

**Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích,
Pedagogická fakulta,
obor matematika, výpočetní technika**



David Pařík

Vizualizace geometrických úloh užitím stereoskopické projekce

DIPLOMOVÁ PRÁCE

vedoucí DP: Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

České Budějovice, 2007

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jen ty zdroje informací, které jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, fakultou i elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.

v Č.Budějovicích, dne

.....

podpis

Rád bych poděkoval všem pedagogům Pedagogické fakulty, kteří mi s ochotou poskytlí konzultaci, zejména však panu Romanu Haškovi za podporu při zpracování této práce a za zapůjčení materiálů a panu Petru Vaněčkovi za materiály a pomoc při sestavení programu.

Dále bych rád poděkoval paní ředitelce Vítězslavě Slancové, panu zástupci Ivanu Rokosovi a pedagogům paní Miroslavě Tomanové a panu Miloši Kolářovi ze ZŠ Sokolská Třeboň za možnost provedení testů o smysluplnosti stereoskopické projekce.

Děkuji své přítelkyni Monice Frankové za duševní podporu a pomoc se statistickým vyhodnocováním testů a s korekcí textu.

Anotace

Název: Vizualizace geometrických úloh užitím stereoskopické projekce

Vypracoval: David Pařík

Vedoucí práce: Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

Klíčová slova: Hranoly, stereometrie, prostorová představivost, výuka pomocí počítačů, stereoskopie, smysluplnost.

Obsahem této práce je ověření smysluplnosti stereoskopické projekce, popis principu a vytvoření interaktivních obrázků „hranatých“ těles a prostorových situací pomocí stereoskopické projekce. Tato pomůcka by měla usnadnit výuku stereometrie na gymnáziích a těles na základních školách a především by měla rozvíjet prostorovou představivost. Záměrem je pomoci žákům a studentům vidět a hlavně si uvědomit všechny zákonitosti v geometrii.

Title: Visualization of geometry problems using of stereoscopy projection

Author: David Pařík

Supervisor: Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

Key words: prisms, stereometry, spatial imagery, education with computers, stereoscopy, appreciation.

The topic of this work is to verify appreciation of stereoscopy projection, description of its principle and forming interactive pictures of prisms and spatial situations by the use of stereoscopy projection. This aid should simplify teaching process of stereometry at secondary schools, bodies at primary schools and mainly help to improve spatial imagination. Focus of the aid is to help pupils and students to see and to understand all key principles of geometry.

Obsah

1 Úvod.....	6
2 Výzkum.....	7
2.1 Zadání testů.....	7
2.2 Vyhodnocení.....	7
3 Stereoskopická projekce	18
3.1 Historie.....	18
3.2 Stereoskopické vidění	18
3.2.1 Obecný princip.....	18
3.2.2 Geometrická podstata	19
3.3 Využití	20
3.4 Stereoskopické techniky	20
3.4.1 Aktivní stereoskopická projekce.....	21
3.4.2 Pasivní stereoskopická projekce	22
3.4.3 Autostereoskopický monitor.....	23
3.4.4 Anaglyph.....	24
3.4.5 Srovnání technik	26
3.5 Geometrická podstata stereoskopických technik.....	27
4 O programu	30
4.1 Popis programu	30
4.2 Popis matematických těles.....	31
4.2.1 Jehlan	31
4.2.2 Čtyřstěn.....	32
4.2.3 Kolmý hranol	32
4.3 Tvorba těles.....	33
4.3.1 Teorie	34
4.3.2 Obecný postup	36
4.4 Tvorba roviny	43
4.5 Návrhy pro další vylepšení	43
5 Užití ve výuce	45
5.1 Stereometrie	46
5.1.1 ZŠ.....	47
5.1.2 SŠ.....	48
5.2 Příklady.....	50
6 Závěr	60
Vysvětlivky.....	61
Literatura.....	62
Přílohy	63

1 Úvod

Volba tématu

Při volbě tématu diplomové práce jsem přemýšlel o tom, jak lépe vyučovat geometrii (zprvu i deskriptivní geometrii) a jak nejlépe pomoci žákům a studentům s představivostí, protože to je podle mě největší problém. Z vlastní zkušenosti vím, že mnoha studentům dělá problém představit si krychli, kterou „nějakým způsobem“ řeže rovina nebo dokonce určit odchylku této roviny od podstavy (zde třeba nedokáže určit správné vztahy – pravý úhel atd.). Též při souvislé praxi na ZŠ jsem se setkal s problémem u objemu a obsahu těles, že si někteří žáci nedokázali představit kolmý hranol s lichoběžníkovou podstavou.

Poté jsem se dozvěděl, že na katedře informatiky se pan Vaněček a pan Prokýšek zabývají stereoskopickou projekcí (anaglyfou). Chtěl jsem tedy využít této techniky pro zobrazování těles, čímž bylo rozhodnuto o tématu – Vizualizace geometrických úloh užitím stereoskopické projekce.

Cíle

Cílem mé práce je v první řadě program pro zobrazování těles pomocí stereoskopické projekce, kde je mým úkolem popsat a pomocí obecných souřadnic zadat jednotlivá tělesa.

Dalším cílem jsou návrhy (nápady) k využití programu ve výuce a připravení několika typových úloh.

O obsahu

Na začátku diplomové práce se snažím prokázat smysluplnost stereoskopické projekce jakožto pomůcky pro lepší prostorovou představivost žáků ve školách. Dále zde popisují principy stereoskopické projekce a její hlavní techniky. Poté se věnuji popisu vytvořeného programu a tvorbě těles a roviny. Uvádím zde také další nápady pro rozšíření a vylepšení programu. Na závěr uvádím užití stereoskopie ve výuce (matematice) a několik konkrétních příkladů.

2 Výzkum

Po zvolení tohoto tématu a následné práci na programu, který pomocí stereoskopické techniky zobrazuje některá geometrická tělesa, mě napadlo, zda má vůbec smysl program vytvářet. Proto jsem sestavil testy, pomocí kterých jsem chtěl vysledovat, jestli bude tato metoda ve výuce a při pochopení geometrie v prostoru užitečná.

2.1 Zadání testů

Vypracoval jsem tedy testy (viz. příloha). Oba dva testy mají shodné zadání až na to, že v prvním testu jsou obrázky zobrazeny běžným způsobem zobrazování a v druhém testu pomocí stereoskopické projekce – anaglyphu.

Abych co nejméně zasáhl do vyučovacích hodin, vždy jsem si k sobě zval žáky jednotlivě. Takto mohla hodina probíhat bez problémů a většího narušení a já jsem mohl jednotlivci přesně vysvětlit, co požadují. Pro lepší kvalitu obrázků jsem test ukazoval žákům na notebooku a oni vše zaznamenávali na předem připravené papíry (viz. příloha). Test jsem prováděl ve dvou třídách (osmých třídách, kde jsem učil po dobu souvislé praxe), celkem jsem měl 40 respondentů. S pomocí paní učitelky jsme žáky rozdělili na dvě skupiny – 20 žáků pro zobrazení běžným způsobem, 20 žáků pro zobrazení stereoskopickou projekcí. Rozdělení jsme prováděli podle jejich studijních výsledků a schopností, aby obě skupiny byly srovnatelné.

2.2 Vyhodnocení

Obecný postup

Cílem tohoto výzkumu bylo zjistit, zda je stereoskopické zobrazení těles pro žáky základních a středních škol přínosné. Hlavní metodou, kterou jsem užil pro testování dvou osmých tříd základní školy, je testování hypotéz – konkrétně testování pomocí Mann – Whitneyova testu, který je neparametrickou obdobou t – testu (test o střední hodnotě), a který nevyžaduje normální rozložení proměnných, kardinální charakter proměnných a velký rozsah výběru. Tento test se užívá pro dva nezávislé výběry respondentů a pracuje na principu porovnávání každého měření z první skupiny s každým měřením ze druhé skupiny. Tím se zjistí, kolikrát toto srovnání na

ordinální stupnici dopadne ve prospěch druhé skupiny. Testovací statistiku u Mann –

$$\text{Whitneyova testu vypočítáme pomocí vzorce } z = \frac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sigma_T}.$$

Před přistoupením k testování pomocí metody dle Manna a Whitneye bylo zapotřebí provést test normality neboli Kolmogorov – Smirnovův test, aby byl výběr metody zcela oprávněný. Kolmogorov – Smirnovův test patří mezi testy „dobré shody“. Je obecný pro jakýkoli typ rozdělení a hodnotí, zda data pocházejí z populace s určitou distribuční funkcí $F_0(x)$. Testuje se zde nulová hypotéza (hodnoty jsou z Poissonova rozdělení) $H_0: F(x) = F_0(x)$ proti alternativní hypotéze (hodnoty nejsou z Poissonova rozdělení) $H_1: F(x) \neq F_0(x)$ pro všechna x , kde $F(x)$ je distribuční funkce, která utváří data. Při testu normality se srovnává empirická distribuční funkce $F(x)$ s hodnotami teoretické distribuční funkce $F_0(x)$. Testovací statistiku vypočítáme podle vzorce $D = \max|F(x) - F_0(x)|$, kterou porovnáváme s kritickými hodnotami. Pro hladinu významnosti 0,05, popř. 0,01 má kritická mez asymptoticky platnou hodnotu $\frac{1,358}{\sqrt{n}}$, popř. $\frac{1,628}{\sqrt{n}}$. Nulovou hypotézu lze definovat jako tvrzení, které označuje „žádný rozdíl“, tj. jakýkoli nalezený rozdíl je možné přičíst přirozené variabilitě dat. Toto je hypotéza, kterou je lepší zamítnout. Alternativní hypotéza znamená situaci, kdy nulová hypotéza neplatí. Je vyjádřena jako „existence odlišností“ mezi skupinami nebo „existence závislosti“ mezi proměnnými. Nejedná se o přesný logický opak nulové hypotézy. Pokud nedokážeme opak, předpokládá se, že platí nulová hypotéza.

Dále jsem užil metodu třídění druhého stupně, která „*poskytuje podrobné kombinované rozložení dvou nebo více proměnných a zastoupení skupin určených kombinacemi hodnot z několika sloupců datové matice*“. Program SPSS při třídění druhého stupně generuje tabulku s absolutními a relativními četnostmi běžného a stereoskopického zobrazení, které jsou zobrazeny vedle sebe, což je vhodné pro další srovnání. Absolutní a relativní četnosti je možno počítat třemi různými způsoby:

- a) jako řádková procenta (tím dostaneme 100% v jednotlivých řádcích)
- b) jako sloupcová procenta (tím dostaneme 100% v jednotlivých sloupcích)
- c) jako procenta vypočítaná na základě rozsahu celého souboru (tím dostaneme 100% v celé tabulce).

Výsledky

Pro orientaci jsem si zobrazil popisné statistiky jak pro příklady s běžným zobrazením těles, tak pro příklady se stereoskopickým zobrazením těles.

Descriptives

			Statistic	Std. Error
příklad1 bezny zpusob	Mean		1,4500	,2562
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	,9137	
		Upper Bound	1,9863	
	5% Trimmed Mean		1,4444	
	Median		1,0000	
	Variance		1,313	
	Std. Deviation		1,1459	
	Minimum		,00	
	Maximum		3,00	
	Range		3,00	
	Interquartile Range		2,5000	
	Skewness		,136	,512
	Kurtosis		-1,379	,992
příklad2 bezny zpusob	Mean		,5500	,1141
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	,3111	
		Upper Bound	,7889	
	5% Trimmed Mean		,5556	
	Median		1,0000	
	Variance		,261	
	Std. Deviation		,5104	
	Minimum		,00	
	Maximum		1,00	
	Range		1,00	
	Interquartile Range		1,0000	
	Skewness		-,218	,512
	Kurtosis		-2,183	,992
příklad3 bezny zpusob	Mean		,5500	,1141
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	,3111	
		Upper Bound	,7889	
	5% Trimmed Mean		,5556	
	Median		1,0000	
	Variance		,261	
	Std. Deviation		,5104	
	Minimum		,00	
	Maximum		1,00	
	Range		1,00	
	Interquartile		1,0000	

	Range			
	Skewness		-,218	,512
	Kurtosis		-2,183	,992
priklad1 stereoskopie	Mean		1,7000	,2524
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	1,1718	
		Upper Bound	2,2282	
	5% Trimmed Mean		1,7222	
	Median		2,0000	
	Variance		1,274	
	Std. Deviation		1,1286	
	Minimum		,00	
	Maximum		3,00	
	Range		3,00	
	Interquartile Range		2,5000	
	Skewness		-,557	,512
	Kurtosis		-1,030	,992
priklad2 stereoskopie	Mean		,8000	9,177E-02
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	,6079	
		Upper Bound	,9921	
	5% Trimmed Mean		,8333	
	Median		1,0000	
	Variance		,168	
	Std. Deviation		,4104	
	Minimum		,00	
	Maximum		1,00	
	Range		1,00	
	Interquartile Range		,0000	
	Skewness		-1,624	,512
	Kurtosis		,699	,992
priklad3 stereoskopie	Mean		,8500	8,192E-02
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	,6785	
		Upper Bound	1,0215	
	5% Trimmed Mean		,8889	
	Median		1,0000	
	Variance		,134	
	Std. Deviation		,3663	
	Minimum		,00	
	Maximum		1,00	
	Range		1,00	
	Interquartile Range		,0000	
	Skewness		-2,123	,512
	Kurtosis		2,776	,992

První test, který bylo zapotřebí provést, byl test normality. Testoval jsem nulovou hypotézu H_0 : rozložení je normální proti alternativní hypotéze H_1 : rozložení není normální. Vzhledem k tomu, že je testovací statistika rovna 0,31 nebo 0,00, zamítám nulovou hypotézu a přijímám alternativní hypotézu – rozložení není normální, což platí pro všechny proměnné.

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
příklad1 bezny zpusob	,203	20	,031	,859	20	,010
příklad2 bezny zpusob	,361	20	,000	,637	20	,010
příklad3 bezny zpusob	,361	20	,000	,637	20	,010
příklad1 stereoskopie	,305	20	,000	,805	20	,010
příklad2 stereoskopie	,487	20	,000	,494	20	,010
příklad3 stereoskopie	,509	20	,000	,432	20	,010

** This is an upper bound of the true significance.

a Lilliefors Significance Correction

Mann-Whitney Test

Druhým testem, který jsem provedl, je Mann – Whitneyův test. U tohoto testu zní nulová hypotéza H_0 : Běžné zobrazení a stereoskopické zobrazení je srovnatelné; alternativní hypotéza H_1 : Běžné zobrazení a stereoskopické zobrazení není srovnatelné.

Ranks

	rozmer	N	Mean Rank	Sum of Ranks
příklady1	bezny zpusob	20	19,25	385,00
	stereoskopie	20	21,75	435,00
	Total	40		

Test Statistics

	příklady1
Mann-Whitney U	175,000
Wilcoxon W	385,000
Z	-,701
Asymp. Sig. (2-tailed)	,483
Exact Sig. [2*(1-tailed Sig.)]	,512

a Not corrected for ties.

b Grouping Variable: rozmer

U příkladů 1 je testovací statistika rovna 0,483, z čehož vyplývá, že stále platí nulová hypotéza. Pokud ale přihlédnu k průměru, zjistím, že u stereoskopické projekce získali žáci o dva a půl bodu více – tedy, že dosáhli lepších výsledků než u běžného zobrazení těles.

Ranks

	rozmer	N	Mean Rank	Sum of Ranks
priklady2	bezny zpusob	20	17,50	360,00
	stereoskopie	20	23,50	460,00
	Total	40		

Test Statistics

	priklady2
Mann-Whitney U	140,000
Wilcoxon W	350,000
Z	-1,964
Asymp. Sig. (2-tailed)	,050
Exact Sig. [2*(1-tailed Sig.)]	,108

a Not corrected for ties.

b Grouping Variable: rozmer

U příkladů 2 je testovací statistika rovna 0,05, což značí, že mohu zamítnout nulovou hypotézu a přijmout hypotézu alternativní, tj., že běžné a stereoskopické zobrazení není srovnatelné. V případě stereoskopického zobrazení získali žáci o 6 bodů více, což je velmi dobrý výsledek.

Ranks

	rozmer	N	Mean Rank	Sum of Ranks
priklady3	bezny zpusob	20	17,50	350,00
	stereoskopie	20	23,50	470,00
	Total	40		

Test Statistics

	priklady3
Mann-Whitney U	140,000
Wilcoxon W	350,000
Z	-2,044
Asymp. Sig. (2-tailed)	,041
Exact Sig. [2*(1-tailed Sig.)]	,108

a Not corrected for ties.

b Grouping Variable: rozmer

Co se týče příkladů 3, dospěl jsem k podobnému závěru jako u příkladu 2. Mann – Whitneyova statistika nabývá hodnoty 0,041, z čehož vyplývá, že mohu zamítnout nulovou hypotézu a přijmout alternativní, tedy že běžné a stereoskopické zobrazení není srovnatelné. Průměry nabývají stejných hodnot jako u příkladu 2.

To, že se u příkladu 1 nepodařilo Mann-Whitnyovým testem prokázat statistickou významnost, přisuzuji malému výběru a vyšší obtížnosti příkladu (skládá se ze tří podpříkladů) – ale vzhledem k tomu, že je průměr u stereoskopické projekce vyšší než u běžného zobrazení, nepovažoval bych to za směrodatné. U příkladů 2 a 3 test jasně prokázal nesrovnatelnost běžného a stereoskopického zobrazení. S přihlédnutím k velkému rozdílu v průměrech mezi oběma typy zobrazení – a to ve

prospěch zobrazení stereoskopického, lze říci, že stereoskopická projekce je pro žáky přínosná.

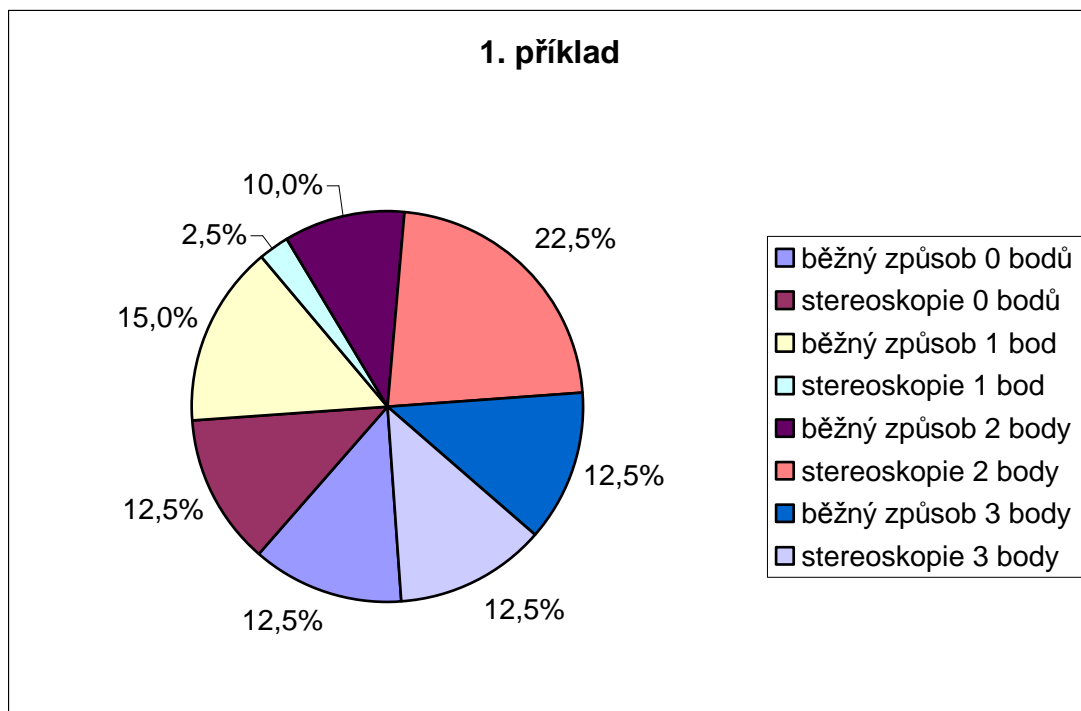
priklady1 * rozmer Crosstabulation

			rozmer		Total
			bezny zpusob	stereoskopie	
priklady1	zadny bod	Count	5	5	10
		% within priklady1	50,0%	50,0%	100,0%
		% within rozmer	25,0%	25,0%	25,0%
		% of Total	12,5%	12,5%	25,0%
		Adjusted Residual	,0	,0	
	1 bod	Count	6	1	7
		% within priklady1	85,7%	14,3%	100,0%
		% within rozmer	30,0%	5,0%	17,5%
		% of Total	15,0%	2,5%	17,5%
		Adjusted Residual	2,1	-2,1	
	2 body	Count	4	9	13
		% within priklady1	30,8%	69,2%	100,0%
		% within rozmer	20,0%	45,0%	32,5%
		% of Total	10,0%	22,5%	32,5%
		Adjusted Residual	-1,7	1,7	
	3 body	Count	5	5	10
		% within priklady1	50,0%	50,0%	100,0%
		% within rozmer	25,0%	25,0%	25,0%
		% of Total	12,5%	12,5%	25,0%
		Adjusted Residual	,0	,0	
Total		Count	20	20	40
		% within priklady1	50,0%	50,0%	100,0%
		% within rozmer	100,0%	100,0%	100,0%
		% of Total	50,0%	50,0%	100,0%

Ve výše uvedené tabulce je znázorněno rozložení bodů, které jednotliví žáci získali. Nutno podotknout, že body byly tříděny jak podle počtu, tak podle druhu zobrazení (běžné, stereoskopické).

Je patrné, že počet bodů 0 a počet bodů 3 získalo vždy 50% žáků testovaných pomocí běžného zobrazení a 50% žáků testovaných pomocí stereoskopické projekce a to z počtu žáků, kteří nezískali žádný nebo tři body. To znamená, že nejméně a nejvíce bodů získal stejný počet žáků – jak pomocí běžného, tak pomocí stereoskopického zobrazení. Procentuální zastoupení žáků, kteří získali jeden bod

pomocí běžného zobrazení je 85,7% a pomocí stereoskopického zobrazení 14,3% z těch žáků, kteří získali jeden bod. Procentuální rozložení žáků, kteří získali dva body, je 30,8% pomocí běžného zobrazení a 69,2% pomocí stereoskopické projekce a to z žáků, kteří získali dva body. To znamená, že jeden bod získalo u běžného zobrazení více žáků než u stereoskopického zobrazení a dva body získalo více žáků u stereoskopického zobrazení než u běžného zobrazení, což prokazuje, že u stereoskopického zobrazení získali žáci vyšší počet bodů.

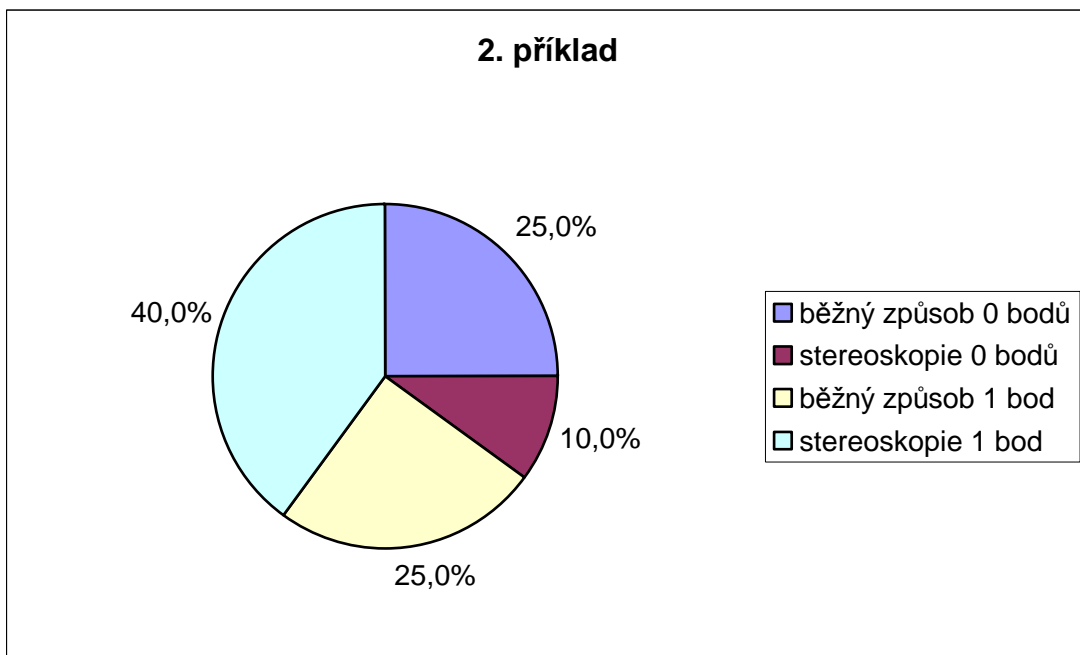


Co se týče procentuálního zastoupení u jednotlivých počtů bodů, stejně jako u obou typů zobrazení, zaujímá počet žáků, kteří neměli žádný bod, popřípadě měli tři body, v běžném i stereoskopickém zobrazení 12,5% ze všech žáků (z celku). Žáci, kteří získali jeden bod pomocí běžného zobrazení zaujímají 15%; ti, kteří získali jeden bod pomocí stereoskopické projekce pak 2,5%. Procentuální rozložení pro žáky, kteří získali dva body je pro běžné zobrazení 10% a pro stereoskopické zobrazení 22,5%.

priklady2 * rozmer Crosstabulation

		rozmer		Total	
		bezny zpusob	stereoskopie		
priklady2	zadny bod	Count	10	4	14
		% within prikklady2	71,4%	28,6%	100,0%
		% within rozmer	50,0%	20,0%	35,0%
		% of Total	25,0%	10,0%	35,0%
		Adjusted Residual	2,0	-2,0	
	1 bod	Count	10	16	26
		% within prikklady2	38,5%	61,5%	100,0%
		% within rozmer	50,0%	80,0%	65,0%
		% of Total	25,0%	40,0%	65,0%
		Adjusted Residual	-2,0	2,0	
Total		Count	20	20	40
		% within prikklady2	50,0%	50,0%	100,0%
		% within rozmer	100,0%	100,0%	100,0%
		% of Total	50,0%	50,0%	100,0%

Stejně jako v předchozí tabulce je i zde znázorněno rozložení bodů, které jednotliví žáci získali. V tomto příkladě je procentuální zastoupení žáků, kteří nezískali žádný bod pomocí běžného zobrazení 71,4% a pomocí stereoskopického zobrazení 28,6% z těch žáků, kteří nezískali žádný bod. U žáků, kteří získali jeden bod je procentuální rozložení 38,5% ve prospěch žáků, kteří příklad řešili pomocí běžného zobrazení a 61,5% ve prospěch těch, kteří jej řešili pomocí stereoskopického zobrazení.

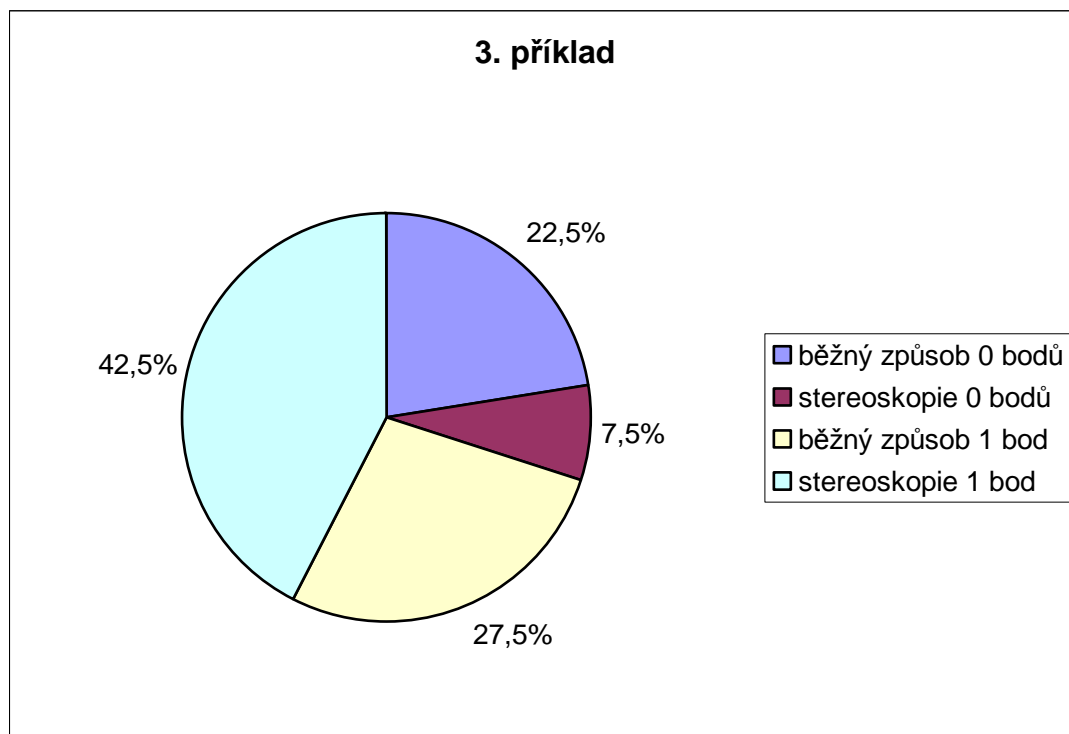


Co se týče procentuálního rozložení bodů vůči všem žákům (celku) je to pro žádný získaný bod 25% pro běžné zobrazení a 10% pro stereoskopické zobrazení. Pro jeden získaný bod je to pak 25% pro běžné zobrazení a 40% pro stereoskopické zobrazení.

priklady3 * rozmer Crosstabulation

		rozmer		Total	
		bezny zpusob	stereoskopie		
priklady3	zadny bod	Count	9	3	12
		% within priklady3	75,0%	25,0%	100,0%
		% within rozmer	45,0%	15,0%	30,0%
		% of Total	22,5%	7,5%	30,0%
		Adjusted Residual	2,1	-2,1	
	1 bod	Count	11	17	28
		% within priklady3	39,3%	60,7%	100,0%
		% within rozmer	55,0%	85,0%	70,0%
		% of Total	27,5%	42,5%	70,0%
		Adjusted Residual	-2,1	2,1	
Total		Count	20	20	40
		% within priklady3	50,0%	50,0%	100,0%
		% within rozmer	100,0%	100,0%	100,0%
		% of Total	50,0%	50,0%	100,0%

I v této tabulce je znázorněno rozložení bodů, kterých žáci dosáhli. Procentuální rozložení nulového počtu bodů je při běžném způsobu zobrazení 75% a při stereoskopickém zobrazení 25% a to v rámci žáků, kteří nezískali žádný bod. V rámci žáků, kteří získali jeden bod je procentuální zastoupení 39,3% pro běžný způsob zobrazení a 60,7% pro stereoskopický způsob zobrazení.



Co se týče procentuálního rozložení bodů vůči všem žákům (celku) je to pro žádný získaný bod 22,5% pro běžné zobrazení a 7,5% pro stereoskopickou projekci. Pro jeden získaný bod je to pak 27,5% pro běžné zobrazení a 42,5% pro stereoskopické zobrazení.

Shrnutí

Z výše uvedených výsledků lze vyvodit, že stereoskopický způsob zobrazení napomáhá k lepšímu vidění těles v prostoru, a že by se mohl stát vítanou pomůckou jak pro žáky základních a středních škol, tak pro jejich učitele. Přesto bych se chtěl vrátit k příkladu 1, kde počtu bodů 0 a 3 dosáhl stejný počet žáků (a to pro oba způsoby zobrazení), což je podle mne způsobeno prvotním nepochopením zadání příkladů jednotlivými žáky. Pokud přihlédnu k příkladu 2 a 3, pak je zde jasně patrné, že počet bodů 0 získává běžným zobrazením více žáků a počet bodů 1 se vyskytuje nejčastěji u žáků, kteří příklad řešili pomocí stereoskopické projekce.

3 Stereoskopická projekce

Stereoskopie je konkrétní obor zabývající se vizualizací trojrozměrné scény. Princip stereoskopie je založen na zachytávání dvojic rozdílných obrazů, které jsou pořízeny tak, jako by se na ně díval člověk vlastníma očima.

3.1 Historie

Slovo stereoskopie vzniklo z řeckých slov *stereos* (trojrozměrné) a *skopien* (vidět). Teorie stereoskopie se datuje již od roku 325 před naším letopočtem, kdy Euklides Alexandrijský, stejně jako řecký doktor Claudius Galen (2. století) uvedli, že každé oko vidí předměty odlišně a více je vidět pomocí obou očí. Řecký astronom Ptolemy (2. století) studoval dvojitě vidění. Arabský matematik Alhazen (10. století) se zabýval optikou a prostorovým viděním, stejně jako Johannes Kepler a René Descartes (16. století). Christian Huygens a Isaac Newton (17. století) naznačili teorii syntézy sítnicových obrazů v mozku, což byl jen malý krok k důkazu, že prostorový pocit vzniká v mozku pomocí sítnicové disparity. V roce 1838 sir Charles Wheatstone publikoval základní článek teorie, pro kterou roku 1967 profesor Horace Barlow podal důkaz. Princip prostorového vidění je znám již dlouho a díky technologickému vývoji stereoskopické zobrazování prochází stálým vývojem.

3.2 Stereoskopické vidění

V počítačové grafice se často vyskytují pojmy „trojrozměrný“ nebo „3D“. Tyto výrazy se ale většinou používají ve smyslu realisticky vypadající a k tomuto vjemu pocitu hloubky nám postačí pouze jedno oko, ale pro stereoskopický obraz jsou zapotřebí obě oči.

3.2.1 Obecný princip

Pocit prostorového vidění (vidění hloubky) vzniká v mozku důsledkem sloučení a vyhodnocení dvou lehce odlišných perspektivních zobrazení obrazů. Každé oko vidí obraz z jiného úhlu a na sítnici se promítne jiný obraz, což je důsledkem vzdáleností mezi očima. Obraz z levého a pravého oka je sloučen mozkiem do jediného prostorového obrazu. Člověk pak má pocit, že vidí pouze jeden trojrozměrný obraz a ne dva překrývající se obrazy.

3.2.2 Geometrická podstata

Při pozorování oběma očima (binokulárně) reálně trojrozměrného předmětu jsou obrazy pozorovaného předmětu na sítnici obou očí zmenšené, stranově i výškově převrácené. Pro vznik prostorového vjemu je nutné, aby obrazy vznikající na obou sítnicích očí, byly dostatečně rozdílné. (K odlišení vzdálenosti dvou sledovaných bodů je zapotřebí, aby obrazy těchto bodů nepadaly v obou očích na shodně umístěné číčky .)

Musí být splněny následující podmínky:

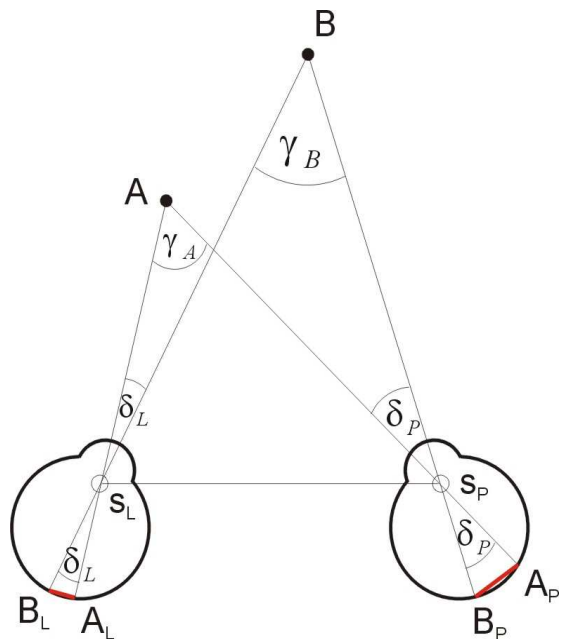
- 1) Schopnost obou očí správné funkce (adaptace, akomodace, konvergence zorných os)
- 2) Různá vzdálenost pozorovaných bodů v prostoru od pozorovatele
- 3) Vzdálenost pozorovaných bodů od pozorovatele nesmí přesáhnout jistou

mez – rádius stereoskopického pole $= \frac{b}{\gamma_A}$, kde $\gamma_A > \gamma_B$ (maximální

vzdálenost mezi pozorovatelem a sledovanými předměty, kde je ještě zachována možnost přímého prostorového vidění *)

Sledujeme dva body A, B ve stejné horizontální rovině. Při pozorování těchto dvou bodů se hlava i oči natočí do nejpříznivější polohy pro jejich sledování.

A, B jsou pozorované body, S_L a S_P jsou idealizované středy čoček ve vzdálenosti b od sebe. Na sítnici levého oka se body A, B zobrazí do bodů A_L, B_L . Obdobně na sítnici pravého oka se body A, B zobrazí do bodů A_P, B_P . Úhel γ_A , svírající pozorovací



paprsky obou očí vůči bodu A , se nazývá konvergentní úhel. Stejně tak u bodu B

* při překročení této vzdálenosti přesto rozeznáme vzdálenější a bližší předmět, ale to je způsobeno zrakovou zkušeností a porovnáváním (barva, osvětlení, perspektiva známých předmětů, zámky předmětů apod.)

vzniká konvergentní úhel γ_B . Předpokládáme splnění třech výše uvedených podmínek. Pak platí: $\gamma_A \neq \gamma_B$; $\delta_A \neq \delta_B$; $|A_L B_L| \neq |A_P B_P|$. Tedy náš zrak identifikuje body A , B jako různě vzdálené. Rozdíl úseček $|A_L B_L|$ a $|A_P B_P|$ se nazývá horizontální paralaxa. Tato hodnota určuje vnímání polohy bodu A vzhledem k poloze bodu B .

3.3 Využití

Stereoskopické techniky mají široké možnosti uplatnění. Často se stereoskopického vjemu využívá v zábavním a herním průmyslu. Dalším využitím je předvádění výrobků v prostorovém zobrazení ve skutečné velikosti, například v automobilovém průmyslu. Dále v nejrůznějších simulátorech a výuce, ale také medicíně, strojním, chemickém a farmaceutickém průmyslu aj.

3.4 Stereoskopické techniky

Stereoskopických technologií existuje několik, níže popíši čtyři z nich – aktivní stereoskopickou projekci, pasivní stereoskopickou projekci, autostereoskopickou projekci a anaglyph. Mezi zobrazovací metody patří infitec, zpětná projekce, vícehledové displeje a mnohé další.

3.4.1 Aktivní stereoskopická projekce

Tato technika využívá střídavé prokládání obrazů pro levé a pravé oko. Obraz promítaný na plátno (monitor či televizor) je s dvojnásobnou snímkovou frekvencí. Ve výsledku je vlastně se stejnou frekvencí, ale pro každé oko. Proto je zde zapotřebí speciálních aktivních (elektronických) brýlí, které jsou dálkově (většinou paprskem IrDA nebo využitím „kablíku“) synchronizovány se zdrojem vysílání a střídavě zakrývají levé a pravé oko. Takže divák vidí levým okem každý lichý snímek a pravým okem každý sudý snímek. Takto každé oko obdrží správný obraz. Z odpovídajících si snímků z každého oka si mozek složí skutečnou trojrozměrnou scénu.

SCHÉMA AKTIVNÍ STEREOSKOPICKÉ 3D PROJEKCE

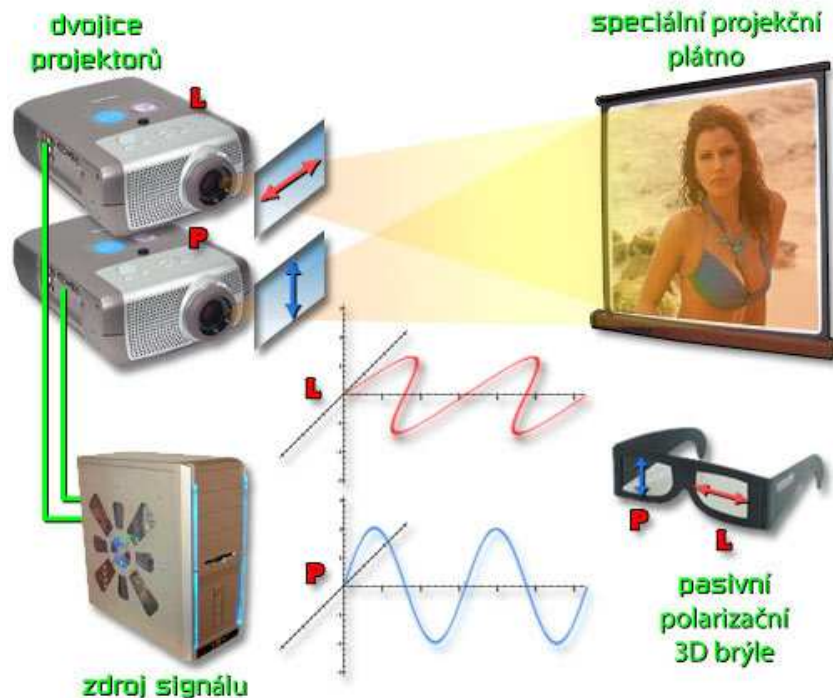


Této techniky využívá například 3D kino IMAX SOLIDO nebo moderní ovladače grafických karet nVidia podporující stereorežimy pro hraní 3D počítačových her. Není zde zapotřebí žádné speciální projekční plátno, je tedy možné promítání přímo na zeď. Je ale třeba mít výkonný projektor s dobrým rozlišením, svítivostí a hlavně rychlou obnovovací frekvencí. Totéž platí i u monitorů (LCD nejsou vhodné). Při této technice je nezbytné, aby každý sledující divák měl aktivní brýle. Technika aktivní stereoskopické projekce je finančně nákladná co se týče brýlí.

3.4.2 Pasivní stereoskopická projekce

Technika pasivní projekce využívá polarizace světla. Dva projektory promítají obrazy na jednu projekční plochu. Obraz jednoho projektoru je polarizován skrz polarizační filtr horizontálně a druhý obraz je polarizován skrz další polarizační filtr, který je otočen o devadesát stupňů. Filtry na těchto projektorech musí být nastaveny v souladu s polarizačními brýlemi. Obraz z projektorů se odráží od speciálního projekčního plátna skrz brýle a každé oko dostane svůj obraz. Mozek si obrazy z každého oka složí dohromady a vzniká trojrozměrná scéna.

SCHÉMA PASIVNÍ STEREOSKOPICKÉ 3D PROJEKCE

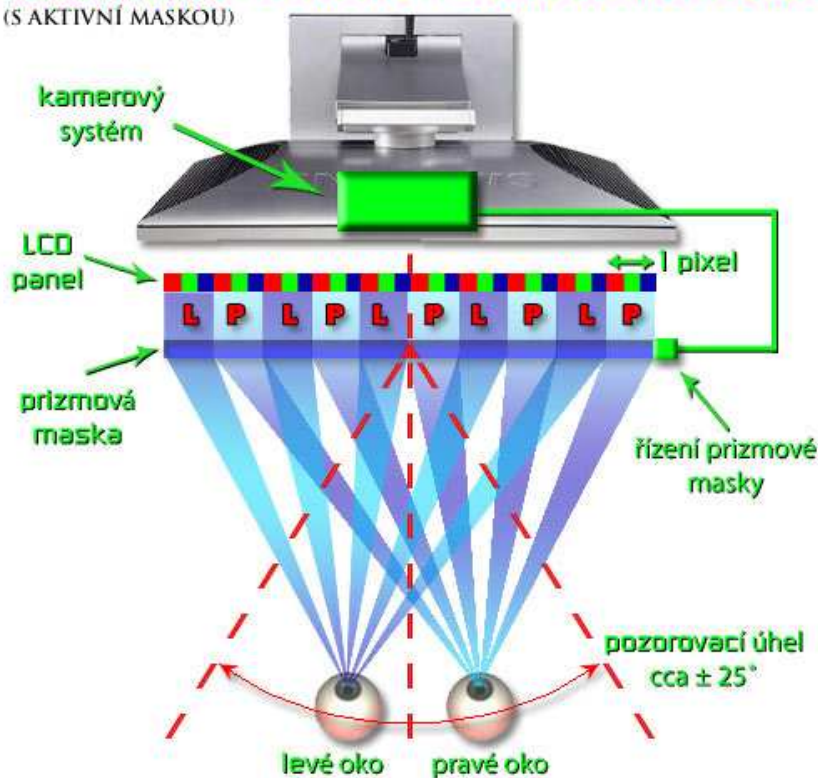


Takový systém využívá OskarIMAX v Praze nebo moderní digitální 3D kina společnosti Lightspeed Design. K této technice jsou zapotřebí polarizační brýle, polarizační filtry, dva projektory (stejně) a speciální projekční plátno, které je vyrobeno ze speciálního materiálu, opatřené povrchem, který zachovává polarizaci dopadajícího světla z projektorů. Tato technika je finančně méně nákladná než technika aktivní stereoskopické projekce.

3.4.3 Autostereoskopický monitor

Tato technika nevyužívá žádných brýlí. Před monitorem (většinou LCD) je umístěna speciální folie (tzv. prizmová maska), která láme svislé pixelové sloupce vedle sebe vždy trochu jiným směrem. „Dvousměnové“ monitory lámou lichý pixelový sloupec jedním směrem a sudý pixelový sloupec směrem druhým. Takto dostává divák do každého oka správný obraz a mozek si skládá trojrozměrnou scénu. V tomto případě se jedná o pasivní stereoskopický monitor, protože divák musí sedět v předem dané pozici před obrazovkou, aby trojrozměrný vjem byl správný. Při vychýlení z této pozice dochází ke ztrátě trojrozměrného vjemu. Tento problém řeší aktivní stereoskopický monitor, který je vybaven kamerovým systémem. Ten sleduje oči diváka (popř. čelenku na hlavě diváka) a upravuje prizmovou masku před monitorem. Tak nedochází ke ztrátě trojrozměrného vjemu.

SCHÉMA AUTOSTEREOSKOPICKÉHO 3D MONITORU
(S AKTIVNÍ MASKOU)



Mimo těchto dvou monitorů existuje verze spočívající v tom, že je lom světla veden do devíti směrů. Na tento monitor se může dívat více diváků, aniž by ztráceli trojrozměrný vjem. Používán je pro reklamní účely.

K této technice je zapotřebí autostereoskopický monitor, což je drahé zařízení. Jinak nejsou potřeba žádné brýle ani jiná speciální technika.

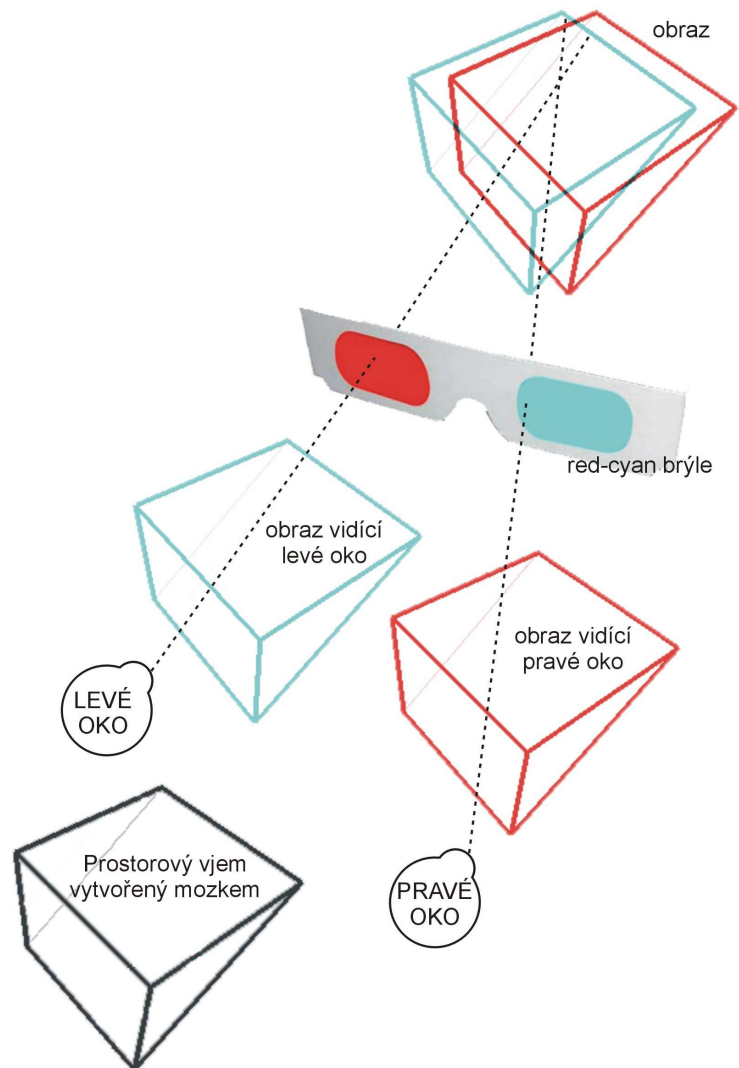
3.4.4 Anaglyph

Anaglyph je jednoduchá technika prostorového zobrazení obrazu. Poprvé byla použita v roce 1853. Ke sledování trojrozměrného obrazu je zapotřebí brýlí s rozdílnými barevnými filtry. Barevné filtry jednotlivých brýlí jsou následující: červený s modrým, červený se zeleným, červený s modrozeleným (red-cyan). Červený filtr by měl být na levém oku. Nejlepší brýle jsou red-cyan. Nevhodnými brýlemi jsou brýle s nekvalitními filtry, přes které je vidět příliš zkrlesně, dvojitě nebo rozmazaně. Není zde zapotřebí žádné jiné speciální techniky, tudíž je tato technika finančně výhodná (brýle lze pořídit za desítky korun) a také ji může sledovat více diváků. Bohužel u této techniky je vysoká ztráta barevných informací a proto vjem anaglyphu není tak kvalitní jako u ostatních technik. Anaglyph lze zobrazovat na monitoru, pomocí projektoru a dokonce v tištěné podobě.

SCHÉMA 3D PROJEKCE TYPU ANAGLYF (ANAGLYPH)



Obraz anaglyphu je vyroben tak, že obsahuje dva smíchané obrazy. Pro levé oko obraz barvy pravého filtru brýlí a pro pravé oko obraz červené barvy. Pravé oko vidí obraz červené barvy a levé oko zase druhý obraz (zde dochází ke zmiňované ztrátě barevných informací). Mozek si oba obrazy spojí a tak se vytváří prostorový vjem.

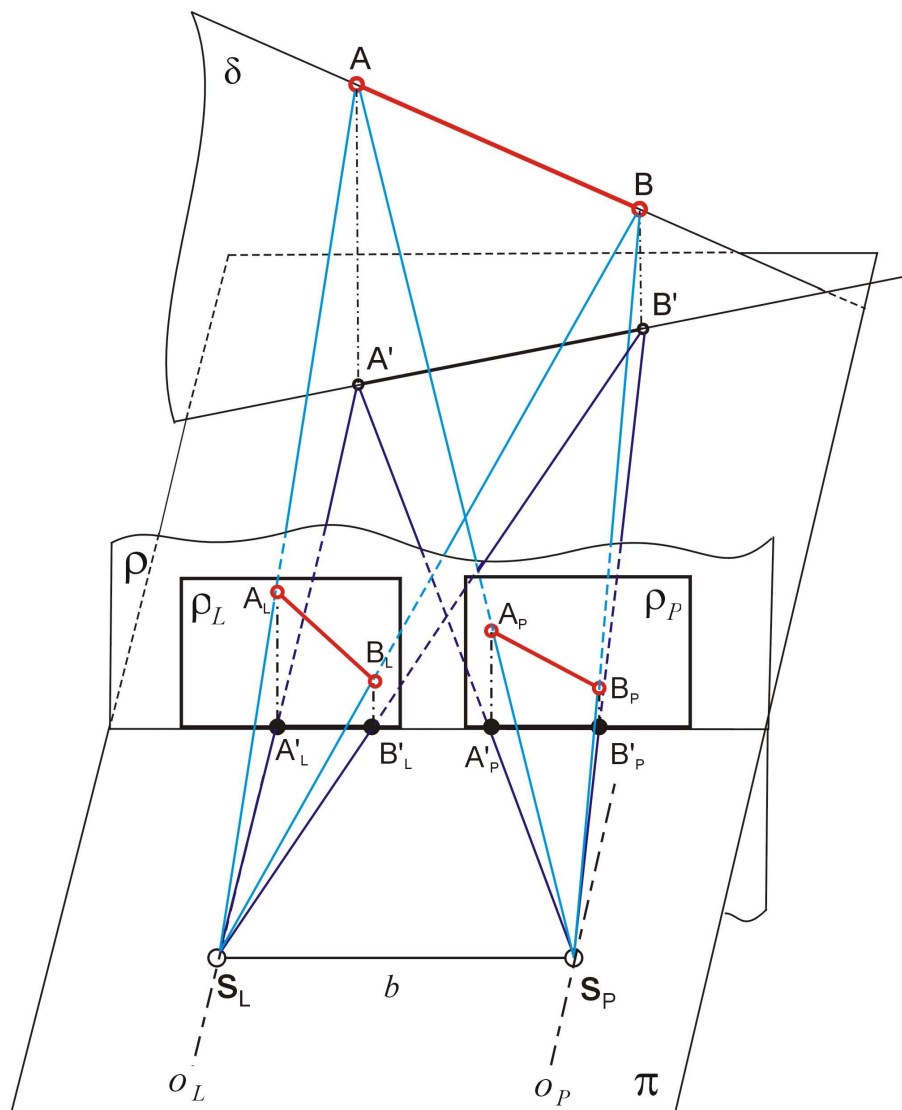


3.4.5 Srovnání technik

Metoda	Barevná informace	Rozlišení obrazu	Vhodné pro projekci	Zobrazení na monitoru	Počet diváků	náklady
Aktivní zobrazení	plná	vysoké	ano	ano (ne LCD)	omezený	vyšší
Pasivní zobrazení	plná	vysoké	ano	ne	vysoký	střední
Autostereoskopický monitor	plná	vysoké	ne	ano	velmi omezený	vyšší
Anaglyph	kompletní ztráta	střední	ano	ano	vysoký	velmi nízké

3.5 Geometrická podstata stereoskopických technik

Geometrickou podstatu stereoskopických technik vysvětlím pomocí následujícího obrázku. Obrázek je ve volném rovnoběžném promítání a jeho účelem je znázornit prostorovou souvislost mezi reálným trojrozměrným předmětem a jeho stereoskopickými obrazy.



Nad rovinu π je umístěna úsečka $|AB|$ (reálný trojrozměrný předmět). Body A , B jsou od pozorovatele různě vzdáleny, tedy má smysl uvažovat o rozložení úsečky „do hloubky“ v trojrozměrném prostoru. Body S_L a S_P jsou idealizované středy čoček lidských očí. Přímký o_L , o_P jsou zorné osy očí v situaci, kdy jsou oči zaměřeny na vzdálené předměty (osy jsou téměř rovnoběžné). Při pozorování blízkého předmětu, v mém případě úsečky $|AB|$, jsou zorné osy obou očí sbíhavé (konvergentní). Mezi pozorovatelem a úsečkou je vedena rovina ρ tak, že platí:

$\rho \perp \pi$, $\rho \parallel S_L S_P$. Ke zvolené poloze očí S_L , S_P a úsečky $|AB|$ musí platit $\rho \nparallel AB$. (Může nastat situace, že $\rho \parallel AB$, ale pak $\sigma \perp \pi$, kde leží úsečka $|AB|$ a též platí $\sigma \parallel S_L S_P$. Toto je situace, kdy jsou sledované body od pozorovatele stejně vzdálené.) Obdélníkové výřezy ρ_L a ρ_P jsou částí roviny ρ .

Pozorovací paprsky $S_L A$ a $S_L B$ levého oka pozorovatele protínají rovinu ρ v bodech A_L , B_L . Stejně tak pozorovací paprsky $S_P A$ a $S_P B$ pravého oka pozorovatele protínají rovinu ρ v bodech A_P , B_P . Vzhledem ke vzájemné vzdálenosti očí (b) je zřejmé, že úsečky $|A_L B_L|$ a $|A_P B_P|$ nejsou totožné. Zpravidla také platí, že i velikosti úseček jsou různé ($|A_L B_L| \neq |A_P B_P|$). Všechny „čárkované“ body jsou pravoúhlými průměty adekvátních „nečárkovaných“ bodů do roviny π . Nákres je takto názornější a „čárkované“ body napomáhají při konstrukci „nečárkovaných“ bodů.

Jak se liší úsečky $|A_L B_L|$ a $|A_P B_P|$ na straně jedné a úsečka $|AB|$ na straně druhé?

- 1) Je zřejmé, že úsečky $|A_L B_L|$ a $|A_P B_P|$ jsou ve sledované situaci menší než úsečka $|AB|$. Tato skutečnost je dána tím, že úsečky $|A_L B_L|$ a $|A_P B_P|$ jsou obrazy úsečky $|AB|$ ve dvojstředovém promítání se středy S_L a S_P na rovinu ρ ležící úsečkou $|AB|$ a středy S_L a S_P . Jde zde o dva různé obrazy téže úsečky. Levé oko pozorovatele vidí úsečku $|AB|$ jako úsečku $|A_L B_L|$ a pravé oko jako úsečku $|A_P B_P|$. Situace bude obdobná, budu-li rovinu ρ posouvat mezi pozorovatelem a úsečkou $|AB|$. Maximální přiblížení roviny ρ k pozorovateli je dána akomodací očí a možnostmi konvergence (sbíhavosti) očních os. Pokud bych však rovinu ρ posunul až za úsečku $|AB|$, tak by úsečky $|A_L B_L|$ a $|A_P B_P|$ byly větší než úsečka $|AB|$.
- 2) Úsečka $|AB|$ leží v rovině σ , úsečky $|A_L B_L|$ a $|A_P B_P|$ v rovině ρ . Roviny σ a ρ mají tyto vlastnosti: $\sigma \perp \pi$, $\rho \perp \pi$, $\sigma \nparallel S_L S_P$, $\rho \parallel S_L S_P$. Podobně jako lze do roviny ρ zobrazit úsečku roviny σ , lze do této roviny zobrazit i jinou úsečku roviny σ . Body roviny σ , které v popsaném dvojstředovém promítání nemají své obrazy v rovině ρ , mě

nemusí zajímat. Jedná se o body mimo zorné pole pozorovatelových očí. Pomocí popsaného dvojstředového promítání lze do roviny ρ zobrazit nejen úsečky roviny σ , ale i kteroukoliv jinou úsečku, nezávisle na její poloze v trojrozměrném prostoru. Zde však je nutné připustit i situaci, že $\sigma \parallel \rho \parallel S_L S_P$. Pak úsečka $|AB|$ v rovině σ má vzhledem k pozorovateli průčelnou polohu a pozorovatel identifikuje všechny body roviny σ jako stejně vzdálené.

Kterýkoliv útvar trojrozměrného prostoru (v rámci zorného pole a nepřesahující radius stereoskopického pole pozorovatele) lze výše popsaným dvojstředovým promítáním zobrazit do roviny v podobě dvojice obrazů (obrazem pro levé oko, který je vymezen obdélníkem ρ_L a obrazem pro pravé oko, který je vymezen obdélníkem ρ_P). Úsečky $|A_L B_L|$ a $|A_P B_P|$ jsou jednotlivé obrazy (úsečky $|AB|$) stereoskopické projekce. Viděný obraz je virtuální (nelze ho zachytit na stínítko), reálně se promítá v podobě dvou odlišných obrazů na sítnice našich očí. Výše popsanými technikami docílíme toho, aby každé oko dostalo svůj správný obraz.

4 O programu

Program „*Tělesa ve stereoskopické projekci (anaglyph)*“ je psán v jazyce C# v programu Microsoft Visual C# 2005 Express Edition. Zdrojový kód je na příloženém CD, kde je též samotný spustitelný program. Ke spuštění je zapotřebí mít v počítači nainstalovaný NET framework 2.0, který je také na příloženém CD a je možné ho volně stáhnout z <http://www.slunecnice.cz/sw/microsoft-net-framework/>

4.1 Popis programu

Program „*Tělesa ve stereoskopické projekci (anaglyph)*“ je interaktivní program s velmi jednoduchým ovládáním a nastavením.

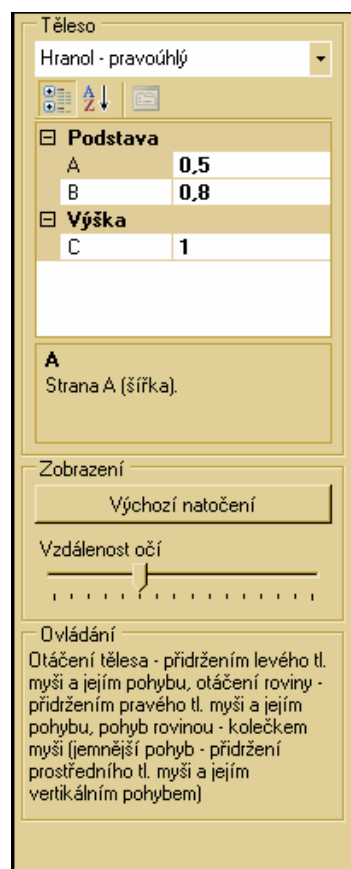
Program obsahuje některá základní tělesa :

- jehlan
 - s pravoúhelníkovou podstavou
 - s podstavou pravidelného šestiúhelníku
- čtyřstěn
 - pravidelný
 - nepravidelný
- kolmý hranol
 - s trojúhelníkovou podstavou
 - s pravoúhelníkovou podstavou
 - s rovnoběžníkovou podstavou
 - s lichoběžníkovou podstavou
 - s podstavou pravidelného šestiúhelníku

Tento program je lehký modifikovatelný, programátor znalý jazyka C# může velmi snadno doplnit další tělesa, má-li jeho zdrojový kód.

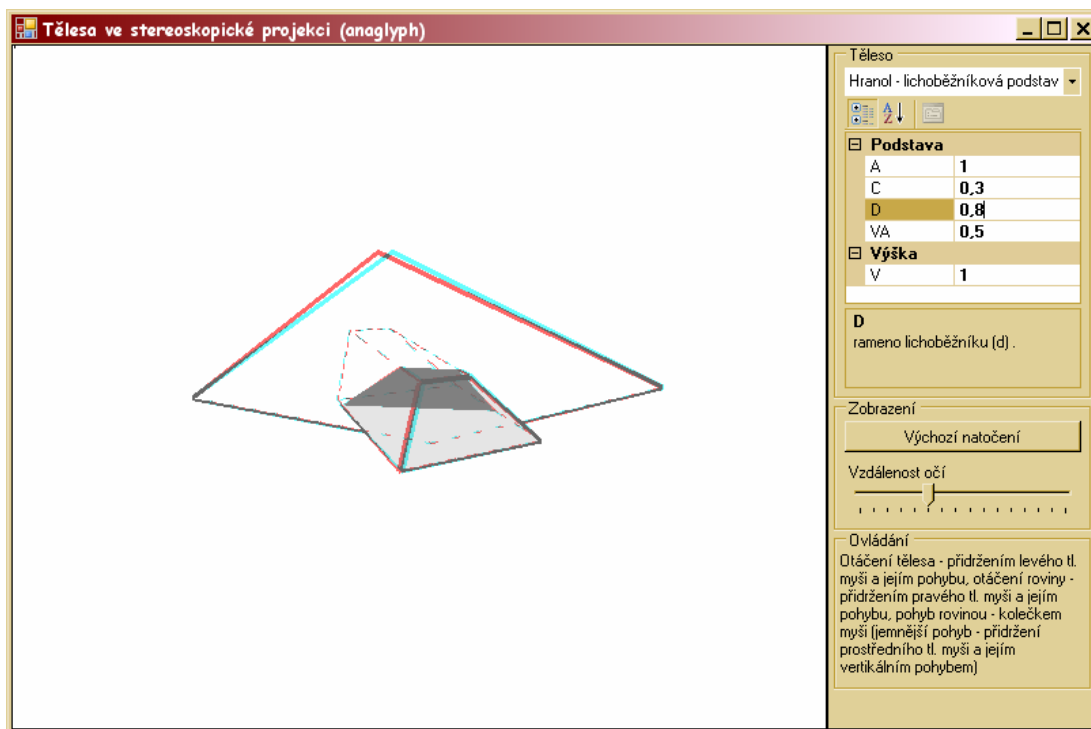
Každému tělesu lze měnit jeho velikost, tzn. výšku tělesa a rozměry podstavy tělesa. Každá z podstav má jiné parametry podle jejího tvaru; o velikosti jejich hodnot a výsledném tvaru se zmíním níže. Vybraným tělesem lze, po přidržení levého tlačítka myši, otáčet (těleso se otáčí kolem svého těžiště) – a to podle pohybu myši.

Dále program obsahuje rovinu. Tento objekt lze také otáčet. Po přidržení pravého tlačítka myši a jejím pohybem, se objekt natáčí. Objekt lze nejen natáčet, ale lze



s ním i pohybovat a to kolečkem u myši. Přidržením prostředního tlačítka myši (kolečka) a následným pohybem se objekt pohybuje nebo též jeho otočením. Takto můžeme například vidět, jak rovina řeže těleso, polohu roviny vůči tělesu a to prostorově.

Jelikož každý člověk je jedinečný, je zde nastavení vzdáleností očí. Při špatném nastavení nemusí být trojrozměrný dojem správný nebo dokonce žádný.



4.2 Popis matematických těles

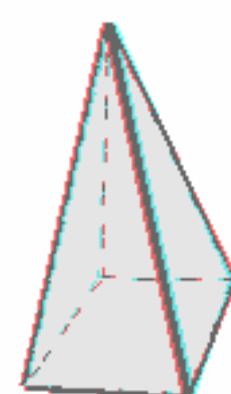
V této části popíšeme nastavení hodnot pro tělesa. Nikde v nastavení se nesmí objevit nulová délka.

U všech těles, vyjma pravidelného čtyřstěnu, lze nastavit jejich výšku, která je označena *výška tělesa*.

4.2.1 Jehlan

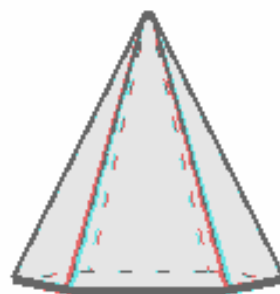
S pravoúhelníkovou podstavou

Zde je nastavení jednoduché: a je jedna strana podstavy, b je druhá strana podstavy. Je-li a rovno b ($a = b$) jedná se o čtvercovou podstavu, pokud a je různé od b ($a \neq b$), jedná se o obdélníkovou podstavu.



S podstavou pravidelného šestiúhelníku

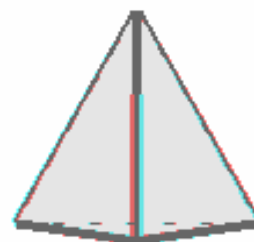
V tomto případě je nastavení též jasné: a je hrana podstavy.



4.2.2 Čtyřstěn

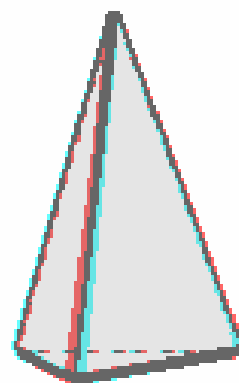
Pravidelný

U pravidelného čtyřstěnu nastavujeme pouze hranu a .



Nepravidelný

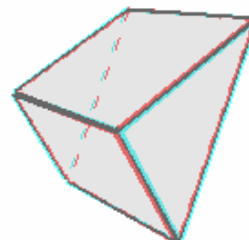
Nepravidelný čtyřstěn je vlastně jehlan s trojúhelníkovou podstavou, kde nastavujeme velikosti stran a , b , c . Zde máme další možnosti nastavení podle toho, jaký trojúhelník má v podstavě být. Pro pravoúhlý trojúhelník nastavíme strany v poměru $a:b:c = 3:4:5$, pro rovnoramenný trojúhelník je zapotřebí rovnost dvou stran ($a = b \vee b = c \vee c = a$) a pro rovnostranný trojúhelník rovnost všech tří stran ($a = b = c$). Samozřejmě musí být zachována trojúhelníková nerovnost ($a + b > c$; $b + c > a$; $c + a > b$).



4.2.3 Kolmý hranol

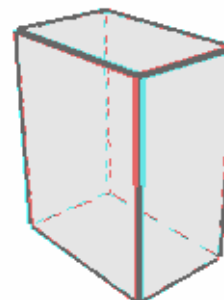
S trojúhelníkovou podstavou

Zde je nastavení stejné jako u nepravidelného čtyřstěnu viz. výše.



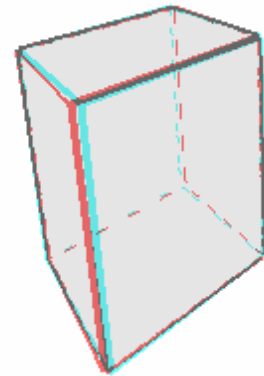
S pravoúhelníkovou podstavou

Toto nastavení je shodné s nastavením jehlanu s pravoúhelníkovou podstavou viz. výše.



S rovnoběžníkovou podstavou

Rovnoběžník je dán stranami a , b a *výškou*. Strana b musí být větší nebo rovna *výšce* ($b \geq$ *výška*). Je-li strana b rovna *výšce* ($b =$ *výška*) dostaneme pravoúhelníkovou podstavu. Zadáme-li rovnost stran a , b ($a = b$) dostaneme kosočtvercovou podstavu. Při zadání různých stran a , b ($a \neq b$) dostaneme kosodélníkovou podstavu.



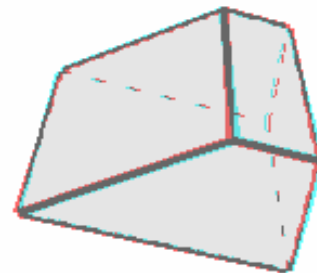
S lichoběžníkovou podstavou

V tomto případě je lichoběžník zadáván *základnami* a , c ; *ramenem* b a *výškou* (dále jen a , c , b , *výška*). Strana b musí být větší nebo rovna *výšce* ($b \geq$ *výška*), je-li strana b rovna *výšce* ($b =$ *výška*), dostaneme podstavu pravoúhlého lichoběžníku.

Budou-li se základny a , c rovnat ($a = c$), dostaneme rovnoběžníkovou podstavu. Chceme-li mít podstavu rovnoramenného lichoběžníku, musíme

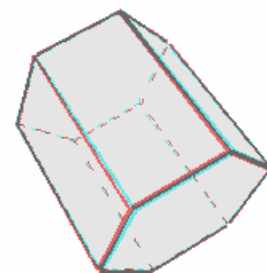
nastavit $b = \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + (\text{výška})^2}$. Například: $a =$

5 , $c = 2$, $b = 2,5$, *výška* = 2 .



S podstavou pravidelného šestiúhelníku

Toto nastavení je shodné s nastavením jehlanu s podstavou pravidelného šestiúhelníku viz. výše.



4.3 Tvorba těles

Zde vysvětlím výpočty a dopočítávání obecných souřadnic bodů pro jednotlivá tělesa, které program dále využívá při jakékoliv změně k přepočítání konkrétních souřadnic.

4.3.1 Teorie

Otočení (rotace) $R(S; \alpha)$

Otočení (rotace) je shodné zobrazení, kde jsou všechny body roviny otočeny kolem pevně daného bodu S (středu otočení) o stejný úhel α (úhel otočení).

Analytické vyjádření

souřadnice středu: $S = [s_1; s_2]$

$$x' = (x - s_1) \cos \alpha - (y - s_2) \sin \alpha + s_1$$

$$y' = (x - s_1) \sin \alpha + (y - s_2) \cos \alpha + s_2$$

po krátké úpravě dostaneme:

$$x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha + s_1 - s_1 \cdot \cos \alpha + s_2 \cdot \sin \alpha$$

$$y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha + s_2 - s_1 \cdot \sin \alpha - s_2 \cdot \cos \alpha$$

Posunutí (translace) $T(\vec{p})$

Posunutí (translace) je shodné zobrazení, kde jsou všechny body roviny posunuty stejným směrem o stejnou vzdálenost – směr a vzdálenost jsou dány orientovanou úsečkou, nazývanou „vektor posunutí“.

Analytické vyjádření

souřadnice vektoru posunutí: $\vec{p} = [p_1; p_2]$

$$x' = x + p_1$$

$$y' = y + p_2$$

Vzdálenost bodů

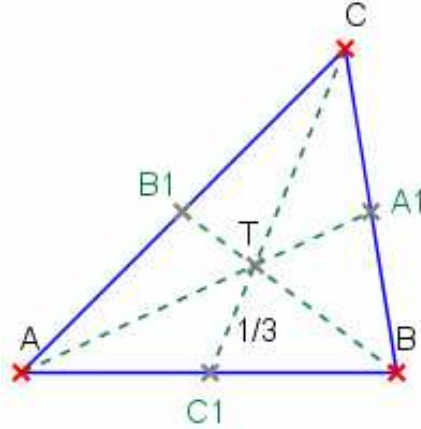
Vzdálenost ($d = |XY|$) dvou bodů $X[x_1, x_2, \dots, x_n]$ a $Y[y_1, y_2, \dots, y_n]$ v E_n je dána vztahem:

$$|XY| = Y - X = d = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

Těžiště

Střed úsečky je těžištěm. Body úsečky A , B mají stejnou váhu, tedy těžiště je v polovině úsečky AB . Souřadnice tohoto těžiště jsou dány vztahem: $T = \frac{A+B}{2}$.

Těžiště v trojúhelníku ABC je ve třetině těžnice k základně. Tedy



$$T = C_1 + \frac{1}{3}(C - C_1), \text{ kde } C_1 = \frac{A+B}{2}$$

Po úpravě dostáváme vztah:

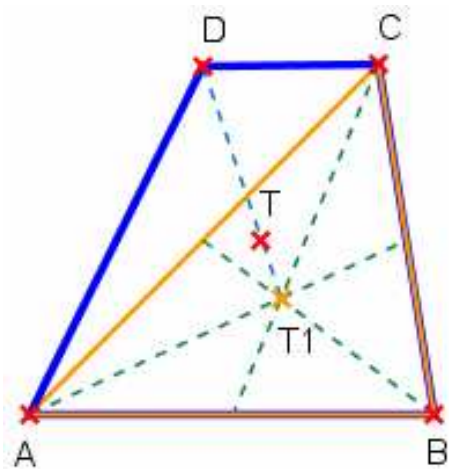
$$T = \frac{A+B+C}{3}$$

Pomocí předchozích odvozených vztahů odvodíme těžiště ve čtyřúhelníku. Čtyřúhelník rozdělíme na dva trojúhelníky. Těžiště jednoho trojúhelníku je $T_1 = \frac{A+B+C}{3}$ a má váhu 3. Nyní máme těžiště T_1 (s váhou 3) a bod D (s váhou 1).

Výsledné těžiště leží mezi těmito body, jehož souřadnice jsou dány vztahem:

$$T = \frac{3 \cdot T_1 + D}{4}$$

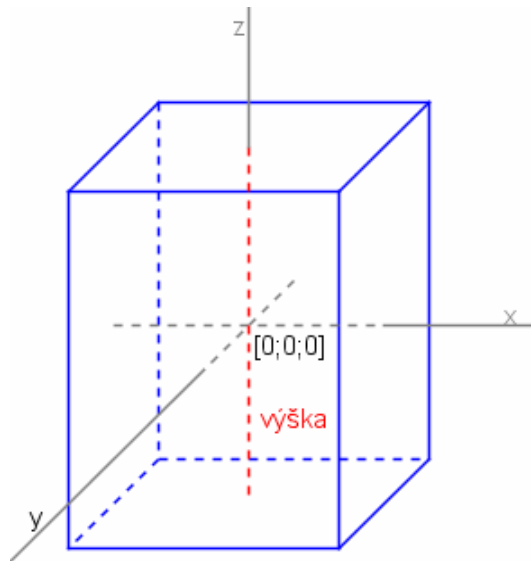
$$T = \frac{A+B+C+D}{4}$$



4.3.2 Obecný postup

Každý bod v prostoru je dán uspořádanou trojicí $[x; y; z]$. Do programu se zadávají velikosti hran, takže každá z velikostí hran je vzdáleností dvou bodů. Pomocí těchto vzdáleností je třeba dopočítat souřadnice jednotlivých bodů tělesa. Těleso se otáčí kolem svého těžiště; tj. kolem bodu $[0; 0; 0]$.

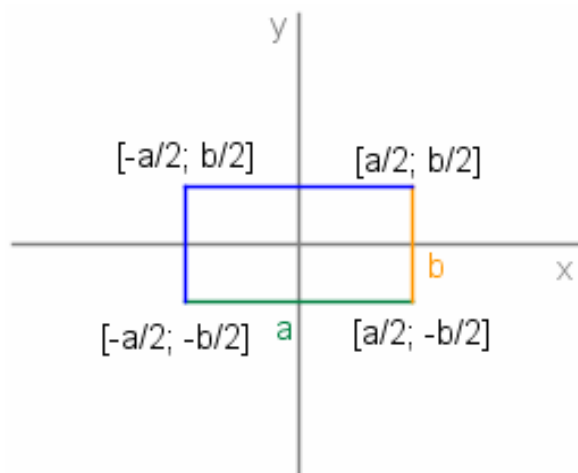
Výška tělesa



Nyní se budu zabývat z -ovou souřadnicí; tzn. výškou tělesa. U tělesa se dvěma podstavami je těžiště v polovině výšky. Jedna podstava má z -ovou souřadnici $\frac{v}{2}$ a druhá podstava $-\frac{v}{2}$. Těleso s jednou podstavou má těžiště v $\frac{1}{4}$ výšky tělesa. Tzn. z -ová souřadnice podstavy je $-\frac{v}{4}$ a souřadnice vrcholu $\frac{3}{4} \cdot v$.

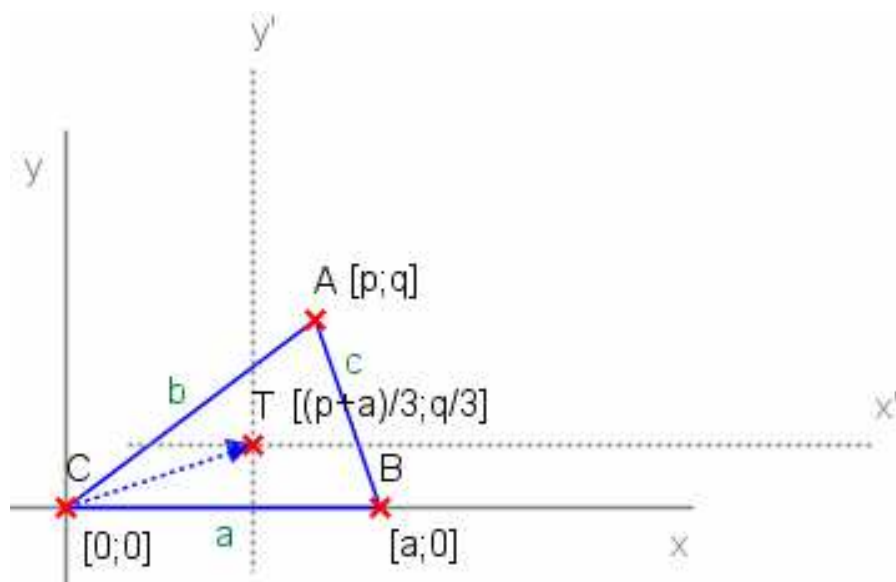
Podstava tělesa

Pro zjednodušení výpočtu souřadnic jednotlivých bodů vyřeším problém v rovině.



U pravoúhelníkové podstavy je těžiště v průsečíku os stran. Mám-li zadány strany a , b , pak souřadnice vrcholů jsou: $\left[\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right]$; $\left[\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right]$; $\left[-\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right]$; $\left[-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right]$.

U trojúhelníkové podstavy je těžiště v průsečíku spojnic vrcholu se středem protější strany. Vhodně zvolím kartézskou soustavu souřadnic OXY , označím vrcholy trojúhelníku a dopočítám jeho těžiště.



$$C[0;0]$$

$$B[a;0]$$

$$A[p;q]$$

$$T\left[\frac{p+a}{3}; \frac{q}{3}\right]$$

Nyní posunu kartézskou soustavu souřadnic OXY o vektor \overrightarrow{CT} ($T(\overrightarrow{CT})$). V nové kartézské soustavě souřadnic $OX'Y'$ dostanu souřadnice bodů:

$$T[0;0];$$

$$C\left[-\frac{p+a}{3}; -\frac{q}{3}\right];$$

$$B\left[\frac{2a-p}{3}; -\frac{q}{3}\right];$$

$$A\left[\frac{2p-a}{3}; \frac{2q}{3}\right];$$

Nakonec zbývá vyjádřit p , q pomocí délek stran a , b , c .

Ze vzdálenosti dvou bodů vím:

$$c^2 = (p-a)^2 + q^2$$

$$c^2 = p^2 - 2pa + a^2 + q^2$$

dále vím: $b^2 = p^2 + q^2$

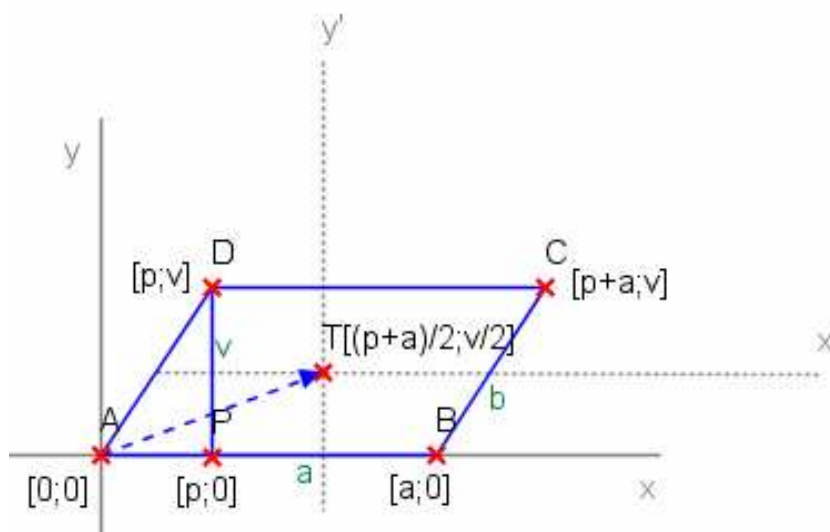
$$c^2 = b^2 - 2pa + a^2$$

$$p = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

po dosazení do $b^2 = p^2 + q^2$ dostanu vyjádření

$$q = \sqrt{b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}}$$

U rovnoběžníkové podstavy je těžiště v polovině úhlopříčky $/AC/$. Ve vhodné zvolené kartézské soustavě souřadnic OXY označím rovnoběžník a dopočítám těžiště.



$$\begin{aligned} A[0;0]; \\ B[a;0]; \\ C[p+a;v]; \\ D[p;v]; \\ T\left[\frac{p+a}{2}; \frac{v}{2}\right]; \end{aligned}$$

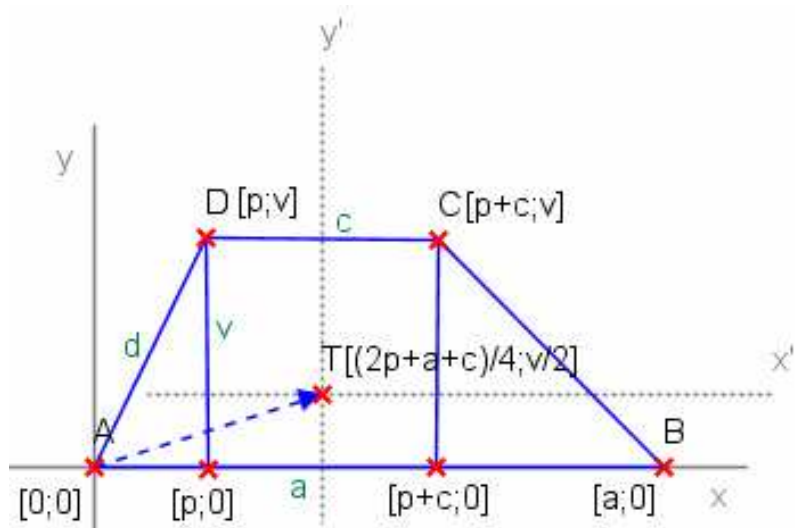
Nyní posunu kartézskou soustavu souřadnic OXY o vektor \overrightarrow{AT} ($T(\overrightarrow{AT})$). V nové kartézské soustavě souřadnic $Ox'Y'$ dostanu souřadnice bodů:

$$\begin{aligned} A\left[-\frac{p+a}{2}; -\frac{v}{2}\right]; \\ B\left[\frac{a-p}{2}; -\frac{v}{2}\right]; \\ C\left[\frac{p+a}{2}; \frac{v}{2}\right]; \\ D\left[\frac{p-a}{2}; \frac{v}{2}\right]; \\ T[0;0]; \end{aligned}$$

Ze vzdálenosti $/AD/$ vyjádřím p pomocí délek b, v . Dostanu tedy vztah:

$$p = \sqrt{b^2 - v^2}$$

U lichoběžníkové podstavy získám souřadnice těžiště ze vztahu $T = \frac{A+B+C+D}{4}$. Vhodným zvolením kartézské soustavy souřadnic OXY dostávám souřadnice:



$$A[0;0];$$

$$B[a;0];$$

$$C[p+c;v];$$

$$D[p;v];$$

$$T\left[\frac{2p+a+c}{4}; \frac{v}{2}\right];$$

Posunutím kartézské soustavy souřadnic OXY o vektor \overrightarrow{AT} ($T(\overrightarrow{AT})$) dostanu nové souřadnice bodů kartézské soustavy souřadnic $OX'Y'$.

$$A\left[-\frac{2p+a+c}{4}; -\frac{v}{2}\right];$$

$$B\left[\frac{3a-2p-c}{4}; -\frac{v}{2}\right];$$

$$C\left[\frac{2p+3c-a}{4}; \frac{v}{2}\right];$$

$$D\left[\frac{2p-a-c}{4}; \frac{v}{2}\right];$$

$$T[0;0];$$

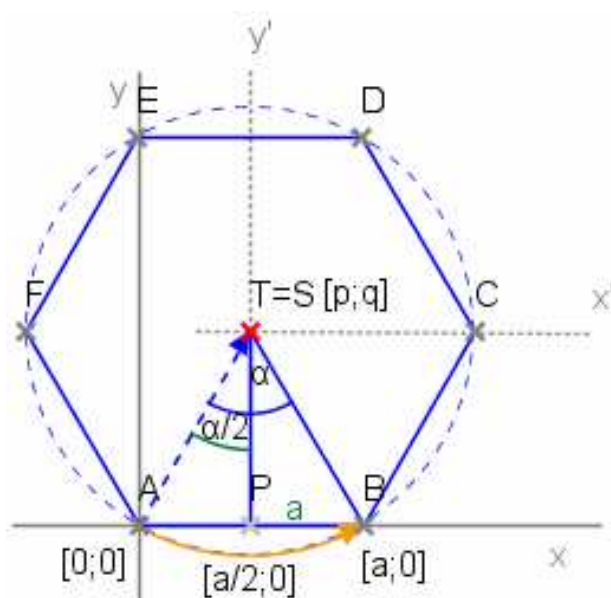
Vím, že $d = |AD|$, odtud můžu vyjádřit p pomocí d , v . Dostávám vztah:

$$p = \sqrt{d^2 - v^2}$$

U podstavy pravidelného šestiúhelníku je těžiště ve středu kružnice opsané ($T=S$). Toto platí obecně pro podstavu pravidelného n -úhelníku. Postup ukáži pro pravidelný šestiúhelník. Tento postup na konci zobecním pro pravidelný n -úhelník.

Vhodně zvolím kartézskou soustavu souřadnic Oxy .

K výpočtu souřadnic dalších bodů využiji opakovaného otočení bodu A kolem středu S o úhel $i \cdot \alpha$, kde $i = 0, 1, \dots, 5$.



$$A[0;0];$$

$$B[-p \cdot \cos(i \cdot \alpha) + q \cdot \sin(i \cdot \alpha) + p; -p \cdot \sin(i \cdot \alpha) - q \cdot \cos(i \cdot \alpha) + q];$$

$$T[p; q];$$

$$\alpha = 60^\circ (360^\circ \div 6)$$

Pomocí velikosti a a středového úhlu α vyjádřím p , q . Vzdálenost středu od kteréhokoliv vrcholu je rovna poloměru kružnice opsané ($|AT| = |BT| = r$).

Potom

$$\sqrt{p^2 + q^2} = r = \sqrt{(p-a)^2 + q^2}$$

$$p^2 + q^2 = (p-a)^2 + q^2$$

$$p^2 = p^2 - 2pa + a^2$$

$$p = \frac{a}{2}$$

V trojúhelníku ATP znám $|AP| = \frac{a}{2}$ a úhel $\frac{\alpha}{2}$. Protože vím, že $q = |TP|$, tak pomocí goniometrické funkce dostanu vztah :

$$q = \frac{\frac{a}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

Posunutím kartézské soustavy souřadnic OXY o vektor \overrightarrow{AT} ($T(\overrightarrow{AT})$) dostanu nové souřadnice bodů kartézské soustavy souřadnic $Ox'Y'$.

$$T[0;0];$$

$$A[-p;-q];$$

$$B[-p \cdot \cos \alpha + q \cdot \sin \alpha; -p \cdot \sin \alpha - q \cdot \cos \alpha];$$

Obecně mohu spočítat každou souřadnici bodu pravidelného n -úhelníku:

$$[-p \cdot \cos(i \cdot \alpha) + q \cdot \sin(i \cdot \alpha); -p \cdot \sin(i \cdot \alpha) - q \cdot \cos(i \cdot \alpha)],$$

$$\text{kde } \alpha = \frac{360^\circ}{n}; i = 0, 1, \dots, n-1;$$

n je počet vrcholů pravidelného n -úhelníku.

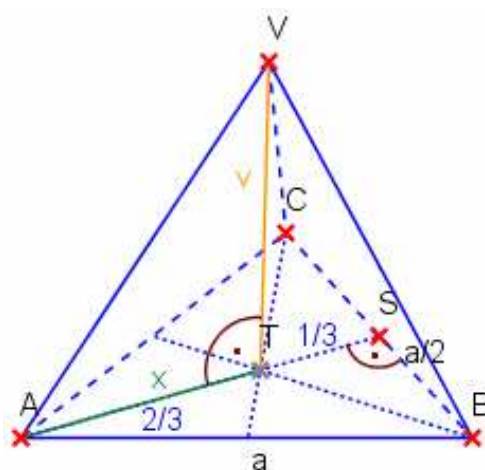
Pravidelný čtyřstěn

Pravidelný čtyřstěn je zadán pouze hranou a . Skládá se ze čtyř rovnostranných trojúhelníků. Jeden trojúhelník budu brát za podstavu, jejíž souřadnice jednotlivých

bodů jsou $T[0;0]; A\left[\frac{2p-a}{3}; \frac{2q}{3}\right]; B\left[\frac{2a-p}{3}; \frac{q}{3}\right]; C\left[-\frac{p+a}{3}; -\frac{q}{3}\right]$, kde

$$p = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}; q = \sqrt{b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}}.$$

Nyní zbývá vyjádřit výšku tělesa v pomocí hrany a . Vyjádřím nejprve $|AT|$, což je $\frac{2}{3}$ těžnice nebo též $\frac{2}{3}$ výšky. Vzdálenost $|AT|$ si označím x . Pak



$$x = \frac{2}{3} \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Z trojúhelníku VAT vyjádřím v ($v = |VT|$).

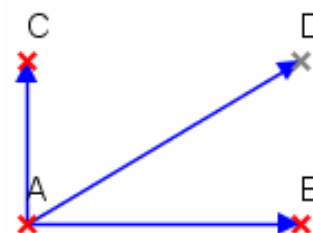
$$v = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$v = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

4.4 Tvorba roviny

Rovina je dána třemi body. V tomto případě rovinu reprezentuje čtverec, tudíž je zřejmé, že bude nutné dopočítat čtvrtý bod roviny.

Mám-li dány body $A[a_1; a_2; a_3]$; $B[b_1; b_2; b_3]$; $C[c_1; c_2; c_3]$, pak bod $D = A + (B - A) + (C - A)$; tedy souřadnice jsou: $D[b_1 + c_1 - a_1; b_2 + c_2 - a_2; b_3 + c_3 - a_3]$



4.5 Návrhy pro další vylepšení

V nynější verzi programu se rovinou pohybuje pouze pomocí myši. Představme si, že je rovina zadána body A , B , X , kde $|EX| : |XF| = 1 : 3$. Do této polohy rovinu pomocí pohybu myši nastavíme velmi těžko, proto by bylo dobré zadávat rovinu též z klávesnice pomocí bodů tělesa. Aby čtverec reprezentující

rovinu mohl těleso „řezat“, je nutné aby tento čtverec byl v dostatečné velikosti. Tedy rovina bude zadávána pomocí bodů pomocného – zvětšeného – tělesa. Souřadnice vrcholů tělesa jsou vždy už přesně spočítány. Nyní se zaměřím na ostatní body. Bod X leží v $1/3$ $|EF|$. Známe souřadnice bodů E , F a poměr. Souřadnice bodu X spočítám pomocí rovnic:

$$x = e_1 + (f_1 - e_1)t$$

$$y = e_2 + (f_2 - e_2)t$$

$$z = e_3 + (f_3 - e_3)t$$

kde t je poměr $|EX| : |XF| = 1 : 3$

Dalším vylepšením může být doplnění programu o přímku. Pak by v programu byl výběr mezi zobrazením tělesa s přímkou, s rovinou nebo jen samotné těleso. Přímka je zadána dvěma body a v tomto případě by byla reprezentována úsečkou. Body této úsečky jsou zadány pomocí zvětšeného tělesa. Souřadnice vrcholů jsou přesně dány a ostatní souřadnice bodů lze dopočítat pomocí výše uvedených rovnic.

Pro představu pro další příklady by program mohl obsahovat dvě roviny a dvě přímky.

Dále by nebylo špatné tento program rozšířit o konstrukci řezu tělesa rovinou.

V neposlední řadě je možné rozšíření o další tělesa.

Výše uvedené nápady a myšlenky zde uvádím pro případné vylepšení a názornější představu související se stereometrií.

5 Užití ve výuce

Možnosti užití stereoskopie ve vyučování jsou dány skutečností, že stereoskopická projekce umožňuje velmi účinným způsobem realizovat didaktickou zásadu názornosti. Tuto zásadu uplatňuje vyučující tak, že užívá názorných učebních pomůcek a audiovizuálních technických prostředků. Základem názornosti jsou podněty první signální soustavy a ty jsou řízeny a ovlivňovány druhou signální soustavou (uplatnění názorné pomůcky je vždy doprovázeno slovem). Slovo usměrňuje pozornost žáka na hlavní a podstatné prvky názorné pomůcky, které jsou pro splnění daného didaktického cíle nejzávažnější.

Typy názornosti:

- vnější
 - přirozená – seznamování s reálnými objekty ve třídě i mimo ni (exkurze, vycházky, výlety, ...)
 - prostorová – pochopení prostorového uspořádání reálného světa pomocí různých zobrazení tohoto světa (fotografie, diapozitiv, diafilm, němý film, kresba, náčrt, ...)
 - zvuková – seznámení s ukázkami přírodních zvuků, zvuků pracovního prostředí, s ukázkami cizích jazyků, hudby, ...
 - symbolická a grafická – rozvíjení abstraktního myšlení tak, že vyjadřuje reálnou skutečnost v zobecněné a symbolické podobě (schémata, náčrt, plány, vzorce, popisující jevy a procesy)
- vnitřní (zprostředkovaná)

Stereoskopické pomůcky mohou účinně přispět k uplatnění názornosti prostorové, symbolické a grafické a do jisté míry mohou úspěšně nahradit také názornost přirozenou.

Prostorová názornost – je-li uznávaná účinnost kresby, fotografie atd., tak musí být uznávaná i účinnost stereoskopické projekce, která může konkurovat přirozené názornosti.

Symbolická a grafická názornost – nachází uplatnění ve všech stereoskopických obrazech, které nevznikly fotografováním reálné skutečnosti. Například znázornění geometrických skutečností (geometrie trojrozměrných obrazů, deskriptivní geometrie), zobrazení povrchu Země na mapách, krystalická struktura minerálů, prostorová struktura molekul chemických sloučenin apod.

5.1 Stereometrie

Stereometrie je matematická věda zabývající se prostorovými útvary a jejich vztahy. Jinak řečeno, je to geometrie v prostoru.

Z historie

První dochované záznamy stereometrického myšlení jsou spojeny s počítáním objemů. Sumerové měřili objem těles počtem cihel již ve 3. tisíciletí př. n. l.. Egypťané používali při stavbě pyramid vzorec pro výpočet objemu a výšky pyramidy. První zmínky o vzorcích pro výpočet objemů kvádrů a válců byly zaznamenány v Moskevském papyru. Tento papyrus pochází z 19. stol. př. n. l. a sloužil k vojenským účelům. K rozvoji prostorové geometrie přispěli také astronomická pozorování a potřeby navigace.

Začátek rozvoje matematiky jako teoretického odvětví vědění je datován do starověkého Řecka. O počátek rozvoje matematiky jako vědy se zasloužili zejména Thales z Milétu a Pythagoras ze Samu (6. stol. př. n. l.).

Pythagoras se svou školou zabýval pravidelnými mnohostěny. Na něj navázal Platon, který provedl důkaz o počtu pravidelných mnohostěnů; proto se jim dodnes říká „platonská tělesa“. Demokritos (5. - 4. stol. př. n. l.) věnoval ve svých geometrických spisech velkou pozornost určování ploch a objemů těles. Jako první zjistil, že objem jehlanu se rovná jedné třetině objemu hranolu o stejné podstavě a výšce.

Ve 4. - 3. stol. př. n. l. se stereometrií zabýval Eukleides. V posledních třech kapitolách svých „*Základů*“ shrnul do té doby známé stereometrické poznatky. S mnoha novými poznatky vstoupil ve 3. stol. př. n. l. do matematiky Archimedes. Na počátku našeho letopočtu byli nejznámějšími matematiky v oblasti geometrie Hérón a Pappos. Hérónova díla obsahují více aplikací než teorií. Jeho „*Stereometrie*“ obsahuje nejen měření objemů geometrických těles, ale také měření objemů staveb, divadel, amfiteátrů, bazénů, studní, lodí apod. Pappova „*Matematická sbírka*“ je jasně a stručně napsanou příručkou geometrie s historickými poznámkami, zlepšeními a obměnami vět a důkazů.

Leonardo da Vinci (1452 – 1519) vyložil geometrickou perspektivu v „*Traktátu o malířství*“. Jeho zápisky obsahují poznámky o rovnoplochých útvarech a tělesech stejného objemu. Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647) vytvořil významnou metodu pro stanovení objemů různých těles – Cavalieriho princip. Výpočet objemů těles a

povrchů ploch na základě limitního pojmu vytvořili Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibnitz – tzv. infinitezimální počet.

Francouzští matematikové Adrien Marie Legendre (1752 – 1833) a Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) úspěšně studovali prostorové vztahy mezi přímkami a mezi přímkami a rovinami. Legendre byl první, kdo se zabýval mimoběžkami.

Deskriptivní geometrie přispěla k rozšíření znalostí prostorových útvarů, jejíž základy položil Gaspard Monge (1746 – 1818).

5.1.1 ZŠ

Se stereometrií se žáci setkávají již na základní škole v 6. třídě. Žáci se seznamují s krychlí a s kvádrem. Učí se vypočítat povrch a objem (seznamují se též s jednotkami), učí se zakreslit síť, dopočítat základní vzdálenosti (hranu, úhlopříčky, ...), seznamují se s pojmem volné rovnoběžné promítání či pravouhlé promítání.

Dále se téma zobecní a žáci se seznamují s kolmými hranoly. Později se seznámí s válcem, s jehlany, kuželem a koulí.

Po dokončení základní školy by žáci měli umět vypočítat povrch a objem výše uvedených těles, znát základní vlastnosti těchto těles, zakreslit jejich síť, ovládat převody jednotek a mít představu o jejich velikosti a umět tělesa zakreslit.

Při své souvislé praxi jsem učil paralelně 8. třídy a probírali jsme kolmé hranoly. Většina žáků obou tříd měla veliké problémy s představou a následným zakreslením kolmých hranolů (tedy kromě krychle a kvádrů – ty si představili, ale také měli problémy s nákresem). Aby si žáci dokázali představit například kolmý hranol s lichoběžníkovou podstavou, přinesl jsem notebook s projektorem a hranol zobrazil na zeď. Avšak někteří žáci měli i po aplikování této pomůcky problémy se zakreslením hranolu (nedokázali zakreslit ani jeho síť). Proto jsem třídě zadal úkol a těm, kteří hranol stále nebyli schopni zakreslit, jsem po jednom půjčil červeno-modré brýle a hranol na monitoru zobrazil pomocí stereoskopické projekce. Žáci hranol viděli prostorově, mohli ho natočit a pozorovat jeho vlastnosti při otáčení. Po tomto „hraní si“ už nikdo neměl problém s představením hranolu a s jeho následným zakreslením.

5.1.2 SŠ

Na střední škole se žáci se stereometrií setkávají ve 2. nebo 3. ročníku. Velmi záleží na typu školy, jak hodně (detailně) se učivo stereometrie probírá, proto zde budu uvádět přibližné učivo gymnázií.

Probírané učivo:

- Volné rovnoběžné promítání
- Polohové vlastnosti
 - Základní vztahy mezi body, přímkami, rovinami
 - Vzájemná poloha dvou přímek
 - Vzájemná poloha přímky a roviny
 - Vzájemná poloha dvou rovin
 - Rovnoběžnost přímek a rovin
 - Polohové konstrukční úlohy (řezy)
- Metrické vlastnosti
 - Odchylka přímek
 - Kolmost přímek a rovin
 - Odchylky přímek a rovin
 - Vzdálenost bodu od přímky a od roviny
 - Vzdálenosti přímek a rovin
- Zobrazení
 - Rovinová souměrnost
 - Středová a osová souměrnost
 - Posunutí a otočení
 - Skládání shodných zobrazení
 - Podobná zobrazení
- Tělesa
 - Mnohostěny
 - Rotační tělesa
 - Objemy a povrchy těles (hranol, válec, koule, jehlan, kužel, komolý jehlan, komolý kužel)

Mnoho pojmů a vlastností by měl žák (student) znát již ze základní školy. Výše uvedený rozpis učiva jsem čerpal z učebnice pro gymnázia paní RNDr. Evy Pomykalové.

U středoškolské stereometrie je prostorová představivost mnohem důležitější než na základní škole. Je třeba u žáků (studentů) prostorovou představivost rozvíjet, protože právě ona je základem stereometrie. A k tomu slouží vhodné pomůcky. Zde se právě nabízí nová technika stereoskopické projekce (anaglyph).

Z dob, kdy jsem byl studentem gymnázia vím, že značné části třídy stereometrie dělala veliké problémy – hlavně řezy (a od nich se dál odvíjí i metrické úlohy). Jelikož se toto učivo probíralo skoro celé první pololetí, byly i případy, kdy studenti dostali v pololetí nedostatečně. Jejich prostorová představivost nebyla rozvinutá a vyučující se zde nezdržel (ani si nepamatuji, že bychom měli nějaké názorné pomůcky). Minulé pololetí jsem doučoval dvě děvčata, která v matematice prospívala chvalitebně, ale s nástupem stereometrie se prospěch hodně zhoršil. Nedokázala si situace představit (teoreticky vše vcelku ovládala). Využil jsem svého programu a s tělesy jsme si „hráli“ a ukazovali si různé situace. Zhruba po měsíci se jejich výkon ve škole zlepšil a děvčata neměla dále se stereometrií (prostorovou představivostí) problémy.

5.2 Příklady

Nejprve zde uvedu výčet možných příkladů, kde užití programu, který zobrazuje tělesa ve stereoskopické projekci, může žákovi (studentovi) pomoci ke správnému vyřešení příkladů.

- určení objemů a obsahů těles
- zakreslení sítě těles
- určení úhlopříček u podstav těles
- určení tělesových úhlopříček
- určení odchylky stěny od podstavy (jehlan)
- určení odchylky hrany stěny od podstavy (jehlan)
- sestrojení řezu těles
- zakreslení nárysu, půdorysu a bokorysu
- určení odchylky roviny od stěny (dvou rovin)
- určení odchylky přímky od roviny
- určení vzdálenosti bodu od roviny (přímky)

Po rozšíření programu též:

- určení průsečíků přímky a tělesa
- určení průsečíku dvou přímek (přímky a roviny)
- určení průsečnice rovin

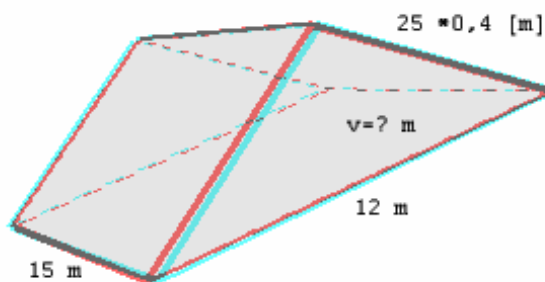
Pomocí toho programu je též možné demonstrovat i základní poznatky z deskriptivní geometrie. Je zde vidět půdorys, nárys těles a jejich řezů, vlastnosti (polohy) roviny a po případném rozšíření i vlastnosti (polohy) přímek.

• pouze pro žáky základních škol
○ rozšíření pro žáky středních škol (studenty VŠ)

Sedlová střecha stodoly je dlouhá 15 metrů. Při pohledu na štít, který je 12 metrů dlouhý, vidíme rovnoramenný trojúhelník. Na jedné straně střechy je 25 řad tašek a každá viděná část tašky je veliká 40 cm. Vypočítejte kolik metrů čtverečních tašek je potřeba pro zakrytí této střechy. Kolik sena by se na půdu stodoly vešlo?

Řešení:

Důležitá je zde představa naší situace, toho jak střecha vypadá a co o ní víme a proto využijeme našeho 3D programu.



$$c = 12 \text{ m}$$

$$d = 15 \text{ m}$$

$$a = b = 25 \cdot 0,4 \text{ [m]}$$

Nyní spočítáme, kolik metrů čtverečních tašek je potřeba pro zakrytí této střechy. Musíme si uvědomit, co zakrýváme. Pak

$$S = 2 \cdot (d \cdot a)$$

$$S = 2 \cdot (15 \cdot 10)$$

$$S = 300 \text{ m}^2$$

Zbývá spočítat kolik sena se na půdu vejde. K tomuto výpočtu potřebujeme znát výšku střechy, kterou dostaneme s využitím Pythagorovy věty:

$$v = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

$$V = \frac{c \cdot v}{2} \cdot d$$

$$V = \frac{c \cdot \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}}{2} \cdot d$$

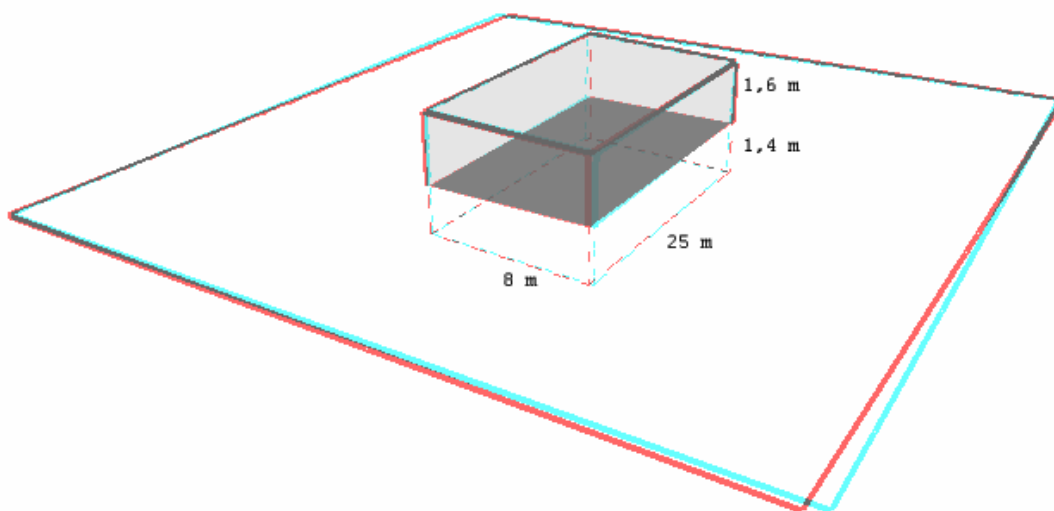
$$V = \frac{12 \cdot 8}{2} \cdot 15 = 720 \text{ m}^3$$

Na půdu stodoly se vejde 720 m³ sena a na její zakrytí je třeba 300 m² tašek.

Venkovní bazén má tvar kolmého pravidelného čtyřbokého hranolu o rozměrech $25 \times 8 \times 1,4$ metru ($d \times \check{s} \times h$). Jak dlouhou tyč musí mít údržbář k čištění bazénu, aby dosáhl po celém dně bazénu? Údržbář se bojí vody, proto žádnou svojí částí těla nikdy nezasahuje nad vodní plochu bazénu. Vzhledem k jeho výšce drží tyč $1,6$ m nad zemí.

Řešení:

Nejprve je nutné si uvědomit, jaký má bazén tvar. Je zřejmé, že se jedná o kvádr. Teď zbývá otázka, co vlastně máme počítat? Je tedy nutná představa bazénu (kvádru).



$$d = 25 \text{ m}$$

$$\check{s} = 8 \text{ m}$$

$$h = 1,4 \text{ m}$$

$$v = 1,6 \text{ m}$$

$$l = ? \text{ m}$$

Aby údržbář dosáhl po celém dně bazénu, musíme spočítat vzdálenost z rohu kvádru do poloviny dna bazénu. K výpočtu této vzdálenosti využijeme Pythagorovy věty:

$$l = \sqrt{(h + v)^2 + \left(\frac{\check{s}}{2}\right)^2}$$

$$l = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

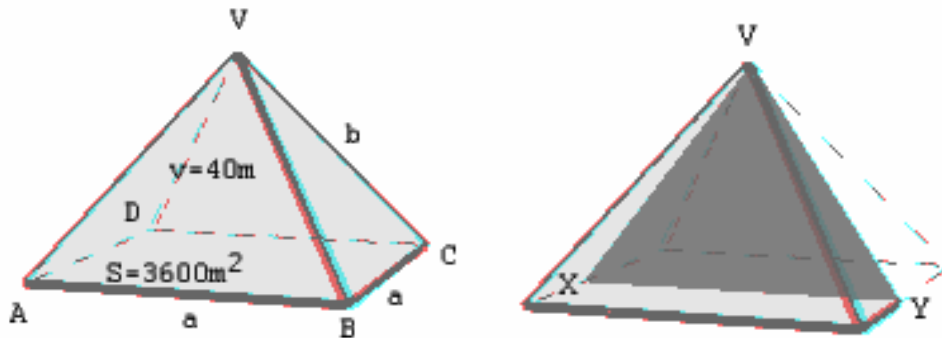
$$l = 5 \text{ m}$$

Údržbář musí mít tyč dlouhou 5 metrů.

Čtvercová pyramida je vysoká 40 metrů. Obsah její podstavy je 3600 m². Vypočítejte odchylku stěny od podstavy. Kolik metrů měří hrany bočních stěn?

Řešení:

Pro správnou představivost využijeme 3D programu a s jeho pomocí zjistíme, jak spočítat odchylku $\alpha = \angle XYV$.



Nejprve spočítáme velikost hrany a.

$$a = \sqrt{S}, a = 60 \text{ m,}$$

Nyní už úhel α dokážeme spočítat pomocí goniometrické funkce.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|VS|}{|SY|}, \text{ kde S je středem } |XY|$$

$$\alpha = 53^{\circ} 7'$$

Zbývá jen vypočítat hranu b. K tomu je zapotřebí znát velikost $|YV|$. Z Pythagorovy věty:

$$|YV| = \sqrt{|SV|^2 + |SY|^2}$$

$$|YV| = 50 \text{ m}$$

Pak:

$$b = \sqrt{|BY|^2 + |YV|^2}$$

$$b = 58,3 \text{ m}$$

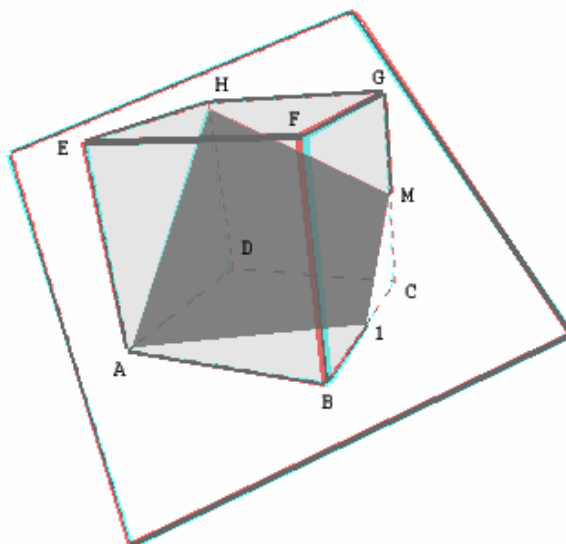
Odchylka stěny od podstavy je $53^{\circ} 7'$, hrana boční stěny pyramidy je 58,3 m.

Načrtněte nárys, půdorys a bokorys řezu krychle ABCDEFGH rovinou AHM, kde

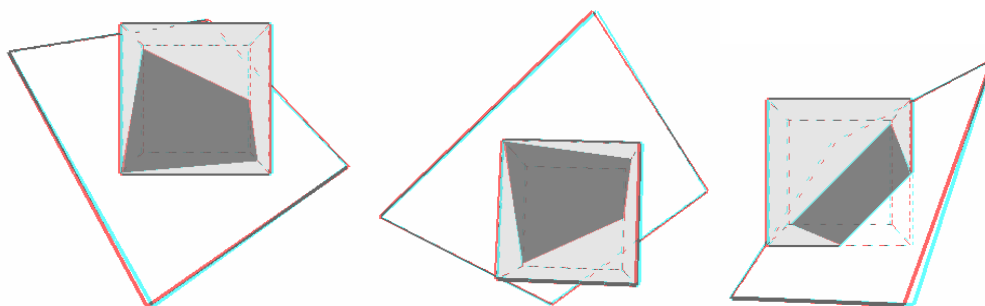
$$|CM| = \frac{1}{2} |CG|$$

Řešení:

Nejprve je dobré sestrojít si daný řez. Pomocí programu to není složité.



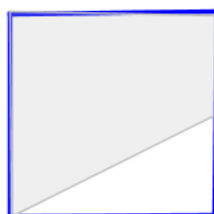
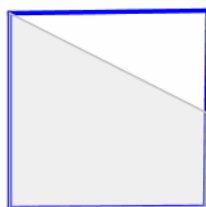
Dále pak stačí krychli pootočit a dostaneme potřebný nárys, půdorys a bokorys.



nárys

půdorys

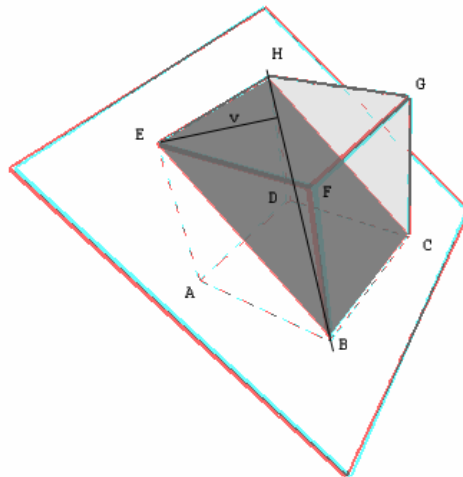
bokorys



Je dána krychle ABCDEFGH, $|AB| = a$. Vypočítejte vzdálenost přímky \overleftrightarrow{BH} od bodu E.

Řešení:

Přímkou \overleftrightarrow{BH} proložíme pomocnou rovinu. Dostaneme $\triangle BEH$ a pomocí goniometrické funkce dopočítáme $\angle BHE$:



$$|BH| = a\sqrt{3}$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Bod P je pata kolmice z bodu E na přímku \overleftrightarrow{BH} (vzdálenosti se měří po kolmici).

Pak z $\triangle EPH$ dostaneme vztah:

$$\sin \varphi = \frac{v}{a} \Rightarrow v = a \cdot \sin \varphi$$

$$v = a \cdot \sqrt{\sin^2 \varphi}$$

$$v = a \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$$

$$v = a \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$v = a \cdot \sqrt{1 - \frac{3}{9}}$$

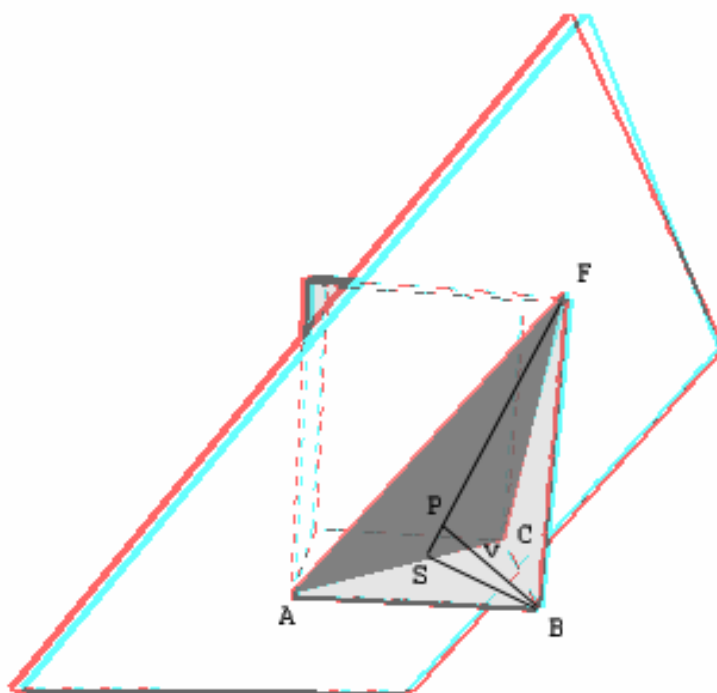
$$v = a \cdot \sqrt{\frac{6}{9}}$$

Vzdálenost přímky \overleftrightarrow{BH} od bodu E je $v = a \cdot \sqrt{\frac{6}{9}}$.

Je dán pravidelný čtyřboký hranol ABCDEFGH, $|AB| = |BC| = a$, $|AE| = c$. Určete vzdálenost bodu B od roviny ACF.

Řešení:

Nejprve je nutné si uvědomit správné vztahy v kvadru. Vzdálenosti se měří po kolmici.



Je zřejmé, že je zde několik pravoúhlých trojúhelníků, k výpočtu vzdálenosti v využijeme Pythagorovy věty. Z $\triangle FSB$ spočítáme $|FS|$:

$$|FS| = \sqrt{|SB|^2 + c^2}$$

$$|FS| = \sqrt{\frac{2a^2}{4} + c^2}$$

$$|FS| = \sqrt{\frac{4c^2 + 2a^2}{4}}$$

Dále využijeme znalosti vzorců pro obsah trojúhelníka:

$$S = \frac{c \cdot |SB|}{2} \text{ a } S = \frac{|FS| \cdot v}{2} \Rightarrow v = \frac{2S}{|FS|}$$

$$v = \frac{\frac{c \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{2}}{\sqrt{\frac{4c^2 + 2a^2}{4}}}$$

$$v = \frac{\frac{c \cdot a\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{4c^2 + 2a^2}}{2}}$$

$$v = \frac{c \cdot a \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2c^2 + a^2}}$$

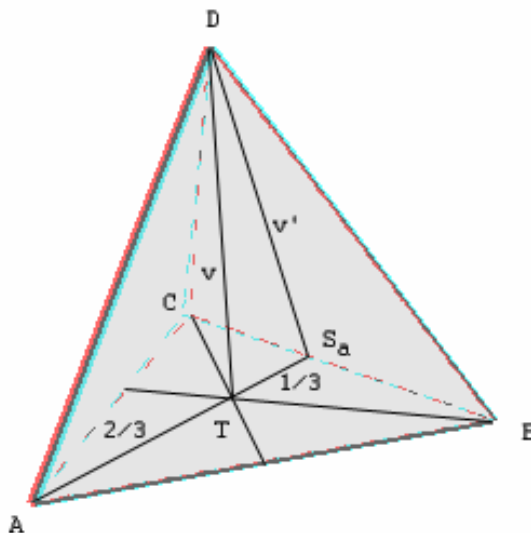
$$v = \frac{a \cdot c}{\sqrt{2c^2 + a^2}}$$

Vzdálenost bodu B od roviny ACF pak dostaneme ze vztahu $v = \frac{a \cdot c}{\sqrt{2c^2 + a^2}}$.

V pravidelném čtyřstěnu ABCD je bod T těžištěm stěny ABC. Určete odchylky přímky \overrightarrow{DT} a rovin stěn čtyřstěnu.

Řešení:

V prvé řadě je důležité si uvědomit všechny vztahy v pravidelném čtyřstěnu.



Naším úkolem je vypočítat $\angle S_aDT$. Nejprve ale potřebujeme těžnici v' , která je též výškou. Teda z Pythagorovy věty:

$$v' = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$v' = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Nyní můžeme vypočítat $\angle S_aDT = \varphi$ pomocí goniometrické funkce, víme-li, že

$$|TS_a| = \frac{1}{3}v' . \text{ Pak}$$

$$\sin \varphi = \frac{\frac{1}{3} \cdot v'}{v'}$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{3}$$

$$\varphi = 19^\circ 28'$$

Odchylky přímky \overrightarrow{DT} a rovin stěn čtyřstěnu jsou $19^\circ 28'$.

Výše uvedené příklady jsou jen malou ukázkou toho, kde je možné využití. V praxi je veliké množství příkladů, kde se nechá program „*Tělesa ve stereoskopické projekci (anaglyph)*“ využít. Myslím si, že tato technologie (stereoskopická projekce) by se měla, jako pomůcka prostorové představivosti, objevit ve školách a to nejen v matematice. Je potřeba cvičit prostorovou představivost a to už od základní školy.

6 Závěr

Prvotním záměrem mé diplomové práce bylo vytvoření a popsání těles v programu (vytvořeném panem Vaněčkem) s názvem „*Tělesa ve stereoskopické projekci (anaglyph)*“. Stěžejním úkolem pro mne bylo dopočítávání souřadnic bodů hranatých těles, k čemuž jsem užil poznatky z analytické geometrie. Výčet těles, která jsou obsažena v programu není kompletní – a proto bych se do budoucna nebránil doplnění o kulatá (kužel, válec, popř. koule) a další hranatá tělesa.

V programu jsou obsažena základní tělesa a rovina, která je řeže. Všechna tělesa jsou zobrazována stereoskopickou projekcí technikou anaglyphu. Program má nejlepší předpoklady stát se vítanou pomůckou pedagogů jak na základních, tak na středních, ale i vysokých školách, neboť lze s jeho pomocí žákům s menší prostorovou představivostí zprostředkovat přímý a jasný vhled nejen do řezání těles.

Dále jsem se ve své práci zaměřil na samotnou stereoskopickou projekci – od její historie přes jednotlivé stereoskopické techniky až po jejich srovnání. Vzhledem k tomu, že se stereoskopické techniky neustále rozvíjí, nepodařilo se mi zachytit veškeré dostupné techniky stereoskopického zobrazování, ale jistě ty nejčastěji užívané.

Za přínos diplomové práce dále považuji možnost využití mnou popisovaného programu v praxi a pro ukázkou zde uvádím několik typových příkladů jak pro základní školy, tak pro střední školy.

Na závěr bych chtěl podotknout, že toto téma je velice obsáhlé a zdaleka není vyčerpané. Využití stereoskopie ve školách by bylo velikým přínosem pro žáky. Bohužel jsem se zde zabýval starou a méně kvalitní technikou, ale za to pro školy dostupnou technikou – technikou anaglyphu. Tato práce mi dala zase trochu jiný pohled na to, jak vyučovat. Je zde stále spousta věcí k vylepšení a bylo by pěkné, abych při své učitelské praxi měl čas se tímto tématem dále zabývat.

Vysvětlivky (použité symboly)

$a:b$	poměr a,b
\neq	nerovnost
$=$	rovnost
$<$	menší
\leq	menší nebo rovno
$>$	větší
\geq	větší nebo rovno
\vee	nebo
\wedge	zároveň
\Rightarrow	implikace
\Leftrightarrow	ekvivalence
\parallel	rovnoběžnost
\nparallel	není rovnoběžné
\perp	kolmost
$ AB $	vzdálenost AB (úsečka)
$\angle ABC$	úhel ABC
\overleftrightarrow{AB}	přímka AB

Literatura

<http://www.gali-3d.com/cz/main/main.php>

<http://www.3djournal.com/002/artic4.php?lgd=0>

http://netra.felk.cvut.cz/Zope/cgg/publications/diplom/LaubrDaniel/download_folder/diplomka_laubr.pdf

<http://www.cut-the-knot.org>

<http://cs.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Matematika>

Pecka, K., Matějček, J. *Využití stereoskopie ve vyučování*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, n.p., 1982.

Hendl, J., *Přehled statistických metod zpracování dat*. Praha: Portál, 2006.

Řezanková, H., *Analýza kategoriálních dat pomocí SPSS*. Praha: VŠE v Praze, 1997.

Pomykalová, E., *Matematika pro gymnázia – Stereometrie*. Praha: Prométheus, 2000.

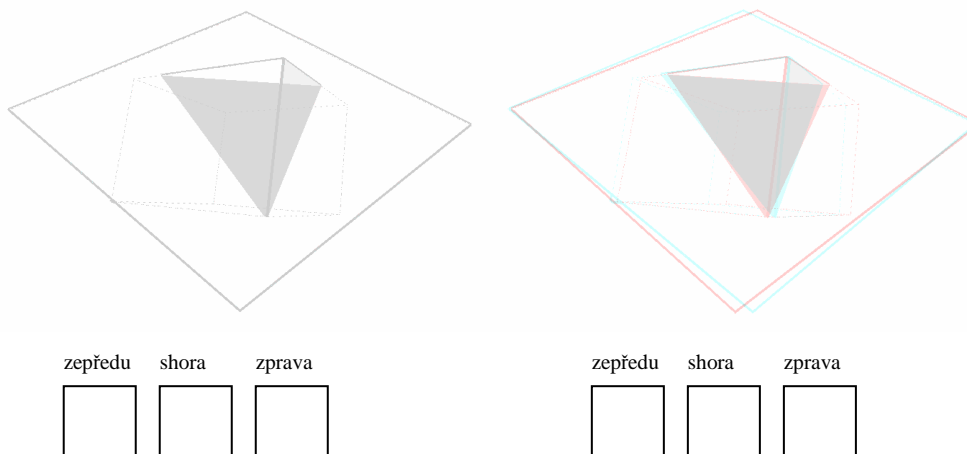
Přílohy

Ukázka testů

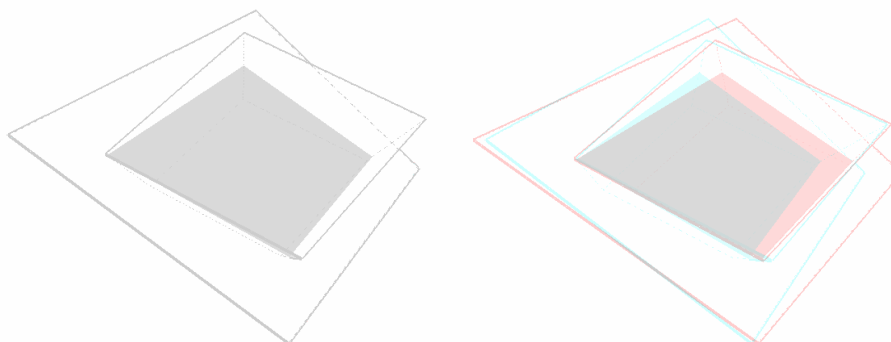
Běžné zobrazení

Stereoskopická projekce - anaglyph

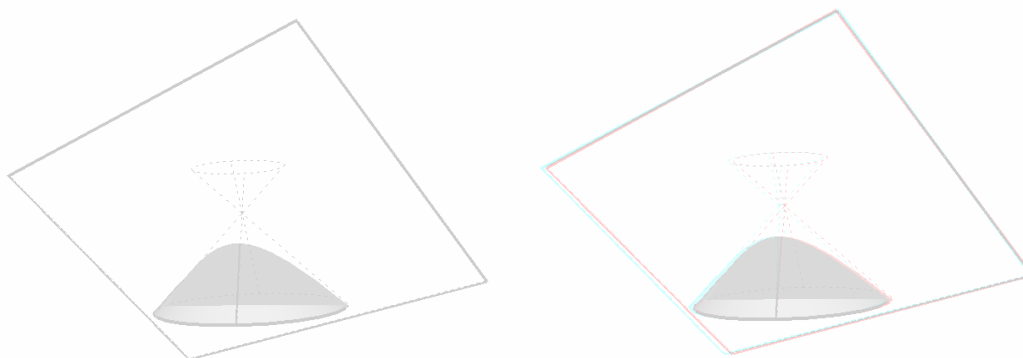
Zakresli pohled zepředu, shora a zprava.



Vyznač, který vrchol krychle je nejbližší k tobě a pokus se vysvětlit proč.



Vyznač, který vrchol roviny je nejdále od tebe a pokus se vysvětlit proč.



Firma zabývající se stereoskopickou projekcí v České republice. Zástupcem této firmy je pan Ing. Hušák, jehož odborné přednášky jsem se zúčastnil v rámci AniFestu 2007.

