UNIVERZITA PALACKÉHO V Olomouci

Pedagogická fakulta

Žižkovo náměstí 5, 771 40 Olomouc

**Katedra matematiky**

David Ligas

Matematika se zaměřením na vzdělávání maior
a Historie se zaměřením na vzdělávání minor
3. ročník

# Základní matematické konstanty, jejich historie a užití

Olomouc 2023

Vedoucí práce: Mgr. David Nocar, Ph.D.

Pedagogická
fakulta

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Základní matematické konstanty, jejich historie a užití“ vypracoval samostatně a s použitím pramenů uvedené v seznamu literatury.

V Poličce dne 18. 4. 2023

David Ligas

**Poděkování**

Mé poděkování náleží Mgr. Davidu Nocarovi, Ph.D., Vědecké knihovně v Olomouci a zejména Městské knihovně v Poličce. Bez jejich pomoci by tato práce nemohla vzniknout. Děkuji.

# Obsah

## Anotace

LIGAS, David. *Základní matematické konstanty, jejich historie a užití*. Olomouc: Pedagogická fakulta Univerzity Palackého v Olomouci, 2023.

Bakalářská práce se zabývá základními matematickými konstantami - číslem pí, zlatým řezem, Eulerovým číslem a číslem nula. Práce se primárně zaměřuje na historii těchto konstant, jejich odvození a využití v současnosti. Rozdělení bakalářské práce je na čtyři části, kdy každá část se zabývá jednou konstantou.

Cílem práce je prozkoumat historii a význam základních matematických konstant, jako je číslo pí, zlatý řez, Eulerovo číslo a číslo nula. Zároveň být stručným materiálem pro učitele vyučující historii matematiky či matematiku samotnou, aby měli po ruce nejdůležitější milníky v historii daných konstant, jejich odvození a využití. V podkapitolách o využití konstant mohou získat odpovědi na nekonečné otázky žáků a studentů: „K čemu mi to je?“

**Klíčová slova:**

číslo pí, Ludolfovo číslo, zlatý řez, číslo fí, Eulerovo číslo, číslo e, číslo nula, kvadratura kruhu, Eulerova identita, Fibonacciho posloupnost, historie matematiky, matematické konstanty, aplikace konstant, odvození konstant.

## Annotation

LIGAS, David. Basic *mathematical constants, their history and use*. Olomouc: Palacký University Olomouc Faculty of Education, 2023.

The bachelor's thesis deals with the basic mathematical constants – number pi, the golden ratio, Euler's number, and number zero. The thesis primarily focuses on the history, derivation, and current usage of these constants, and is divided into four parts, each of which covers one constant.

The thesis aims to explore the history and significance of these basic mathematical constants, and to provide concise material for teachers of the history of mathematics or mathematics itself. It offers the most important milestones in the history, derivation, and usage of these constants at their fingertips. In the subchapters on the application of constants, students can find answers to the age-old question: 'What is this useful for?'

**Keywords:**

number pi, Ludolph's number, golden ratio, number phi, Euler's number, number e, number zero, squaring the circle, Euler's identity, Fibonacci sequence, history of mathematics, mathematical constants, application of constants, derivation of constants.

„Je to věda? Je to umění? Možná obojí, možná něco úplně jiného.
Matematika stojí stranou všech ostatních úspěchů člověka,
je to styčný bod mezi rozumem a fantazií,
kde je skutečné a neskutečné dokonale uspořádáno.“

**Robert Sneddon**[1]

# 1 Úvod

Historie matematiky, přestože se jedná o střípek lidské historie, nás nepřestává udivovat svými příběhy. Máme zde starověké Řecko, které se stalo výspou vzdělanosti nejen v matematice. Dále arabský svět, který byl po pádu Říma nositelem západního vědění, jež do temné Evropy opět navrátil až Fibonacci ve 13. století. Novověk již byl přelomovým obdobím, kde se opět dala do pohybu lidská zvídavost. Jak však nejlépe ilustrovat historii matematiky, aby obsáhla celé dějiny lidstva? Jedině skrze matematické konstanty.

Pro výběr matematických konstant jsme zvolily tyto tři podmínky:

1. Jejich přibližnou hodnotu lze vyjádřit reálným číslem.
2. Vyučují se na základních či na středních školách.
3. Mají výjimečnou historii či jsou zajímavé svým použitím či odvozením.

Tímto sítem prošly čtyři konstanty, a to číslo pí (π, Ludolfovo číslo), zlatý řez (φ, číslo fí), Eulerovo číslo (číslo e) a číslo nula. U daných konstant se budeme zejména zabývat jejich historií, odvozením a využitím v matematice i v jiných oborech.

Původní záměr bylo zjistit, zda se ve Velké pyramidě v Gíze opravdu vyskytuje číslo pí a zlatý řez. Tento záměr měl problém v tom, že egyptské úřady nerady povolují měření svých pyramid, proto je velice komplikované najít oficiální vědecké práce o měření rozměrů Velké pyramidy v Gíze. Tento záměr nevyšel, a proto jsme využili svého matematicko-historického zaměření oboru k bádání o původu, odvození a využití výše zmíněných konstant s ohledem na podmínky. Přesto si ve své práci dovolíme nakousnout téma výskytu čísla pí a zlatého řezu ve Velké pyramidě v Gíze v podkapitolách o historii čísla pí a zlatého řezu.

Cílem práce je prozkoumat historii a význam základních matematických konstant, jako je číslo pí, zlatý řez, Eulerovo číslo a číslo nula. Zároveň být stručným materiálem pro učitele vyučující historii matematiky či matematiku samotnou, aby měli po ruce nejdůležitější milníky v historii daných konstant, jejich odvození a využití. V podkapitolách o využití konstant mohou získat odpovědi na nekonečné otázky žáků a studentů: „K čemu mi to je?“

Ve své práci se budeme snažit zodpovědět těchto pět otázek:

[1] BEATTY, Richard a spol. *Matematika: 100 objevů, které změnily historii.* Praha: Slovart, 2013, str. 6.

*1. Jak byly vybrané základní matematické konstanty objeveny a jak se jejich význam vyvíjel v průběhu času?*

*2. Při objevu vybraných matematických konstant byl vždy jeden významný matematik, který je s danou konstantou spojován. Nebo se na vzniku konstanty podílelo více lidí?*

*3. Jak jsou tyto matematické konstanty odvozeny a jak jsou spojeny s dalšími významnými matematickými koncepty?*

*4. Vyskytuje se číslo pí a zlatý řez v rozměrech Velké pyramidy v Gíze? Pokud ano, byl to záměr stavitelů?*

*5. Jak se tyto matematické konstanty používají v matematice a jaký je jejich přínos v současnosti?*

Práce je koncipována do čtyř hlavních kapitol, které jsou poté rozděleny do tří až do pěti podkapitol. Každá z kapitol se zabývá jednou z vybraných konstant a to v pořadí: Číslo pí, Zlatý řez, Eulerovo číslo a Číslo nula. Základní podkapitoly jsou odvození, kde objasníme matematický výpočet dané konstanty, dále historie a nakonec užití, tedy v čem lze v současnosti využívat danou konstantu. Číslo pí má navíc podkapitolu o kvadratuře kruhu, což byl odvěký geometrický problém narýsování čtverce o ploše kruhu. Zlatý řez má podkapitoly o slavné Fibonacciho posloupnosti (množení králíků) a o zlatém řezu v přírodě a kolem nás. Nakonec číslo nula má podkapitolu o problémech počítání s nulou.

Každá kapitola má svou primární literaturu. Tato literatura je obohacena poznatky z obecné literatury o matematických objevech. Číslo pí má zejména knihu *Historie čísla π* od Petra Beckmanna, který byl český emigrant v USA. Tato kniha velmi pečlivě popisuje historii dané konstanty, avšak s ohledem na minulost autora má kniha politický podtext a matematické vzorce mohou vykazovat chyby. Přesto je to skvělé zrcadlo současné společnosti, která se nepoučila z chyb a chce si opět zažít strasti komunismu. Dále nám je oporou kniha od Joaquína Navarro s názvem *Tajemné π: Lze provést kvadraturu kruhu?*. Tato kniha doplňuje předchozí knihu a přidává matematický rámec. U zlatého řezu primárně využijeme významné dílo od Maria Livio s názvem *Zlatý řez*. Toto dílo poutavým způsobem uchopuje celé téma zlatého řezu. Doplněním nám bude dílo od Vlasty Chmelíkové *Zlatý řez nejen v matematice*, kde sepsala užití zlatého řezu ve školní látce i v současnosti. U Eulerova čísla využijeme zejména obecnou literaturu a odborný článek *Číslo e a jeho vlastnosti* v periodiku *Učitel matematiky* od Renaty Sikorové. Nakonec tu máme knihu *Nula: Životopis jedné nebezpečné myšlenky* od Charlese Seife, jehož životopis čísla nuly je velice čtivý a po stránce matematiky velice bohatý.

## 2 Číslo pí

Pí je nejslavnější konstanta na celém světě a její přibližnou hodnotu 3,14 má v paměti vysoké procento lidí Západního světa. Samozřejmě mluvíme pouze ze svého pozorování lidí a bylo by vhodné na znalost hodnoty pí 3,14 provést rozsáhlý výzkum. Vyhledávač Google po zadání *pi number* vyhledá 1 390 000 000 výsledků. Číslo pí je pravděpodobně jediná konstanta, která má svůj svátek a dokonce i pokrm. Máme tím na mysli 14. 3. (v angličtině psán nejdříve měsíc, tedy 3. 14.) a masový či ovocný koláč (v angličtině pie), který se pojídá na daný svátek. Další pokrm na svátek čísla pí je i pizza, která začíná na písmeno $p$ a má tvar kruhu.[2]

Číslo pí se značí řeckým písmenem $\pi$ (pí), dalším označením je i Ludolfovo číslo.[3] Dosahuje hodnoty 3,141 592 653 589…, ale využívá se většinou jeho zaokrouhlená hodnota 3,14 nebo 3,1416.[4]

### 2.1 Odvození

Nejjednodušší odvození čísla pí je vydělit obvod kružnice jeho průměrem, tedy

$$\frac{o}{d} = \pi = \frac{\mathrm{o}}{2\mathrm{r}}.$$

Výsledkem vždy bude konstanta pí, ať je obvod kružnice jakkoliv velký. Jde o to, že obvod kruhu či kružnice a jeho průměru jsou si stále stejně úměrné.[5]

V počátcích matematiky kolem roku 2000 př. n. l. byly snahy zjistit hodnotu této konstanty, ale bez využití současných vymožeností v podobě indických číslic, pravítek, Národního institutu standardů, decimálního systému, numerického dělení, tužek, papíru atd. Máme tedy pouze kůly, provazy a písek, co dál? Najdeme si dostatečně rovnou plochu vlhkého písku, do něhož zarazíme kůl. Ke kůlu přivážeme provaz s dalším kůlem na druhém konci provazu. Provaz napneme a poté za pomoci toho druhého kůlu nakreslíme do písku kružnici. Posléze jiným provazem povedeme úsečku přes střed této kružnice, kdy se kružnice dotýká začátek provazu a jeho část. Přebytečnou délku provazu mimo kružnici odřízneme, čímž získáme délku průměru této kružnice a zároveň naši jednotku délky. Poté tento kus provazu dáme do rýhy (obvod kružnice) a nohou vyznačíme oba konce délky provazu v písku. Kus provazu zvedneme a opět položíme do rýhy od vyznačené značky nohou. Opět

[2] NAVARRO, Joaquin. *Tajemné pí: Lze provést kvadraturu kruhu?* Praha: Dokořán, 2018, str. 93.
[3] CRILLY, Tony. Matematika: *50 myšlenek, které musíte znát*. Český Těšín: Slovart, 2010, str. 20.
[4] NAVARRO, Joaquin. *Tajemné pí: Lze provést kvadraturu kruhu?* Praha: Dokořán, 2018, str. 11.
[5] STEWART, Ian. *Neuvěřitelná čísla profesora Stewarta*. Praha: Dokořán, 2019, str. 167.

vyznačíme koncový bod a opakujeme. Na konci zjistíme, že průměr obvodu se do obvodu kružnice vejde třikrát a kousek. Můžeme tedy dát

$$\pi = 3,$$

ale co s tím kouskem? Opět využijeme provazu, který položíme do daného kousku obvodu kruhu a přebytečnou část opět odřízneme, čímž získáme délku daného kousku. Nyní položíme náš provaz značící průměr kružnice vodorovně a postupně budeme kusem úhlu či spáleného dřeva značit délky našeho kousku. Zjistíme, že délka našeho kousku se do průměru kruhu vejde sedmkrát až osmkrát. Nyní tedy můžeme říci, že

$$3\frac{1}{8} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Proto se v počátcích historie čísla pí setkáme s hodnotami:

$$\pi = 3;\ \pi = 3\frac{1}{7}; \pi = 3\frac{1}{8}.$$ [6]

**2.2 Historie**

První velké objevy v matematice započaly v Mezopotámii, přesněji v Babylónii. Tato země se rozkládala mezi řekami Eufrat a Tigrid v tzv. úrodném půlměsíci, kde byly vhodné podmínky pro zemědělství. Babyloňané svou matematiku vyvíjeli na sexagesimální soustavě s využitím klínového písma. Roku 1936 byla v íránských Súsách objevena tabulka s klínovým písmem z 2. tisíciletí př. n. l., kde byla, kromě znalosti pětiúhelníků, i hodnota čísla pí. Babylóňané předpokládali, pro hodnotu čísla pí, že obvod pravidelného mnohoúhelníku je roven šestinásobku poloměru kružnice, která tento mnohoúhelník opisuje. Z toho vztahu odvodili:

$$\pi = 3\frac{1}{8} = 3{,}125.$$ [7]

O matematice Egypta je známo mnohem více, než od ostatních států před-helénské epochy, neboť egyptské hieroglyfy byly přeloženy jako první. Hieroglyfy byly přeloženy na počátku 19. století a babylonské destičky až ve 20. století, přestože se jich dochovaly desítky tisíc.[8]

Nejslavnější matematický papyrus nalezený v Egyptě byl Rhindův papyrus, zvaný též Ahmesův papyrus. Tento papyrus obsahuje 84 matematických problémů a byl sepsán roku 1650 př. n. l. Některé pasáže naznačují, že některé části mohly vzniknout už 2000 až 3000 let př. n. l. O výpočtu čísla pí se hovoří až v problému číslo 50, kde Ahmes uvádí, že plocha

[6] BECKMAN, Petr. *Historie čísla pí*. 2. vydání, revidované. Praha: Academia, 2021, str. 21 a 23-24.
[7] LIVIO, Mario. Zlatý *řez: Příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě*. Praha: Dokořán, 2006, str. 45.
[8] BECKMAN, Petr. *Historie čísla pí*. 2. vydání, revidované. Praha: Academia, 2021, str. 31-32.

kruhového pole s průměrem 9 jednotek je stejná jako plocha čtverce o straně 8 jednotek. To nám dává hodnotu mezi 3 1/6 a 3 1/7, tedy vyšší než je skutečná hodnota čísla pí, přesněji:

$$\pi = 4 * \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3{,}160\ 49.$$ [9]

Nyní se zaměříme na rozměry egyptských pyramid. Máme zde tvrzení od H. Agnewa, že poměr obvodu základny Velké pyramidy v Gíze k její výšce se rovná 2π.[10] Toto tvrzení při dosazení naměřených hodnot dává přibližnou hodnotu pí 3,14. Jsou zde pouze tři možné důvody, proč má Velká pyramida v Gíze ve svých rozměrech skrytou hodnotu čísla pí.

První důvod je, že tuto přesnou hodnotu znali a úmyslně ji tam zakomponovali, což s ohledem na Rhindův papyrus se jeví jako nepravděpodobné.

Druhá možnost je teorie válců od Kurta Mendelssohna, podle které starověcí Egypťané používali k měření svislých a vodorovných vzdáleností různé metody. K měření výšky pyramidy (v loktech) používali palmové provazy a k měření základny válec o průměru jednoho lokte. Vodorovnou délku by pak odvozovali sečtením otáček válce, tzv. válených loktů. Architekt by tedy pouze určil, kolik loktů mají navršit do výšky na jeden válený loket. Válený loket se rovná π*loket, a to vysvětluje, proč se číslo pí objevuje v rozměrech Velké pyramidy v Gíze.[11]

Třetí možnost je teorie sekedu, podle Flinderse Petria, ke které se osobně přikláním. Seked byl měřítkem sklonu stěn pyramidy a vyjadřoval počet horizontálních loktů, které se musely odměřit na každý vertikální loket. Díky této metodě bylo skládání kamenů mnohem jednodušší, neb stačilo udržovat stálý tvar a sklon. Tato metoda je uvedena i v Rhindově papyru v úlohách 56 a 60. Flinders Petrie roku 1883 zjistil, že po volbě příslušného sekedu získala Velký pyramida v Gíze se značnou přesností vlastnost, kdy poměr obvodu základny k výšce pyramidy dával 2π. K této metodě se přikláním nejvíce, zejména kvůli tomu, že daný seked má i stupňovitá pyramida v Médumu stavěná těsně před Velkou pyramidou v Gíze.[12]

Nesmíme opomenout ani Bibli, přesněji starý zákon. Tam se v první knize královské v pasáži 7:23 a ve druhé knize letopisů v pasáži 4:2 píše: „*Udělal také moře slité, desíti loket od jednoho kraje k druhému, okrouhlé vůkol, a pět loket byla vysokost jeho, a okolek jeho třidcíti loket vůkol.*“ (překlad: Bible kralická) Z toho vyplívá, že biblická hodnota pí byla 3.[13]

---

[9] BECKMAN, Petr. *Historie čísla pí*. 2. vydání, revidované. Praha: Academia, 2021, str. 32-34.
[10] LIVIO, Mario. Zlatý *řez: Příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě*. Praha: Dokořán, 2006, str. 57.
[11] LIVIO (2006), tamtéž, str. 58.
[12] LIVIO (2006), tamtéž, str. 58-59.
[13] BECKMAN, Petr. *Historie čísla pí*. 2. vydání, revidované. Praha: Academia, 2021, str. 24.

Než se ponoříme do znalostí starověkých Řeků, přesuneme se nejprve do Indie, Číny a Ameriky. V Indii se nám dochovaly *Siddhánty* (v překladu systémy) z let 380 až 400 n. l., kde se užívá hodnota

$$\pi = 3\frac{177}{1\,250} = 3{,}141\,6.$$

O přibližně sto let později vydal Árjabhata dílo *Árjabhatíja*, ve kterém v jednom řešení uvedl: „Sečti 4 a 100, znásob to 8 a přidej 62 000. Výsledek je přibližně obvodem kruhu, jehož průměr je 20 000." Z toho vychází:

$$\pi = \frac{62\,832}{20\,000} = 3{,}141\,6.$$

Tuto hodnotu udává též Baškara (narozen roku 114 n. l.), který ji považuje za přesnou, oproti hodnotě $3\frac{1}{7}$.[14]

V Číně dlouhou dobu užívali pro $\pi$ hodnotu 3. Zlom nastal roku 130 n. l., kdy Hou Han Šu objevil hodnotu 3,1622 z odmocniny 10. Liu Hui roku 264 n. l. využil obdobu Archimédova výpočtu čísla pí pomocí vepsaného 192stranného mnohoúhelníku a získal

$$3{,}141\,024 < \pi < 3{,}142\,704.$$

Později svůj výpočet zopakoval se 3072stranným mnohoúhelníkem, čímž se dostal k hodnotě

$$\pi = 3{,}141\,59.$$

V 5. století Cu Čung-c´ a jeho syn Cu Keng-c´ objevili

$$3{,}141\,592\,6 < \pi < 3{,}141\,592\,7.$$

Přesnost těchto výpočtů je až zarážející. V Evropě se k těmto hodnotám dostali až od konce 16. století.[15]

Nyní uděláme velký skok přes velkou louži a zamíříme do Mexika, kde se rozprostírala Mayská civilizace, která ze všech amerických říší byla nejpokrokovější. Bohužel kvůli jednání jednoho křesťanského fanatika, biskupa v Yucatanu jménem Diego de Landa, který roku 1560 spálil veškerou literaturu Májů, jsme ztratili značnou část znalostí Májské civilizace. Tento fanatik věřil, jako celé jeho náboženství, že spisy Májů o vědě jsou pouhé „ďábelské lži a pověry" a proto je nechal spálit. Zkázu poté dokonali domorodci obrácení na jeho víru, když spálili zbylé spisy.[16] Proto musíme pouze odhadovat, jaká mohla být jejich znalost čísla pí. Podle podobné úrovně matematiky s Čínou a velmi pokročilým kalendářem

[14] BECKMAN (2021), tamtéž, str. 35-36.
[15] BECKMAN (2021), tamtéž, str. 37-38.
[16] BECKMAN (2021), tamtéž, str. 40 a 45.

(odchylka činila méně než 3 minuty za rok, juliánský kalendář měl odchylku 11 minut za rok), můžeme předpokládat, že by hodnotu čísla pí měli Májové stejně pokročilou jako Číňané.[17]

Nyní se vrátíme zpátky do Evropy, přesněji do antického Řecka. Tam na historii čísla pí měli vliv čtyři muži: Anaxagoras, Antifón, Hippokratés a Hippias.

Anaxagoras z Klazomen (500 až 428 př. n. l.) se dostal do vězení za prohlášení, že Slunce je horký kámen, nikoliv božstvo. Ve vězení se zabýval kvadraturou kruhu. Jedná se o snahu zkonstruovat čtverec o ploše kruhu (více v podkapitole Kvadratura kruhu).[18]

Antifón (480 až 411 př. n. l.) byl sofistický filosof, který vytvořil princip vyčerpání. Jedná se o princip zvyšování počtu stran pravidelného mnohoúhelníku vepsaného do kruhu, dokud jeho obvod nesplyne s obvodem kruhu. Z toho důvodu věřil, že lze provést kvadraturu kruhu.[19]

Hippokratés z Chiu (470 až 410 př. n. l., nezaměňovat se slavným Hippokratem z Kósu, který sepsal Hippokratovu přísahu) byl nejdříve obchodníkem, který byl oloupen piráty či obětí podvodu v Byzanci. Zázemí našel roku 430 př. n. l. v Athénách, kde se začal zabývat studiem geometrie. Povedlo se mu spočítat obsah měsíčku, kdy spojil oba vrcholy měsíčku mezi sebou úsečkou, čímž vznikl půlkruh. Do půlkruhu poté vepsal pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník, jehož podstava byla úsečka mezi vrcholy měsíčku. Obsah půlměsíčku se poté rovnal obsahu daného trojúhelníku. Předpokládá se, že Hippokratés z Chiu vymyslel důkaz sporem. Jedná se o princip, kdy máme předpoklad, že naše tvrzení je nesprávné, což nám dá absurdní výsledek. Protože je výsledek absurdní, musí být předpoklad nesprávný. Pokud je tvrzení správné či nesprávné (neexistuje třetí možnost), pak je i naše tvrzení správné.[20]

Hippias z Elidy (asi 460 – asi 390 př. n. l.) definoval křivku mimo přímku a kružnici s názvem trisektrix. Tato transcendentní křivka bývá používána k dělení úhlu na tři díly, což byl jeden z problémů, které fascinovali lidi v daných dobách. Pomocí této křivky může být provedena trisekce úhlu (rozdělení úhlu na tři stejné části), avšak kvadratura kruhu pomocí trisektrixu není možná s pravítkem a kružítkem. V současnosti se trisektrix využívá v matematické teorii kódování a v teorii elektromagnetismu.[21]

Archimédes ze Syrakus (287 až 212 př. n. l.) byl první, který vytvořil rigorózní matematickou metodu pro výpočet čísla pí zvanou aproximace pí. Použil k tomu metodu vepsání a opsání 96stranných pravidelných mnohoúhelníků kolem kruhu. Číslo pí určil s

[17] BECKMAN (2021), tamtéž, str. 40 a 44-45.
[18] BECKMAN (2021), tamtéž, str. 47-48.
[19] BECKMAN (2021), tamtéž, str. 48.
[20] BECKMAN (2021), tamtéž, str. 48-50.
[21] BECKMAN (2021), tamtéž, str. 51-52, 55.

vysokou přesností. Byl schopen dokázat, že číslo pí je větší než $3\frac{1}{7}$, ale zároveň menší než 3 10/71.[22] Můžeme se pouze dohadovat, zda by dokázal určit přesnější hodnotu čísla pí, neboť jej při svých výpočtech zabil římský voják po dobytí Syrakus Římany.[23]

Římané do historie čísla pí, kromě zabití Archiméda, příliš nepřispěli. Avšak máme zde římského architekta jménem Marcus Vitruvius Pollio (80 až 15 př. n. l.), který se pokoušel vypočítat hodnotu čísla pí empiricky pomocí označkovaného kola, což nedosahovalo přesnosti Archiméda. Poté se objevil Klaudios Ptolemaios (100 až 170 n. l.), řecký astronom žijící v Egyptě, který pomocí 120stranného pravidelného mnohoúhelníku spočítal hodnotu čísla pí:

$$\pi = \frac{377}{120} = 3{,}141\,\bar{6}.$$ [24]

Po pádu Říma se matematický pokrok a vědění Antiky přeneslo do arabského světa. Odtud to o několik století později přinesl zpátky do Evropy až Fibonacci (více v podkapitolách o historii zlatého řezu a nuly). Jamšíd al-Káší (1380 až 1429)[25] si při výpočtu čísla pí položil podmínku, že při výpočtu obvodu Země o průměru 600 000 jednotek musí činit odchylka pouze šířky vlasu. Tím zjistil hodnotu čísla pí na 17 míst. Dále tvrdil, že jen Alláh zná celou hodnotu čísla pí, čímž řekl, že desetinný rozvoj čísla pí jde do nekonečna. Stejný závěr udělal i hebrejský filosof Moisej Ben Majson (1135 až 1204).[26]

Od 17. století byla mezi matematiky snaha o nalezení periodicity v desetinném rozvoji čísla pí, což by dokázalo, že lze číslo pí napsat jako poměr dvou celých čísel. Proto se matematikové snažili o co nejpřesnější výpočet čísla pí pomocí logaritmů i nekonečných řad.[27] Nemohu jmenovat všechny matematiky, kteří se honili za výpočtem čísla pí, ale zmíním aspoň ty nejvýznamnější. K snaze na počátku hledání přispěli matematici jako Ludolph van Ceulen a François Viète, kteří žili současně. Ludolph van Ceulen (1539 až 1610), holandský matematik, který strávil velkou část svého života počítáním desetinných aproximací čísla pí na principech Archimédova výpočtu. Jeho práce pomohla ustavit pí jako důležitou matematickou konstantu. Je paradoxem, že i přes jeho nízkou účast v dlouhé historii čísla pí, se daná konstanta jmenuje po něm, tedy Ludolfovo číslo. François Viète (1540 až 1603),

[22] BEČVÁŘ, Jindřich a spol. *Archimédes: Několik pohledů do jeho života a díla*. Praha, 2012, str. 49.
[23] NAVARRO, Joaquin. *Tajemné pí: Lze provést kvadraturu kruhu?* Praha: Dokořán, 2018, str. 23.
[24] NAVARRO (2018), tamtéž, str. 24.
[25] NAVARRO (2018), tamtéž, str. 27.
[26] ŽÁČKOVÁ, Jaroslava. *Problém kvadratury kruhu a Lambertův důkaz iracionality čísla pí.* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 11, č. 4, 1966, s. 240-250, str. 242-243.
[27] BECKMAN, Petr. *Historie čísla pí*. 2. vydání, revidované. Praha: Academia, 2021, str. 113.

francouzský matematik, zavedl použití nekonečného součinu k aproximaci pí, čímž ho určil na devět míst.[28]

Za zmínku stojí též Ludolfův student Willebrord Snel van Royen (1580 až 1626), který objevil zákon o lomu světla a ve výpočtu čísla pí dospěl na 35 správných cifer. Jeho metoda byla praktičtější než Archimédova, přesto ji Christiaan Huygens (1629 až 1695) vylepšil a upravil.[29] Dostal tak pro pravidelný 60úhelník:

$$3{,}1415926533 < \pi < 3{,}1415926538.$$ [30]

Nakonec tu máme matematiky jako John Wallis a Leonhard Euler, kteří k výpočtu čísla pí využívali nově vzniklé matematické analýzy místo geometrické metody používané dříve.[31]

John Wallis (1616 až 1703) představil ve své knize *Arithmetica infinitorum* (1655) slavný vzorec pro výpočet čísla pí:

$$\pi = 2\frac{2*2*4*4*6*6*\ldots}{1*3*3*5*5*7*7*\ldots}$$

Význam této rovnice spočívá v tom, že je nekonečná a první, která obsahuje pouze racionální operace, tedy bez odmocnin. Zajímavostí je, že John Wallis překládal nepřátelské zprávy pro parlamentaristy v britské občanské válce, za což ho Oliver Cromwell jmenoval profesorem v Oxfordu.[32]

Švýcarský matematik Leonhard Euler (1707 až 1783), o němž se více rozhovořím v podkapitole o historii Eulerova čísla, poprvé zavedl symbol π jako označení čísla pí v roce 1737 ve své knize *Variae observationes circa calculationem integralium*.[33] V počtu spočítaných desetinných míst čísla pí nijak zvlášť nepokročil, přestože vymyslel způsob výpočtu dvaceti desetinných míst čísla pí do jedné hodiny pomocí Machinových vzorců a jeho postupu.[34] Do historie dané konstanty se zapsal díky svým dvěma objevům. Šlo zejména o elegantní vzorec:

$$e^{i\pi} = -1$$

[28] ŽÁČKOVÁ, Jaroslava. *Problém kvadratury kruhu a Lambertův důkaz iracionality čísla pí.* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 11, č. 4, 1966, s. 240-250, str. 243.
[29] NAVARRO, Joaquin. *Tajemné pí: Lze provést kvadraturu kruhu?* Praha: Dokořán, 2018, str. 29.
[30] ŽÁČKOVÁ, Jaroslava. *Problém kvadratury kruhu a Lambertův důkaz iracionality čísla pí.* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 11, č. 4, 1966, s. 240-250, str. 244.
[31] ŽÁČKOVÁ (1966), tamtéž, str. 244.
[32] BECKMAN, Petr. *Historie čísla pí*. 2. vydání, revidované. Praha: Academia, 2021, str. 144-145.
[33] ŽÁČKOVÁ, Jaroslava. *Problém kvadratury kruhu a Lambertův důkaz iracionality čísla pí.* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 11, č. 4, 1966, s. 240-250, str. 245.
[34] NAVARRO, Joaquin. *Tajemné pí: Lze provést kvadraturu kruhu?* Praha: Dokořán, 2018, str. 37.

a o vyřešení basilejského problému. Jde o matematický problém, který vymyslel Pietro Mengoli v roce 1644. Cílem je nalézt součet nekonečné řady tvořené převrácenými čtverci celých čísel. Až Euler přišel na velmi jednoduché řešení:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Euler tento problém vyřešil za pomocí funkce sinus, a stal se tak světově uznávaným matematikem.[35]

Hledání periodicity čísla pí zarazili až matematikové Johann Heinrich Lambert (1728 až 1777) a definitivně Ferdinand von Lindemann (1852 až 1939). První z nich dokázal pomocí řetězového zlomku, že číslo pí je iracionální (nelze vyjádřit podílem dvou celých čísel), což dokázal i pro Eulerovo číslo.[36] Lindemann dokázal pomocí Hermitova principu, že číslo pí je transcendentní, tedy že není řešením žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty.[37]

Než se vydáme do počítačového věku, musíme se podívat na práci tří matematiků: Davida H. Baileyho, Petera Borweina a Simona Plouffa. Tito matematikové objevili v roce 1996 vzorec pro výpočet jakékoliv pozice desetinného rozvoje čísla pí:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left( \frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right).$$ [38]

V počítačovém věku nastala výzva pro počítače, aby spočítaly číslo pí na nejvyšší počet desetinných míst a zároveň za co nejkratší dobu. Co dříve matematikům trvalo roky svého života, dokázaly počítače v řádech dní až minut. V září roku 1949 bylo na vojenském počítači ENIAC spočítáno číslo pí na 2037 míst za 70 hodin. Mezi lety 1954 a 1955 byl naprogramován NORC pro výpočet čísla pí na 3089 míst za 13 minut. Roku 1958 IBM 704 spočítal 10 000 míst za 1 hodinu a 40 minut. Roku 1967 na počítači CDC 6600 bylo spočítáno 500 000 míst za 28 hodin a 10 minut (1 hodina a 35 minut na převod výsledku z binárního na desetinný zápis). Roku 2020 bylo číslo pí spočítáno na 50 bilionů desetinných míst a tento počet bude jistě stále růst.[39]

---

[35] STEWART, Ian. *Neuvěřitelná čísla profesora Stewarta*. Praha: Dokořán, 2019, str. 169.

[36] ŽÁČKOVÁ, Jaroslava. *Problém kvadratury kruhu a Lambertův důkaz iracionality čísla pí.* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 11, č. 4, 1966, s. 240-250, str. 246.

[37] NAVARRO, Joaquin. *Tajemné pí: Lze provést kvadraturu kruhu?* Praha: Dokořán, 2018, str. 39.

[38] STEWART, Ian. *Neuvěřitelná čísla profesora Stewarta*. Praha: Dokořán, 2019, str. 173.

[39] BECKMAN, Petr. *Historie čísla pí*. 2. vydání, revidované. Praha: Academia, 2021, str. 203-205.

## 2.3 Kvadratura kruhu

Kvadratura kruhu je starořecký problém v geometrii, který fascinoval matematiky po tisíce let. Problém spočívá v sestavení čtverce se stejnou plochou jako daná kružnice, pouze pomocí pravítka a kružítka. Eukleidés pro kvadraturu kruhu sepsal tyto podmínky:

1. Vytvořit čtverec se stejnou plochou, jakou má kruh,
2. za použití pouze pravítka a kružítka,
3. konečným počtem úkonů.[40]

Bez těchto pravidel lze kvadraturu kruhu provést pomocí Archimédovy spirály nebo křivky trisektrix.[41] U trisektrixu dojde k vytvoření obdélníku o stejném obsahu, jako má obsah kruhu.[42]

Navzdory úsilí mnoha velkých matematiků v průběhu staletí se v 19. století ukázalo, že za daných pravidel nelze kvadraturu kruhu provést. Jde zejména o pravidlo užití pouze pravítka a kružítka. To dokázal německý matematik Ferdinand von Lindemann v roce 1882 pomocí skutečnosti, že číslo pí je transcendentální číslo (viz historie čísla pí). Jeho důkaz funguje tak, že pokud by bylo možné provést kvadraturu kruhu pouze pomocí pravítka a kružítka, pak by bylo číslo pí algebraické, nikoli transcendentální.

Předpokládejme, že je možné provést kvadraturu kruhu pouze pomocí pravítka a kružítka. Nechť $r$ je poloměr dané kružnice, $a$ je délka strany čtverce. Máme

$$s^2 = \pi r^2.$$

Předpokládejme, že pí je algebraické, tedy že číslo pí je řešením polynomiální rovnice s racionálními koeficienty. Pak $p\ (x)\ je$ polynom s racionálními koeficienty pak

$$p(\pi) = 0.$$

Podle Lindemann-Weierstrassovy věty (výsledek komplexní analýzy) víme, že $e^x$ je transcendentální pro jakékoli nenulové algebraické číslo $x$. Proto je $e^{i\pi}$ transcendentální. Avšak také

$$e^{i\pi} = cos(\pi) + i * sin(\pi) = -1,$$

proto musí být -1 transcendentální, což nelze být, neboť -1 je racionální číslo, nikoliv iracionální. Z toho plyne, že číslo pí je transcendentální a není možné provést kvadraturu kruhu pomocí pravítka a kružítka.[43]

---

[40] BECKMAN (2021), tamtéž, str. 60.
[41] BECKMAN (2021), tamtéž, str. 54.
[42] BECKMAN (2021), tamtéž, str. 53.
[43] STEWART, Ian. *Neuvěřitelná čísla profesora Stewarta*. Praha: Dokořán, 2019, str. 174.

## 2.4 Užití

Nejčastěji se s číslem pí setkáme ve výpočtech obvodů a obsahů různých tvarů a těles. V praxi musíme vydláždit bazén ve tvaru válce, nebo kolik litrů paliva se vejde do nádrže tvaru válce. Dále se číslo pí využívá ve velikostech úhlu v radiánech. To je nejčastější a pravděpodobně i jediná možnost, jak se mimo specializovaný obor setkat s číslem pí.

V matematice se též můžeme setkat s integrálem, který měl v oblibě lord Kelvin. Ten svým studentům říkával: „Matematik je člověk, pro kterého je toto stejně zřejmé jako $2 + 2 = 4$.“[44] Což dávám v kontrastu s hnutím Woke Math, které neuznává, že $2 + 2 = 4$. Co by asi dané hnutí řeklo na Kelvinův oblíbený vzorec?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

V oblasti pravděpodobnosti máme několik úloh, kde se vyskytuje číslo pí a zároveň nemají nic společného s kružnicí či s kruhem. Nejznámější z nich je úloha: Jaká je pravděpodobnost, že jehla délky x dopadne na papír rozdělený rovnoběžnými čarami, které mezi sebou mají délku x, tak, že protne jednu z čar? Na odpověď přišel francouzský matematik Georges Louis Leclerc de Buffon (1707 až 1788) a překvapivě zní $\frac{2}{\pi}$. Tuto úlohu lze využít k odvození odhadu hodnoty čísla pí, a to například prostřednictvím Monte Carlo simulací.[45]

Další výskyt je v normálním rozdělení, tedy s Gaussovou křivkou, která znázorňuje pravděpodobnostní rozdělení s hustotami funkcí. Když bude mít křivka střední hodnotu v nule a rozptyl $\sigma^2 = 1$, pak její vrchol bude $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Této křivce odpovídá i věk úmrtí.[46]

Ve fyzice se číslo pí objevuje ve vzorcích pro Coulombův zákon, třetí Keplerův zákon, Heisenbergův princip neurčitosti, aj.[47]

Nakonec nejzábavnější užití čísla pí je v kultuře, přesněji v umění. Máme zde písně, básně i haiky o čísle pí. Většinou se jedná o mnemotechnickou pomůcku k zapamatování desetinných míst čísla pí. Například: „Sám u sebe v hlavě magického pí číslic deset mám.“ Podle počtu písmen nám vychází 3,141 592 653.[48]

Dále tu máme filmy a literaturu, zejména film *Kontakt* (1997), který má i svou knižní předlohu od propagátora vědy Carla Sagana. V příběhu mimozemská rasa upozorní lidstvo na ukrytou zprávu v čísle pí, což je hlavní téma knihy. Dále zde nesmí chybět veledílo *Stopařův*

[44] NAVARRO, Joaquin. *Tajemné pí: Lze provést kvadraturu kruhu?* Praha: Dokořán, 2018, str. 71.
[45] LIVIO, Mario. Zlatý *řez: Příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě*. Praha: Dokořán, 2006, str. 10.
[46] NAVARRO, Joaquin. *Tajemné pí: Lze provést kvadraturu kruhu?* Praha: Dokořán, 2018, str. 68.
[47] NAVARRO (2018), tamtéž, str. 71-72.
[48] NAVARRO (2018), tamtéž, str. 98.

*průvodce po Galaxii* od Douglase Adamse, v němž je číslo 42 odpovědí na otázku života, vesmíru a vůbec. V rozvoji čísla pí se našla sekvence 424242 na pozici 242 423, což je velice významné pro pátrání po znění otázky života, vesmíru a vůbec.[49]

Třešničkou na dortu byla roku 1897 snaha Edwarda Goodwina prosadit v americkém státu Indiana zákon, že $\pi = \frac{16\sqrt{2}}{7} \approx 3,232$. Tento zákon byl skoro přijat, dokud to senátorům nerozmluvil profesor matematiky Clarence Abiathar Waldo (1852 až 1926).[50]

[49] NAVARRO (2018), tamtéž, str. 103-104.
[50] NAVARRO (2018), tamtéž, str. 105-106.

# 3 Zlatý řez

Zlatý řez se ve starověkém Řecku i v odborné matematické literatuře značí řeckým písmenem tau (τ), avšak my si dovolíme používat řecké písmeno fí (φ). Nové jméno danému číslu dal na počátku 20. století americký matematik Mark Barr a to na počest slavného starořeckého sochaře Fidia (využil počáteční písmeno jeho jména). Fidias (490 až 430 př. n. l.) byl řeckým sochařem, který vytvářel svá díla s ohledem na zlatý řez. Mezi jeho nejvýznamnější díla patří Athéna parthenonská v Athénách a Zeus v chrámu v Olympii.[51]

Zlatý řez má několik označení. Nejznámější z nich je název zlatý řez či číslo fí. Dále existují označení jako zlatý poměr, zlaté číslo a již zmíněné φ a tau.[52] Přibližná hodnota zlatého řezu činí 1,618034 a jedná se o iracionální číslo, jako číslo pí.[53]

Snaha nalézt zlatý řez v přírodě, ve vesmíru, v uměleckých dílech, v hudbě i v historii, aniž by tam opravdu bylo či ho autor znal, se nazývá posedlost zlatým řezem.[54]

## 3.1 Odvození

Zlatý řez se dá odvodit dvěma způsoby a to tzv. geometricky a početně.

Geometricky se zlatý řez vypočítá pomocí úsečky, jejíž délka je $a+b$. Danou úsečku rozdělíme na dvě různě dlouhé části $a$ a $b$ tak, aby poměr delší části ($b$) k celé úsečce ($a+b$) se rovnal poměru kratší části ($a$) k delší části ($b$). Výsledkem bude zlatý řez.

$$\frac{(a+b)}{b} = \frac{b}{a} \cong 1{,}618034$$

Nyní si to zkusíme spočítat s úsečkou délky 1, tedy $a+b=1$. Označíme si kratší část úsečky výrazem $a = 1 - b$. Tím nám vznikne rovnice

$$\frac{1}{b} = \frac{b}{1-b}.$$

Tuto rovnici ekvivalentními úpravami převedeme na kvadratickou rovnici

$$b^2 + b - 1 = 0.$$

Použijeme diskriminantu, avšak potřebujeme pouze kladný kořen, což nám dá

$$b_1 = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4 * 1 * (-1)}}{2 * 1} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Pro výpočet zlatého řezu, pouze dosadíme kořen do rovnice

---

[51] LIVIO, Mario. Zlatý *řez: Příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě*. Praha: Dokořán, 2006, str. 12.
[52] LIVIO (2006), tamtéž, str. 13.
[53] STEWART, Ian. *Neuvěřitelná čísla profesora Stewarta*. Praha: Dokořán, 2019, str. 176.
[54] CRILLY, Tony. *Matematika: 50 myšlenek, které musíte znát*. Český Těšín: Slovart, 2010, str. 50.

$$\frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} * \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{2*(1+\sqrt{5})}{-1+5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

Tím jsme pomocí geometrie spočítali hodnotu zlatého řezu.[55]

Početně lze hodnotu zlatého řezu vyjádřit pomocí Fibonacciho posloupnosti. Více se danou posloupností budeme zabývat v podkapitole Fibonacciho posloupnost. Tato posloupnost čísel má tu vlastnost, že při dělení člena předcházejícím členem dá přibližnou hodnotu zlatého řezu. Čím vyšší hodnoty nabývají tito členové, tím přesnější je výsledná hodnota zlatého řezu.

$$\frac{1}{1} = 1; \frac{2}{1} = 2; \frac{3}{2} = 1{,}5; \dots$$
$$\frac{89}{55} = 1{,}6181; \frac{144}{89} = 1{,}6179; \dots$$

### 3.2 Historie

Počátky zlatého řezu musíme hledat pomocí historie pentagramu. Neboť civilizace, které znaly pentagram, tak mohly umět spočítat zlatý řez.[56] Neboť pravidelný pětiúhelník, jehož strany mají délku jedna, má úhlopříčky délky zlatého řezu.[57]

Jako první se nám nabízejí Babyloňané, kteří, dle archeologických nálezů, znali přibližný vzorec pro výpočet obsahu pentagramu. K tomu nás vedou nálezy destiček s klínovým písmem nalezených v roce 1936 v íránských Súsách, jejichž datace je z 2. tisíciletí př. n. l. Vede nás k tomu zápis: „1 40 stálá hodnota pětistranného obrazce," což při převodu ze sexagesimální soustavy dá číslo 1,666… (perioda nad šestkou). Skutečný obsah pětiúhelníku o straně délky jedna je 1,72. Přesto stále nedokážeme říci, zda Babyloňané, i přes znalost pentagramu, znali zlatý řez. Můžeme objevit jisté archeologické nálezy (např. basreliéf okřídleného asyrského poloboha z 9. století př. n. l. vystavený v Metropolitním muzeu v New Yorku), které při hraní s jejich rozměry mohou nabývat přibližných hodnot zlatého řezu. Je nutné pamatovat na to, že i rozměry televize mohou nabývat hodnot zlatého řezu. Proto je nutné hledat fakta, nikoliv domněnky. Nemáme žádné přímé důkazy, že by Babyloňané znali či dokonce používali zlatý řez.[58]

Prastarý Egypt, kde se k nebesům tyčí největší divy světa v podobě pyramid. Mohli oni, kteří znali tajemství architektury, znát zlatý řez? Hlavními relikviemi této doby jsou

---

[55] CHMELÍKOVÁ, Vlasta. *Zlatý řez nejen v matematice*. 2. vydání. Praha: MATFYZPRESS, 2011, str. 7-8.
[56] LIVIO, Mario. Zlatý *řez: Příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě*. Praha: Dokořán, 2006, str. 44.
[57] STEWART, Ian. *Neuvěřitelná čísla profesora Stewarta*. Praha: Dokořán, 2019, str. 177.
[58] LIVIO, Mario. Zlatý *řez: Příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě*. Praha: Dokořán, 2006, str. 45-47.

jejich stavby, na které se podíváme blíže. Mezi ně patří Osireion (Abydos) a Petosirisova hrobka (Tuna el-Gebel). Osireion je považován za hrobku krále Sethiho I. z 19. dynastie, který v Egyptě vládl v letech 1300-1290 př. n. l. Chrám byl objeven roku 1901 archeologem sirem Flindersem Petriem. Petosirisova hrobka byla objevena archeologem Gustavem Lefebvrem v 20. letech minulého století. Oproti Osireionu je mnohem mladší a pochází z let 300 př. n. l., tedy z doby, kdy již staří Řekové znali hodnotu zlatého řezu. Avšak když se na tyto stavby podíváme zblízka, nic nenasvědčuje tomu, že by staří Egypťané při jejich stavbě používali zlatý řez.[59]

Nakonec tu máme Velkou pyramidu v Gíze, jejíž rozměry mají ukrývat jak hodnoty zlatého řezu, tak i čísla pí. Jak jsme si dokázali v podkapitole o historii čísla pí, spojitost pí s rozměry Velké pyramidy v Gíze je čistě náhodná. Pyramida byla postavena přibližně roku 2480 př. n. l. s odchylkou ± 5 let.[60] Píše se o ní i samotný "otec dějepisu" Hérodotos (485 až 425 př. n. l.). Avšak věta, která je mu nesprávně připisována, zní: "čtverec výšky Velké pyramidy je roven obsahu trojúhelníkové stěny". Pokud by byla pravdivá, pak by tvořila rovnici $x^2 = s * a$, kde $x$ značí výšku pyramidy, $a$ značí polovinu strany základny a $s$ výšku trojúhelníkové stěny. Po dosazení rozměrů Velké pyramidy v Gíze ($2a$ = 755,43 až 756,08 stop, $x$ = 481,4 stop, $s$ = 612,01 stop) platí tato rovnost. Když následně výšku trojúhelníkové stěny vydělíme stranou $a$, dostaneme hodnotu 1,62, což se od hodnoty zlatého řezu liší o méně než 0,1 %. Existence hodnoty zlatého řezu v tomto případě může být čistě náhodná. Nicméně, tuto větu Hérodotos nikdy nenapsal. V jeho díle, v odstavci 124 knihy II. zvané *Euterpe*, se o Velké pyramidě v Gíze píše: "Je čtverhranná a každé její průčelí je všude široké osm plether. Vysoká je také tolik."[61] Když nahlédneme do Rhindova papyru, který je nejdůležitějším pramenem o matematice starověkého Egypta, tak nenalezneme žádné zmínky o zlatém řezu.[62]

Nemáme o existenci zlatého řezu v rukopisech ani v architektuře starověkého Egypta žádné důkazy. Různá tvrzení od „hledačů zlatého řezu“ se zakládají na manipulaci s čísly. Z toho tedy můžeme vyvodit, že staří Egypťané neznali zlatý řez.

Až ve starověkém Řecku máme přímé důkazy o znalosti zlatého řezu. Toto číslo se poprvé objevuje v knize *Základy* od řeckého geometra Eukleida (druhá polovina 4. století př. n. l. až první polovina 3. století př. n. l.). Eukleides píše: „Pravíme, že přímka (úsečka) jest

[59] LIVIO (2006), tamtéž, str. 48-50.
[60] LIVIO (2006), tamtéž, str. 52.
[61] LIVIO (2006), tamtéž, 54-56.
[62] PICKOVER, Clifford. A. *Matematická kniha: Od Pythagora po 57. dimenzi, 250 milníků v dějinách matematiky*. První vydání v českém jazyce. Praha: Dokořán, 2012, str. 36.

rozdělena poměrem krajním a středním, když větší úsečka má se k menší jako celá k větší.“[63] Což nám vyjadřuje odvození zlatého řezu pomocí úsečky (viz předchozí podkapitola). Dále využívá ve svém velkém díle (do 20. století nejprodávanější kniha hned po Bibli) zlatý řez k sestrojení pětiúhelníku.[64]

Nesmíme opomenout ani platónská tělesa, která vznikla dříve. Některá z nich nesou v sobě zlatý řez. Jde zejména o dvanáctistěn s jednotkovou délkou hrany, který má obsah celého povrchu $\frac{15\varphi}{\sqrt{3-\varphi}}$ a objem $\frac{5\varphi^3}{6-2\varphi}$. To samé vykazuje dvacetistěn s jednotkovou délkou hrany, jehož objem jest $\frac{5\varphi^5}{6}$. Je důležité říci, že tyto výpočty nebyly v dané době známy, ani znalost zlatého řezu. Avšak po objevení zlatého řezu Eukleidem se usnadnilo sestrojení těchto krásných těles.[65]

Po Eukleidovi dochází k propadu zájmu o zlatý řez. Za zmínku stojí řečtí matematikové Hérón z Alexandrie, Klaudios Ptolemaios a Pappos z Alexandrie. Hérón vytvořil ve spise *Metrica* aproximace obsahů pětiúhelníku a desetiúhelníku a objemů dvanáctistěnu a dvacetistěnu.[66] Ptolemaios ve své knize *Velká skladba* (*Almagest*) sestavil tabulky tětiv kružnice, což se dá srovnat s dnešními trigonometrickými tabulkami. Dále se zabýval výpočtem tětiv příslušných k úhlům 36º a 72º, což jsou strany vepsaného pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku do dané kružnice. Ve svých výpočtech používal zlatý řez jako pojem, nikoliv jeho hodnotu.[67] Pappos se pokoušel zastavit úpadek matematiky, avšak jeho pokusy byly marné. Ve svém díle *Synagoge* z roku 340 n. l. přišel s novou konstrukcí dvanáctistěnu a dvacetistěnu. Dále srovnal objemy platónských těles, které obsahují zlatý řez. Nesmíme opomenout ani jeho komentář k Eukleidově teorii iracionálních čísel, který se dochoval v arabských překladech. Po jeho smrti se ztratil zájem o zlatý řez, neboť došlo k úpadku západního světa, přesněji k době temna.[68]

Po pádu Říma se veškerý vývoj matematiky a zejména uchování řeckých spisů přesunulo na bedra arabského světa. Traduje se, že chalífu al-Mamúna (786 až 833) navštívil ve snu Aristoteles a přemluvil ho, aby dal přeložit veškeré řecké texty do arabštiny. Díky úsilí chalífy al-Mamúna byla zachována většina znalostí ze starověkého Řecka.[69]

---

[63] CHMELÍKOVÁ, Vlasta. *Zlatý řez nejen v matematice*. 2. vydání. Praha: MATFYZPRESS, 2011, str. 79.
[64] LIVIO, Mario. Zlatý *řez: Příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě*. Praha: Dokořán, 2006, str. 71 a 73.
[65] LIVIO (2006), tamtéž, str. 67-68.
[66] LIVIO (2006), tamtéž, str. 81.
[67] CHMELÍKOVÁ, Vlasta. *Zlatý řez nejen v matematice*. 2. vydání. Praha: MATFYZPRESS, 2011, str. 86.
[68] LIVIO, Mario. Zlatý *řez: Příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě*. Praha: Dokořán, 2006, str. 81-82.
[69] LIVIO (2006), tamtéž, str. 82.

Z arabských matematiků nejvíce přispěli k vývoji zlatého řezu: Muhammad ibn Músá al-Chwárizmí (780 až 850), Abú Kámil Šúdjá zvaný Hasíb Misrí – počtář z Egypta (850 až 930) a Muhammad abul Vafa (940 až 988).[70]

Al-Chwárizmí ve své slavné knize *Algebra* (viz historie nuly) napsal úlohu podobnou definici zlatého řezu: „Rozdělil jsem číslo deset na dvě části; vynásobil jsem první číslo desíti a druhé sebou samým a výsledky byly tytéž.“ To nám vytváří rovnici $10x = (10 - x)^2$, která platí pro úsečku rozdělenou zlatým řezem. Otázka je, zda pojem zlatý řez znal či nikoliv.[71]

Matematik Abú Kámil Šúdjá byl jedním z mála matematiků, kteří se zabývali hledáním všech možných řešení úloh (u jedné úlohy jich našel až 2 678 řešení). K zlatému řezu přispěl svým pojednáním O pětiúhelníku a desetiúhelníku. Pojednání obsahuje dvacet úloh, z nichž některé řeší pomocí užití zlatého řezu. Má se za to, že jeho pracemi se inspiroval Fibonacci.[72]

Muhammad Abúl-Wafá se proslavil zejména svou matematickou knihou pro obchodníky a písaře, v níž shrnul z aritmetiky vše, co by obchodník či písař mohl potřebovat. Zajímavostí je, že ve své knize nepoužil jediný číselný zápis, neboť čísla psal slovy. Dále byl odborníkem na indické číslice. Ve svém díle *Kniha o geometrických konstrukcích, potřebných řemeslníkům* uvedl důmyslnou konstrukci pětiúhelníku a desetiúhelníku pomocí zafixovaného kružítka v určitém úhlu, což se v upravené podobě využívá dodnes.[73]

Krásu zlatého řezu a jeho povědomí v Evropě obnovil až Leonardo z Pisy, známý jako Fibonacci (1170 až 1240). Žil na úplném počátku renesance a do Evropy od Arabů přinesl znalost indických čísel (více v podkapitole o historii čísla nuly) a zejména znalost zlatého řezu. Díky otci, který byl obchodním zástupcem Republiky Pisa v Bougie (dnešní přístav Bejaia v Alžírsku), procestoval severní Afriku. Tam dostal možnost studovat různé poziční číselné systémy, čímž tak narazil na indickou číselnou soustavu. Ihned poznal hodnotu dané soustavy a umístil ji do své matematické knihy *Liber Abaci* (kniha o abaku). Jeho kniha přinesla v Evropě matematickou revoluci a dostala ocenění od samotného císaře Svaté říše římské Fridricha II. V dané knize v kapitole XII představil svou nejslavnější matematickou úlohu o množení králíků, z čehož vychází nejslavnější číselná posloupnost (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55…) zvaná Fibonacciho posloupnost. Až Johannes Kepler roku 1611 objevil vlastnost, že každý člen Fibonacciho posloupnosti vydělen předchozím číslem dá výsledek oscilující kolem hodnoty zlatého řezu. Čím vyšší hodnoty je vybraný člen, tím přesnější je

[70] LIVIO (2006), tamtéž, str. 82-83.
[71] LIVIO (2006), tamtéž, str. 83.
[72] LIVIO (2006), tamtéž, str. 83.
[73] LIVIO (2006), tamtéž, str. 84.

výsledek vůči hodnotě zlatého řezu. Nesmíme též opomenout Fibonacciho knihu *Practica Geometriae* (Geometrická cvičení) z roku 1220, v níž popsal metody výpočtů úhlopříčky a obsahu pětiúhelníku, výpočty stran pětiúhelníku a desetiúhelníku z poloměrů vepsaných i opsaných kružnic a objemů dvanáctistěnu i dvacetistěnu. Svou knihou navázal na eukleidovskou geometrii a zejména na dílo abů Kámila Šúdjá *O pětiúhelníku a desetiúhelníku*.[74]

V renesanci se objevili tři umělci, tzv. renesanční lidé, kteří povznesli zlatý řez do umění. Nejznámější z nich byl Leonardo da Vinci (v překladu Leonardo z Vince, 1452 až 1519), dalším byl Ital Piero della Francesca (1412 až 1492) a Němec Albrecht Dürer (1471 až 1528). Nesmíme zapomenout na matematického mnicha Luca Pacioliniho (1445 až 1517).

Nejaktivnějším matematikem z dané trojice byl Ital Piero della Francesca, který namaloval například obraz *Bičování Krista* (Galleria Nazionale delle Marche v Urbinu) a *Křest Krista* (Národní galerie v Londýně). Až v pozdním věku, kdy již nebyl schopen tvořit, sepsal svá matematická díla, z nichž se dochovaly pouze tři: *De Prospectiva pingendi* (O perspektivě v malbě), *Libellus de Quinque Corporibus Regularibus* (Knížka o pěti pravidelných tělesech) a *Trattato d´Abaco* (Pojednání o abaku).[75] Zejména jeho druhá kniha obsahovala úlohy na téma pětiúhelníku, kde využívá k výpočtům zlatý řez.[76] Na jeho dílo navázal mnich Luca Pacioli, který napsal třísvazkový traktát *De Divina Proportione* (O božském poměru). V daném díle se silně inspiroval Francescovým dílem o tělesech. V páté kapitole poprvé pojmenoval zlatý řez božským poměrem, což dokládal pěti důvody, například zlatý řez je jen jeden jako je jeden Bůh. Ve druhém svazku hledal božský poměr v umění, architektuře i na lidském těle, čímž se inspiroval i samotný Leonardo da Vinci.[77]

Leonardo da Vinci se s Lucou Paciolim velmi přátelil a vzájemně se inspirovali a psali společná díla. Leonardo například vytvořil kresby mnohostěnů pro Pacioliho dílo *O Božské proporci*. Dále ve svém díle *Trattato della pittura* (Pojednání o malbě) spojil matematiku a umění, což dokládá varováním, aby jeho dílo nečetl ten, kdo není matematik.[78]

Albrecht Dürer podporoval názor, že matematika je významnou složkou umění. Zkoumal lidský pohyb i poměry délek lidského těla. Sepsal knihu *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt* (Pojednání o měření s kružítkem a pravítkem), kde zdůrazňoval, že výtvarník má mít znalosti z geometrie. Dále v knize popisoval konstrukci

[74] LIVIO (2006), tamtéž, str. 85-86, 87, 88-89, 93.
[75] LIVIO (2006), tamtéž, str. 113-114.
[76] CHMELÍKOVÁ, Vlasta. *Zlatý řez nejen v matematice*. 2. vydání. Praha: MATFYZPRESS, 2011, str. 88.
[77] CHMELÍKOVÁ (2011), tamtéž, str. 88-90.
[78] LIVIO, Mario. Zlatý *řez: Příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě*. Praha: Dokořán, 2006, str. 123-124.

logaritmické spirály, mnohoúhelníků a Platónských těles (ty rozložil na sítě), při nichž využíval znalosti zlatého řezu.[79]

V novověku se zlatým řezem zabýval zejména již zmíněný Johannes Kepler (1571 až 1630), který se proslavil svým modelem Sluneční soustavy a prácemi o eliptických orbitách planet. Zajímavostí je, že jeho eliptické orbity planet s ohniskem ve Slunci vysvětlil až Isaac Newton (1643 až 1727) pomocí gravitace. Život Johannese Keplera byl velmi strastiplný, přesto udělal pro vývoj vědy i matematiky mnoho a jeho dílo o pohybu Marsu je považováno za mezník ve zrodu moderní vědy. Jak již bylo řečeno, tak objevil vztah mezi Fibonacciho čísly a zlatým řezem. Dále zjistil, že druhá mocnina jakéhokoliv Fibonacciho čísla bude vždy o jedna menší než vynásobení obou jeho sousedních čísel. Dále věřil, že zlatý řez sloužil Bohu jako základní nástroj pro stvoření vesmíru, což dokládal například okvětními lístky květin. Kepler zemřel roku 1630 a jeho hrob v Řeznu rozmetaly války a zůstal po něm pouze kresba hrobu s jeho epitafem:

*Kdysi jsem nebesa měříval,*
*nyní zemské měřím stíny.*
*Myslí jsem nebesa prosíval,*
*teď tělo mé tlí v temnu hlíny.*[80]

Až v 19. století se poprvé objevují v literatuře názvy pro číslo fí: zlatý řez a zlaté číslo. Také se objevují teorie o proporcích lidského těla založených na zlatém řezu a výzkumy experimentální estetiky. Experimentální estetika například zkoumala působení zlatého řezu na lidskou psychiku.[81]

### 3.3 Fibonacciho posloupnost

Povíme si více o Fibonacciho posloupnosti, o které jsme mluvili v předchozí kapitole, a o jejích vlastnostech.

Celé zadání slavné úlohy o množení králíků zní: „Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, ze všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.“[82] Výsledek dané úlohy je 377 párů

[79] CHMELÍKOVÁ, Vlasta. *Zlatý řez nejen v matematice*. 2. vydání. Praha: MATFYZPRESS, 2011, str. 91-92.
[80] LIVIO (2006), tamtéž, str. 129, 133, 135-136, 137-139, 142-143.
[81] CHMELÍKOVÁ, Vlasta. *Zlatý řez nejen v matematice*. 2. vydání. Praha: MATFYZPRESS, 2011, str. 93.
[82] CHMELÍKOVÁ (2011), tamtéž, str. 13.

králíků v ohradě za jeden rok. Čas se počítá od narození druhého páru, proto je výsledkem až 14. člen posloupnosti.

Johannes Kepler objevil spojitost Fibonacciho čísel se zlatým řezem pomocí vzorce

$$a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n};\ n \geq 1$$

Všimněme si, že čím vyšší je hodnota $n$, tím blíž je hodnota $a_n$ k hodnotě zlatého řezu.[83]

Mějme kombinatorickou úlohu, kde dítě stoupá po schodech. Dítě může na jeden krok přejít jeden schod nebo dva schody. Hledáme počet všech možností, jak může dítě přejít schodiště s $n$ schody. Když má schodiště jeden schod, existuje pouze jeden způsob, jak ho dítě může překonat. U dvou schodů může buď oba přeskočit najednou, nebo je vzít po jednom, tedy dvě možnosti překonání. Při třech schodech již jsou tři možnosti, u čtyř schodů pět možností, atd. Když dáme výsledky do jedné řady, vznikne Fibonacciho posloupnost.[84]

Budeme-li sčítat lichý počet součinů sousedních čísel v naší posloupnosti, tak nám vždy dají druhou mocninu člena posloupnosti, kterého jsme ve vzorci použili jako posledního (největší člen posloupnosti užitý v daném vzorci). Například: $1 * 1 + 1 * 2 + 2 * 3 + 3 * 5 + 5 * 8 = 1 + 2 + 6 + 15 + 40 = 64 = 8^2$.

Číslo 11 má ve Fibonacciho posloupnosti zajímavý význam, který může být spojován s božím desaterem přikázání. Vždy, když sečteme deset následujících členů posloupnosti, získáme číslo dělitelné jedenácti beze zbytku. Po vydělení jedenácti nám vždy vyjde sedmé číslo z deseti vybraných členů posloupnosti.[85] Například: $89 + 144 + 233 + 377 + 610 + 987 + 1597 + 2\,584 + 4\,181 + 6\,765 = 17\,567 = 11 * 1597$.

Když vezmeme jakékoliv $n$-té číslo posloupnosti a porovnáme ho s číslem v pořadí $n+60$, tak vždy budou mít stejnou cifru na místě jednotek. Například páté číslo je 5 a 65. (5+60) číslo má hodnotu 17 167 680 177 565. Z toho vyplívá, že cifry na místě jednotek se opakují s periodou 60. Tuto vlastnost objevil roku 1774 matematik Joseph Louis Lagrange (1736 až 1813).[86]

Máme zlomek 1/89 (jedna děleno jedenáctým členem Fibonacciho posloupnosti), jehož výsledek je 0,011 235 95… Když budeme postupně sčítat členy posloupnosti od nuly vydělenými vždy $10^{n+1}$, tak získáme zlomek 1/89.

$$\frac{0}{10} = 0{,}0$$

[83] CHMELÍKOVÁ (2011), tamtéž, str. 17.
[84] LIVIO, Mario. Zlatý *řez: Příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě*. Praha: Dokořán, 2006, str. 90.
[85] LIVIO (2006), tamtéž, str. 96.
[86] LIVIO (2006), tamtéž, str. 96.

$$\frac{1}{100} = 0{,}01$$
$$\frac{1}{1000} = 0{,}001$$
$$\frac{2}{10^{3+1}} = 0{,}000\,2$$
$$\frac{3}{10^{4+1}} = 0{,}000\,03$$
$$\frac{5}{10^{5+1}} = 0{,}000\,005$$
$$\frac{8}{10^{6+1}} = 0{,}000\,000\,8$$
$$\frac{13}{10^{7+1}} = 0{,}000\,000\,13 \dots atd.$$

Pro sčítání Fibonacciho čísel existuje pomůcka. Kdy součet všech Fibonacciho čísel, od prvního po n-té, se rovná (n+2)-tému číslu mínus 1. Například součet prvních jedenácti:
$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 + 89 = 232 = F_{11+2} - 1 = 233 - 1 = 232$

Nejdůležitější otázka zní, lze zjistit jakýkoliv člen Fibonacciho posloupnosti, aniž bychom spočítaly předchozí členy? Například jakou hodnotu má 69. člen Fibonacciho posloupnosti? Vzorec pro výpočet objevil, dle Maria Livia, Leonard Euler (1707 až 1783) a Abraham de Moivre (1667 až 1754). Avšak se objev daného vzorce přičítá francouzskému matematikovi jménem Jacques Philippe Marie Binet (1786 až 1856).[87] Daný Binetův vzorec zní:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} * \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

### 3.4 Zlatý řez v přírodě

Od prvního pohledu je matematika a krása dvě naprosto rozdílné věci, avšak i přes subjektivnost krásy můžeme říci, že zlatý řez má ke kráse nejblíže. Jen málokterá matematická konstanta či rovnice se ukrývá v samotném vnitru přírody jako zlatý řez. Avšak se neukrývá přímo, ale pomocí tvarů a Fibonacciho čísel.

Máme zde různé květiny, jejichž počet okvětních lístků je Fibonacciho číslem. Měsíček lékařský (calendula officinalis) má 13 okvětných lístků, astry 21, sedmikrásky dle

[87] LIVIO (2006), tamtéž, str. 99.

druhu 34 či 59 nebo až 89 okvětných lístků. Slunečnice jich mají 55 či 89 nebo až 144 okvětných lístků.[88]

Nyní se zaměříme na logaritmickou spirálu, která se zvětšuje na principu zlatých obdélníků, což souvisí se zlatým řezem. Tuto spirálu nejčastěji objevíme ve tvaru schránky měkkýše loděnky hlubinné (*nautilus pompilius*), což se často dává do kontextu se zlatým řezem. Dále tu máme seskupování oblak, hvězd v galaxii (zejména naše Galaxie), semínka v květu slunečnice a trasu sokola při útoku na kořist. Tam všude můžeme nalézt tvar logaritmické spirály, která v sobě ukrývá zlatý řez.[89]

Nakonec tu máme samotné lidské tělo. Nejčastěji se nalézáním zlatého řezu v rozměrech těla zabývali malíři, sochaři a architekti. Už od starověkého Řecka se vedly úvahy o ideální postavě, kde platilo, že ve zdravém těle je zdravý duch. Římský architekt Vitruvius (80 či 70 př. n. l. až 25 př. n. l.) navázal na tyto úvahy a propagoval jednoduché racionální poměry nejen u svých staveb. Leonardo da Vinci zpracoval jeho poznatky v malbě *Vitruviánského člověka*. Německý malíř Albrecht Dürer navázal na práce obou velikánů a dal jejich poznatkům matematický rámec v knize *Vier Bücher von menslicher Proportion* (Čtyři knihy o lidských poměrech). V roce 1941 začal architekt a výtvarník Charles Édouard Jeanneret (1887 až 1965), známý jako průkopník moderní architektury, pracovat na proporčním kánonu s názvem *Modulor*. Mělo se jednat o systém ideálních poměrů vycházejících z lidského těla. Středobodem byl průměrný Evropan výšky 183 cm (z počátku 175 cm). Vzdálenost od země k pupku byla 113 cm, od země k podpaží 140 cm a od země k prstům zvednuté ruky ve vzpřímené poloze 226 cm. Když budeme dělit délku 183 cm 113 cm, případně 226 cm 140 cm, tak získáme vždy přibližnou hodnotu zlatého řezu.[90]

$$183 \div 113 \cong 1{,}6195 \cong \varphi$$

$$226 \div 140 \cong 1{,}6143 \cong \varphi$$

Tuto úlohu můžeme zakomponovat do výuky jako zábavnou formu k poznání zlatého řezu. Žáci si vzájemně změří svou celkovou výšku, výšku od zvednuté ruky, výšku k pupku a k podpaží. Nakonec je mezi sebou vydělí jako Charles Édouard Jeanneret a budeme zkoumat, zda naše spočítané hodnoty se blíží hodnotě zlatého řezu. Moje naměřené hodnoty byly: 175 cm, 213 cm, 95 cm a 136 cm.

$$175 \div 95 \cong 1{,}8421 > \varphi$$

$$213 \div 136 \cong 1{,}5662 < \varphi$$

[88] STEWART, Ian. *Neuvěřitelná čísla profesora Stewarta*. Praha: Dokořán, 2019, str. 179.
[89] CHMELÍKOVÁ, Vlasta. *Zlatý řez nejen v matematice*. 2. vydání. Praha: MATFYZPRESS, 2011, str. 127.
[90] CHMELÍKOVÁ (2011), tamtéž, str. 129-130.

### 3.5 Užití

Zajímavé může být porovnat výsledky vyhledávání výrazu "golden ratio" vyhledávačem Google. Po zadání tohoto výrazu se zobrazí 296 milionů výsledků. Pro srovnání: výraz "Simpsons" má 183 milionů výsledků, "Star Trek" 338 milionů výsledků, "pi number" 1,39 miliard výsledků, "e=mc2" 20,8 milionů výsledků a "pythagorean theorem" 24,2 milionů výsledků. Nicméně to nemusí nutně znamenat, že naše společnost má znalost o Zlatém řezu.

V současnosti se zlatý řez, potažmo číslo fí, využívá v několika oborech, většinou umělecky založených. Například v plastické chirurgii, v typografii, ve fotografii a v chemii.

Americký chirurg Dr. Stephen R. Marquardt vypracoval se svým týmem databázi atraktivních obličejů, kterou posléze využil k vypracování masky ideálních tvarů lidské tváře pro plastickou chirurgii. Sám doktor považoval zlatý řez jako klíč ke kráse, proto nepřekvapí, že maska dokonalé tváře je založená na proporcích zlatého řezu. Kromě plastické chirurgie lze masku aplikovat pomocí make-upu, a tak dosáhnout dokonalých (krásných) tvarů tváře.[91]

Typografie je dnes rychle rostoucí obor díky vývoji počítačů. Obor se zabývá úpravou textů a pravidly pro jejich úpravu. Zlatý řez se posléze objevuje v rozměrech stran knih i akcidenčních tiskovinách (pozvánky, vizitky, svatební oznámení), které mají rozměry dvojitého zlatého řezu, což znamená v poměru 2 : 1,618. Dále se využívá zlatého řezu k využití pozornosti člověka na internetových stránkách nebo v časopisech či v novinách. Mluvíme o optickém středu stránky, kde je soustředěna největší pozornost čtenáře/uživatele. Tato oblast se nachází v horní třetině stránky a vůči výšce stránky nabývá poměru 5/3 nebo 8/5 (dělení sousedních čísel Fibonacciho posloupnosti.[92]

Při pořizování snímků, tedy fotografování, se využívá čtyř zlatých bodů, což jsou průniky čtyř úseček vedoucí mezi dvěma protilehlými stranami fotografie. Každá úsečka má počátek v bodě zlatého řezu dané strany, se kterou je kolmá. Každá strana má vždy dva body zlatého řezu. Body zlatého řezu vytvářejí uprostřed fotografie obdélník. Umístěním objektu fotografování do jednoho z bodů zlatého řezu zvýší atraktivitu fotografie, než kdyby byl objekt přesně ve středu fotografie.[93]

Izraelský inženýr Dany Schectman roku 1984 objevil vlastnost krystalů hliníko-manganové slitiny. Tyto krystaly, zvané kvazikrystaly, vykazují velkoplošné uspořádání s pětinásobnou symetrií a objevují se i v jiných slitinách. Tento objev změnil tvář chemie, neb do té doby se předpokládalo, že atomy pevné látky jsou buď vysoce uspořádané a plně

[91] CHMELÍKOVÁ (2011), tamtéž, str. 145.
[92] CHMELÍKOVÁ (2011), tamtéž, str. 145-146.
[93] CHMELÍKOVÁ (2011), tamtéž, str. 146-147.

periodické krystaly (atomy soli tvoří tvar krychle) nebo jsou zcela amorfní, tedy neuspořádané (atomy skla). Kvazikrystali však nespadají do žádného z obou stavů a tvoří Penroseovo dláždění na principu zlatého řezu.[94]

[94] LIVIO, Mario. Zlatý *řez: Příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě*. Praha: Dokořán, 2006, str. 185-186.

# 4 Eulerovo číslo

Konstanta e má oproti ostatním konstantám v této práci nejkratší historii. Nemůže se pyšnit tak bohatou historií jako číslo pí, přesto jej překonává ve své užitečnosti. Britský autor David Darling kdysi prohlásil: „Eulerovo číslo je pravděpodobně nejdůležitější číslo celé matematiky. Číslo $\pi$ je sice mezi lidmi známější, ale Eulerovo číslo je však na vyšších úrovních této disciplíny mnohem důležitější a také mnohem častější.“[95]

Eulerovo číslo je iracionální a k tomu transcendentní, jako jeho „starší bratr“ $\pi$ a dosahuje přibližné hodnoty 2,718 281.[96] Jeho přibližnou hodnotu lze napsat zlomkem $\frac{87}{32}$, nebo jeho palindromickým rozšířením $\frac{878}{323}$.[97]

## 4.1 Odvození

Nejznámější odvození Eulerova čísla je od švýcarského matematika Jacoba Bernoulliho ze 17. století.[98] Jde o složené úročení, kdy do banky vložíme na jeden rok těžce vydělanou korunu. Banka nás má velmi ráda a tak nám dá 100% úrok, tedy nám na konci roku vyplatí 100 % z uložené částky, takže budeme mít 2 koruny v bance. Když tento úrok rozdělíme, kdy každý půlrok bude úrok činit 50 %, tak po roce budeme mít 2,25 korun. Při rozdělení roku na čtvrtiny s úrokem 25 % získáme na konci roku 2,441 41. Co se však stane, když rozdělíme rok na nekonečno období? Získáme tak

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Tato limita konverguje ke konstantě přibližné hodnoty 2,441 41. Až Leonhard Euler tomuto číslu dal symbol $e$. Takže najednou

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$[99]

Leonhard Euler objevil i druhý způsob odvození jeho čísla. Máme zde posloupnost

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots,$$

která je nekonečná. Euler objevil, že tato posloupnost konverguje k hodnotě čísla e, tedy

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots$$[100]

[95] PICKOVER, Clifford. A. *Matematická kniha: Od Pythagora po 57. dimenzi, 250 milníků v dějinách matematiky*. První vydání v českém jazyce. Praha: Dokořán, 2012, str. 166.
[96] BEATTY, Richard a spol. *Matematika: 100 objevů, které změnily historii*. Praha: Slovart, 2013, str. 58.
[97] CRILLY, Tony. *Matematika: 50 myšlenek, které musíte znát*. Český Těšín: Slovart, 2010, str. 25.
[98] BEATTY, Richard a spol. *Matematika: 100 objevů, které změnily historii*. Praha: Slovart, 2013, str. 59.
[99] STEWART, Ian. *Neuvěřitelná čísla profesora Stewarta*. Praha: Dokořán, 2019, str. 183-185.

## 4.2 Historie

Historie Eulerova čísla je spjatá s historií logaritmů a souvisí se zrodem moderní matematiky na počátku 17. století.[101]

John Napier (1550 až 1617) byl osmý Laird z Merchistounu (český ekvivalent zeman, majitel pozemku s právem účastnit se zasedání britského parlamentu). Představil koncept logaritmů, což byl způsob, jak zjednodušit výpočty vysokých mocnin na pouhé násobení, například:

$$5^{100} * 5^{25} = 5^{100+25} = 5^{125}.$$

Tento koncept s využitím logaritmických tabulek urychlil výpočty.[102]

Na jeho práci navázal matematik Henry Briggs (1561 až 1630), který zavedl logaritmus o základu 10.[103] Později si všimnul, že Napierovy logaritmy mají příliš složitý základ, proto přišel s přirozeným logaritmem o základu čísla e.[104]

V podkapitole odvození Eulerova čísla jsme mluvili o složeném úročení, se kterým přišel Švýcarský matematik Jacob Bernoulli (1655 až 1705), který byl z rodiny věhlasných matematiků.[105]

V historii Eulerova čísla má největší zásluhy právě Leonhard Euler (1707 až 1783), který danou konstantu označil písmenem e.[106] Roku 1737 dokázal, že e i $e^2$ jsou iracionální.[107] Dále Euler vytvořil Eulerovy formule pro trigonometrické funkce:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2};\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$ [108]

Což byl pouze kousek k nejslavnější a zároveň nejkrásnější matematické rovnici na světě.

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Tato rovnice vznikla roku 1747 a je nazývána jako Eulerova rovnost či Eulerova identita. Roku 2004 časopis *Mathematical Intelligencer* vytvořil mezi čtenáře anketu o nejkrásnější matematický vzorec na světě, což s velkým náskokem vyhrála právě již zmíněná Eulerova identita.[109]

Švýcarský matematik Leonhard Euler byl, dle našeho názoru, největším matematikem v celé lidské historii. Během života publikoval 886 knih a matematických spisů a jeho výkon

[100] CRILLY, Tony. *Matematika: 50 myšlenek, které musíte znát*. Český Těšín: Slovart, 2010, str. 25-26.
[101] BEATTY, Richard a spol. *Matematika: 100 objevů, které změnily historii*. Praha: Slovart, 2013, str. 58.
[102] STEWART, Ian. *Neuvěřitelná čísla profesora Stewarta*. Praha: Dokořán, 2019, str. 186.
[103] BEATTY, Richard a spol. *Matematika: 100 objevů, které změnily historii*. Praha: Slovart, 2013, str. 42.
[104] STEWART, Ian. *Neuvěřitelná čísla profesora Stewarta*. Praha: Dokořán, 2019, str. 188.
[105] BEATTY, Richard a spol. *Matematika: 100 objevů, které změnily historii*. Praha: Slovart, 2013, str. 59.
[106] CRILLY, Tony. *Matematika: 50 myšlenek, které musíte znát*. Český Těšín: Slovart, 2010, str. 24.
[107] SIKOROVÁ, Renata. *Číslo e a jeho vlastnosti (4)*. Učitel matematiky, roč. 9, č. 2, 2001, s. 98-103, str. 102.
[108] SIKOROVÁ (2001), tamtéž, str. 101.
[109] BEATTY, Richard a spol. Matematika: *100 objevů, které změnily historii*. Praha: Slovart, 2013, str. 62.

dosahoval v průměru 800 tištěných stran za rok, což je fascinující výkon. Roku 1735 oslepl na jedno oko a roku 1771 oslepl úplně, přesto mu to nezabránilo v pokračování ve své práci. Téměř veškeré jeho práce jsou skvělé a mají zásadní význam. Jeho podpis lze nalézt skoro v každé oblasti matematiky, dalo by se z toho vyvozovat, že to byl génius na hranici příčetnosti. Jeho okolí jej popisovalo jako „žoviálního chlapíka“, který si užíval života, což dokládá i jeho bohatý rodinný život. Jeho rodina čítala, kromě ženy, 13 členů v podobě dětí a vnuků, se kterými měl vřelé vztahy. O jeho přítomnost na svém dvoře se ucházela jak ruská carevna Kateřina II. Veliká, tak i pruský král Fridrich II. Konečné slovo měl Euler, který ke konci života odešel z pruského dvora do dvora carovny, kde získal bohaté podmínky. Euler disponoval fenomenální pamětí, díky čemuž z hlavy dokázal spočítat šesté mocniny celých čísel do sta a celou tabulku si pamatovat několik dní. Dále dokázal vyvrátit Fermatovu domněnku, že $2^{2^n+1}$ bude vždy prvočíslem, neb $2^{2^5+1} + 1 = 6\,700\,417 * 641$.[110]

Francouzský matematik Charles Hermite (1822 až 1901) objevil, že Eulerovo číslo je transcendentní, tedy že není kořenem algebraické rovnice s racionálními koeficienty, což zveřejnil roku 1873. Zároveň vytvořil racionální aproximaci pro e a $e^2$ s chybou menší než 0,0003 procenta.[111]

$$e \approx \frac{58\,291}{21\,444};\ e^2 \approx \frac{158\,452}{21\,444}$$

### 4.3 Užití

Eulerovo číslo má několik důležitých využití v matematice. Jedna z jeho nejvýznamnějších využití je v matematické analýze, kde má ústřední postavení, neboť derivace exponenciální funkce $e^x$ je rovna $e^x$.[112] Další využití je v podobě přirozených logaritmů (ln či nepřesně $\log_e$), které se ve vyšší matematice uplatňují lépe než logaritmy o základu deset.[113]

Zajímavým výskytem Eulerova čísla je v úloze pravděpodobnosti, kterou se v 18. století zabýval francouzský matematik Pierre Rémond de Montmort (1678 až 1719). Úloha zní: „Skupina osob si zajde na oběd a po něm si každá osoba vybere v šatně zcela nahodile klobouk. Jaká je pravděpodobnost, že ani jedna osoba si nevzala svůj vlastní klobouk?“ Odpověď je $\frac{1}{e}$, což je přibližně 37 %.[114]

---

[110] BECKMAN, Petr. *Historie čísla pí*. 2. vydání, revidované. Praha: Academia, 2021, str. 163-164, 167, 168.
[111] SIKOROVÁ, Renata. *Číslo e a jeho vlastnosti (4)*. Učitel matematiky, roč. 9, č. 2, 2001, s. 98-103, str. 102.
[112] SIKOROVÁ (2001), tamtéž, str. 98-99.
[113] STEWART, Ian. *Neuvěřitelná čísla profesora Stewarta*. Praha: Dokořán, 2019, str. 188-189.
[114] CRILLY, Tony. *Matematika: 50 myšlenek, které musíte znát*. Český Těšín: Slovart, 2010, str. 27.

Máme zde také Poissonovo rozdělení, což je četnost výskytu málo pravděpodobných řídkých jevů, kde se objevuje Eulerovo číslo. Další oblastí výskytu je stavitelství, kde se využívá ve stavbách visutých mostů, přesněji u křivek jejich lan. Nesmíme opomenout ani statistiku, kde se naše číslo objevuje ve známé zvonové křivce normálního rozložení. Což je grafické znázornění četnosti údajů, např. váha studentů, hodnoty IQ u učitelů tělesné výchovy atd.[115]

Nakonec tu máme oblast exponenciálního růstu a poklesu, kde naše Eulerovo číslo hraje významnou roli. Popisuje zde proces, kdy je růst či pokles nějaké veličiny v daném okamžiku úměrný její okamžité velikosti. Používáme zde vzorec, kde $k$ je konstanta a $x_0$ počáteční hodnota $x$ v čase nula a t je čas.[116]

$$x = x_0 * e^{k*t}$$

O exponenciálním růstu mluvíme tehdy, když je hodnota $k$ kladná. Využívá se toho například v růstu populace zvířat či lidí na určitém místě a v čase. Tento růst je nekonečný, jako množení králíků od Fibonacciho. Naštěstí v přírodě existují ochrany, které brání extrémnímu přemnožení. Například u lidí s větším blahobytem klesá porodnost, jak si můžeme všimnout v západním světě. U zajíců zas počty snižují predátoři a množství potravy. [117] Máme zde příklad uzavřeného lesa od okolí, kde žijí zajíci a vlci. Když je vlků málo, tak se zajíci přemnoží, tím je více potravy a počet vlků se zvýší. Když vlci sníží lovem počet zajíců, tak se tím sníží i počet vlků, neb budou hynout hlady. Tak se narodí i méně mláďat vlků, což vyústí v nižší počty vlků. Jakmile je nízký počet vlků, tak se rozroste opět počet zajíců atd.

Exponenciální pokles nastává tehdy, když je hodnota $k$ záporná. Využívá se toho v chladnutí horkého tělesa a zejména v radioaktivním rozpadu, kde radioaktivita exponenciálně klesá. Užitečnou veličinou při měření doby radioaktivity nějaké věci či území je poločas rozpadu. Jedná se o dobu, kdy radioaktivita klesne na polovinu, a byla zavedena roku 1907.[118]

---

[115] CRILLY (2010), tamtéž, str. 27.
[116] STEWART, Ian. *Neuvěřitelná čísla profesora Stewarta*. Praha: Dokořán, 2019, str. 189.
[117] STEWART (2019), tamtéž, str. 190.
[118] STEWART (2019), tamtéž, str. 191.

# 5 Číslo nula

Číslo nula je, dle našeho názoru, ta nejpodivnější konstanta, se kterou jsem se setkali. Náleží do přirozených čísel s nulou, tedy

$$0 \in \mathbb{N}_{0,}$$

a zároveň se jedná o číslo, které od sebe odděluje záporná a kladná čísla. Dále se nulou značí průnik osy x s osou y, případně s osou z, v kartézské soustavě souřadnic. Daný bod má souřadnice: [0;0], případně: [0;0;0]. Historie nuly sahá až do dob Babylónie, přes starověkou Indii až po současnost. Po celou její historii kolují snahy o její pochopení, využití a odstranění, avšak je zde s námi dodnes.

## 5.1 Odvození

Číslo nula se logicky odvodí ze slovní úlohy: „Farmář chová pět krav. Kolik bude mít krav, když jich pět prodá na trhu?“ Z toho nám vzniká rovnice

$$5 - 5 = \mathrm{x},$$

kde $x$ značí počet krav po prodeji. Což nám dá, že

$$0 = x.$$

Farmář by samozřejmě neřekl, že má nula krav, ale že nemá žádnou krávu.

Obecně lze nulu vyjádřit rovnicí

$$a - a = 0;\ a \in \mathbb{R}.$$

Z toho plyne, že i odečítání nuly od nuly dá nulu.

## 5.2 Historie

Když se podíváme přímo do pravěku a na matematiku dané doby, tak zjistíme, že matematika byla využívána k praktickému užití. Například počítání lidí v kmeni, počet ulovených zvířat, počet dní atd. Což nám dokládají bohaté nálezy kostí s řadou zářezů. V nejznámější české lokalitě pro archeologické nálezy z doby kamenné v Dolních Věstonicích byla v 30. letech 20. století archeologem Karlem Absolonem nalezena vlčí kost s řadou zářezů, což naznačuje, že kost byla použita k matematickému záznamu.[119]

Jak tedy lidé doby kamenné pracovali s nulou? V předchozí kapitole jsme si uvedli příklad, kdy majitel krav prodal veškeré své krávy na trhu. Daný majitel nepotřebuje počítat, kolik krav mu zbylo, neboť prázdný pozemek bez krav vidí. Proto lidé doby kamenné

[119] SEIFE, Charles. *Nula: Životopis jedné nebezpečné myšlenky*. Praha: Dokořán, 2005, str. 12.

nepotřebovali ve svém životě nulu a ani ji nevyhledávali. Neboť když něco neměli, tak to neměli.

První zmínky o nule nalézáme až ve starověké Babylónii, kde existovala jako součást pozičního psaní čísel. Babyloňané v psaní číslic 120, 1002, 102 využívali mezeru pro označení prázdného místa mezi ciframi. Vzniklo tak: 12_, 1__2, 1_2 (pro přehlednost jest prázdné místo vyjádřeno dolní pomlčkou). Jak zde můžete vidět, tak se tento zápis čísel zdá velmi nepřesný, neboť na první pohled nelze poznat počet mezer mezi ciframi ani za ciframi. Proto tehdy docházelo k nedorozumění.[120] Později došlo k vytvoření symbolu pro vyjádření dané mezery v podobě dvou šikmých klínů //, tím se zápis čísel změnil na 12//, 1////2, 1//2. Nyní již byl zápis číslic mnohem přehlednější. Je nutné zmínit, že i přes využití znaku nuly jako pozičního symbolu, nepočítala babylonská matematika s nulou.[121]

Ve starověkém Řecku a v Egyptě byla situace úplně odlišná. Jejich matematika měla základ v Eukleidovské geometrii, kde existence nuly spíže překážela. Například úloha: Narýsujte čtverec o straně nula. Takový čtverec nelze narýsovat.[122]

Svými vlastnostmi šla nula proti Archimédovu axiomu sčítání, který říká, že přičtete-li číslo k sobě samému, převýší výsledek vždy jakékoli původní číslo. Avšak když přičteme nulu k jakémukoli číslu, výsledek zůstane stejný, a tedy se zdá, že nula popírá daný axiom.[123]

Ani v poziční soustavě nebylo pro nulu místo. Egypťané pro čísla používali zápisy pomocí obrázků, tzv. hieroglyfů a Řekové pomocí své abecedy. Přesněji čísla 1-9, 10-90 a 100-900 měli vyjádřena písmeny své abecedy, což dělalo problémy. Například poziční zápis čísla 2023 se může číst jako 223 nebo 200023 nebo 202300. Tedy neexistoval symbol pro nulovou cifru. Také základní matematické početní úkony nebyly intuitivní Například 20+30 nebo 2+3, pro nás je to velmi intuitivní a snadno řešitelné. Avšak pro Řeky to byly dva odlišné příklady, kde pro dvacítku měli jiný symbol než pro dvojku (to samé pro třicítku). Z toho je patrné, že pro Řeky nebyl výsledek tak zřejmý, jako pro nás v současnosti se znalostí nuly. Díky nule potřebuje současná matematika znalost 10 symbolů pro čísla, místo 27 symbolů pro Řeky.[124]

Z Babylónie se nula přesto do Řecka dostala a Řekové ji označili v alfabetě symbolem omikron (*o*). Podoba s dnešní nulou je čistě náhodná, neb v řečtině je výraz pro nic *ouden*, odtud vzali počáteční písmeno omikron a použili jako symbol pro nulu. Tu však používali

[120] PICKOVER, Clifford. A. *Matematická kniha: Od Pythagora po 57. dimenzi, 250 milníků v dějinách matematiky*. První vydání v českém jazyce. Praha: Dokořán, 2012, str. 80.
[121] SEIFE, Charles. *Nula: Životopis jedné nebezpečné myšlenky*. Praha: Dokořán, 2005, str. 23.
[122] SEIFE (2005), tamtéž, str. 35 a 43.
[123] SEIFE (2005), tamtéž, str. 29.
[124] STEWART, Ian. *Neuvěřitelná čísla profesora Stewarta*. Praha: Dokořán, 2019, str. 118-119.

minimálně, přesněji pouze ve výpočtech v astronomii. Babyloňané vynikali svou astronomií, kterou od nich převzali Řekové. Ti v astronomii používali babylonský šedesáti-číselný systém, ale údaje byly vždy následně převedeny do řecké desítkové číselné soustavy.[125]

Pokud nahlédneme do filosofie Řecka, kterou později převzal Řím a celá Evropa, objevíme zde strach z prázdnoty, kterou nula představovala. Základem řecké filosofie je Aristotelský systém, kde neexistuje prázdnota ani nekonečno, což je přímo v konfrontaci s vlastnostmi nuly, zejména dělení nulou. Tuto představu vytvořili zejména Pythagoras, Aristoteles a Ptolemaios, od nichž ji posléze převzal Řím i středověká Evropa.[126]

Pokud jde o Římský vliv na vývoj matematiky a zejména na vývoj nuly, tak ten byl minimální. Lze jim však přičítat pouze jeden největší „vklad" do vývoje matematiky, kterou způsobil jeden římský voják při dobývání Syrakusy. Tehdy svým mečem zabil starého matematika Archiméda, který se krčil nad pískem a prováděl své výpočty. Kdo ví, zda by Archimédes, kdyby přežil, pronikl hlouběji do tajů nuly i nekonečna, ale římský meč protnul osudy dějin evropské matematiky až do období renesance.[127]

Za velkou louží stojí za zmínku pouze Májové, kteří ze všech národů Jižní a Severní Ameriky měli nejvyspělejší matematiku, kterou posléze převzali Aztékové. Číselná soustava Májů byla založena na dvacítkové soustavě a rozložena do skupin po pěti číslech (0, 1, 2, 3, 4). Důležité je zmínit, že jejich soustava začínala nulou.[128] Nejvíce pokročilí byli v kalendářním systému, který byl mnohem pokročilejší než současný kalendář. Rok měli rozdělen na 18 měsíců po dvaceti dnech a na přechodnou etapu zvanou *Uayeb* s pěti dny. Vyspělostí vůči našemu kalendáři byla existence nuly, přesněji nultého dne, kdy každý měsíc začínal nultým dnem a končil devatenáctým dnem. Proč je to tak vyspělejší? Jde o problém nultého roku, případně zda například 21. století začíná rokem 2000 nebo 2001? Májové měli jasno a pro ně by 21. století začínalo rokem 2000, oproti Evropanům, pro něž začíná dané století rokem 2001. Evropský kalendář byl vymyšlen ve středověku, kde číselná soustava začínala právě jedničkou, na rozdíl od tradičního počítání Májů.[129]

O největší průlom v historii nuly, který úplně změnil pohled na ni, se postarali Indové. Díky tažení Alexandra Velikého se do Indie dostala znalost babylonské nuly i Aristotelské filosofie. Indická filosofie, na rozdíl od řecké, byla otevřená prázdnotě i nekonečnu. Proto

---

[125] SEIFE, Charles. *Nula: Životopis jedné nebezpečné myšlenky*. Praha: Dokořán, 2005, str. 49.
[126] SEIFE (2005), tamtéž, str. 33 a 49.
[127] SEIFE (2005), tamtéž, str. 64-65.
[128] MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky*. Příbram I.: Pistorius & Olšanská, 2011, str. 101.
[129] SEIFE, Charles. *Nula: Životopis jedné nebezpečné myšlenky*. Praha: Dokořán, 2005, str. 25-26.

přijetí nuly jako čísla, tedy symbolu prázdnoty, nic nebránilo.[130] Indická matematika měla desítkovou soustavu a jejich podobu zápisu čísel převzala arabská a posléze i evropská matematika. Správný název pro současné číslice by mělo být indické číslice, nikoliv arabské.[131] Významným milníkem indické matematiky byl systém výpočtů, který se neodlišoval od našeho, takže dovoloval rychlejší početní úkony než za použití abaku.[132] Ze středověku jsou známy soutěže v rychlosti počítání, kde proti sobě vždy stanul indický systém proti abaku, což byla obdoba dnešního šachového turnaje mezi člověkem a počítačem. Jak je patrné, tak indický systém vždy vyhrál.[133]

Stvořitelem nuly jako čísla lze považovat indického matematika a astronoma Brahmaguptu (596 až 668 nebo 598 až 670). Jeho nejznámější dílo je *Brahmasputasiddhanta* (v překladu Otevření vesmíru). V 25 kapitolách (deset původních a patnáct kapitol poznámek k předchozím deseti kapitolám) sepsal své zobecnění Heronova výpočtu obsahu trojúhelníku, výpočet obsahu pravidelného čtyřstěnu, postupy výpočtu druhých odmocnin a řešení Diofantických rovnic atd. To již stačí, aby byl uznáván jako jeden z mnoha největších průkopníků matematiky, avšak to vše bledne před objevem nuly. Nulu bral jako číslo a vytvořil pravidla pro počítání s ní, čímž vytvořil i záporná čísla. Záporným číslům říkal dluh a kladným zisk. Jeho pravidla zní: Dluh zmenšený o nulu je dluh. Zisk zmenšený o nulu je zisk. Nula zmenšená o nulu je nula. Nula zmenšená o dluh je zisk. Nula zmenšená o zisk je dluh. Součin zisku či dluhu s nulou je nula. Součin nebo podíl dvou dluhů je zisk. Součin nebo podíl zisku a dluhu je dluh. Nula dělená nulou je nula, což je již dokázáno, že neplatí (více v následující kapitole).[134] Znalost nuly jako čísla se postupně z Indie dostala do Číny, a zejména do arabského světa. Odtud se dostala do Evropy, čímž navždy změnila matematický svět.[135]

Arabský svět byl mezi dvěma názorovými směry. Aristotelská filosofie přicházející ze západu nepřipouštěla nulu, zatímco z východu přicházela indická nula. Proto se arabský svět ocitl před rozhodnutím, zda zakázat Aristotelské učení, nebo přijmout znalost nuly. Nakonec zvítězila nula. Židovský učenec Moses Maimonides v 12. století popisoval s hrůzou nad tím, že muslimové zavrhli Aristotela a obrátili se k řeckým atomistům. Řečtí atomisté byli řečtí učenci, kteří věřili, že svět je tvořen atomy a mezi atomy je prázdno. Muslimský filosof Abú Hamid Al-Ghazalí v 11. století dokonce prohlásil, že lpěním na Aristotelově filosofii by mělo

[130] SEIFE (2005), tamtéž, str. 76-77, 79.
[131] SEIFE (2005), tamtéž, str. 80-81.
[132] Řecký nástroj k početním úkonům pomocí kamínků, v současnosti zvané počítadlo.
[133] SEIFE, Charles. *Nula: Životopis jedné nebezpečné myšlenky*. Praha: Dokořán, 2005, str. 81-82.
[134] MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky*. Příbram I.: Pistorius & Olšanská, 2011, str. 93-94.
[135] PICKOVER, Clifford. A. *Matematická kniha: Od Pythagora po 57. dimenzi, 250 milníků v dějinách matematiky*. První vydání v českém jazyce. Praha: Dokořán, 2012, str. 80.

být trestáno smrtí.[136] Nejvýznamnějším arabským matematikem byl Muhammad ibn Músá al-Chwárizmí (780 až 850), jehož poznatky o matematice se na základních školách učí dodnes. Sepsal dvě matematická díla: *Al-Džabr, wa al-Mugabala* (v Evropě byl název pozměněn a zkrácen na Algebra) a knihu o indickém početním systému, kde se zachoval pouze latinský název *Algoritmi dictit...* (v překladu Tak praví Al-Chwárizmí), čímž vznikl pojem algoritmus.[137] Jeho díla, zejména to druhé, přivedlo indický číselný systém, včetně nuly, do Evropy a dalo základ současnému matematickému systému.[138]

V Evropě se však nula uchytila až na úplném počátku renesance v 13. století a to díky slavnému matematikovi Leonardu z Pisy, řečeného Fibonacci (1170 až 1250),[139] o němž jsme psali v podkapitole o historii zlatého řezu. Fibonacci během svých cest po arabském světě se naučil tajům matematiky a objevil krásu indického číselného systému včetně nuly. Své poznatky z arabského světa sepsal v knize *Liber Abaci*, kterou italští bankéři i obchodníci vítali s otevřenou náručí. Do dané doby využívali k výpočtům abakus, početní tabulky a k záznamu půjček dokonce dřevěné kontrolní trámky. Na kontrolních trámcích byla dlužná částka napsána římskými čísly a podélně rozštípnuta na dvě nestejně velké dílky. Největší díl zvaný *stock* (v současné angličtině akcie) si ponechala banka a tu kratší část dlužník. Tyto trámky se používaly až do roku 1826, kdy je opustila anglická státní pokladna. Indické číslice a zejména jednodušší systém výpočtů od al-Chwárizmího, to vše nahradilo. Přestože byli obchodníci i bankéři tímto systémem nadšeni, tak místní italské vlády nikoliv. Například ve Florencii roku 1299 bylo používání indických čísel přímo zakázáno, neboť číslo nula šlo lehce přepsat na šestku a tak se obávali podvodů. Výhody arabského početního systému byly velké a obchodníci ani bankéři se ho nechtěli vzdát. Proto nakonec italské vlády pod tlakem obchodníků ustoupily a zavedly indický zápis čísel, který se posléze rozšířil do celé Evropy.[140]

Církev z počátku nijak nebránila rozmachu indických čísel, zejména nuly, dokonce nulu i vítala. Tady je nutné poznamenat, že církev se tehdy opírala o Aristotelovo učení, kde neexistuje nula ani nekonečno a Země je středem vesmíru.[141] Jakmile si církev uvědomila, že nula vytváří pojem prázdnoty a nekonečna, čímž podkopává Aristotelovo učení, bylo příliš pozdě. Církev, která byla ohrožena schizmatem a nekonečností vesmíru (když hvězdy jsou světy jako ten náš, mají svého papeže? Pak tedy papež nemůže být jedinou hlavou církve!) se

---

[136] SEIFE, Charles. *Nula: Životopis jedné nebezpečné myšlenky*. Praha: Dokořán, 2005, str. 87-88.
[137] MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky*. Příbram I.: Pistorius & Olšanská, 2011, str. 90.
[138] SEIFE, Charles. *Nula: Životopis jedné nebezpečné myšlenky*. Praha: Dokořán, 2005, str. 86.
[139] MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky*. Příbram I.: Pistorius & Olšanská, 2011, str. 78.
[140] SEIFE, Charles. *Nula: Životopis jedné nebezpečné myšlenky*. Praha: Dokořán, 2005, str. 94-95.
[141] SEIFE (2005), tamtéž, str. 74 a 102.

ještě více uchýlila k Aristotelovu učení a nula se stala opět herezí.[142] Objev kartézských souřadnic s počátečním bodem (0,0) jezuitou René Descartesem (1596 až 1650) a vakua Blaisem Pascalem (1623 až 1662) zasadili Aristotelovu učení poslední ránu.[143] Církev tedy nakonec přijala nulu, neb v prázdnotě i v nekonečnu se může skrývat Bůh.[144] Nyní již mohla nula a tím i pojmy jako nic a prázdnota, pokojně existovat v evropské matematice dodnes.

### 5.3 Problémy nuly

Největší problém nuly nastává při dělení. Máme zde rovnici

$$b^2 = ab; kdy\ a = 1 \cap b = 1; a = b.$$

Když víme, že $a$ má stejnou hodnotu jako $b$, tak můžeme upravit rovnici na

$$a^2 = a^2.$$

Nyní odečteme obě rovnice mezi sebou a získáme

$$a^2 - b^2 = a^2 - ab.$$

Po úpravě nám vznikne

$$(a + b)(a - b) = a(a - b).$$

Což vydělíme výrazem *(a – b)*.

$$a + b = a$$

Po odečtení $a$ získáme podivný výsledek

$$b = 0.$$

Kde je chyba? Víme, že $b$ se má rovnat jedné, avšak z rovnice nám vychází, že $b$ se rovná nule. Chyba vzniká při dělení výrazem *(a – b)*, neboť po dosažení hodnot vzniká *(1 – 1)*, tedy nula. Takže jakmile jsme danou rovnici vydělili nulou, tak přestala dávat smysl, čímž se zhroutila celá matematika.[145] Jiným způsobem to lze napsat jako

$$2 * 0 = 5 * 0.$$

Což po vydělení nulou dá

$$2 = 5.$$

Proto nelze v rovnicích dělit nulou, neb je tím narušeno fungování matematiky.

V předchozí kapitole jsme mluvili o dělení nulou, přesněji nula děleno nulou. Brahmagupta tvrdil, že nula děleno nulou dá opět nulu. Když daný výpočet převedeme na násobení, tak získáme nula krát nula, což nám dá opět nulu. Z tohoto pohledu to tedy dává

---

[142] SEIFE (2005), tamtéž, str. 106.
[143] SEIFE (2005), tamtéž, str. 109-110 a 113-115.
[144] SEIFE (2005), tamtéž, str. 98.
[145] SEIFE (2005), tamtéž, str. 245-247.

smysl, avšak máme i pět krát nula rovná se nula. Což znamená, že dělení nuly s nulou by nám mělo dát jakékoliv číslo, což nelze.

Nyní se na daný problém podíváme limitně a uvedeme si limitu

$$\lim_{x \to 0;\, y \to 0} \frac{x}{y}.$$

Víme, že nám tato limita dá plochu, takže se k danému bodu pokusíme dostat za pomocí dvou přímek a to $y = x$ a $y = 2x$. Pokud se budou obě přímky rovnat, pak by limita mohla existovat, pokud se však rovnat nebudou, pak limita neexistuje. Takže nyní pro $y = x$ máme limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Nyní limita pro y=2x:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Obě limity se nerovnají, proto daná limita nemůže existovat a tím ani výraz $\frac{0}{0}$ nemůže mít platný výsledek.

To samé si můžeme dokázat i pro dělení čísla nulou, kde máme limitu:

$$\lim_{x \to 0} \frac{n}{x}\ ; n \in \mathbb{N}.$$

Nejdříve půjdeme k dané limitě zleva.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{n}{x} = -\infty$$

A teď zprava.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{n}{x} = \infty$$

Obě limity se nám tedy nerovnají, a proto limita neexistuje, což znamená, že nelze přirozené číslo dělit nulou.

U faktoriálů nám nastává zajímavý úkaz, kdy

$$0! = 1.$$

Proč k tomu dochází? Musíme si totiž uvědomit, co znamená jeden faktoriál, přesněji jej rozložit, což nám dá

$$1! = 1 * 0!.$$

Aby nám rovnice vycházela správně, musí být nula faktoriál roven jedné, neb u nuly či jiného čísla by byla narušena rovnost.

Nakonec tu máme zapeklitou otázku a to, zda je nula sudé či liché číslo? Zkusíme si dokázat, že je sudé, což je nejjednodušší způsob. Nejdříve tedy vydělíme nulu dvojkou, to nám dá opět nulu. Takže ano, číslo nula je dělitelné dvojkou beze zbytku. Dále se nula nachází na číselné ose mezi dvěma lichými čísly a to -1 a 1. Z toho tedy můžeme vyvodit, že nula je sudé číslo.

### 5.4 Užití

Nulu již používáme nejen v zápisu čísel, jako například 102 nebo 1000, ale i v měření času, kdy den začíná v 0:00 hodin. Počáteční ujetá vzdálenost automobilu je při výrobě nastavena na 00000 km. Dále se nula vyskytuje při řazení čísel na číselné ose a na numerických klávesnicích, kde se řadí před jedničkou, nikoliv za devítkou. Avšak v počítání věku dítěte se stále nule vyhýbáme. Místo abychom řekli, že dítěti je nula let, tak řekneme dva týdny nebo deset měsíců. Stejně je to i s letopočtem, kdy neexistuje rok nula, takže před naším letopočtem končí silvestrem roku 1 př. n. l. a náš letopočet začíná 1. ledna roku 1 n. l.[146]

Nula se zakořenila v našem jazyce a dala nám pojmy jako například nultá hodina, nulová tolerance nebo nulová gravitace. Dále nulu používáme, když hovoříme o nultém poschodí (přízemí budovy), případně o teplotě 0ºC. Nesmíme zapomenout ani na souřadnice nula stupňů zeměpisné délky. Nakonec nám v matematice nula rozděluje na číselné ose kladná a záporná čísla, neb se nachází mezi -1 a 1.[147]

Dále tu máme pojem prázdná množina, která se značí přeškrtnutou nulou a vyjadřuje množinu bez prvků. Zároveň je prázdná množina jediný prvek jednotkové množiny.[148]

Nesmíme opomíjet ani fyziku, kde máme pojmy jako energie nulových kmitů (energie z prázdnoty vakua), absolutní nula (teplota, při níž se nepohybují ani částice atomů), nekonečná hustota černé díry atd. Nula ve fyzice vytváří rozkol mezi obecnou teorií relativity a kvantovou fyzikou, což se snaží vyřešit teorie strun.[149] Když se podíváme na úplný počátek vesmíru, tak objevíme „explozi," která z nicoty vytvořila energii a hmotu, čímž dala vzniknout vesmíru. Tento jev fyzikové nazvali Teorie velkého třesku.[150]

Pak tu máme otázku, jak zanikne vesmír? Na tuto otázku lze odpovědět dvěma způsoby: buď se vesmír rozšíří do určitého bodu a poté se začne smršťovat zpátky do počátečního bodu, což vytvoří obrovské množství energie, tedy vesmír zanikne ohněm. Druhou možností je, že se vesmír bude nadále rozšiřovat. To by znamenalo, že částice hmoty by byly od sebe tak daleko, že nové hvězdy by nemohly vznikat. Pokud by v té době

[146] SEIFE (2005), tamtéž, str. 72-73.
[147] CRILLY, Tony. *Matematika: 50 myšlenek, které musíte znát*. Český Těšín: Slovart, 2010, str. 7.
[148] STEWART, Ian. *Neuvěřitelná čísla profesora Stewarta*. Praha: Dokořán, 2019, str. 124-125.
[149] SEIFE, Charles. *Nula: Životopis jedné nebezpečné myšlenky*. Praha: Dokořán, 2005, str. 219.
[150] SEIFE (2005), tamtéž, str. 243.

existovala nějaká civilizace, žila by u černých děr, které by byly jedinými vesmírnými objekty, jež by vyzařovaly energii. Avšak i tato energie by brzy vyhasla, a vesmír by zanikl v mrazu, přesněji v nule, kdy by nebylo nic. Fyzikové se díky pozorování vzdálených hvězd shodnou na jediné teorii zániku vesmíru - vesmír zanikne nulou.[151]

[151] SEIFE (2005), tamtéž, str. 240-242.

## 6 Závěr

V této práci jsme si ukázaly, jak cesta vývoje našich vybraných konstant odráží vývoj matematiky a to na příkladu čísla pí, zlatého řezu, Eulerova čísla i čísla nuly.

V první části práce jsme představili číslo pí, zvané též Ludolfovo číslo. Probrali jsme jeho odvození, velmi dlouhou historii, antický problém kvadratury kruhu a využití čísla pí v současnosti. Ve druhé části jsme se věnovali zlatému řezu, který se primárně uplatňuje v estetice. Zkoumali jsme jeho geometrické a numerické odvození, historický vývoj, nevšední úlohu o množení králíků v podobě Fibonacciho posloupnosti, výskyt zlatého řezu i Fibonacciho čísel v přírodě a jeho využití v současnosti, například v plastické chirurgii. Třetí část, přestože nejkratší, byla o mladé konstantě Eulerova čísla. V této části jsme si předvedli jeho odvození, velmi krátký historický vývoj a jeho využití v současné matematice i mimo ní. Nakonec tu byla poslední část o čísle nula, které svou existencí vytváří matematické problémy. Nulu jsme si nejdříve odvodili, poté ukázali jeho dlouhý historický vývoj, kdy bylo často odmítáno, jeho matematické problémy a využití nuly v současné matematice i vědě.

V úvodu jsme si řekli, že cílem práce je popsat historický vývoj daných konstant, což věříme, že jsme v této práci obsáhli. Zda naši práci využijí učitelé, je otázkou, jistě by pro ně mohla být užitečná.

Nyní se pokusíme zodpovědět otázky z úvodu:

*1. Jak byly vybrané základní matematické konstanty objeveny a jak se jejich význam vyvíjel v průběhu času?*

Číslo pí bylo objeveno díky kolu ve starověké Babylónii. Jeho význam se prohloubil v období antiky, zejména díky Archimédovi. Poté se využívalo pro matematický problém kvadratury kruhu a v otázce, zda je transcendentní. Zlatý řez byl objeven v antice díky přímce a využíval se v geometrii. Až v období renesance zažil zlatý řez největší zájem umělců. V současnosti stále najdeme lidi, kteří hledají zlatý řez v pradávné historii, například v egyptských pyramidách. Eulerovo číslo vzniklo až v období raného novověku díky úročení a jeho význam se vyvíjel společně s moderní matematikou. Číslo nula vzniklo v Indii, odkud se rozšířilo do celé Evropy díky indické číselné soustavě, s níž je spjaté a usnadňuje v ní zápis čísel.

*2. Při objevu vybraných matematických konstant byl vždy jeden významný matematik, který je s danou konstantou spojován. Nebo se na vzniku konstanty podílelo více lidí?*

Vždy se na vývoji vybraných konstant podílelo více lidí, ale zároveň jsou konstanty spojené s jedním matematikem. Číslo pí je spojené s Archimédem, Zlatý řez s Leonardem z Pisy známý jako Fibonacci, Eulerovo číslo s Leonhardem Eulerem a číslo nula lze spojovat s indickým matematikem Brahmaguptou.

*3. Jak jsou tyto matematické konstanty odvozeny a jak jsou spojeny s dalšími významnými matematickými koncepty?*

Číslo pí bylo odvozeno díky dělení obvodu kruhu jeho průměrem, což dává vždy výsledek přibližné hodnoty čísla pí. Tato konstanta je zejména spojena s kvadraturou kruhu a Eulerovou identitou. Zlatý řez byl odvozen jako řez přímky, který ji dělí na dvě části tak, aby celkový poměr délek byl stejný jako poměr většího úseku k menšímu. Je spojován s Fibonacciho posloupností. Eulerovo číslo bylo odvozeno díky složenému úročení a je spojeno s logaritmy, exponenciálními funkcemi, s Eulerovou identitou a dalšími matematickými koncepty. Číslo nula bylo odvozeno díky odečítání čísla samo od sebe a je spojeno s problémy dělení nulou, s nekonečnem a množinami.

*4. Vyskytuje se číslo pí a zlatý řez v rozměrech Velké pyramidy v Gíze? Pokud ano, byl to záměr stavitelů?*

V podkapitolách o historii čísla pí a zlatého řezu jsme při průzkumu literatury zjistili, že zlatý řez se nemůže nacházet ve Velké pyramidě v Gíze, neboť ho staří Egypťané ani neznali. U čísla pí je situace opačná, kdy staří Egypťané opravdu znali jeho hodnotu, nikoliv však s přesností, kterou nalézáme v rozměrech dané pyramidy. Výskyt čísla pí vysvětluje teorie o použití sekedu při stavbě egyptských pyramid, kterou staří Egypťané znali a využívali.

*5. Jak se tyto matematické konstanty používají v matematice a jaký je jejich přínos v současnosti?*

Číslo pí se využívá ve výpočtech geometrických tvarů, v pravděpodobnosti i ve statistice. Jeho přínos v současnosti je zejména v měření efektivity superpočítačů, včetně kvantových. Zlatý řez se využívá v konstrukci pentagramu, v malbě, při focení ideálních fotografií a v plastické chirurgii pro tvorbu dokonalé lidské tváře. Nesmíme opomenout ani kvazikrystaly ve fyzice. Eulerovo číslo se užívá jako základ pro přirozený logaritmus, v pravděpodobnosti a v popisu exponenciálního růstu i poklesu, například růst lidské populace a radioaktivní rozpad. Nakonec nula se používá v aritmetice, algebře, analýze a vědeckých výpočtech. Nula je součástí naší číselné soustavy.

Na naši práci lze navázat výzkumem přímých pramenů o daných konstantách (Archimédovi i Brahmaguptovy práce) nebo aplikováním této práce pro školní výuku, kde by mohl proběhnout výzkum postoje žáků k historii matematiky (např. dotazníkem či testem).

# 7 Literatura


BEATTY, Richard a spol., ed. JACKSON, Tom. *Matematika: 100 objevů, které změnily historii*. Praha: Slovart, 2013. ISBN 978-80-7391-770-8.

BECKMAN, Petr. *Historie čísla pí*. 2. vydání, revidované. Praha: Academia, 2021. ISBN 978-80-200-3133-4.

BEČVÁŘ, Jindřich a spol. *Archimédes: Několik pohledů do jeho života a díla*. Praha: MATFYZPRESS, 2012. [online]. Dostupné z: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/402371. [cit. 2023-04-18].

BRZEZINA, Miroslav a VESELÝ, Jiří. *Některá důležitá čísla*. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2013. ISBN 978-80-7494-037-8.

CRILLY, Tony. *Matematika: 50 myšlenek, které musíte znát*. Český Těšín: Slovart, 2010. ISBN 978-80-7391-409-7.

CHMELÍKOVÁ, Vlasta. *Zlatý řez nejen v matematice*. 2. vydání. Praha: MATFYZPRESS, 2011. ISBN 978-80-7378-191-0.

KŘÍŽEK, Michal, SOMER, Lawrence a ŠOLCOVÁ, Alena. *Kouzlo čísel: Od velkých objevů k aplikacím*. 3. vydání. Praha: Academia, 2018. ISBN 978-80-200-2840-2.

LIVIO, Mario. *The Golden Ratio: The Story of PHI, the World's Most Astonishing Number*. New York: Broadway Books, 2003. [online]. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/305268297_Mario_Livio-The_Golden_Ratio_The_Story_of_PHI_the_World%27s_Most_Astonishing_Number-Broadway_Books_2003. [cit. 2023-04-18].

LIVIO, Mario. Zlatý *řez: Příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě*. První vydání v českém jazyce. Praha: Dokořán, 2006. ISBN 80-7363-064-8. K dispozici také pod Argo, ISBN 80-7203-808-7.

MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky*. 2. vydání, revidované. Příbram I.: Pistorius & Olšanská, 2011. ISBN 978-80-87053-64-5.

NAVARRO, Joaquin. *Tajemné pí: Lze provést kvadraturu kruhu?* První vydání v českém jazyce. Praha: Dokořán, 2018. ISBN 978-80-7363-845-0

PICKOVER, Clifford. A. *Matematická kniha: Od Pythagora po 57. dimenzi, 250 milníků v dějinách matematiky*. První vydání v českém jazyce. Praha: Dokořán, 2012. ISBN 978-80-7363-368-4. K dispozici také pod Argo, ISBN 978-80-257-0705-0.

SEIFE, Charles. *Nula: Životopis jedné nebezpečné myšlenky*. Praha: Dokořán, 2005. ISBN 80-7203-741-2. K dispozici také pod Argo, ISBN 80-7363-048-6.

SIKOROVÁ, Renata. *Číslo e a jeho vlastnosti (4)*. Učitel matematiky, roč. 9, č. 2, 2001, s. 98-103. [online]. Dostupné z: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/150882/UcitelMat_009-2001-2_4.pdf. [cit. 2023-04-18].

STEWART, Ian. *Neuvěřitelná čísla profesora Stewarta*. 2. vydání (1. elektronické). Praha: Dokořán, 2019. [e-kniha]. ISBN 978-80-7675-001-2. Zakoupena na serveru Palmknihy.

ŠUBERT, Eduard. *Jak LZE dělit NULOU*. YouTube: Na ubrousek, 2020. Délka 2:00. [online]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=lxar7yaKqdM [cit. 2023-04-18].

ŠUBERT, Eduard. *Můžeme dělit nulou?* YouTube: Na ubrousek, 2019. Délka 3:31. [online]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=Xe5o85nyXXg. [cit. 2023-04-18].

VALÁŠEK, Marek. *Livestream: Matika s Markem Valáškem - díl 2 - Proč se nesmí dělit nulou a další témata.* YouTube: Marek Valášek, 2020. Délka 2:19:40. [online]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=Y9iBjhtUpbY. [cit. 2023-04-18].

ŽÁČKOVÁ, Jaroslava. *Problém kvadratury kruhu a Lambertův důkaz iracionality čísla pí*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 11, č. 4, 1966, s. 240-250. [online]. Dostupné z: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/138641/PokrokyMFA_11-1966-4_4.pdf. [cit. 2023-04-18].

# Anotace

| | |
|---|---|
| **Jméno a příjmení:** | David Ligas |
| **Katedra:** | Matematika (PDF) |
| **Vedoucí práce:** | Mgr. David Nocar, Ph.D. |
| **Rok obhajoby:** | 2023 |

| | |
|---|---|
| **Název práce:** | Základní matematické konstanty, jejich historie a užití |
| **Název v angličtině:** | Basic mathematical constants, their history and use |
| **Anotace práce:** | Bakalářská práce se zabývá základními matematickými konstantami - číslem pí, zlatým řezem, Eulerovým číslem a číslem nula. Práce se primárně zaměřuje na historii těchto konstant, jejich odvození a využití v současnosti. Rozdělení bakalářské práce je na čtyři části, kdy každá část se zabývá jednou konstantou.<br><br>Cílem práce je prozkoumat historii a význam základních matematických konstant, jako je číslo pí, zlatý řez, Eulerovo číslo a číslo nula. Zároveň být stručným materiálem pro učitele vyučující historii matematiky či matematiku samotnou, aby měli po ruce nejdůležitější milníky v historii daných konstant, jejich odvození a využití. V podkapitolách o využití konstant mohou získat odpovědi na nekonečné otázky žáků a studentů: "K čemu mi to je?" |
| **Klíčová slova:** | číslo pí, Ludolfovo číslo, zlatý řez, číslo fí, Eulerovo číslo, číslo e, číslo nula, kvadratura kruhu, Eulerova identita, Fibonacciho posloupnost, historie matematiky, matematické konstanty, aplikace konstant, odvození konstant. |

| | |
|---|---|
| **Anotace v angličtině:** | The bachelor's thesis deals with the basic mathematical constants - number pi, the golden ratio, Euler's number, and number zero. The thesis primarily focuses on the history, derivation, and current usage of these constants, and is divided into four parts, each of which covers one constant.<br><br>The thesis aims to explore the history and significance of these basic mathematical constants, and to provide concise material for teachers of the history of mathematics or mathematics itself. It offers the most important milestones in the history, derivation, and usage of these constants at their fingertips. In the subchapters on the application of constants, students can find answers to the age-old question: 'What is this useful for?' |
| **Klíčová slova v angličtině:** | number pi, Ludolph's number, golden ratio, number phi, Euler's number, number e, number zero, squaring the circle, Euler's identity, Fibonacci sequence, history of mathematics, mathematical constants, application of constants, derivation of constants. |
| **Přílohy vázané v práci:** | 0 |
| **Rozsah práce:** | 48 stran |
| **Jazyk práce:** | Český jazyk |