcionálny rad* (1.6) *konverguje aspoň v jednom bode z* M *a nech funkcionálny rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots + f_n'(x) + \ldots$$

rovnomerne konverguje na M. *Potom funkcionálny rad* (1.6) *rovnomerne konverguje na* M *a platí:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right]'$$

pre každé $x \in M$.

Dôkaz. Dôkaz vyplýva z Vety (1.19).

1.3. Mocninové rady

Medzi najjednoduchšie a najdôležitejšie funkcionálne rady patria mocninové rady, ktoré sa vyznačujú predovšetkým jednoduchými podmienkami pre rovnomernú konvergenciu a ľahkými početnými operáciami.

Definícia 1.8. Nech $a \in \mathbb{R}$ a nech $u_n \in \mathbb{R}$ pre $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. Mocninovým radom so stredom v bode a nazývame funkcionálny rad v tvare

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x-a)^n = u_0 + u_1(x-a) + u_2(x-a)^2 + \dots, \tag{1.11}$$

   kde čísla u_k nazývame koeficienty tohto radu.

2. Ak je $a = 0$, dostaneme mocninový rad so stredom v bode 0 v tvare

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \dots. \tag{1.12}$$

Ak v mocninovom rade (1.12) nahradíme premennú x rozdielom $x - a$, dostaneme mocninový rad (1.11). Preto sa pri štúdiu vlastností mocninových radov stačí obmedziť na rady (1.12).

Veta 1.27. *Pre rad* (1.11) *platí:*

1. *Obor konvergencie radu* (1.11) *je interval s koncovými bodmi $a - r$, $a + r$, pričom $r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|}}$ vtedy a len vtedy, keď* $0 < \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} < \infty$.

2. *Obor konvergencie radu* (1.11) *je celá množina* $\mathbb{R}$ *vtedy a len vtedy, keď* $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 0$.

3. *Rad* (1.11) *je konvergentný len vo svojom strede a vtedy a len vtedy, keď* $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \infty$.

Dôkaz. Dôkaz tejto vety možno nájsť napríklad v [2].

Definícia 1.9. Číslo r nazývame polomerom konvergencie a interval $M = (a - r, a + r)$ intervalom konvergencie mocninového radu (1.11). V prípade 2 hovoríme, že polomer r je ∞, v prípade 3, že polomer r je 0.

Poznámka 1.14. Polomer konvergencie r tiež možno vypočítať pomocou predpisu $r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|}}$ alebo $r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|}$, pokiaľ tieto limity existujú.

Kľúčovú rolu hrá pri funkcionálnych radoch rovnomerná konvergencia. Nasledujúca veta hovorí, na akom intervale je mocninový rad rovnomerne konvergentný.

Veta 1.28. *Nech $r > 0$ je polomer konvergencie mocninového radu $\sum u_n x^n$. Potom tento rad rovnomerne konverguje na každom uzavretom podintervale $[-\rho, \rho]$ intervalu $(-r, r)$.*

Dôkaz. Dôkaz vety možno nájsť napríklad v [2].

Dôsledok 1.1. *Nech mocninový rad $\sum u_n x^n$ má polomer konvergencie $r > 0$. Potom súčet tohto radu je spojitá funkcia na intervale $(-r, r)$.*

Dôsledok 1.2. *Nech mocninový rad $\sum u_n x^n$ má polomer konvergencie $r > 0$, a nech $x \in (-r, r)$. Potom*

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x u_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

pričom mocninový rad na pravej strane má rovnaký polomer konvergencie.

Dôsledok 1.3. *Nech má mocninový rad $\sum u_n x^n$ polomer konvergencie $r > 0$. Potom pre všetky $x \in (-r, r)$ platí*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n u_n x^{n-1},$$

pričom mocninový rad na pravej strane má opäť polomer konvergencie r.

Veta 1.29. *(Abelova). Ak mocninový rad* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ *konverguje v bode* $x = r$*, pričom* r *je polomerom konvergencie daného radu, potom konverguje rovnomerne na intervale* $[0, r]$ *a teda platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n r^n = \lim_{x \to r-} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n.$$

Dôkaz. Dôkaz tejto vety možno nájsť napríklad v [2].

1.3.1. Taylorove rady

Na rozdiel od predchádzajúceho, kde bol daný mocninový rad a určovali sme jeho súčet, budeme riešiť opačnú úlohu: danú funkciu budeme rozvíjať do mocninového radu, tzv.Taylorovho radu.

Reálna funkcia f bude definovaná na nejakom okolí $U(a)$ bodu a. Úlohou bude zistiť, či existuje mocninový rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n (x-a)^n$ so stredom v bode a, konvergentný na okolí $U(a)$ k funkcii f.

Definícia 1.10. Funkciu f nazveme analytickou v bode a, ak je v nejakom okolí bodu a rovná súčtu nejakého konvergentného radu (1.11).

Poznámka 1.15. Vyššie zmienený problém ide rozdeliť na dve časti:

1. Je možné funkciu f rozvinúť na nejakom intervale v mocninový rad so stredom v bode a?

2. Pokiaľ áno, ako vyzerajú koeficienty u_n tohto mocninového radu?

Najskôr sa zameriame na druhú otázku, teda odvodíme, ako budú vyzerať koeficienty u_n. Pre jednoduchosť predpokladajme $a = 0$ a existenciu $u_0, u_1, \ldots$ takých, že

$$f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots$$

na nejakom okolí bodu 0. Požadujeme pritom, aby koeficienty u_n boli také, aby funkcia $f(x)$ a rad $u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots$ mali rovnaké hodnoty derivácií v bode 0.

Tzn., aby rovnosti:

$$f'(x) = u_1 + 2u_2x + 3u_3x^2 + \dots$$

$$f''(x) = 2u_2 + 6u_3x + \dots$$

$$f^{'''}(x) = 6u_3 + \dots$$

platili pre $x = 0$. Má teda platiť:

$$f'(0) = u_1$$

$$f''(0) = 2u_2$$

$$f^{'''}(0) = 6u_3 = 3!u_3$$

$$\dots$$

$$f^n(0) = n!u_n.$$

Z toho vyplýva, že koeficienty u_n splňujú:

$$u_0 = f(0), \quad u_1 = f'(0), \quad u_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad \dots, \quad u_n = \frac{f^n(0)}{n!}.$$

Z prevedenej úvahy je viditeľné, že pokiaľ možno funkciu rozvinúť v mocninový rad, potom má tento rad špeciálny charakter, ktorý je jednoznačne určený hodnotami derivácií v bode a.

Veta 1.30. *(O Taylorovom rozvoji). Ak možno funkciu $f : U(a) \to \mathbb{R}$ rozvinúť v mocninový rad* (1.11)*, potom pre jeho koeficienty platí*

$$u_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{1.13}$$

pre každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, kde pokladáme $f^{(0)}(a) = f(a)$.

Dôsledok 1.4. *Existuje nanajvýš jeden mocninový rad so stredom v bode a, ktorý konverguje na $U(a)$ k funkcii f. Jeho koeficienty sú v tvare* (1.13)*.*

Definícia 1.11. Nech je funkcia $f(x)$ definovaná v nejakom okolí bodu a a nech má každú deriváciu v tomto bode. Potom sa mocninový rad

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

nazýva Taylorov rad funkcie f v bode a. Koeficienty radu nazývame Taylorovými koeficientami a n-tý čiastočný súčet nazývame Taylorovým polynómom stupňa n a značíme ho $T_n(x)$. Špeciálnym prípadom Taylorovho radu je rad pre $a = 0$, ktorý nesie názov Maclaurinov rad funkcie f.

Taylorov rad nie vždy konverguje k danej funkcii. Teraz, po zodpovedaní druhej otázky sa zameriame na prvú otázku uvedenej poznámky, teda na existenciu Taylorovho radu.

Definícia 1.12. Nech funkcia $f : U(a) \longrightarrow \mathbb{R}$ má derivácie v bode a až do n-tého rádu. Potom funkciu $R_{n+1} : U(a) \longrightarrow \mathbb{R}$ definovanú vzťahom

$$R_{n+1}(x) = f(x) - T_n(x)$$

nazveme n-tým Taylorovým zvyškom.

Veta 1.31. *Nech má funkcia f v bode a derivácie všetkých rádov. Potom Taylorov rad funkcie f konverguje k funkcii f v bode $x \in U(a)$ práve vtedy, keď*

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0. \tag{1.14}$$

Dôkaz. Fakt, že Taylorov rad konverguje k funkcii f znamená, že

$$T_n(x) \to f(x) \text{ pre každé } x \in U(a),$$

čo znamená

$R_{n+1}(x) = T_n(x) - f(x) \to 0$ pre každé $x \in U(a)$. ∎

Zostáva zodpovedať otázku, za akých okolností je splnená rovnosť (1.14).

Poznámka 1.16. Pre $a, b \in \mathbb{R}$ označme symbolom I_{ab} interval (a, b), ak $a < b$ a interval (b, a), ak $b < a$.

Veta 1.32. *(O zvyšku). Nech má f na $U(a)$ derivácie všetkých rádov a nech má funkcia $\varphi(x)$ na $U(a)$ deriváciu, $\varphi'(x) \neq 0$ pre každé $x \in U(a)$. Potom pre každé $n \in N$, $x \in U(a)$ existuje $\xi \in I_{ax}$ tak, že*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!} \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi).$$

Dôkaz. Dôkaz vety možno nájsť napríklad v [1].

Poznámka 1.17. V reálnom prípade je častokrát výhodné uvažovať Taylorove zvyšky v Lagrangeovom tvare, kedy položíme $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$. Teda dostávame

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi)$$

a pre $\varphi(t) = t$ dostávame tzv. Cauchyov tvar zvyšku

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)(x-\xi)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi).$$

Veta 1.33. *Nech $x \in (a-\delta, a+\delta)$, kde $\delta > 0$. Ak existuje $M > 0$ tak, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$|f^{(n)}(t)| \leq M \text{ pre každé } t \in I_{ax}.$$

Potom Taylorov rad konverguje k funkcii f v bode x.

Dôkaz. Stačí dokázať, že je splnená podmienka (1.14). Vezmime Lagrangeov tvar zvyšku $R_{n+1}(x)$. Preň platí

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \cdot |x-a|^{n+1} \leq \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!},$$

kde $\xi \in I_{a,x}$. Výraz napravo konverguje k nule pre $n \to \infty$. Teda (1.14) platí. ■

Poznámka 1.18. Uveďme Maclaurinove rozvoje niektorých elementárnych funkcií:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\sinh x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n}}{n} \quad -1 < x \leq 1,$$

$$(1+x)^y = 1 + yx + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y(y-1)\dots(y-n+1)}{n!} x^n, \quad -1 < x < 1.$$

1.4. Fourierove rady

V tejto kapitole zmienime teóriu pre aproximáciu periodických funkcií. Najjednoduchším netriviálnym príkladom periodických funkcií sú trigonometrické funkcie $\cos nx$, $\sin nx$ ($n \in \mathbb{N}$). Ponúka sa preto myšlienka všeobecnú 2π-periodickú funkciu aproximovať buď lineárnou kombináciou konečného počtu týchto funkcií

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \text{kde} \quad a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}, \tag{1.15}$$

alebo nekonečným radom

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad \text{kde} \quad a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}. \tag{1.16}$$

Funkcia v tvare (1.15) sa nazýva trigonometrický polynóm, rad tvaru (1.16) sa nazýva trigonometrickým radom.

Podstatnou úlohou pri budovaní teórie Fourierových radov hrá vlastnosť ortogonality (kolmosti) systému funkcií $\{\varphi_n(x)\}$.

Definícia 1.13. Nech sú f, g integrovateľné funkcie na intervale $[a, b]$. Číslo

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

nazývame skalárnym súčinom funkcií f, g. Funkcie f, g sa nazývajú ortogonálnymi (na intervale $[a, b]$), práve keď $(f, g) = 0$.

Definícia 1.14. Buď f integrovateľná funkcia na intervale $[a, b]$. Normou funkcie f rozumieme číslo $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. Funkcia f sa nazýva normovaná, práve keď $\|f\| = 1$.

Definícia 1.15.

- Nech $\{\varphi_n\}$ je konečná alebo spočetná postupnosť integrovateľných funkcií na intervale $[a, b]$. Táto postupnosť sa nazýva ortogonálna, práve keď každé dve funkcie φ_m, φ_n $(m \neq n)$ sú ortogonálne a každá funkcia φ_n má kladnú normu.

- Postupnosť $\{\varphi_n\}$ sa nazýva ortonormálna, práve keď je ortogonálna a každá funkcia φ_n je normovaná.

Poznámka 1.19. Postupnosť $\{\varphi_n\}$ je teda ortonormálna, práve keď platí:

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

Poznamenajme, že ak $\{\varphi_n\}$ je ortogonálna postupnosť, potom je $\left\{\frac{1}{\|\varphi_n\|} \cdot \varphi_n\right\}$ ortonormálna postupnosť.

Definícia 1.16. Nech je φ_n ortogonálna postupnosť funkcií na intervale $[a, b]$, f integrovateľná funkcia na $[a, b]$. Potom čísla c_n vyjadrené vzorcom

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}, \quad n \in N,$$

nazývame Fourierove koeficienty funkcie f vzhľadom k ortogonálnej postupnosti φ_n a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n$, kde c_n sú Fourierove koeficienty, Fourierovým radom funkcie f vzhľadom k ortogonálnej postupnosti φ_n.

Poznámka 1.20. V prípade, kedy je postupnosť $\{\varphi_n\}$ ortonormálna, platí pre Fourierove koeficienty funkcie f jednoduchší vzťah $c_n = (f, \varphi_n)$.

1.4.1. Fourierove rady vzhľadom k systému $\{\cos nx, \sin nx\}$

V tejto časti sa budeme zaoberať výlučne systémom funkcií

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\},$$

ktorý bude uvažovaný na ľubovoľnom intervale $[a, a + 2\pi]$ dĺžky 2π. Príslušná ortonormálna postupnosť je v tvare

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots\right\}.$$

Definícia 1.17. Ak sú konštanty a_0, a_k, b_k polynómu (1.15) (resp. radu (1.16)) Fourierovými koeficientami tvaru

$$a_0 = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_a^{a+2\pi} f(x)dx, \quad a_k = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_a^{a+2\pi} f(x)\cos(kx)dx \quad \text{a}$$

$$b_k = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_a^{a+2\pi} f(x)\sin(kx)dx \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

potom tento polynóm nazývame Fourierovým (trigonometrickým) polynómom a značíme ho $\Phi_n(x)$ (resp. rad (1.16) nazývame Fourierovým radom).

Ak sa má dať funkcia $f(x)$ vyjadriť ako súčet Fourierovho radu (s periódou 2π) na intervale $(-\infty, \infty)$, je nutné, aby funkcia f bola na uvedenom intervale funkciou periodickou s periódou 2π. To vyplýva z toho, že trigonometrický polynóm Φ_n je periodickou funkciou s periódou 2π, a pretože príslušný Fourierov rad sa rovná limite $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n(x)$, je tiež periodickou funkciou s periódou 2π. Vzhľadom k tomu neperiodická funkcia g, ktorú ide rozvinúť vo Fourierov rad na niektorom intervale $(a, a+2\pi)$, splýva s funkciou, ktorá je súčtom tohto Fourierovho radu, len na uvedenom intervale, pretože tento súčet je periodickou funkciou, zatiaľ, čo neperiodická funkcia nadobúda hodnôt, ktoré sa periodicky neopakujú.

Ak je funkcia $f(x)$ párna, potom $b_n = 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$ a rad (1.16) sa označuje kosínusový. V prípade nepárnej funkcie $f(x)$ bude platiť $a_n = 0$ pre každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a rad (1.16) bude označovaný ako rad sínusový.

Častokrát dochádza ku situácii, kedy je funkcia $f(x)$ definovaná a integrovateľná len na intervale $[0, \pi]$, prípadne $(0, \pi]$. V takomto prípade k funkcii $f(x)$ konštruujeme jej párne, respektíve nepárne, rozšírenie na celý interval $[-\pi, \pi]$.

Párne rozšírenie funkcie $f(x)$ bude predstavovať nová funkcia $f^p(x)$ definovaná nasledovne

$$f^p(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi], \\ f(-x), & x \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

Nepárne rozšírenie funkcie $f(x)$ bude označované ako nová funkcia f^n definovaná nasledujúcim predpisom

$$f^n(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, \pi], \\ 0, & x = 0, \\ -f(-x), & x \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

Obe funkcie sú definované na celom intervale $[-\pi, \pi]$, pričom funkcia f^p je párna a funkcia f^n nepárna.

Veta 1.34. *Ak sú obidve funkcie $f(x), f^2(x)$ integrabilné na intervale $(-\pi, \pi)$, potom pre Fourierove koeficienty a_n, b_n funkcie f platí*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Pritom oba rady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

sú absolútne konvergentné.

Dôkaz. Dôkaz tejto vety možno nájsť napríklad v [11].

Nasledujúca veta hovorí o postačujúcich podmienkach, ktoré kladieme na Fourierov rad funkcie $f(x)$, t.j. rad (1.16) s koeficientami (1.17), aby mal na intervale $[-\pi, \pi]$ za súčet práve funkciu $f(x)$.

Veta 1.35. *(O konvergencii Fourierovho radu - Dirichletova veta). Majme danú funkciu $f(x)$, ktorá je na intervale $[-\pi, \pi]$ po častiach spojitá a po častiach monotónna. Potom Fourierov rad tejto funkcie na intervale $[-\pi, \pi]$ konverguje a hodnoty tohto súčtu sú:*

- $f(x_0)$ *v každom bode* $x_0 \in (-\pi, \pi)$, *kde* $f(x)$ *je spojitá,*
- $\frac{1}{2}[f(x_0^-) + f(x_0^+)]$ *v tých bodoch* $x_0 \in (-\pi, \pi)$, *kde je* $f(x)$ *nespojitá,*
- $\frac{1}{2}[f(\pi^+) + f(\pi^-)]$ *v krajných bodoch intervalu* $[-\pi, \pi]$.

Dôkaz. Dôkaz tejto vety možno nájsť napríklad v [9].

Poznámka 1.21. Pokiaľ by sme konštruovali Fourierov rad funkcie f na intervale všeobecnej dĺžky $2l$, t.j. na $[a, a+2l]$, kde $a \in \mathbb{R}$, $l > 0$, potom by rad mal tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi}{l} x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) \right),$$

kde

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{l} x\right) dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{a}^{a+2l} f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Kapitola 2

Diferenciálne rovnice

Kapitola o diferenciálnych rovniciach priblíži základné pojmy nevyhnutné pri riešení tohto typu rovníc. Vo všeobecnosti ide o rovnice, v ktorých ako premenné vystupujú derivácie funkcií.

Pri spracovaní tejto kapitoly boli použité predovšetkým zdroje [3], [5], [6], [8], [9], [11].

Definícia 2.1. Nech F je daná funkcia $n+2$ premenných na nejakom obore $G \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Rovnicu

$$F\left(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)\right) = 0 \tag{2.1}$$

nazývame potom obyčajnou diferenciálnou rovnicou rádu n pre neznámu funkciu x. Pod rádom diferenciálnej rovnice rozumieme rád najvyššej derivácie neznámej funkcie vyskytujúcej sa v rovnici.

Riešením alebo integrálom tejto rovnice sa rozumie funkcia x, ktorá je definovaná na nejakom intervale $J \subseteq \mathbb{R}$ a pre všetky $t \in J$ splňuje tieto podmienky:

$$[t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)] \in G,$$

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0.$$

Ak nie je interval J otvorený, potom v každom krajnom bode ξ, $\xi \in J$ značí $x'(t)$ jednostrannú deriváciu. Graf riešenia sa nazýva integrálna krivka.

Všeobecným riešením diferenciálnej rovnice (2.1) nazývame riešenie, ktoré možno zapísať v tvare $x = f(t, c_1, c_2, \dots, c_n)$, kde $c_1, c_2, \dots, c_n$ sú ľubovoľné konštanty. Partikulárne riešenie rovnice (2.1) získame, ak za konštanty $c_1, c_2, \ldots, c_n$ zvolíme konkrétne hodnoty.

Úlohu nájsť riešenie $x = f(t)$ rovnice (2.1), ktoré bude vyhovovať nasledujúcim podmienkam:

$$f(t_0) = b_0, \quad f'(t_0) = b_1, \quad \ldots, \quad f^{(n-1)}(t_0) = b_{n-1}, \quad t_0 \in D_f$$

nazývame Cauchyho začiatočná úloha.

2.1. Diferenciálne rovnice prvého rádu

Diferenciálne rovnice, v ktorých je rád danej rovnice rovný jednej sa nazývajú diferenciálne rovnice prvého rádu. Práve týmto typom rovníc sa bude zaoberať nasledujúca sekcia. Okrem základnej definície tiež určí napríklad aj nutnú a postačujúcu podmienku existencie jej riešenia.

Definícia 2.2. Buď F funkcia, ktorej definičný obor G je podmnožinou trojrozmerného euklidovského priestoru $\mathbb{R}^3$. Rovnica

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0 \tag{2.2}$$

sa nazýva obyčajnou diferenciálnou rovnicou prvého rádu v implicitnom tvare. Ak je možné z rovnice (2.2) vyjadriť x', nazývame ju v explicitnom tvare a platí:

$$x' = f(t, x). \tag{2.3}$$

Definícia 2.3. Funkcia $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spĺňa tzv. Lipschitzovu podmienku vzhľadom k premennej x na dvojrozmernej oblasti Ω, ak existuje také $L > 0$, že pre každé dva body $[t, x_1], [t, x_2]$ z oblasti Ω platí vzťah

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$

Veta 2.1. *(Picardova veta o existencii a jednoznačnosti riešenia). Nech funkcia $f(t, x)$ je spojitá a ohraničená na dvojrozmernej oblasti Ω obsahujúcej vo svojom vnútri bod (t_0, x_0). Ďalej nech $f(t, x)$ splňuje Lipschitzovu podmienku na oblasti Ω. Potom diferenciálna rovnica $x' = f(t, x)$ má jediné riešenie $x = x(t)$, ktoré prechádza bodom (t_0, x_0) a ktoré je definované a spojité v nejakom okolí bodu t_0.*

Dôkaz. Dôkaz tejto vety možno nájsť napríklad v [11].

Kapitola 3

Riešenie diferenciálnych rovníc pomocou funkcionálnych radov

Pokiaľ máme lineárnu diferenciálnu rovnicu s konštantnými koeficientami alebo tiež niektoré diferenciálne rovnice vyšších rádov, ich riešenia sú v tvare elementárnej funkcie typu e^t, $\cos t$, $\sin t$, polynómov alebo ich kombinácií. Ak však uvažujeme komplikovanejšie diferenciálne rovnice vyššieho rádu, takéto riešenia nie je možné dostať vo väčšine prípadov. Avšak skupina jednoduchých funkcií vyskytujúcich sa vyššie má vlastnosť analytickosti v okolí každého bodu daného intervalu a taktiež ich možno reprezentovať pomocou mocninových radov so stredmi v týchto bodoch (viď. Poznámka (1.18)). V nasledujúcom texte sa preto budeme zaoberať práve metódami riešenia diferenciálnych rovníc pomocou nájdenia riešenia v tvare funkcionálneho radu.

V tejto kapitole boli použité predovšetkým zdroje [10], [13], [15], [16], [20].

3.1. Riešenie diferenciálnych rovníc pomocou Taylorových radov

V tejto podkapitole sa budeme zaoberať tým, ako možno riešenie diferenciálnej rovnice nájsť pomocou rozvoja funkcie do Taylorovho radu.

Uvažujme diferenciálnu rovnicu n-tého rádu

$$F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0, \quad t \in J,$$

kde $J \subset \mathbb{R}$ je interval a nech $t_0 \in J$.

Ak hľadáme riešenie $x(t)$ tejto rovnice v tvare Taylorovho radu so stredom v t_0, potom je potrebné

1. vypočítať $x^{(n)}(t_0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$
2. určiť polomer konvergencie príslušného Taylorovho radu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n)}(t_0)}{n!} \cdot (t-t_0)^n$
3. dokázať, že nájdený Taylorov rad konverguje na intervale absolútnej konvergencie k riešeniu skúmanej diferenciálnej rovnice.

Príklad. Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice

$$(1-t)x'(t) - 3x(t) + t - 1 = 0/ \tag{3.1}$$

splňujúce začiatočnú podmienku $x(0) = x_0$, kde $x_0 \in \mathbb{R}$, pomocou rozvoja do Taylorovho radu.

Riešenie. Pre $t_0 = 0$ platí

$$x'(0) - 3x(0) - 1 = 0$$

$$\underline{x'(0) = 1 + 3x_0}.$$

Ak zderivujeme

$$(1-t)x'(t) - 3x(t) + t - 1 = 0,$$

získame

$$-x'(t) + (1-t)x''(t) - 3x'(t) + 1 = 0$$

$$\underline{(1-t)x''(t) - 4x'(t) + 1 = 0}.$$

Ďalším derivovaním potom

$$-x''(t) + (1-t)x'''(t) - 4x''(t) = 0$$

$$\underline{(1-t)x'''(t) - 5x''(t) = 0}$$

$$\dots$$

Je zrejmé, že vo všeobecnosti bude platiť nasledujúce

$$\underline{(1-t)x^{(n)}(t)-(n+2)x^{(n-1)}(t)=0}, \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}.$$

Teda n-tú deriváciu v bode 0 ide vždy vyjadriť pomocou $(n-1)$-ej vzťahom $x^{(n)}(0)=(n+2)x^{(n-1)}(0)$, $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$.

Pretože

$$\underline{x(0)=x_0},$$

platí, že

$$\underline{x'(0)=1+3x_0},$$

$$x''(0)=-1+4x'(0)=-1+4\cdot(1+3x_0)=3+12x_0=3\cdot(1+4x_0),$$

$$x'''(0)=5x''(0)=5\cdot 3\cdot(1+4x_0),$$

$$x^{(4)}(0)=6x'''(0)=6\cdot 5\cdot 3\cdot(1+4x_0),$$

$$x^{(5)}(0)=7x^{(4)}(0)=7\cdot 6\cdot 5\cdot 3\cdot(1+4x_0),$$

$$\vdots$$

Všeobecne $\underline{x^{(n)}(0)=\frac{(n+2)!}{4\cdot 2}\cdot(1+4x_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}}$.

Hľadaný Taylorov rad má teda tvar

$$x_0+\frac{1+3x_0}{1!}t+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+2)!}{8n!}\cdot(1+4x_0)t^n=$$

$$=x_0+(1+3x_0)t+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{8}\cdot(1+4x_0)t^n.$$

Teraz určíme polomer konvergencie radu $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{8}\cdot(1+4x_0)t^n$ (viď. Poznámka (1.14))

$$\frac{1}{r}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+3)(n+2)}{8}\cdot(1+4x_0)}{\frac{(n+2)(n+1)}{8}\cdot(1+4x_0)}\right|=1 \Longrightarrow r=1.$$

Príslušný Taylorov rad absolútne konverguje na intervale $(-1,1)$.

Aby sme overili, že nájdený Taylorov rad je riešením uvažovanej rovnice (t.j., aby sme overili správnosť našich výpočtov), definujeme funkciu

$$x(t) = x_0 + (1+3x_0)t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{8} \cdot (1+4x_0)t^n,$$

vypočítame jej deriváciu $x'(t)$ a dosadíme do (3.1):

$$x'(t) = (1+3x_0) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+2)(n+1)}{8} \cdot (1+4x_0)t^{n-1}.$$

Dosadením do (3.1) dostávame

$$(1-t) \cdot \left[(1+3x_0) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+2)(n+1)}{8} \cdot (1+4x_0)t^{n-1}\right] -$$

$$-3 \cdot \left[x_0 + (1+3x_0)t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{8} \cdot (1+4x_0)t^n\right] + t - 1 =$$

$$= 1 + 3x_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+2)(n+1)}{8} \cdot (1+4x_0)t^{n-1} - t - 3tx_0 -$$

$$-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+2)(n+1)}{8} \cdot (1+4x_0)t^n - 3x_0 - 3t - 9tx_0 -$$

$$-3\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{8} \cdot (1+4x_0)t^n + t - 1.$$

- Koeficient pri t

  $(-3x_0 - 3 - 9x_0) + 3(1+4x_0) = 0.$

- Koeficient pri t^n

  pre $n = 2, 3, \ldots$

  $$(1+4x_{0)} \cdot \left[\frac{(n+1)(n+3)(n+2)}{8} - \frac{n(n+2)(n+1)}{8} - \frac{3(n+2)(n+1)}{8}\right] =$$

  $$= (1+4x_0)(n+2)(n+1)[(n+3) - n - 3] = 0.$$

Z tadiaľ vyplýva, že $x(t) = x_0 + (1+3x_0)t + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{8} \cdot (1+4x_0)t^n$ je riešením (3.1) na intervale $(-1,1)$.

Rad $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)t^n$ nejde priamo sčítať, ale ide ukázať, že je druhou deriváciou geometrického radu:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)t^n = \left[\sum_{n=2}^{\infty} t^{n+2}\right]''.$$

Rad $\sum\limits_{n=2}^{\infty} t^{n+2}$, $t \in (-1,1)$ je geometrický s hodnotami $a_1 = t^4$, $q = t$ a jeho súčet možno vyjadriť podľa klasického vzorca pre súčet geometrického radu, tzn.,

$$\sum_{n=2}^{\infty} t^{n+2} = \frac{t^4}{1-t}.$$

Dvojitým spätným zderivovaním dostávame

$$\left(\frac{t^4}{1-t}\right)' = \frac{4t^3-3t^4}{(1-t)^2}$$

$$\left[\frac{4t^3-3t^4}{(1-t)^2}\right]' = \frac{6t^4-16t^3+12t^2}{(1-t)^3}.$$

Preto riešenie (3.1) ide vyjadriť nielen pomocou nájdenia Taylorovho radu, ale tiež v jednoduchšej forme

$x(t) = x_0 + (1+3x_0)t + \frac{1+4x_0}{8} \cdot \frac{6t^4-16t^3+12t^2}{(1-t)^3} = x_0 + (1+3x_0)t + \frac{(1+4x_0)(3t^4-8t^3+6t^2)}{4(1-t)^3}$.

Správnosť nášho výpočtu možno opäť overiť dosadením nájdeného riešenia do pôvodnej rovnice (3.1) s využitím toho, že $x'(t) = 1 + 3x_0 - \frac{3(4x_0+1)t(t^3-4t^2+6t-4)}{4(1-t)^4}$.

3.2. Riešenie diferenciálnych rovníc pomocou mocninových radov

Uvažujme lineárnu diferenciálnu rovnicu druhého stupňa s nekonštantnými koeficientami

$$b_0(t)x''(t) + b_1(t)x'(t) + b_2(t)x(t) = 0 \tag{3.2}$$

a predpokladajme, že jej riešenie nemožno vyjadriť pomocou konečnej lineárnej kombinácie známych elementárnych funkcií. Predpokladáme však, že riešenie (3.2) možno vyjadriť pomocou nekonečného radu

$$x(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \cdots + a_k(t - t_0)^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t - t_0)^k.$$

Hľadať riešenie diferenciálnej rovnice v tvare Taylorovho radu je často nevýhodné, keďže výpočet derivácií môže byť veľmi zložitý. Niekedy je preto praktickejšie hľadať riešenie v tvare spomínaného mocninového radu.

V nasledujúcej teórií použijeme prepis rovnice (3.2) do tvaru

$$x''(t) + P(t)x'(t) + Q(t)x(t) = 0, \quad \text{kde} \tag{3.3}$$

$$P(t) = \frac{b_1(t)}{b_0(t)} \quad a \quad Q(t) = \frac{b_2(t)}{b_0(t)}.$$

Ak je funkcia f analytická v t_0 (viď. Definícia(1.10)), ide ju vyjadriť v tvare

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t - t_0)^k, \quad t \in (t_0 - r, t_0 + r),$$

kde $r > 0$ je príslušný polomer konvergencie mocninového radu.

Definícia 3.1. Bod t_0 sa nazýva ordinárnym bodom rovnice (3.3), pokiaľ sú funkcie P a Q analytické v bode t_0. V opačnom prípade nazveme bod t_0 singulárnym bodom rovnice (3.3).

Veta 3.1. *Nech t_0 je ordinárnym bodom rovnice* (3.3) *a nech c_0, $c_1 \in \mathbb{R}$ sú ľubovoľné. Potom existuje jediné riešenie rovnice* (3.3) *splňujúce začiatočné podmienky $x(t_0) = c_0$, $x'(t_0) = c_1$ a toto riešenie je analytické. Pokiaľ rozvoje funkcií P a Q konvergujú na intervale $(t_0 - r, t_0 + r), r > 0$, potom analytické riešenie konverguje na tom istom intervale.*

Dôkaz. Dôkaz tejto vety možno nájsť napríklad v [10].

Poznámka 3.1. Homogénna lineárna diferenciálna rovnica má vždy dve lineárne nezávislé riešenia, z tadiaľ vyplýva, že analytické riešenie bude ich lineárnou kombináciou.

3.2.1. Hermitovská diferenciálna rovnica

Hermitovská diferenciálna rovnica nájde svoje využitie vo fyzike, kde sa objavuje napríklad pri riešení Schrödingerovej rovnice pre harmonický oscilátor. Ide taktiež o homogénnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu s nekonštantnými koeficientami v nasledujúcom tvare

$$x''(t) - 2tx'(t) + 2px(t) = 0, \quad p \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Pretože $P(t) = -2t$ a $Q(t) = 2p$ sú analytické v 0, tak existuje riešenie v tvare mocninového radu so stredom v bode 0. Nech $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ je riešením (3.4) v tvare mocninového radu so stredom v bode 0. Potom

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1},$$

$$x''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2}.$$

Po dosadení do (3.4)dostávame

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2} - 2\sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^k + 2p \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = 0.$$

Postupným porovnaním koeficientov dostávame pre

$$t^0 : 2a_2 + 2pa_0 = 0 \Rightarrow a_2 = -pa_0$$

$$t^1 : 3 \cdot 2 \cdot a_3 - 2a_1 + 2pa_1 = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{a_1(1-p)}{3}$$

$$t^2 : 4 \cdot 3 \cdot a_4 - 2 \cdot 2 \cdot a_2 + 2pa_2 = 0 \Rightarrow a_4 = \frac{a_2(2-p)}{6}$$

$$\ldots$$

Všeobecne

$$(k+1)(k+2)a_{k+2} - 2ka_k + 2pa_k = 0 \Rightarrow a_{k+2} = \frac{2a_k(k-p)}{(k+1)(k+2)}.$$

Odvodený vzťah je rozdielny pre párne a nepárne k a líši sa nasledovne:

1. párne k:

   substitúcia: $2n = k + 2 \Rightarrow k = 2n - 2$

   $a_{2n} = \frac{2(2n-2-p)}{(2n-2+1)(2n-2+2)} \cdot a_{2n-2} = \frac{2(2n-2-p)}{(2n-1)2n} \cdot a_{2n-2}$, kde

$$a_{2n-2} = \frac{2(2n-4-p)}{(2n-3)(2n-2)} \cdot a_{2n-4}.$$

   Preto

$$a_{2n} = \frac{2^2(2n-2-p)(2n-4-p)}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)} \cdot a_{2n-4} = \cdots =$$

$$= \frac{2^n(2n-2-p)(2n-4-p)\dots(2-p)(-p)}{(2n)!} \cdot a_0$$

2. nepárne k: substitúcia: $2n - 1 = k + 2 \Rightarrow k = 2n - 3$

   $a_{2n-1} = \frac{2(2n-3-p)}{(2n-3+1)(2n-3+2)} \cdot a_{2n-3} = \frac{2(2n-3-p)}{(2n-2)(2n-1)} \cdot a_{2n-3}$, kde

$$a_{2n-3} = \frac{2(2n-5-p)}{(2n-4)(2n-3)} \cdot a_{2n-5}.$$

   Preto

$$a_{2n-1} = \frac{2^2(2n-3-p)(2n-5-p)}{(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)} \cdot a_{2n-5} = \cdots =$$

$$= \frac{2^n(2n-3-p)(2n-5-p)\dots(3-p)(1-p)}{(2n-1)!} \cdot a_1.$$

Dve navzájom lineárne nezávislé riešenia sú teda v tvare

$$x_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(2n-2-p)\dots(2-p)(-p)}{(2n)!} \cdot a_0 \cdot t^{2n},$$

$$x_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(2n-3-p)\dots(3-p)(1-p)}{(2n-1)!} \cdot a_1 \cdot t^{2n-1}.$$

Polomery absolútnej konvergencie týchto radov určíme pomocou Poznámky (1.14) nasledovne

$$r_1 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\frac{1}{2^{n+1}(2(n+1)-2-p)(2n-2-p)\ldots(2-p)(-p)}}{(2(n+1))!}\cdot a_0}{\frac{2^n(2n-2-p)\ldots(2-p)(-p)}{(2n)!}\cdot a_0}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\frac{2(2n+2-2-p)}{(2n+2)(2n+1)}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+2)(2n+1)}{4n-2p}\right| = \infty.$$

$$r_2 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\frac{1}{2^{n+1}(2(n+1)-3-p)(2n-3-p)\ldots(3-p)(1-p)}}{(2(n+1)-1)!}\cdot a_1}{\frac{2^n(2n-3-p)(2n-5-p)\ldots(3-p)(1-p)}{(2n)!}\cdot a_1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\frac{2(2n+2-3-p)}{(2n+1)(2n)}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)(2n)}{4n-2-2p}\right| = \infty.$$

Tieto rady teda konvergujú pre každé $t \in \mathbb{R}$.

Na záver tohto príkladu si ešte rozoberme možnosť, kedy $p \in \mathbb{N}$. Ak je $p \in \mathbb{N}$, potom sa jeden z radov zníži na polynóm. Preto je riešenie v tomto prípade súčtom polynómu a konvergentného radu. Riešenie Hermitovej diferenciálnej rovnice v tomto tvare si odvodíme najskôr pre voľbu p ako párneho a potom nepárneho prirodzeného čísla za vhodných začiatočných podmienok.

1. Nech $p = 2m$, potom

$$x_1(t) =$$

$$= a_0\left[\sum_{n=0}^{m}\frac{2^n(2n-2-2m)\ldots(2-2m)(-2m)}{(2n)!}\cdot t^{2n} + \sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{2^n(2n-2-2m)\ldots(2-2m)(-2m)}{(2n)!}\cdot t^{2n}\right].$$

Druhá suma je indexovaná od $(m+1)$ do ∞ a ako jeden z činiteľov obsahuje $(2n-2-2m)$. V prípade, že $n = m+1$ tento činiteľ zmizne. Nulový činiteľ sa vyskytuje v každom člene, a preto sa celá druhá suma vynuluje. Po vynulovaní druhej sumy tak dostávame

$$x_1(t) = a_0\sum_{n=0}^{m}\frac{2^n(2n-2-2m)\ldots(2-2m)(-2m)}{(2n)!}\cdot t^{2n}.$$

2. Nech $p = 2m-1$, potom

$$x_2(t) =$$

$$= a_1 \cdot t^{2n-1} \left[\sum_{n=1}^{m} \frac{2^n(2n-2-2m)\dots(4-2m)(2-2m)}{(2n-1)!} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2^n(2n-2-2m)\dots(4-2m)(2-2m)}{(2n-1)!} \right].$$

Druhá suma je indexovaná od $(m+1)$ do ∞ a ako jeden z činiteľov obsahuje $(2n-2-2m)$. V prípade, že $n = m+1$ tento činiteľ zmizne. Nulový činiteľ sa vyskytuje v každom člene, a preto sa celá druhá suma vynuluje. Po vynulovaní druhej sumy tak dostávame

$$x_2(t) = a_1 \sum_{n=1}^{m} \frac{2^n(2n-2-2m)\dots(4-2m)(2-2m)}{(2n-1)!} \cdot t^{2n-1}.$$

3.2.2. Legendrova diferenciálna rovnica

Legendrova diferenciálna rovnica má široké využitie vo fyzike a v iných technických oblastiach. Vyskytuje sa najmä pri riešení Laplaceovej rovnice (a príbuzných parciálnych diferenciálnych rovniciach) vo sférických súradniciach, ale uplatnenie má i pri riešení Schrödingerovej rovnice pre atóm s jedným elektrónom.

Legendrovou diferenciálnou rovnicou nazvime homogénnu diferenciálnu rovnicu s nekonštantnými koeficientami druhého rádu v nasledujúcom tvare

$$(1-t^2)x''(t) - 2tx'(t) + p(p+1)x(t) = 0, \quad p \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Pre $P(t)$ a $Q(t)$ (viď. (3.3)) platí nasledujúce

$$P(t) = \frac{-2t}{1-t^2},$$

$$Q(t) = \frac{p(p+1)}{1-t^2}.$$

Pre $|t| < 1$ použitím binomického rozvoja dostávame

$$P(t) = -2t(1-t^2)^{-1} = -2t[1 + t^2 + t^4 + \dots + t^{2k} + \dots] = \sum_{k=0}^{\infty} (-2t)^{2k+1},$$

$$Q(t) = p(p+1)(1-t^2)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} p(p+1)t^{2k}.$$

Oba rady pre $|t| < 1$ konvergujú a sú teda analytickými funkciami na $(-1, 1)$. Legendrova rovnica bude mať teda riešenie v tvare mocninového radu na intervale $(-1, 1)$. Nech A: $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ je riešením (3.5) v tvare mocninového radu. Potom

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1},$$

$$B : tx'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k t^k,$$

$$x''(t) = \sum_{l=2}^{\infty} l(l-1) a_l t^{l-2}.$$

Zavedieme substitúciu: $l - 2 = k \Rightarrow l = k + 2$

$$C : x''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} t^k,$$

$$D : t^2 x''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k t^k.$$

Po dosadení do rovnice (3.5) dostávame

$$C - D - 2B + p(p+1)A = 0,$$

z tadiaľ ďalej dostávame nasledovné

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k - 2ka_k + p(p+1)a_k\right] t^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)(k+1)a_{k+2} + (p^2 + p - k^2 + k - 2k)a_k\right] t^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)(k+1)a_{k+2} + (p-k)(p+k+1)a_k\right] t^k = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : (k+2)(k+1)a_{k+2} + (p-k)(p+k+1)a_k = 0.$$

Z predchádzajúcej rovnosti tak dostávame formulu pre a_{k+2} pomocou koeficientu a_k

$$a_{k+2} = \frac{(k-p)(p+k+1)}{(k+2)(k+1)} a_k. \tag{3.6}$$

Použitím formule (3.6) vyjadríme jednotlivé a_k pomocou a_0 prípadne a_1 podľa toho, či n bude párne alebo nepárne

$$\text{pre } k=0,\ a_2 = \tfrac{-p(p+1)}{2} \cdot a_0$$
$$\text{pre } k=1,\ a_3 = \tfrac{(1-p)(p+2)}{3\cdot 2} \cdot a_1 = \tfrac{-(p+2)(p-1)}{3\cdot 2} \cdot a_1$$
$$\text{pre } k=2,\ a_4 = \tfrac{(2-p)(p+3)}{4\cdot 3} \cdot a_2 = \tfrac{-(p+3)(p-2)}{4\cdot 3} \cdot a_2 = \tfrac{(p+3)(p+1)p(p-2)}{4!} \cdot a_0$$
$$\text{pre } k=3,\ a_5 = \tfrac{(3-p)(p+4)}{5\cdot 4} \cdot a_3 = \tfrac{-(p+4)(p-3)}{5\cdot 4} \cdot a_3 = \tfrac{(p+4)(p+2)(p-1)(p-3)}{5!} \cdot a_1$$

Obdobne pre $k = 4, 5, \ldots$

$$\text{pre } k=4,\ a_6 = \tfrac{-(p+5)(p+3)(p+1)p(p-2)(p-4)}{6!} \cdot a_0$$
$$\text{pre } k=5,\ a_7 = \tfrac{-(p+6)(p+4)(p+2)(p-1)(p-3)(p-5)}{7!} \cdot a_1.$$

Všeobecne teda pre a_{2k} a a_{2k+1} dostávame

$$a_{2k} =$$

$$= \frac{(-1)^k(p+2k-1)(p+2k-3)\ldots(p+1)p(p-2)\ldots(p-2k+2)}{(2k)!} \cdot a_0 \tag{3.7}$$

$$a_{2k+1} =$$

$$= \frac{(-1)^k(p+2k)(p+2k-2)\ldots(p+2)(p-1)(p-3)\ldots(p-2k+1)}{(2k+1)!} \cdot a_1, \tag{3.8}$$

kde $k = 1, 2, \ldots$.

Dve navzájom lineárne nezávislé riešenia sú teda v tvare

$$x_1(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} t^{2k}, \tag{3.9}$$

kde koeficient a_{2k} je definovaný (3.7).

$$x_2(t) = a_1 t + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1} t^{2k+1}, \tag{3.10}$$

kde a_{2k+1} je definovaný (3.8).

Pokiaľ $p \notin \mathbb{Z}$, potom sú polomery r_1 a r_2 konvergencie týchto radov kladné

$$r_1 = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^k (p+2k-1)(p+2k-3)\dots(p+1)p(p-2)(p-4)\dots(p-2k+2)}{(2k)!}}{\frac{(-1)^{k+1}(p+2k+1)(p+2k-1)(p+2k-3)\dots(p+1)p(p-2)(p-4)\dots(p-2k)}{(2k+2)!}} \right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(2k+2)(2k+1)}{(p+2k+1)(p-2k)} \right| = 1.$$

Obdobne i polomer $r_2 = 1$.
Rady (3.9) a (3.10) teda konvergujú na intervale $(-1, 1)$.

Nakoniec sa budeme zaoberať tým, keď $p \in \mathbb{N}$.
Formula (3.6) obsahuje v čitateli činiteľ $(k - p)$. Teda ak $p = k$, potom $a_{p+2} = 0$.
Použitím formule tiež dostávame $a_{p+4} = a_{p+6} = a_{p+8} = \cdots = 0$.
Teda pokiaľ p je nepárne, potom sú všetky nepárne koeficienty a_k pre k väčšie než p nulové. Z tadiaľ sa $x_2(t)$ zredukuje na polynóm stupňa p, keďže obsahuje iba konečný počet členov po p.
Ak je p párne, potom sú všetky párne koeficienty a_k pre k je väčšie ako p nulové.
Takže $x_1(t)$ sa taktiež zredukuje na polynóm stupňa p, pretože obsahuje iba konečný počet členov po p.

3.3. Riešenie diferenciálnych rovníc pomocou Fourierových radov

V tejto časti sa budeme zaoberať aplikáciami Fourierových radov na diferenciálne rovnice. Tento spôsob riešenia bude vhodný najmä pre lineárne diferenciálne rovnice s konštantnými koeficientami a s periodickou pravou stranou.

Príklad. Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice 4.rádu

$$x^{(4)}(t) + x''(t) + x(t) = t^2, \quad t \in [-\pi, \pi] \tag{3.11}$$

pomocou rozvoja do Fourierovho radu.

Riešenie. Pretože pravá strana rovnice (3.11) je spojitá funkcia na $[-\pi, \pi]$, má tu spojitú deriváciu a $f(-\pi) = f(\pi)$, konverguje jej Fourierov rad na $[-\pi, \pi]$ rovnomerne k funkcii $f(t) = t^2$.

Funkcia $f(t)$ je na $[-\pi, \pi]$ párna, preto pre jej Fourierov rozvoj platí $b_k = 0$ pre $k = 1, 2, 3, \ldots$ a

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t^2 dt = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^3}{3} = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_k = \tfrac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(kt)dt = \tfrac{2}{\pi}\int_0^\pi t^2\cos(kt)dt = \begin{vmatrix} u = t^2 & v' = \cos(kt) \\ u' = 2t & v = \frac{\sin(kt)}{k} \end{vmatrix} = \tfrac{2}{\pi}\left[t^2\tfrac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2t\frac{\sin(kt)}{k}dt = \frac{2\pi}{k}\sin(k\pi) - \frac{4}{k\pi}\int_0^\pi t\sin(kt)dt = \begin{vmatrix} u = t & v' = \sin(kt) \\ u' = 1 & v = -\frac{\cos(kt)}{k} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2\pi}{k}\sin(k\pi) + \frac{4}{k\pi}\left[t\frac{\cos(kt)}{k}\right]_0^\pi - \frac{4}{k\pi}\int_0^\pi \frac{\cos(kt)}{k}dt =$$

$$= \frac{2\pi}{k}\sin(k\pi) + \frac{4}{k^2}\cos(k\pi) - \frac{4}{k^3\pi}\sin(k\pi).$$

Platí $\sin(k\pi) = 0$ a $\cos(k\pi) = (-1)^k$ pre $k \in \mathbb{Z}$, teda dostávame

$$a_k = \frac{4}{k^2}(-1)^k, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Hľadaný Fourierov rozvoj pravej strany rovnice (3.11) má teda podľa (1.16) tvar

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kt).$$

Predpokladajme, že riešenie $x(t)$ možno nájsť v tvare kosínusového Fourierovho radu, t.j.

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt).$$

Potom

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} -a_k k \sin(kt), \quad x''(t) = \sum_{k=1}^{\infty} -a_k k^2 \cos(kt)$$

a

$$x^{(4)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k^4 \cos(kt).$$

Dosadením do (3.11) získame

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k k^4 \cos(kt) + \sum_{k=1}^{\infty} -a_k k^2 \cos(kt) + \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kt).$$

Porovnaním koeficientov dostávame

$$a_k k^4 - a_k k^2 + a_k = 4\frac{(-1)^k}{k^2}$$

$$a_k(k^4 - k^2 + 1) = 4\frac{(-1)^k}{k^2} \Rightarrow a_k = \frac{a(-1)^k}{k^2(k^4 - k^2 + 1)}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\pi^2}{3} \Rightarrow a_0 = \frac{2}{3}\pi^2.$$

Riešenie $x(t)$ má teda tvar

$$x(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k \cos(kt)}{k^2(k^4 - k^2 + 1)}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Nakoniec je potrebné vyšetriť konvergenciu nájdeného Fourierovho radu. Pre každé $t \in \mathbb{R}$ platí:

$$\left| \frac{4(-1)^k \cos(kt)}{k^2(k^4 - k^2 + 1)} \right| \leq 4\frac{1}{k^4}.$$

Pre $k > 0$ je funkcia $f(k) = \frac{1}{k^4}$ kladná a klesajúca, teda spĺňa formálne predpoklady integrálneho kritéria. Pre odpovedajúci nevlastný integrál potom platí

$$\int_1^\infty \frac{1}{k^4} dk = \left[-\frac{1}{3k^3} \right]_1^\infty = \frac{1}{3}.$$

Keďže nevlastný integrál konverguje, konverguje podľa integrálneho kritéria (viď. Veta (1.8)), aj rad $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$. Podľa Weierstrassovho kritéria (viď. Veta (1.21)) teda rad $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k \cos(kt)}{k^2(k^4-k^2+1)}$ absolútne a rovnomerne konverguje na $\mathbb{R}$, t.j. aj na $[-\pi, \pi]$.

Príklad. Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice 2.rádu

$$x''(t) + 2x(t) = f(t), \quad t \in \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} (z, z+1), \tag{3.12}$$

kde $f(t)$ je 1-periodické predĺženie funkcie $f^*(t) = e^t$, $t \in (0,1)$, vo forme Fourierovho radu.

Riešenie. Pravú stranu (3.12) rozvinieme do Fourierovho radu (viď. Poznámka (1.21)):

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2k\pi t) + B_k \sin(2k\pi t)$$

$$A_0 = 2 \int_0^1 e^t dt = 2(e-1)$$

$$A_k = 2 \int_0^1 e^t \cos(2k\pi t) dt = \begin{vmatrix} u' = e^t & v = \cos(2k\pi t) \\ u = e^t & v' = -2k\pi \sin(2k\pi t) \end{vmatrix} = 2[e^t \cos(2k\pi t)]_0^1 +$$

$$+2 \int_0^1 e^t (2k\pi) \sin(2k\pi t) dt = 2(e-1) + 2(2k\pi) \int_0^1 e^t \sin(2k\pi t) dt =$$

$$= \begin{vmatrix} u' = e^t & v = \sin(2k\pi t) \\ u = e^t & v' = 2k\pi \cos(2k\pi t) \end{vmatrix} = 2(e-1) + 2(2k\pi)[e^t \sin(2k\pi t)]_0^1 -$$

$$-2(2k\pi)\int_0^1 (2k\pi)e^t\cos(2k\pi t)dt.$$

Platí $A_k = 2\int_0^1 e^t\cos(2k\pi t)dt$. Potom dostávame

$$A_k = 2(e-1) - (2k\pi)^2 A_k \Rightarrow A_k = \frac{2(e-1)}{1+(2k\pi)^2}.$$

Integrál pre koeficient B_k vypočítame analogickým spôsobom ako v prípade koeficientu A_k a teda

$$B_k = 2\int_0^1 e^t\sin(2k\pi t)dt = \frac{4k\pi(1-e)}{(2k\pi)^2+1}.$$

Riešenie (3.12) hľadáme v tvare Fourierovho radu, t.j.

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(2k\pi t) + b_k\sin(2k\pi t).$$

Potom

$$x''(t) = \sum_{k=1}^{\infty} -a_k 4k^2\pi^2\cos(2k\pi t) - b_k 4k^2\pi^2\sin(2k\pi t)$$

a teda

$$\sum_{k=1}^{\infty} 4k^2\pi^2\left[-a_k\cos(2k\pi t) - b_k\sin(2k\pi t)\right] + 2\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(2k\pi t) + b_k\sin(2k\pi t)\right] =$$

$$= (e-1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(e-1)}{(2k\pi)^2+1}\cos(2k\pi t) + \frac{4k\pi(1-e)}{(2k\pi)^2+1}\sin(2k\pi t).$$

Porovnaním koeficientov dostávame

$$a_0 = e-1$$

$$-a_k 4k^2\pi^2 + 2a_k = \frac{2(e-1)}{(2k\pi)^2+1}$$

$$\Rightarrow$$

$$a_k = \frac{\frac{e-1}{(2k\pi)^2+1}}{1-2k^2\pi^2} = \frac{e-1}{[(2k\pi)^2+1](1-2k^2\pi^2)} \tag{3.13}$$

$$-b_k 4k^2\pi^2 + 2b_k = \frac{4k\pi(1-e)}{(2k\pi)^2+1}$$

$$\Rightarrow$$

$$b_k = \frac{\frac{2k\pi(1-e)}{(2k\pi)^2+1}}{1-2k^2\pi^2} = \frac{2k\pi(1-e)}{[(2k\pi)^2+1](1-2k^2\pi^2)}. \tag{3.14}$$

Riešenie (3.12) ide teda vyjadriť v tvare $x(t) = \frac{e-1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2k\pi t) + b_k \sin(2k\pi t)$, kde a_k a b_k sú definované vzťahmi (3.13) a (3.14) a $t \in (z, z+1), z \in \mathbb{Z}$.

Riešenie $x(t)$ má teda tvar

$$x(t) = \frac{e-1}{2} + (e-1) \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\cos(2k\pi t) - 2k\pi \sin(2k\pi t)}{(4k^2\pi^2+1)(1-2k^2\pi^2)} \right].$$

Nakoniec je potrebné vyšetriť konvergenciu nájdeného Fourierovho radu. Pre každé $t \in \mathbb{R}$ platí:

$$\left| \frac{1}{[(2k\pi)^2+1](1-2k^2\pi^2)} [\cos(2k\pi t) - 2k\pi \sin(2k\pi t)] \right| \le \left| \frac{2k\pi}{(2k\pi)^2(1-2k^2\pi^2)} \right| =$$

$$= \frac{1}{2k\pi(1-2k^2\pi^2)} \le \left| \frac{1}{(1-2k^2\pi^2)} \right| = \frac{1}{2k^2\pi^2-1}.$$

Pre $k > 0$ je funkcia $f(k) = \frac{1}{2k^2\pi^2-1}$ kladná a klesajúca, teda formálne predpoklady integrálneho kritéria sú znovu splnené. Pre odpovedajúci nevlastný integrál platí

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{2k^2\pi^2-1} dk = \left| \begin{array}{c} t = \sqrt{2}k\pi \\ dt = \sqrt{2}\pi dk \\ k = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}\pi \\ k = \infty \Rightarrow t = \infty \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{\sqrt{2}\pi}^{\infty} \frac{1}{t^2-1} dt = I.$$

Pre doriešenie daného integrálu použijeme rozklad na parciálne zlomky

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1}$$

$$1 = A(t+1) + B(t-1)$$

$$t = 1 \Rightarrow 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$t = -1 \Rightarrow 1 = 2(-B) \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{t^2-1} = -\frac{\frac{1}{2}}{t+1} + \frac{\frac{1}{2}}{t-1}.$$

Pre integrál I dosadením uvedeného rozkladu tak dostávame

$$\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \lim_{s\to\infty} \int\limits_{\sqrt{2}\pi}^{s} \left(-\frac{\frac{1}{2}}{t+1} + \frac{\frac{1}{2}}{t-1}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \lim_{s\to\infty} \frac{1}{2} \cdot [-\ln|t+1| + \ln|t-1|]_{\sqrt{2}\pi}^{s} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \lim_{s\to\infty} \left[\ln\frac{s-1}{s+1} - \ln\frac{\sqrt{2}\pi-1}{\sqrt{2}\pi+1}\right] = \frac{-1}{2\sqrt{2}\pi} \ln\frac{\sqrt{2}\pi-1}{\sqrt{2}\pi+1} \in \mathbb{R}.$$

Keďže nevlastný integrál konverguje, konverguje podľa integrálneho kritéria (viď. Veta (1.8)), aj rad $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2\pi^2-1}$. Podľa Weierstrassovho kritéria (viď. Veta (1.21)) teda rad $(e-1)\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\cos(2k\pi t)-2k\pi\sin(2k\pi t)}{(4k^2\pi^2+1)(1-2k^2\pi^2)}\right]$ absolútne a rovnomerne konverguje na $\mathbb{R}$, t.j. aj na $\bigcup\limits_{z\in\mathbb{Z}}(z, z+1)$.

Záver

Cieľom tejto bakalárskej práce bolo zavedenie diferenciálnych rovníc riešených pomocou funkcionálnych radov. Prácu možno rozdeliť na teoretickú a praktickú časť. Vybudovaniu teoretického základu potrebného pri samotnom riešení daného typu diferenciálnych rovníc sa venujú prvé dve kapitoly. V tejto časti sú zavedené základné pojmy ohľadom nekonečných radov a diferenciálnych rovníc, ktorých znalosť je nevyhnutným predpokladom pri riešení úloh, ktorým sa venuje posledná kapitola.

Tretia, posledná, kapitola je dôvodom zavedenia príslušnej teórie a teda najdôležitejšou v celej práci. Túto teóriu v nej aplikujeme postupne pri riešení diferenciálnych rovníc pomocou Taylorových a mocninových radov v prvej a v druhej sekcii a pomocou Fourierových radov v poslednej, tretej, sekcii tejto kapitoly. Stručný úvod k jednotlivým, špeciálnym, typom rovníc poukazuje na ich dôležitosť v praxi.

Táto práca môže byť použitá ako vhodný prípravový materiál na skúšky, ale tiež na rozšírenie obzorov v oblasti diferenciálnych rovníc, konkrétne ich riešení pomocou, už spomínaných, funkcionálnych radov.

Literatúra

[1] Došlá, Z., Kuben, J.: Diferenciální počet funkcí jedné proměnné. Masarykova univerzita, Brno, 2004.

[2] Došlá, Z., Novák, V.: Nekonečné řady. Masarykova univerzita, Brno, 2002.

[3] Greguš, M., Švec, M., Šeda, V.: Obyčajné diferenciálne rovnice. Alfa, Bratislava, 1985. Edícia matematicko-fyzikálnej literatúry.

[4] Horváth, J., Kajan, J., Eliáš, J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky. Časť 4. 4. preprac. vyd. Alfa, vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatury, Bratislava, 1979.

[5] Jarník, V.: Diferenciální počet. II. 4. vyd. Academia, Praha, 1984.

[6] Kofroň, J.: Obyčejné diferenciální rovnice v reálném oboru. 2. vyd. Karolinum, Praha, 2004.

[7] Kopáček, J.: Příklady z matematiky nejen pro fyziky. II. 3., přeprac. vyd. Matfyzpress, Praha, 2006.

[8] Ráb, M.: Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic. 3. vyd. Masarykova univerzita, Brno, 2004.

[9] Smirnov, V. I.: Učebnice vyšší matematiky. 2. Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1956.

[10] Somasundaram, D.: Ordinary Differential Equations. A FirstCourse. Alpha Science International Ltd, Oxford United Kingdom, 2001.

[11] Škrášek, J., Tichý, Z.: Základy aplikované matematiky. II, Integrální počet, nekonečné řady, diferenciální geometrie, obyčejné a parciální diferenciální rovnice, funkce komplexní proměnné, Laplaceova transformace, diferenční rovnice. SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha, 1986.

[12] Veselý, J.: Základy matematické analýzy. První díl. Matfyzpress, Praha, 2004.

[13] Applications of Fourier Series to Differential Equations [online]. [cit. 2014-03-02]. Dostupné z: https://www.math24.net/fourier-series-applications-differential-equations/

[14] Bodová a stejnoměrná konvergence [online]. [cit. 2018-04-11]. Dostupné z: http://www.tucekweb.info/Matem/Vys_mat/Mat_An/Matan13.doc

[15] HERMITE DIFFERENTIAL EQUATION - GENERATING FUNCTIONS [online]. [cit. 2019-02-29]. Dostupné z: http://physicspages.com/pdf/Mathematics/Hermite%20differential%20equation.pdf

[16] Ordinary Differential Equations/Legendre Equation [online]. [cit. 2019-03-22]. Dostupné z: https://en.wikibooks.org/wiki/Ordinary_Differential_Equations/Legendre_Equation

[17] Postupnosti a rady [online]. [cit. 2018-10-20]. Dostupné z: http://web.tuke.sk/fberg-blended/prednasky3/P12.pdf

[18] Príklady na precvičovanie – Fourierove rady [online]. [cit. 2018-10-28]. Dostupné z: https://is.muni.cz/el/1431/jaro2016/M2B02/um/cr_6.pdf

[19] Rozvoj funkcie do mocninového radu (Taylorov rozvoj) [online]. [cit. 2019-02-11]. Dostupné z: http://www2.fiit.stuba.sk/~kvasnicka/Mathematics%20for%20Informatics/Chapter_10/Transparencies_10B.pdf

[20] Solution to Legendre's Differential Equation [online]. [cit. 2019-02-18]. Dostupné z: https://astrophytheory.com/2017/09/29/solution-to-legendres-differential-equation/