Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta
Katedra matematiky

Přibližné metody řešení algebraických rovnic

Diplomová práce

Autor: Bc. Markéta Hojčuková

Studijní program: N 1101Matematika

Studijní obor: Učitelství matematiky pro střední školy
Učitelství pro střední školy – ruský jazyk a literatura

Vedoucí práce: RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D

Hradec Králové 2016

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny prameny, ze kterých jsem vycházela.

V Hradci Králové dne Markéta Hojčuková

Poděkování:

Děkuji RNDr. Jitce Kühnové, Ph.D. za odborné vedení diplomové práce a především za cenné rady a připomínky při jejím zpracování, bez nichž by tato práce nevznikla v daném rozsahu a kvalitě.
Zároveň bych chtěla poděkovat rodině za podporu a pomoc při studiu.

Anotace

HOJČUKOVÁ, M. *Přibližné metody řešení algebraických rovnic.* Hradec Králové, 2016. Diplomová práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí diplomové práce RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D.

Práce se zabývá polynomy a algebraickými rovnicemi. Jsou zde popsány různé přibližné metody řešení algebraických rovnic vyšších stupňů. Každá metoda je následně ilustrována na příkladech, které jsou shrnuty do sbírky řešených úloh.

Klíčová slova:

Polynom, algebraická rovnice, přibližné metody řešení, separace kořenů, Newtonova metoda, metoda tečen, metoda regula falsi, metoda tětiv, řetězové zlomky.

Annotation

HOJČUKOVÁ, M. *Approximate Methods for Solving Algebraic Equations.* Hradec Králové, 2016. Diploma Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Thesis Supervisor RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D.

The work deals with polynomials and algebraic equations. There are described the various approximate methods of solution of algebraic equations of higher degrees. Each method is illustrated in the examples, which are summarized in the collections of solved task.

Keywords:

Polynomial, algebraic equation, approximate methods of solution, roots separation, Newton's method, method of tangents, false position method, method of chords, continued fraction.

Obsah

Úvod

Diplomová práce se zabývá různými metodami přibližného řešení algebraických rovnic. Skládá se z teoretické a praktické části.

Teoretická část je rozdělena do dvou kapitol. V první kapitole jsou zformulovány základní pojmy z teorie polynomických funkcí a algebraických rovnic. Tato kapitola navazuje na mou bakalářskou práci na téma „Soustavy algebraických rovnic na střední škole“. Druhá kapitola je zaměřena na přibližné metody řešení algebraických rovnic. Zabývá se Newtonovou metodou, neboli metodou tečen, dále metodou tětiv – tzv. metodou regula falsi, a následně i metodou hledání kořenů rovnic pomocí řetězových zlomků.

V teoretické části jsem nejvíce čerpala z bakalářské práce a z knih [4], [7], [11]. Teorie je psána formou definic, vět a jejich důsledků a poznámek. U některých vět jsou napsány důkazy a některé jsou uváděny bez důkazu, nebo s odkazem na literaturu, kde je důkaz zpracován. Důkazy jsou v práci uvedeny v případě, že jsou podstatné pro další úvahy.

Praktickou částí je sbírka řešených úloh. Jsou zde zahrnuty příklady ilustrující každou jednotlivou metodu přibližného řešení algebraických rovnic, která je popsána v teoretické části. Většinu příkladů jsem řešila sama, pokud je řešení převzaté, je za příkladem uveden odkaz na odpovídající literaturu.

Seznam použitých zkratek

C	…	množina komplexních čísel
R	…	množina reálných čísel
Z	…	množina celých čísel
N	…	množina přirozených čísel
N_0	…	množina přirozených čísel včetně nuly
$D(a, b)$	…	největší společný dělitel čísel a, b

1. Polynomy a algebraické rovnice

Definice 1.1. **Polynomem jedné proměnné x,** resp. polynomickou funkcí, nad C nazýváme komplexní funkci $f: C \to C$ definovanou předpisem

$(\forall x \in C)\ f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0,$ (1.1)

kde $n \in N_0$, $a_i \in C$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$.

Poznámka:

1. Čísla $a_i \in C$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n))$ se nazývají koeficienty polynomu $f(x)$.
   Výrazy $a_i x^i$ se nazývají členy polynomu $f(x)$.
2. Členy $a_i x^i$ s nulovými koeficienty a_i můžeme v zápise (1.1) vynechávat, resp. přidávat.
3. Stupně členů:
   - $a_n x^n, a_n \neq 0$, se nazývá člen $n-$tého stupně, tedy
   - a_0 je absolutní člen nebo člen nultého stupně,
   - $a_1 x$ je lineární člen nebo člen prvního stupně,
   - $a_2 x^2$ je kvadratický člen nebo člen druhého stupně,
   - $a_3 x^3$ se nazývá kubický člen nebo člen třetího stupně
   - pro členy s nulovým koeficientem není stupeň definován.
4. Polynom, jehož všechny koeficienty jsou nulové (tj. nulová funkce $\left(\forall x \in C\right) f(x) = 0$) se nazývá nulový polynom.
5. Číslo $k \in N_0$ se nazývá stupeň polynomu $f(x)$, značíme $k = stf(x)$, právě tehdy, když $a_k \neq 0 \wedge a_{k+1}, \dots, a_n = 0$.
   Říkáme, že nulový polynom je stupně $-\infty$, nebo říkáme, že jeho stupeň není definován.
6. Říkáme, že polynom $f(x)$ je zapsán v normálním tvaru, jestliže pro libovolnou mocninu $x^i, i = 0, 1, \dots, n$, obsahuje polynom $f(x)$ nejvýš jeden člen $a_i x^i$.
   Dohoda: V dalším předpokládejme, že polynomy jsou vždy zapsány v normálním tvaru.
7. Je-li $a_n = 1$ a zároveň $stf(x) = n$, pak říkáme, že $f(x)$ je normovaný polynom.
8. Polynomy lze také chápat jako výrazy
   $$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad a_i \in C, a_i = 0, 1, \dots, n.$$
   Polynom $f(x)$ je jednoznačně určen svými koeficienty, ačkoli ho jako výraz můžeme zapsat různými způsoby.
9. Polynomy můžeme také někdy nazývat mnohočleny.
10. Je-li $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ polynom a α komplexní číslo, nazývá se číslo $f(\alpha) = a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \alpha + a_n$ hodnotou polynomu $f(\alpha)$ v čísle α.

Definice 1.2. Nechť $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ je polynom alespoň 1. stupně. Komplexní číslo α se nazývá kořenem, resp. nulovým bodem, polynomu $f(x)$, právě když $f(\alpha) = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$.

Věta 1.1 (O dělení polynomů se zbytkem) Nechť $f(x), g(x)$, jsou libovolné polynomy, přičemž $g(x)$ je nenulový. Pak existuje právě jedna dvojice polynomů $q(x)$ a $r(x)$ tak, že $f(x) = q(x).\, g(x) + r(x)$ a přitom $r(x) = 0$, nebo
$str(x) < stg(x)$.

Poznámka:

1. Polynom $q(x)$ se potom nazývá částečný (neúplný) podíl a polynom $r(x)$ se nazývá zbytek po dělení polynomu $f(x)$ polynomem $g(x)$.
2. Pokud $r(x) = 0$, říkáme, že $g(x)$ dělí polynom $f(x)$ beze zbytku, nebo že $f(x)$ je dělitelný polynomem $g(x)$, píšeme $g(x)/f(x)$.

Věta 1.2 Nechť $f(x)$ je polynom alespoň 1. stupně, nechť $c \in C$. Pak
$f(x) = (x - c).\, g(x) + f(c)$.

Věta 1.3 Nechť $f(x)$ je polynom alespoň 1. stupně. Komplexní číslo α je kořen polynomu $f(x)$, právě když $(x - \alpha)/f(x)$.

Poznámka: Polynom $x - \alpha$ se pak nazývá kořenový činitel polynomu $f(x)$.

Věta 1.4 Nechť $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ je polynom alespoň 1. stupně a nechť $c \in C$ je libovolný prvek. Pak platí
$f(x) = (x - c).\, q(x) + f(c), stq(x) = n - 1$ a platí:

$$q(x) = b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}x + b_n$$

kde $b_1 = a_0$
$b_2 = c.\, b_1 + a_1$
…
$b_n = c.\, b_{n-1} + a_{n-1}$
$f(\alpha) = c.\, b_n + a_n$.

Poznámka: Koeficienty podílu $q(x)$ i zbytek $f(c)$ lze jednoduše vypočítat za použití přehledné tabulky (**Hornerova schématu**) tvaru:

c	a_0	a_1	…	a_n
	a_0	$c.\, b_1 + a_1$	…	$c.\, b_n + a_n$
	$= b_1$	$= b_2$		$f(c)$

kde v horním řádku jsou napsány všechny koeficienty polynomu $f(x)$ (včetně případných nul) a ve spodním řádku postupně vypočítáváme koeficienty podílu $q(x)$ a zbytek $f(c)$.

Příklad 1: Dokažte, že $(x-2)/f(x)$, jestliže
$$f(x) = x^5 - x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 36x - 36.$$

Řešení: Podle Věty 1.3 je $\alpha = 2$. Využijeme Hornerovo schéma pro $\alpha = 2$ a dostáváme:

2	1	-1	-13	13	36	-36
	1	$2-1$	$2-13$	$-22+13$	$-18+36$	$36-36$
	1	1	-11	-9	18	0

Z posledního řádku tedy získáváme koeficienty podílu:
$$q(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18,$$
a hodnotu zbytku $r = f(a)$ (viz Věta 1.2).
Protože $f(\alpha) = 0$, tedy $f(2) = 0$, pak $(x-2)/f(x)$ beze zbytku a můžeme psát
$$f(x) = (x-2).(x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18).$$

Definice 1.3. Polynomy $f(x), g(x)$ se nazývají asociované, právě když
$$f(x)/g(x) \text{ a } g(x)/f(x).$$
Píšeme: $f(x) \sim g(x)$.

Poznámka: Pro libovolné polynomy $f(x), g(x), h(x)$ platí:

1. Jestliže $f(x)/g(x)$ a $g(x) \neq 0$, pak $stf(x) \leq stg(x)$.
2. $f(x) \sim 1$, právě když $stf(x) = 0$.
3. $f(x) \sim g(x)$ právě tehdy, když existuje číslo $c \neq 0$ tak, že $f(x) = c.g(x)$.
4. $f(x)/g(x) \ \wedge g(x)/h(x) \Rightarrow f(x)/h(x)$.

Definice 1.4. Nechť $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ jsou libovolné polynomy. Polynom $d(x)$ se nazývá největším společným dělitelem polynomů $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$, právě když platí současně:

- $d(x)/f_1(x), d(x)/f_2(x), \dots, d(x)/f_k(x)$
- $\forall d_1(x)$: $(d_1(x)/f_1(x) \wedge d_1(x)/f_2(x) \wedge \dots \wedge d_1(x)/f_k(x)) \Rightarrow d_1(x)/d(x)$.

Píšeme: $d(x) = D\big(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\big)$.

Věta 1.5 Nechť $f(x), g(x), q(x), r(x)$ jsou takové polynomy, že platí
$$f(x) = g(x).q(x) + r(x).$$
Potom $D(f(x), g(x))$ existuje právě tehdy, když existuje i $D(g(x), r(x))$ a v případě existence zároveň platí, že $D\big(f(x), g(x)\big) = D\big(g(x), r(x)\big)$.

Věta 1.6 V množině komplexních polynomů mají každé dva polynomy největšího společného dělitele.

Důkaz:

Nechť $f(x), g(x)$ jsou libovolné polynomy.

- Nejprve uvážíme triviální případy:
  - jestliže $f(x)/g(x)$, pak $D(f(x), g(x)) = f(x)$
  - jestliže $g(x)/f(x)$, pak $D(f(x), g(x)) = g(x)$,
  - pod oba tyto případy spadá i případ, kdy $f(x) = 0, g(x) = 0$.
- Předpokládejme, že $f(x) \nmid g(x)$ ani $g(x) \nmid f(x), g(x) \neq 0$.
  Podle Věty 1.1 existují polynomy $q_1(x), r_1(x)$ tak, že platí
  $$f(x) = g(x).\, q_1(x) + r_1(x), \qquad str_1(x) < stg(x).$$
  Protože $g(x) \nmid f(x)$, je $r_1(x) \neq 0$. Použitím Věty 1.1 dostaneme
  $$g(x) = r_1(x).\, q_2(x) + r_2(x), \qquad str_2(x) < str_1(x).$$
  - Je-li $r_2(x) = 0$, tak $D(g(x), r_1(x)) = r_1(x)$.
    Potom $r_1(x) = D(f(x), g(x))$ (podle Věty 1.5)
  - Zůstává případ $r_2(x) \neq 0$. Pak polynom $r_1(x)$ dělíme podle Věty 1.1 polynomem $r_2(x)$ a zopakujeme předchozí úvahy. Takto dostáváme posloupnost vztahů:
  $$\begin{aligned} f(x) &= g(x).\, q_1(x) + r_1(x) \\ g(x) &= r_1(x).\, q_2(x) + r_2(x) \\ r_1(x) &= r_2(x).\, q_3(x) + r_3(x) \\ &\dots \\ r_{n-2}(x) &= r_{n-1}(x).\, q_n(x) + r_n(x) \\ r_{n-1}(x) &= r_n(x).\, q_{n+1}(x). \end{aligned} \tag{1.2}$$

  Současně platí $stg(x) > str_1(x) > str_2(x) > \cdots > str_n(x) \geq 0$.
  Protože $stg(x)$ je přirozené číslo, existuje přirozené číslo n tak, že polynom $r_n(x)$ je v předchozí posloupnosti (1.2) poslední nenulový zbytek. Tedy po konečném počtu kroků musíme dospět k situaci, že $r_{n+1}(x) = 0$.
  Pak podle Věty 1.5
  $$r_n(x) = D(r_{n-1}(x), r_n(x)) = D(r_{n-1}(x), r_{n-2}(x)) = \cdots = D\big(f(x), g(x)\big).$$

$\square$

Poznámka: Postupu hledání největšího společného dělitele, uvedenému v důkazu, se říká Euklidův algoritmus.

Věta 1.7 Nechť $f(x)$ je polynom alespoň prvního stupně s celočíselnými koeficienty, tedy $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, $a_n \neq 0$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in Z$.
Je-li $\alpha = \frac{r}{s}, r \in Z, s \in Z^+, D(r, s) = 1$, kořenem polynomu $f(x)$, potom platí:

a) $r/a_n \wedge s/a_0$,

b) $(r - s)/f(1) \wedge (r + s)/f(-1)$.

Důkaz:

a)

Je-li racionální číslo $\alpha = \frac{r}{s}$ kořenem polynomu $f(x)$, platí $f(\alpha) = 0$, tj.

$$f\left(\frac{r}{s}\right) = a_0\left(\frac{r}{s}\right)^n + a_1\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{r}{s}\right) + a_n = 0.$$

Odtud vynásobením s^n vychází

$$a_0r^n + a_1r^{n-1}s + \cdots + a_{n-1}rs^{n-1} + a_ns^n = 0.$$

Protože celé číslo r dělí prvních n sčítanců na levé straně poslední rovnosti, dělí i poslední sčítanec a_ns^n, odkud plyne, že r/a_n, neboť r a s jsou podle předpokladu nesoudělná.

Zcela analogicky odvodíme, že s/a_0.

b)

Nechť je číslo $\frac{r}{s}$ kořenem polynomu $f(x)$. Pak podle Věty 1.3 musí platit:

$$f(x) = \left(x - \frac{r}{s}\right).g(x).$$

Po dosazení čísel 1 a -1 za proměnnou x dostáváme

$$f(1) = \left(1 - \frac{r}{s}\right).g(1), \qquad f(-1) = \left(-1 - \frac{r}{s}\right).g(-1).$$

Vynásobíme-li obě rovnice číslem $-s$, máme

$$(-s).f(1) = (r-s).g(1), \qquad (-s).f(-1) = (r+s).g(-1).$$

Uvažujeme podle předpokladu, že čísla r, s jsou nesoudělná, a tedy
$(r-s)/(-s).f(1)$, tj. $(r-s)/f(1)$ a $(r+s)/(-s).f(-1)$, tj. $(r+s)/f(-1)$. □

Poznámka:

1. Protože a_0 i a_n mají jen konečně mnoho dělitelů, může racionální kořen α, pokud existuje, nabývat jen konečně mnoha hodnot.
2. Tvrzení b) z předchozí Věty se dá zobecnit takto:
   Nechť $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ je polynom s celočíselnými koeficienty a $\alpha = \frac{r}{s}$, $r \in Z, s \in Z^+$ je kořen tohoto polynomu, $D(r,s) = 1$. Potom pro každé $k \in Z$ platí
   $$(r - k.s)/f(k).$$

Definice 1.5. Kořen α polynomu $f(x)$ nazýváme k –násobným kořenem polynomu právě tehdy, když platí $(x-\alpha)^k/f(x)$ a zároveň $(x-\alpha)^{k+1} \nmid f(x)$.

Poznámka: Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby kořen α polynomu $f(x)$ byl k-násobným kořenem tohoto polynomu tedy je:

$$f(x) = (x-\alpha)^k.g(x) \text{ a zároveň } (x-\alpha) \nmid g(x), \text{ tj. } g(x) \neq 0.$$

Věta 1.8 (Základní věta algebry) Každý polynom alespoň 1. stupně s komplexními koeficienty má v množině komplexních čísel alespoň jeden kořen.

Důkaz: (viz [6], str. 355-361)

Věta 1.9 Každý polynom $f(x)$ stupně $n,\ n \geq 1$, má právě n komplexních kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, jaká je jeho násobnost.

Důkaz:

Tvrzení můžeme přeformulovat také tak, že stupeň polynomu je roven součtu násobností všech jeho kořenů.

Polynom $f(x)$ má podle Věty 1.8 alespoň 1 kořen α_1, jeho násobnost označme k_1. Pak musí existovat polynom $g_1(x)$ takový, že

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} g_1(x), \ \ g_1(\alpha_1) \neq 0.$$

Označme n_1 stupeň polynomu $g_1(x)$. Zřejmě je $n_1 = n - k_1$.

a) Pokud $n_1 = 0$, je $n = k_1$ a polynom $f(x)$ má jeden n −násobný kořen. Tedy tvrzení platí.

b) Pokud $n_1 \geq 1$, má polynom $g_1(x)$ alespoň jeden kořen α_2 násobnosti k_2. Existuje tedy polynom $g_2(x)$ takový, že

$$g_1(x) = (x - \alpha_2)^{k_1} g_2(x), \qquad g_2(\alpha_2) \neq 0.$$

To znamená, že

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} g_1(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_1} g_2(x).$$

Označme n_2 stupeň polynomu $g_2(x)$. Zřejmě $n_2 = n_1 - k_2 = n - (k_1 + k_2)$.

Pokračujeme stejným způsobem dále. Po konečně mnoha krocích (tento počet označíme r) dojde k tomu, že $n_r = 0$, tedy $0 = n - (k_1 + k_2 + \cdots + k_r)$. To znamená, že stupeň polynomu $f(x)$, tedy n, je roven součtu násobností jednotlivých kořenů $k_1 + k_2 + \cdots + k_r$.

Tím je toto tvrzení dokázáno. □

Důsledek: Každý polynom $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ s komplexními koeficienty alespoň 1. stupně lze rozložit v součin lineárních faktorů

$$f(x) = a_0 (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_r)^{k_r}, \tag{1.3}$$

přičemž $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu $f(x)$, α_i je k_i −násobný kořen, $i = 1, 2, \dots, r$, a platí že $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$.

Vztahu (1.3) říkáme rozklad polynomu $f(x)$ na kořenové činitele, resp. **kanonický** rozklad.

Věta 1.10 Má-li polynom $f(x)$ s reálnými koeficienty komplexní imaginární k −násobný kořen $\alpha = a + bi$, pak také $\bar{\alpha} = a - bi$ je k −násobným kořenem polynomu $f(x)$.

Důkaz: $b \neq 0$, protože α je imaginární kořen.

a) Nechť $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n, a_i \in R, f(\alpha) = 0$.

Pak $f(\bar{\alpha}) = a_0 (\bar{\alpha})^n + a_1 (\bar{\alpha})^{n-1} + \cdots + a_n$, a tedy podle pravidel pro počítání s komplexními čísly je

$$f(\bar{\alpha}) = \overline{a_0} \overline{(\alpha^n)} + \overline{a_1} \overline{(\alpha^{n-1})} + \cdots + \overline{a_n} =$$
$$= \overline{(a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \cdots + a_n)} = \overline{f(\alpha)} = \bar{0} = 0,$$

tedy $\bar{\alpha}$ je kořen $f(x)$.

b) Z bodu a) vyplývá, že polynom $f(x)$ je dělitelný polynomem
$$g(x) = [x - (a + bi)][x - (a - bi)] = x^2 - 2ax + a^2 + b^2,$$
který má reálné koeficienty. Můžeme proto psát $f(x) = g(x). f_1(x)$. Tedy i polynom $f_1(x)$ má reálné koeficienty.
Je-li $k > 1$, pak i polynom $f_1(x)$ musí mít kořen $a + bi$. Proto má reálný polynom $f_1(x)$ i kořen $a - bi$. Tedy lze polynom $f_1(x)$ psát ve tvaru $f_1(x) = [g(x)]^2. f_2(x)$, kde $f_2(x)$ má opět reálné koeficienty.
Opakováním tohoto postupu k −krát zjistíme, že polynom $f(x)$ se dá zapsat ve tvaru $f(x) = [g(x)]^k. f_k(x)$, kde $f_k(x)$ má reálné koeficienty. Z toho vyplývá, že $a - bi$ je alespoň k −násobný kořen polynomu $f(x)$.

c) Musíme ještě dokázat, že $a - bi$ je právě k −násobný kořen polynomu $f(x)$. Kdyby to tak nebylo, měl by polynom $f_k(x)$ kořen $a - bi$. Potom by však (podle bodu a)) měl polynom $f_k(x)$ i kořen $a + bi$, tj. $a + bi$ by byl alespoň $(k + 1)$ −násobným kořenem polynomu $f(x)$, což je v rozporu s předpokladem. □

Definice 1.6. Nechť $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n$ je polynom. Pak první derivací polynomu $f(x)$ rozumíme polynom:
$$f'(x) = n. a_0 x^{n-1} + (n - 1). a_1 x^{n-2} + \cdots + 2. a_{n-2} x + a_{n-1}.$$

Poznámka:

1. Je-li $f(x)$ polynom stupně $n \geq 1$, pak jeho derivace $f'(x)$ je polynom stupně $n - 1$, neboť $a_0 \neq 0$, a tedy $n. a_0 \neq 0$.
2. Je-li $st f(x) = 0$, nebo $f(x) = 0$, pak $f'(x) = 0$.

Věta 1.11 Nechť $f(x)$ je polynom n-tého stupně a nechť c je libovolné dané komplexní číslo. Potom platí:
$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n.$$
Toto vyjádření polynomu $f(x)$ se nazývá *Taylorovým rozvojem polynomu $f(x)$ podle mocnin $x - c$, resp. se středem v c.*

Poznámka: Numerický výpočet koeficientů Taylorova rozvoje polynomu $f(x)$ v mocninách $(x - c)$ se dá velice výhodně provést několikanásobným opakováním Hornerova schématu:
$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n =$$
$$= f(c) + (x - c)\left[\frac{f'(c)}{1!} + \frac{f''(c)}{2!}(x - c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^{n-1}\right] =$$
$$= f(c) + (x - c). g_1(x)$$

$$g_1(x) = \frac{f'(c)}{1!} + (x-c)\left[\frac{f''(c)}{2!} + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^{n-2}\right] =$$
$$= \frac{f'(c)}{1!} + (x-c).\, g_2(x)$$
$$g_2(x) = \frac{f''(c)}{2!} + (x-c)\left[\frac{f'''(c)}{3!} + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^{n-3}\right] =$$
$$= \frac{f''(c)}{2!} + (x-c).\, g_3(x)$$
$$\vdots$$
$$g_{n-1}(x) = \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!} + (x-c).\, g_n(x), \qquad g_n(x) = \frac{f^n(c)}{n!}.$$

Příklad 2: Určete Taylorův rozvoj polynomu
$$f(x) = 2x^5 - 3x^3 + 2x^2 + x - 2$$
v mocninách $x - 2$.
Řešení:
Pomocí Hornerova schématu

-2	2	0	-3	2	1	-2
		-4	8	-10	16	-34
-2	2	-4	5	-8	17	-36
		-4	16	-42	100	
-2	2	-8	21	-50	117	
		-4	24	-90		
-2	2	-12	45	-140		
		-4	32			
-2	2	-16	77			
		-4				
	2	-20				

máme
$$f(x) = -36 + 117(x+2) - 140(x+2)^2 + 77(x+2)^3 - 20(x+2)^4 + 2(x+2)^5.$$

Věta 1.12 Nechť $f(x)$ je polynom alespoň 1. stupně a nechť α je k-násobný kořen polynomu $f(x)$.
Je-li $k = 1$, pak α není kořenem $f'(x)$.
Je-li $k > 1$, pak α je $(k-1)$-násobným kořenem $f'(x)$.
Důkaz:
α je k-násobný kořen polynomu $f(x)$, tzn. existuje polynom $g(x)$ tak, že
$$f(x) = (x-\alpha)^k.\, g(x) \ \wedge g(x) \neq 0,$$
odkud dostáváme
$$f'(x) = k.\,(x-\alpha)^{k-1}.\, g(x) + (x-\alpha)^k.\, g'(x)$$
$$= (x-\alpha)^{k-1}.\,[k.\, g(x) + (x-\alpha).\, g'(x)].$$

Nyní:

- je-li $k = 1$, pak $f'(\alpha) = g(\alpha) \neq 0$, tzn. α není kořenem $f'(x)$;
- je-li $k > 1$, pak označme $h(x) = [k.g(x) + (x-\alpha).g'(x)]$. Po tomto označení je $f'(x) = (x-\alpha)^{k-1}.h(x)$, kde $h(\alpha) = k.g(\alpha) \neq 0$, tzn., dostáváme, že α je $(k-1)$-násobným kořenem polynomu $f'(x)$. $\square$

Poznámka: Z Věty 1.12 ihned plyne:
Nechť $\alpha \in C$ je k −násobným kořenem $(k > 1)$ polynomu $f(x)$, $stf(x) = n \geq 1$. Pak α je $(k-1)$ −násobným kořenem polynomu $\big(f(x), f'(x)\big)$.

Věta 1.13 Nechť $f(x)$ je polynom alespoň prvního stupně. Pak $f(x)$ má alespoň jeden vícenásobný kořen, právě když $stD(f(x), f'(x)) \geq 1$.

Věta 1.14 Nechť $f(x)$ je polynom alespoň 1. stupně. Pak existuje polynom $g(x)$ tak, že
1) $f(x) = g(x).D(f(x), f'(x))$
2) $g(x)$ má tytéž kořeny jako $f(x)$, ale jednoduché.

Definice 1.7. Řekneme, že polynom $f(x)$ s reálnými koeficienty alespoň 1. stupně je ireducibilní, právě když ho nelze zapsat jako součin dvou reálných polynomů alespoň prvního stupně.

Věta 1.15 Nechť $f(x)$ je polynom s reálnými koeficienty alespoň 1. stupně. Pak $f(x)$ je ireducibilní, právě když $stf(x) = 1$ nebo $stf(x) = 2$ a $f(x)$ nemá reálné kořeny, tj. má dvojici imaginárních komplexně sdružených kořenů.

Poznámka: Ireducibilními komplexními polynomy jsou právě polynomy 1. stupně.

Definice 1.8. Polynomem n proměnných nazýváme takovou komplexní funkci $f: C^n \to C$, která každé uspořádané n −tici komplexních čísel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ přiřadí komplexní číslo $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, které se určí jako součet konečného počtu výrazů tvaru $ax_1^{r_1}x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$, tj.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{(r_1, \dots, r_n)} \mathrm{a} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}.$$

Přitom a je komplexní číslo, $r_1, r_2, \dots, r_n$ jsou celá nezáporná čísla a $x_i^0 = 1$.

Definice 1.9. Nechť f je nějaká komplexní funkce. Ptáme se, zda existuje takové komplexní číslo α, pro které je $f(\alpha) = 0$, tj. pro které funkce f nabývá hodnotu nula.
Postup hledání takovýchto čísel a zkoumání, zda takové číslo vůbec existuje, nazýváme krátce *řešením rovnic*.
Číslo α nazýváme kořenem neboli také nulovým bodem rovnice $f(x) = 0$.

Definice 1.10. Nechť $f(x)$ je polynom n −tého stupně, $n \geq 1$, tj. rovnice $f(x) = 0$ má tvar

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,\ a_0 \neq 0. \tag{1.4}$$

Pak mluvíme o **algebraické rovnici n −tého stupně o jedné neznámé**.

Poznámka:

1. Zápis rovnice ve tvaru $f(x) = 0$ neznamená rovnost dvou polynomů (totiž polynomu f a nulového polynomu), ale úlohu, zjistit, zda existuje takové komplexní číslo α, že $f(\alpha) = 0$.
2. Řešením neboli kořenem rovnice (1.4) je tedy každé číslo α, po jehož dosazení do rovnice (1.4) platí rovnost:
   $a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$.
3. Ze základní věty algebry vyplývá, že každá algebraická rovnice má alespoň jeden kořen. Z Věty 1.9 vyplývá, že každá algebraická rovnice stupně $n, n \geq 1$, má právě n kořenů.
4. Jakmile nalezneme jeden kořen α rovnice (1.4), můžeme také někdy výhodně určit další kořeny, a to tak, že určíme jeho násobnost a vydělíme polynom $f(x)$ kořenovým činitelem $(x - \alpha)^k$.

Definice 1.11. Nechť $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je polynom n proměnných stupně $k \geq 1$. Pak rovnici $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ nazýváme **algebraickou rovnicí k −tého stupně o n neznámých**.

2. Přibližné řešení algebraických rovnic

Poznámka: Při řešení algebraických rovnic se často můžeme dostat do situace, kdy rovnici neumíme vyřešit algebraickými metodami. V takovém případě postupujeme tak, že hledáme přibližné hodnoty kořenů dané rovnice, pro které máme předem zadanou přesnost.
V této kapitole se zaměříme na některé metody řešení algebraických rovnic, které umožňují nalézt hodnoty kořenů s libovolnou předem danou přesností.

Dohoda: V dalším se budeme zabývat pouze algebraickými rovnicemi s reálnými koeficienty.

2.1 Separace reálných kořenů

Poznámka: Separací kořenů rozumíme hledání takových intervalů na číselné ose, ve kterých leží právě jeden reálný kořen dané rovnice.

Věta 2.1 Nechť je dána rovnice

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{2.1}$$

kde $a_0 \neq 0$, $i = 0, 1, \dots, n$, s reálnými koeficienty.
Položme $A = max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\}$. Potom všechny reálné kořeny této rovnice leží v intervalu $\left\langle -1 - \frac{A}{|a_0|}; -1 + \frac{A}{|a_0|} \right\rangle$.
Důkaz: Je-li $\frac{A}{|a_0|} = 0$, pak je rovnice (2.1) tvaru $x^n = 0$ a věta zřejmě platí.
Nechť je tedy $\frac{A}{|a_0|} > 0$ a nechť α je reálný kořen rovnice (2.1).
Sporem přepokládejme, že $|\alpha| > \frac{A}{|a_0|} + 1$.
Ale protože α je kořen rovnice (2.1), je

$$\alpha^n = -\left(\frac{a_1}{a_0}.\alpha^{n-1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_0}.\alpha + \frac{a_n}{a_0}\right).$$

Odtud plyne, že:

$$|\alpha|^n = \left|\frac{a_1}{a_0}.\alpha^{n-1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_0}.\alpha + \frac{a_n}{a_0}\right| \leq \left|\frac{a_1}{a_0}\right|.|\alpha|^{n-1} + \dots + \left|\frac{a_{n-1}}{a_0}\right|.|\alpha| + \left|\frac{a_n}{a_0}\right| \leq$$
$$\leq \frac{A}{|a_0|}(|\alpha|^{n-1} + \dots + |\alpha| + 1) = \frac{A}{|a_0|}.\frac{|\alpha|^n - 1}{|\alpha| - 1} < \frac{A}{|a_0|}.\frac{|\alpha|^n - 1}{\frac{A}{|a_0|}} =$$
$$= |\alpha|^n - 1.$$

Tedy $|\alpha|^n < |\alpha|^n - 1$, což je spor.
Musí tedy být $|\alpha| \leq \frac{A}{|a_0|} + 1$, neboli $\alpha \in \left\langle -1 - \frac{A}{|a_0|}; -1 + \frac{A}{|a_0|} \right\rangle$. Tím jsme dokázali tvrzení Věty. □

Poznámka: Věta 2.1 vede k ne příliš přesnému a úzkému ohraničení kořenů dané rovnice. Proto se často za výhodnější považuje věta následující:

Věta 2.2 Nechť prvních k koeficientů rovnice (2.1) je nezáporných a nechť $1 \leq k < n + 1$. Nechť dále B označuje nejvyšší z absolutních hodnot záporných koeficientů rovnice (2.1). Potom každý reálný kořen této rovnice je menší než číslo $1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$.

Důkaz: Tvrzení budeme dokazovat pro rovnici

$$f(x) = x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n = 0, \tag{2.2}$$

kde $b_i = \frac{a_i}{a_0}$, pro $i = 1, 2, \dots, n$, která má stejné kořeny jako rovnice (2.1). Nechť B' označuje maximum z absolutních hodnot záporných koeficientů této normované rovnice. Pak $B' = \frac{B}{a_0}$.

Nechť d je libovolné reálné číslo takové, že $d \geq 1 + \sqrt[k]{B'}$ (tj. $d > 1$ a $(d-1)^k \geq B'$). Pak dokážeme, že $f(d) > 0$, což znamená, že d nemůže být kořenem rovnice (2.2), a tedy Věta platí.

Užitím předpokladů Věty a vztahu $d \geq 1 + \sqrt[k]{B'}$ dostáváme:

$$f(d) = d^n + b_1d^{n-1} + \cdots + b_{n-1}d + b_n \geq d^n - B'\left(d^{n-k} + \cdots + d + 1\right)$$

$$= d^n - B'.\frac{d^{n-k+1} - 1}{d - 1} == \frac{1}{d-1}\left\{d^{n-k+1}\left[d^{k-1}(d-1) - B'\right] + B'\right\}.$$

Pro $d > 1$ je $d^{k-1} \geq (d-1)^{k-1}$, proto:

$$f(d) \geq \frac{1}{d-1}\{d^{n-k+1}[(d-1)^k - B'] + B'\} > \frac{1}{d-1}\{d^{n-k+1}[(d-1)^k - B']\}.$$

Je-li $d \geq 1 + \sqrt[k]{B'}$, je $(d-1)^k - B' \geq \left(1 + \sqrt[k]{B'} - 1\right)^k - B' = 0$. Tedy $f(d) > 0$. □

Věta 2.3 Nechť a je takové kladné reálné číslo, že

$$f(a) > 0, f'(a) \geq 0, f''(a) \geq 0, \dots, f^{(n)}(a) \geq 0.$$

Potom každý kladný reálný kořen rovnice (2.1) je menší než číslo a. (viz Věta 1.11)

Důkaz: Rovnice $f(x) = 0$ se dá psát i v tomto tvaru:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f'(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n = 0$$

Jestliže jsou všechny koeficienty kladné, je pro $\alpha \geq a$ levá strana jistě kladná. Proto neexistuje žádný reálný kořen $\alpha \geq a$. □

Poznámka:

1. Dolní ohraničení kořenů rovnice (2.1) získáme stejným postupem, který aplikujeme na rovnici $g(x) = 0$, vzniklou úpravou rovnice (2.1) tak, že
$$g(x) = (-1)^n f(-x).$$
2. Zřejmě je α kořenem rovnice (2.1), právě když je $-\alpha$ kořenem rovnice $g(x) = 0$.

3. Jestliže je číslo D horním ohraničením kořenů rovnice $g(x) = 0$, pak číslo $-D$ je dolním ohraničením kořenů rovnice (2.1).

Poznámka:
Uvedené věty nám umožnily najít intervaly, ve kterých leží všechny reálné kořeny dané rovnice (2.1).

Příklad 3: Nalezněte ohraničení reálných kořenů rovnice $x^3 - 3x - 1 = 0$.

Řešení:

1. Zřejmě $A = max(|a_1|, |a_2|, |a_3|) = 3$, tzn. všechny reálné kořeny dané rovnice leží v intervalu $\langle -1-3; 1+3\rangle = \langle -4; 4\rangle$.
2. V dané rovnici jsou dva záporné koeficienty, a to: $a_2 = -3$; $a_3 = -1$, tzn. $B = 3, k = 2$. Každý kořen rovnice je tedy menší, než číslo $1 + \sqrt[2]{\frac{3}{1}}$ (viz Věta 2.2), a tedy horním ohraničením kořenů této rovnice je číslo $1 + \sqrt{3}$.
   Pro nalezení dolního ohraničení kořenů rovnice uvažujme upravenou rovnici $x^3 - 3x + 1 = 0$ (podle Poznámky 1. za Větou 2.3), v níž je jeden záporný koeficient $a_2 = -3$, tzn. $B = 3, k = 2$, a tedy je horním ohraničením kořenů upravené rovnice číslo $1 + \sqrt{3}$. Dolním ohraničením kořenů původní rovnice je číslo: $-1 - \sqrt{3}$.
   Tedy všechny reálné kořeny rovnice $x^3 - 3x - 1 = 0$ leží v intervalu $\left(-1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}\right)$.
3. Nechť
   a) $a = 2 < 1 + \sqrt{3}$ a $f(x) = x^3 - 3x - 1$. Pak $f'(2) = 9 > 0, f''(2) = 6 > 0, f'''(2) = 1 > 0$, tj. podle Věty 2.3 jsou všechny kladné reálné kořeny dané rovnice menší než 2.
   b) $a = 2 \wedge f_1(x) = x^3 - 3x + 1$. Pak $f_1(2) = 3 > 0, f_1'(2) = 9 > 0$, $f_1''(2) = 6 > 0, f_1'''(2) = 1 > 0$, tj. všechny záporné kořeny rovnice $x^3 - 3x - 1 = 0$ jsou (podle Poznámky 3. za Větou 2.3) větší než -2.

Tedy všechny reálné kořeny dané rovnice leží v intervalu $(-2; 2)$. [4]

Definice 2.1. Nechť je daná konečná posloupnost nenulových reálných čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$.
Znaménkovou změnou rozumíme každou dvojici $a_i, a_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1$, pro kterou platí

$$a_i . a_{i+1} < 0.$$

Věta 2.4 (Descartova věta) Nechť je daná rovnice (2.1) s reálnými koeficienty. Počet kladných kořenů této rovnice se rovná nejvýše počtu znaménkových změn v posloupnosti nenulových koeficientů $a_0, a_1, \dots, a_n$ polynomu $f(x)$. Jestliže je menší, pak je menší o sudé číslo. Přitom k −násobný kořen považujeme za k stejných kořenů.

Důkaz:

1. Věta zřejmě platí pro rovnice 1. stupně.
2. Předpokládejme tedy, že tato věta platí i pro všechny rovnice stupně menšího než n. Ukažme nyní, že je správná i pro rovnice stupně n:
   Dokazovat budeme nepřímo. Předpokládejme, že věta neplatí pro všechny rovnice n −tého stupně. Potom existuje alespoň jedna rovnice n −tého stupně $f(x) = 0$, která má sice p znaménkových změn, ale nemá p nebo $p - 2k$ (kde k je celé nezáporné číslo) kladných kořenů. Tedy pokud by počet změn a počet kladných kořenů byl stejné parity, musela by mít rovnice $f(x) = 0$ alespoň $p + 2$ kladné kořeny. Sestrojme rovnici $f'(x) = 0$, která má stupeň $n - 1$. Derivací se počet změn nemůže zvýšit, tedy by tato rovnice měla p nebo méně změn. Rovnice $f'(x) = 0$ má však $p + 1$ kladných kořenů. To je ve sporu s indukčním předpokladem, neboť pro rovnice stupně $n - 1$ jsme předpokládali, že počet kladných kořenů (kterých je alespoň $p + 1$) se rovná počtu změn (tedy p), protože je o sudý počet menší (tj. $p - 2k$). Tím je Věta dokázána. □

Poznámka: Předpokládejme, že rovnice $f(x) = 0$ nemá vícenásobné kořeny a že $f(a).f(b) \neq 0$. Aplikujme na polynomy $f(x)$ a $f'(x)$ Euklidův algoritmus hledání největšího společného dělitele tak, že zbytky prováděných dělení budeme psát se záporným znaménkem. Dostáváme tento řetězec vztahů:

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(x)\,.\,q_1(x) - f_1(x) \\ f'(x) &= f_1(x)\,.\,q_2(x) - f_2(x) \\ f_1(x) &= f_2(x)\,.\,q_3(x) - f_3(x) \\ &\vdots \\ f_{m-2}(x) &= f_{m-1}(x).\,q_m(x) - f_m(x) \\ f_{m-1}(x) &= f_m(x)\,.\,q_{m+1}(x). \end{aligned}$$

Zbytek $f_m(x)$ je konstanta různá od nuly, protože jinak by rovnice $f(x) = 0$ měla podle Věty 1.3 vícenásobný kořen, což jsme vyloučili.

Definice 2.2. Systém polynomů

$$f(x), f'(x), f_1(x), \dots, f_m(x) \tag{2.3}$$

(psaný v tomto pořadí) se nazývá Sturmův řetězec polynomu $f(x)$.

Poznámka: Dosadíme-li do řetězce (2.3) za proměnnou x čísla a, b, dostaneme dvě uspořádané soustavy čísel:

$$f(a), f'(a), f_1(a), \dots, f_m(a) \tag{2.4}$$

$$f(b), f'(b), f_1(b), \dots, f_m(b) \tag{2.5}$$

Nechť počet znaménkových změn v soustavách (2.4), resp. (2.5) je $V(a)$, resp. $V(b)$. Potom platí:

Věta 2.5 (Sturmova věta) Nechť $f(x)$ je reálný polynom s jednoduchými kořeny, a, b ($a < b$) jsou reálná čísla, která nejsou kořeny polynomu $f(x)$ (tj. $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$), nechť (2.3) je Sturmův řetězec polynomu $f(x)$ a $V(a)$, $V(b)$ jsou počty znaménkových změn v posloupnostech čísel (2.4), (2.5). Potom počet reálných kořenů rovnice $f(x) = 0$ v intervalu (a, b) se rovná $V(a) - V(b)$.

<u>Důkaz</u>:

Budeme sledovat, jak se mění číslo $V(x)$ s rostoucím x. Nejprve si však všimněme některých vlastností řetězce (2.3).

a) Nechť pro nějaké $x = \alpha$ a $i \geq 1$ je $f_i(\alpha) = 0$. Potom je nevyhnutelně $f_{i+1}(\alpha) \neq 0$. Kdyby totiž platilo $f_i(\alpha) = 0$ a $f_{i+1}(\alpha) = 0$, vyplývalo by ze vztahu

$$f_{i-1}(x) = f_i(x) \,.\, q_i(x) - f_{i+1}(x), \tag{2.6}$$

že i $f_{i-1}(\alpha) = 0$. Z předcházejícího vztahu by vyplývalo, že i $f_{i-2}(\alpha) = 0$ atd. Opakováním této úvahy bychom dostali: $f(\alpha) = 0$ a $f'(\alpha) = 0$, což je v rozporu s předpokladem, že $f(x) = 0$ nemá vícenásobné kořeny. Podobně vyplývá i z předpokladu $f_i(\alpha) = 0$, že je $f_{i-1}(\alpha) \neq 0$.

b) Uvažujme opět o vztahu (2.6). Nechť pro nějaké $i > 0$ je $f_i(\alpha) = 0$. Potom z tohoto vztahu vyplývá $f_{i-1}(\alpha) = -f_{i+1}(\alpha)$, t.j. $f_{i-1}(x)$ a $f_{i+1}(x)$ mají v bodě $x = \alpha$ opačná znaménka. Z toho vyplývá: Jestliže zvolíme $h > 0$ dostatečně malé, mají polynomy $f_{i-1}(x)$ a $f_{i+1}(x)$ na celém intervalu $(\alpha - h, \alpha + h)$ opačná znaménka.

Označme znaménko čísla $f_{i+1}(\alpha)$ znakem ε. Potom část řetězce (2.3) má v bodech $x = \alpha - h$, $x = \alpha$, $x = \alpha + h$ takovéto znaménkové schéma:

x	$\dots,$	$f_{i-1}(x),$	$f_i(x),$	$f_{i+1}(x),$	$\dots$
$\alpha - h$		$-\varepsilon$	?	ε	
α		$-\varepsilon$	0	ε	
$\alpha + h$		$-\varepsilon$	?	ε	

(Symbol $-\varepsilon$ značí znaménko opačné k znaménku ε.)

O znaménku $f_i(x)$, v bodech $\alpha - h$, $\alpha + h$ nevíme nic. Avšak nezávisle na tom je zřejmé, že v prvním a třetím řádku jsou možné jen tyto znaménková schémata:

$$+ + -; + - -; - + +; - - +.$$

Ve druhém řádku jsou možná jen dvě schémata, a to:

$$- 0 + ; + 0 - .$$

V každém případě je tedy ve všech třech řádcích stejný počet znaménkových změn, totiž právě jedna.
Jestliže při změně x přechází x přes nulový pod polynomu $f_i(x)$, $(i \geq 1)$, může to ovlivnit jen znaménkové schéma ve třech napsaných polynomech. Proto když x roste a prochází nulovým bodem kteréhokoli polynomu $f_i(x)$, $(i \geq 1)$, nemá to žádný vliv na souhrnný počet znaménkových změn v řetězce (2.3). (Má to vliv jen na rozložení znamének.)

c) Nechť je nyní α takové číslo, že $f_0(\alpha) = 0$. Potom $f_1(\alpha) \neq 0$ a existuje takové $h > 0$, že v intervalu $(\alpha - h,\ \alpha + h)$ má $f_1(x)$ stále stejné znaménko. Podle Taylorovy věty je

$$f(\alpha - h) = f(\alpha) - \frac{h}{1!}f'(\alpha) + \frac{1}{2}h^2 f''(\alpha) - \dots =$$

$$= h[-f'(\alpha) + \frac{1}{2}hf''(\alpha) - \dots],$$

$$f(\alpha + h) = f(\alpha) + \frac{h}{1!}f'(\alpha) + \frac{1}{2}h^2 f''(\alpha) - \dots =$$

$$= h[f'(\alpha) + \frac{1}{2}hf''(\alpha) - \dots].$$

Jestliže $h > 0$ je dost malé, má výraz v hranaté závorce stejné znaménko jako první člen. Jestliže $f'(\alpha) > 0$, je $f(\alpha - h) < 0$ a $f(\alpha + h) > 0$. Tedy získáváme takovéto znaménkové schéma:

x	$f_0(x)$,	$f_1(x)$,	…
$\alpha - h$	$-$	$+$	
α	0	$+$	
$\alpha + h$	$+$	$+$	

Jestliže $f'(\alpha) < 0$, je $f(\alpha - h) > 0$ a $f(\alpha + h) < 0$ a máme takovéto znaménkové schéma:

x	$f_0(x)$,	$f_1(x)$,	…
$\alpha - h$	$+$	$-$	
α	0	$-$	
$\alpha + h$	$-$	$-$	

V obou případech je ve třetím řádku o jednu změnu méně než v prvním řádku. Stručně řečeno, při přechodu přes nulový bod polynomu $f_0(x)$ se jedna změna ztratila.

d) Nyní lehce dokončíme důkaz našeho tvrzení. Sledujme, jak se mění znaménková schémata v soustavě (2.3) a číslo $V(x)$, když x roste.

Existuje konečný počet čísel, ve kterých má některý z polynomů

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$$

nulový bod. Nechť jsou to čísla $c_1 < c_2 < \cdots < c_s$. Pokud zvolíme v intervalu (c_i, c_{i+1}), $1 \leq i \leq s-1$, dvě libovolná čísla $x', x'', c_i < x' < x'' < c_{i-1}$, potom máme v obou soustavách

$$f_0(x'), f_1(x'), f_2(x'), \dots, f_m(x')$$
$$f_0(x''), f_1(x''), f_2(x''), \dots, f_m(x'')$$

to samé znaménkové schéma. Každý z polynomů $f_j(x)$, $(j = 0, 1, \dots, m)$, má totiž uvnitř intervalu (c_i, c_{i+1}) stále stejné znaménko. Podobná úvaha platí pro intervaly $(-\infty, c_1)$ a (c_s, ∞).

Pro $x = a$ máme v soustavě (2.4) jakési znaménkové schéma. Pokud x roste tak, že x není kořenem rovnice $f_0(x) = 0$, může se sice (při přechodu nulových bodů polynomů $f_i(x), i \geq 1$) znaménkové schéma měnit, ale souhrnný počet znaménkových změn zůstává nezměněný. Pokud však x překročí kořen α rovnice
$f_0(x) = 0$, víme, že soustava

$$f_0(\alpha - h), f_1(\alpha - h), \dots, f_m$$

má (pro dost malé $h > 0$) přesně o jednu změnu více než soustava

$$f_0(\alpha + h), f_1(\alpha + h), \dots, f_m.$$

Tedy je $V(\alpha + h) = V(\alpha - h) - 1$. Když při každém překročení kořene rovnice $f_0(x) = 0$ ubyde právě jedna změna, je počet kořenů v intervalu (a, b) přesně roven číslu $V(a)$ - $V(b)$. Tím je Věta plně dokázána. □

Příklad 4: Proveďte separaci reálných kořenů rovnice $x^3 - 3x - 1 = 0$.

Řešení: Nejprve nalezneme Sturmův řetězec polynomu $f(x)$. Dostáváme:

$\boldsymbol{f_1(x) = f(x) = x^3 - 3x - 1,}$

$\boldsymbol{f_2(x) = f'(x) = 3x^2 - 3,}$

$f_1(x) = f_2(x).\, g_1(x) - f_3(x)$

$$(x^3 - 3x - 1) : (3x^2 - 3) = \frac{1}{3}x$$
$$-(-x^3 + x)$$
$$-2x - 1$$

$\boldsymbol{f_3(x) = 2x + 1}$,

$f_2(x) = f_3(x).\, g_2(x) - f_4(x)$

$$
\begin{array}{l}
(3x^2 - 3) : (2x + 1) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} \\
-\left(3x^2 + \frac{3}{2}x\right) \\
\quad -\frac{3}{2}x - 3 \\
-\left(-\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\right) \\
\qquad\qquad -\frac{9}{4}
\end{array}
$$

$\boldsymbol{f_4 = \frac{9}{4}}$.

Z předchozího příkladu víme, že všechny kořeny dané rovnice leží v intervalu $(-2; 2)$, tzn. stačí, abychom vyšetřovali znaménkové změny v posloupnosti $f_1(c)$, $f_2(c), f_3(c), f_4(c)$ pro $c \in \langle -2; 2\rangle$.

Dostáváme tak:

c	$f_1(c)$	$f_2(c)$	$f_3(c)$	$f_4(c)$	$V(c)$
-2	-	+	-	+	3
-1	+	0	-	+	2
0	-	-	+	+	1
1	-	0	+	+	1
2	+	+	+	+	0

Z Věty 2.5 je zřejmé, že zadaná rovnice má 3 reálné kořeny, a to po jednom v intervalech $(-2; -1), (-1; 0), (1; 2)$. [4]

Věta 2.6 (Taylorova věta) Nechť reálná funkce f má na uzařeném intervalu $\langle a, a + h\rangle$, resp. při záporném čísle h na uzavřeném intervalu $\langle a + h, a\rangle$ spojité derivace do n-tého řádu včetně a na intervalu $(a, a + h)$, resp. $(a + h, a)$ spojitou derivaci $(n + 1)$-ního řádu. Pak

$$f(a + h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R_{n+1}$$

(*Taylorův vzorec)*, kde výraz pro zbytek R_{n+1} lze vyjádřit například takto:

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a + \vartheta h)}{(n + 1)!}h^{n+1} \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Poznámka: Taylorovu větu používáme např. k výpočtu funkčních hodnot v okolí bodu a nebo tehdy, když chceme nahradit danou funkci v okolí bodu a polynomem.

Věta 2.7 (Věta o střední hodnotě) Nechť f je reálná funkce jedné proměnné, která je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má derivaci (vlastní nebo nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b). Pak existuje v intervalu (a, b) alespoň jedno takové číslo c, že je $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Poznámka:

1. Geometrická interpretace: V intervalu (a, b) existuje alespoň jeden takový bod c, že tečna ke grafu funkce v bodě $[c, f(c)]$ je rovnoběžná se spojnicí bodu $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$.
2. *(Rollova věta)* Nechť funkce f je na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá a má na intervalu (a, b) derivaci (vlastní nebo nevlastní). Nechť $f(a) = f(b)$. Pak existuje alespoň jeden takový bod $c \in (a, b)$, že $f'(c) = 0$, tj. že tečna ke grafu funkce f sestrojená v bodě $[c, f(c)]$, je rovnoběžná s osou x.

Poznámka: Předpokládejme, že jsme již provedli separaci reálného kořene α rovnice (2.1), tj. že jsme již našli interval (a, b), ve kterém leží jediný kořen α rovnice (2.1), přičemž zde neleží již žádný další kořen dané rovnice. Jde o to, jak zúžit tento interval, aby ve vzniklém užším intervalu již ležel náš kořen. Tomuto pochodu postupného zužování intervalu (a, b) se říká *aproximace* kořene α.

V dalších úvahách budeme předpokládat, že v celém uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ je $f'(x) \neq 0$ a $f''(x) \neq 0$, tedy že první a druhá derivace $f(x)$ nemají v intervalu $\langle a, b\rangle$ žádné kořeny.

Tyto dvě podmínky, tedy že $f'(x) \neq 0$ a $f''(x) \neq 0$, znamenají geometricky toto:

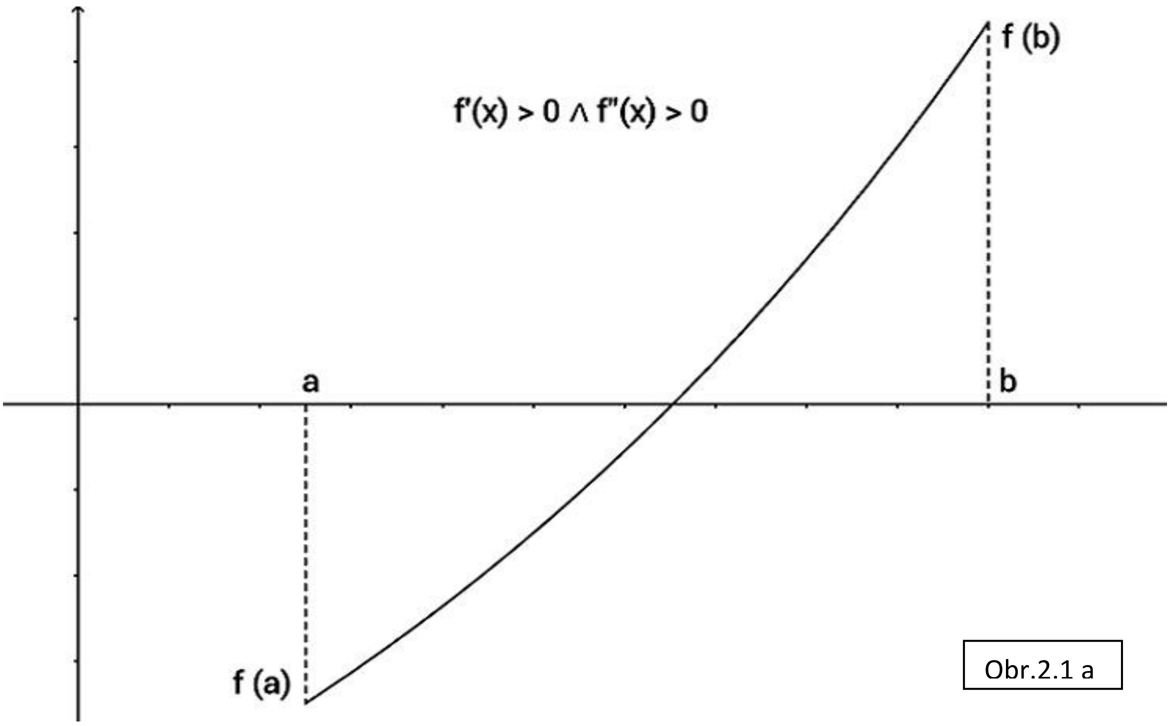
1. Křivka $y = f(x)$ je v celém intervalu $\langle a, b\rangle$ buď stále rostoucí, nebo stále klesající (podle toho, zda je buď $f'(x) > 0$, nebo $f'(x) < 0$ pro každé číslo x z intervalu $\langle a, b\rangle$)
2. Křivka $y = f(x)$ je v celém intervalu $\langle a, b\rangle$ buď stále konvexní, nebo stále konkávní (podle toho, zda je buď $f''(x) > 0$, nebo $f''(x) < 0$ pro každé číslo x z intervalu $\langle a, b\rangle$).

Pro polynom $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ nastane tedy právě jeden ze čtyř případů:

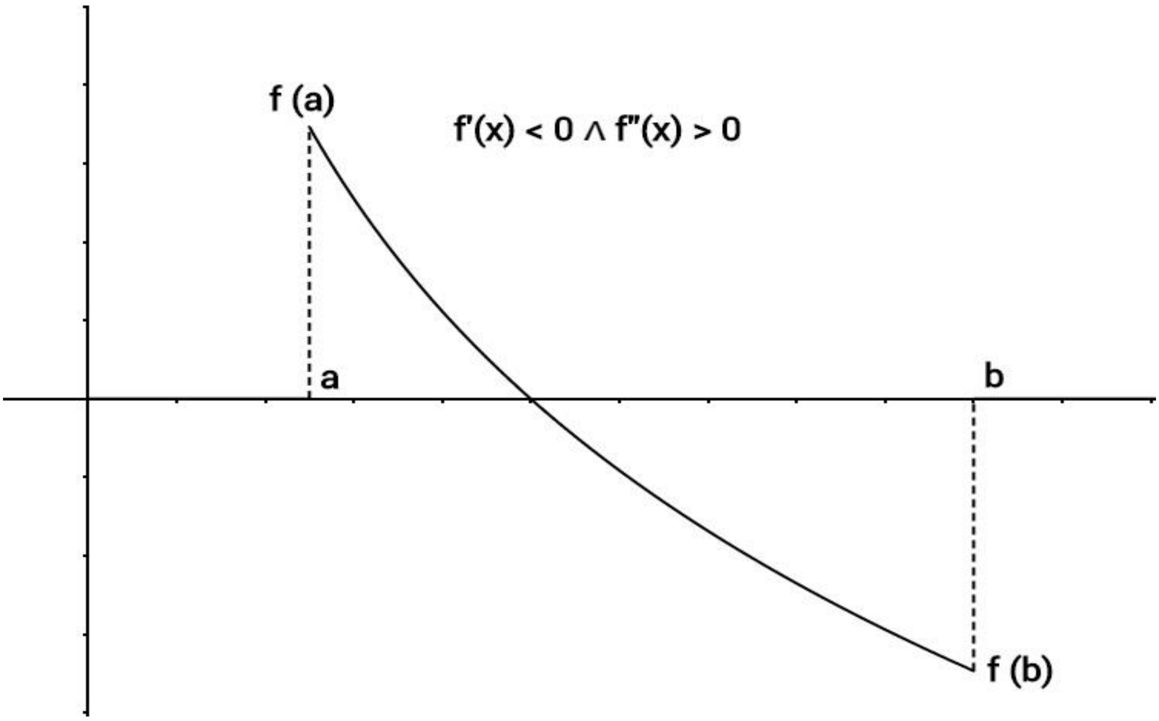
- $f(x)$ je rostoucí a konvexní funkcí
- $f(x)$ je rostoucí a konkávní funkcí
- $f(x)$ je klesající a konvexní funkcí
- $f(x)$ je klesající a konkávní funkcí

Za těchto předpokladů má graf křivky v intervalu $\langle a, b \rangle$ jeden z tvarů znázorněných na Obr. 2.1 a, b, c, d

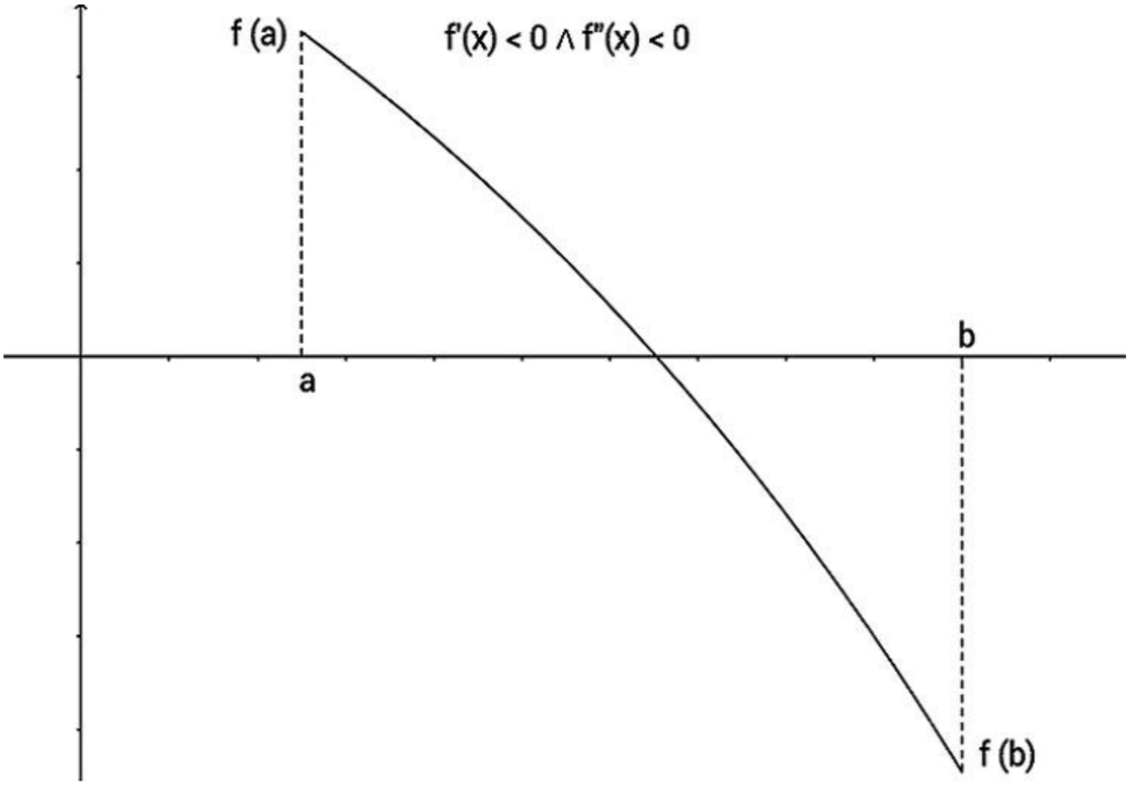
.



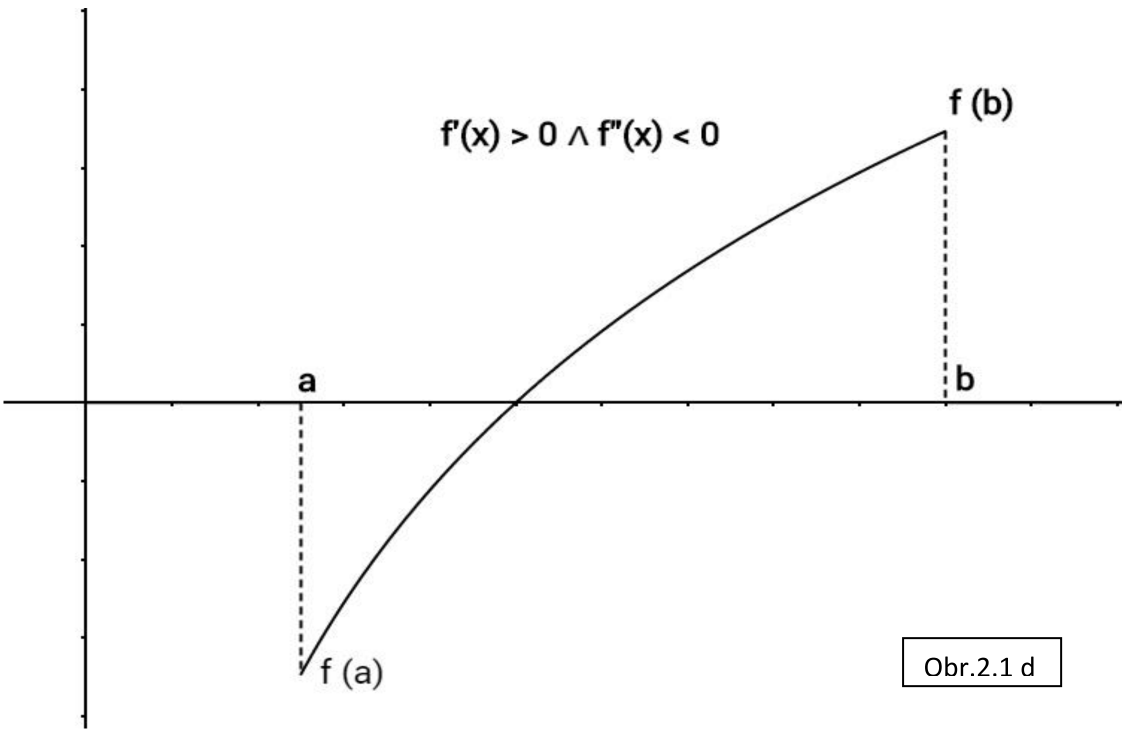
Obr.2.1 a



Obr.2.1 b



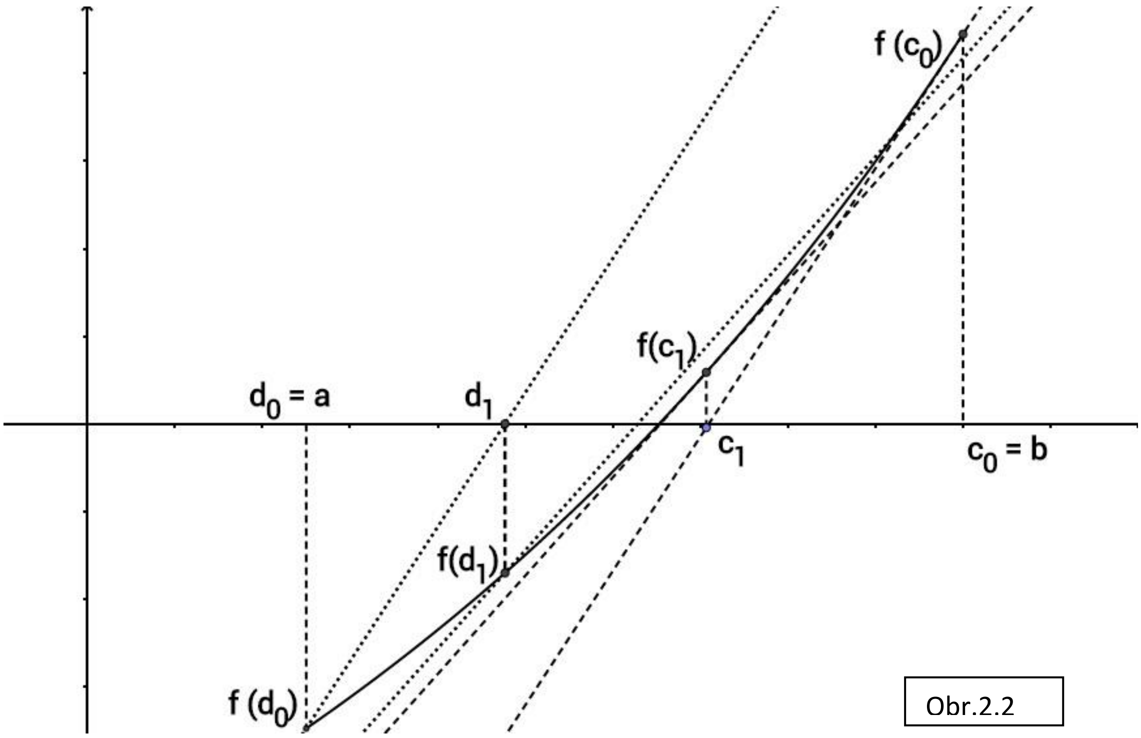
Obr.2.1 c



Obr.2.1 d

2.2 Newtonova metoda – metoda tečen

Uvedenou metodu si nejprve předvedeme na názorném příkladu a následně ji i teoreticky odvodíme.
Mějme tedy na mysli nějaký konkrétní příklad. Uvažujme situaci, kdy $f(x)$ je rostoucí a konvexní funkcí (tj. $f'(x) > 0,\ f''(x) > 0$) na intervalu $\langle a, b\rangle$.



Obr.2.2

V bodě $[c_0, f(c_0)]$ sestrojíme tečnu ke grafu funkce $f(x)$, tj. přímku, která má rovnici

$$y - f(c_0) = f'\,(c_0).(x - c_0),$$

přičemž c_0 je to z čísel a, b, v němž má hodnota polynomu $f(x)$ a hodnota druhé derivace $f''(x)$ stejné znaménko, tj. platí

$$f(c_0).f''(c_0) > 0.$$

Průsečík sestrojené tečny s osou x označíme $[c_1, 0]$ (tj. položíme $x = c_1, y = 0$). Pak máme

$$c_1 = c_0 - \frac{f(c_0)}{f'(c_0)}.$$

V bodě $[c_1, f(c_1)]$ sestrojíme opět tečnu ke grafu funkce $f(x)$, která protne osu x v bodě $[c_2, 0]$, a opět získáváme

$$c_2 = c_1 - \frac{f(c_1)}{f'(c_1)}.$$

Opakováním tohoto postupu dostáváme posloupnost reálných čísel

$$c_{i+1} = c_i - \frac{f(c_i)}{f'(c_i)}, i = 0, 1, 2, \dots \tag{2.7}$$

Je zřejmé, a lze to i dokázat, že tato posloupnost je klesající, tj.
$c_0 > c_1 > c_2 > c_3 > \cdots$, a že $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$.
Uvedeným způsobem se sice blížíme k číslu α, nevíme však, jak daleko jsme po n −tém kroku od skutečné hodnoty čísla α. Bylo by výhodné, kdybychom se současně blížili i z druhé strany. To provedeme takto:
V bodě $[d_0, f(d_0)]$ (d_0 je to z čísel a, b, které je různé od c_0) sestrojíme rovnoběžku s tečnou sestrojenou v bodě $[c_0, f(c_0)]$, která má rovnici

$$y - f(d_0) = f'\,(c_0).\,(x - d_0).$$

Její průsečík s osou x označíme $[d_1, 0]$ a máme

$$d_1 = d_0 - \frac{f(d_0)}{f'(c_0)}.$$

Bodem $[d_1, f(d_1)]$ vedeme rovnoběžku s tečnou sestrojenou v bodě $[c_1, f(c_1)]$, která protne osu x v bodě $[d_2, 0]$ a opět získáme

$$d_2 = d_1 - \frac{f(d_1)}{f'(c_1)}.$$

Opakováním tohoto postupu dostáváme posloupnost reálných čísel

$$d_{i+1} = d_1 - \frac{f(d_1)}{f'(c_1)}, i = 0,1,2, \ldots$$

Opět se dá dokázat, že tato posloupnost je rostoucí, tj. $d_0 > d_1 > d_2 > d_3 > \cdots$.
Dále lze dokázat, žer takto získaná posloupnost je konvergentní, a že konverguje k hledanému kořenu α, tj. že

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \alpha.$$

Jestliže zvolíme číslo n dostatečně velké, můžeme vytvořit interval (d_n, c_n) tak úzký, jak chceme, tj. kořen α můžeme určit s takovou přesností, jaká nám vyhovuje.

Nyní dokážeme Newtonovu metodu nezávisle na grafickém znázornění.
Předpokládejme:
1. Polynom $f(x)$ má uvnitř intervalu $\langle a, b\rangle$ kořen α.
2. Na celém intervalu $\langle a, b\rangle$ je $f'(x) > 0$ a $f''(x) > 0$.
Chceme dokázat:
1. Posloupnost $\{c_n\}$ je klesající posloupnost reálných čísel, ze kterých je každé větší než kořen α.
2. Posloupnost $\{d_n\}$ je rostoucí posloupnost reálných čísel, ze kterých je každé menší než kořen α.
3. Obě posloupnosti jsou konvergentní a mají za limitu číslo α.
<u>Důkaz:</u>
Jestliže v intervalu $\langle a, b\rangle$ je $f'(x) > 0$, je funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ rostoucí. V intervalu (a, b) leží (jediný) kořen naší rovnice. Proto je $f(a) < 0, f(b) > 0$.
V intervalu $\langle a, b\rangle$ je i $f''(x) = \big(f'(x)\big)' > 0$. To znamená, že i polynom $f'(x)$ je v intervalu $\langle a, b\rangle$ rostoucí funkce. Speciálně z toho vyplývá, že pro každé ε, pro které je $a \le \varepsilon < b$, platí $f'(\varepsilon) < f'(b)$.

Použijme nejprve větu o střední hodnotě na intervalu $\langle a, \alpha \rangle$. Podle ní existuje takové číslo ε_1, $a < \varepsilon_1 < \alpha$, že $f(a) - f(\alpha) = (a - \alpha).f'(\varepsilon_1)$. Jestliže $f(\alpha) = 0$, je tedy:

$$\alpha - a = -\frac{f(a)}{f'(\varepsilon_1)}. \tag{2.8}$$

Použijme větu o střední hodnotě na interval $\langle \alpha, b \rangle$. Podle ní existuje opět takové číslo $\varepsilon_2, a < \varepsilon_2 < b$, že platí $f(b) - f(\alpha) = (b - \alpha).f'(\varepsilon_2)$. Je-li $f(\alpha) = 0$, dostáváme z toho:

$$\alpha - b = \frac{f(b)}{f'(\varepsilon_2)}. \tag{2.9}$$

Uvažujme nyní čísla

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(b)}, b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Protože je $f(a) < 0, f(b) > 0$, je

$$a_1 = a + \frac{|f(a)|}{f'(b)} > a, b_1 = b - \frac{|f(b)|}{f'(b)} < b.$$

Ze vztahů (2.8) a (2.9) vyplývá:

$$\alpha - a = -\frac{f(a)}{f'(\varepsilon_1)} > \frac{-f(a)}{f'(b)}, \rightarrow \ \alpha > a - \frac{f(a)}{f'(b)},$$
$$\alpha - b = -\frac{f(b)}{f'(\varepsilon_2)} < \frac{-f(b)}{f'(b)}, \rightarrow \ \alpha < b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Souhrnem:

$$a < a - \frac{f(a)}{f'(b)} < \alpha < b - \frac{f(b)}{f'(b)} < b,$$

tj.

$$a < a_1 < \alpha < b_1 < b.$$

Opakujme nyní naši úvahu v tom smyslu, že místo od intervalu $\langle a, b \rangle$ vyjdeme od intervalu $\langle a_1, b_1 \rangle$. Protože všechny předpoklady, které platily pro interval $\langle a, b \rangle$, platí i pro interval $\langle a_1, b_1 \rangle$, dostáváme:

$$a_1 < a_2 < \alpha < b_2 < b_1.$$

Opakovaným použitím toho stejného postupu dostáváme pro každé přirozené číslo n:

$$a < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \alpha < b_n < \cdots < b_2 < b_1 < b.$$

Tyto nerovnosti dokazují tvrzení 1. a 2.

Abychom dokázali velmi podstatné tvrzení 3., stačí dokázat, že s rostoucím číslem n se délka intervalu $\langle a_n, b_n \rangle$ blíží k nule.

Počítejme nejprve délku intervalu $\langle a_1, b_1 \rangle$. Máme:

$$b_1 - a_1 = \left(b - \frac{f(b)}{f'(b)}\right) - \left(a - \frac{f(a)}{f'(b)}\right) = b - a - \frac{f(b) - f(a)}{f'(b)}.$$

Tento výraz lze upravit, pokud opět použijeme větu o střední hodnotě, podle které existuje takový bod $\eta_1, a < \eta_1 < b$, že $f(b) - f(a) = f'(\eta_1).(b - a)$.

Dosazením do posledního vztahu dostáváme:

$$b_1 - a_1 = (b - a)\left[1 - \frac{f'(\eta_1)}{f'(b)}\right].$$

Podobným způsobem nalezneme pro délku intervalu $\langle a_2, b_2 \rangle$:

$$b_2 - a_2 = (b_1 - a_1)\left[1 - \frac{f'(\eta_2)}{f'(b_1)}\right].$$

Kde $\eta_2$je nějaké číslo, splňující nerovnost $a_1 < \eta_2 < b_1$. Po n krocích dostáváme:

$$b_n - a_n = (b_{n-1} - a_{n-1})\left[1 - \frac{f'(\eta_n)}{f'(b_{n-1})}\right],$$

kde $a_{n-1} < \eta_n < b_{n-1}$. Z napsaných vztahů vyplývá:

$$b_n - a_n = (b - a)\left[1 - \frac{f'(\eta_1)}{f'(b)}\right].\left[1 - \frac{f'(\eta_2)}{f'(b_1)}\right]\dots\left[1 - \frac{f'(\eta_n)}{f'(b_{n-1})}\right].$$

Položme nyní $b_0 = b$. Protože f' je rostoucí funkce v intervalu $\langle a, b \rangle$, platí pro každé $i = 1,2, \dots, n$:

$$\frac{f'(\eta_i)}{f'(b_{i-1})} > \frac{f'(a)}{f'(b)}.$$

Tedy je

$$b_n - a_n < (b - a)\left[1 - \frac{f'(a)}{f'(b)}\right]^n.$$

Jestliže je f' rostoucí funkce, je

$$0 < \frac{f'(a)}{f'(b)} = q < 1.$$

Z nerovnosti

$$b_n - a_n < (b - a)[1 - q]^n$$

vyplývá, že $\lim_{n=\infty}(b_n - a_n) = 0$ a tedy (vzhledem ke vztahu $a_n < \alpha < b_n$) $\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n = \alpha$.

Tím je důkaz celého tvrzení vykonaný. □

Poznámka:

Úlohu jsme formulovali a dokázali pro případ $f'(x) > 0, f''(x) > 0$.

Případ $f'(x) < 0, f''(x) < 0$ lze převést na předešlý, pokud položíme $f(x) = -g(x)$, neboť potom je v celém intervale $\langle a, b \rangle$ $g'(x) > 0, g''(x) > 0$.

Případ $f'(x) < 0, f''(x) > 0$ (a pomocí něj i případ $f'(x) > 0, f''(x) < 0$) se dá provést analogickým způsobem, přičemž výsledky jsou opět ve shodě s názornými konstrukcemi, které dostaneme z Obr. 2.1 b.

Získané výsledky můžeme shrnout do následující věty:

Věta 2.8 Nechť polynom $f(x)$ má uvnitř intervalu $\langle a, b \rangle$ jediný kořen α. Nechť na celém intervalu $\langle a, b \rangle$ je $f'(x) \neq 0, f''(x) \neq 0$. Označme znakem u_1 to z čísel a, b, ve kterém $f(u_1), f''(u_1)$ mají stejná znaménka, a znakem v_1 to z čísel a, b, ve kterém $f(v_1), f''(v_1)$ mají opačná znaménka.

Vytvořme tyto dvě posloupnosti:

$$u_1, \qquad u_2 = u_1 - \frac{f(u_1)}{f'(v_1)}, \qquad u_3 = u_2 - \frac{f(u_2)}{f'(v_2)}, \qquad \dots$$

$$v_1, \qquad v_2 = v_1 - \frac{f(v_1)}{f'(u_1)}, \qquad v_3 = v_2 - \frac{f(v_2)}{f'(u_2)}, \qquad \dots$$

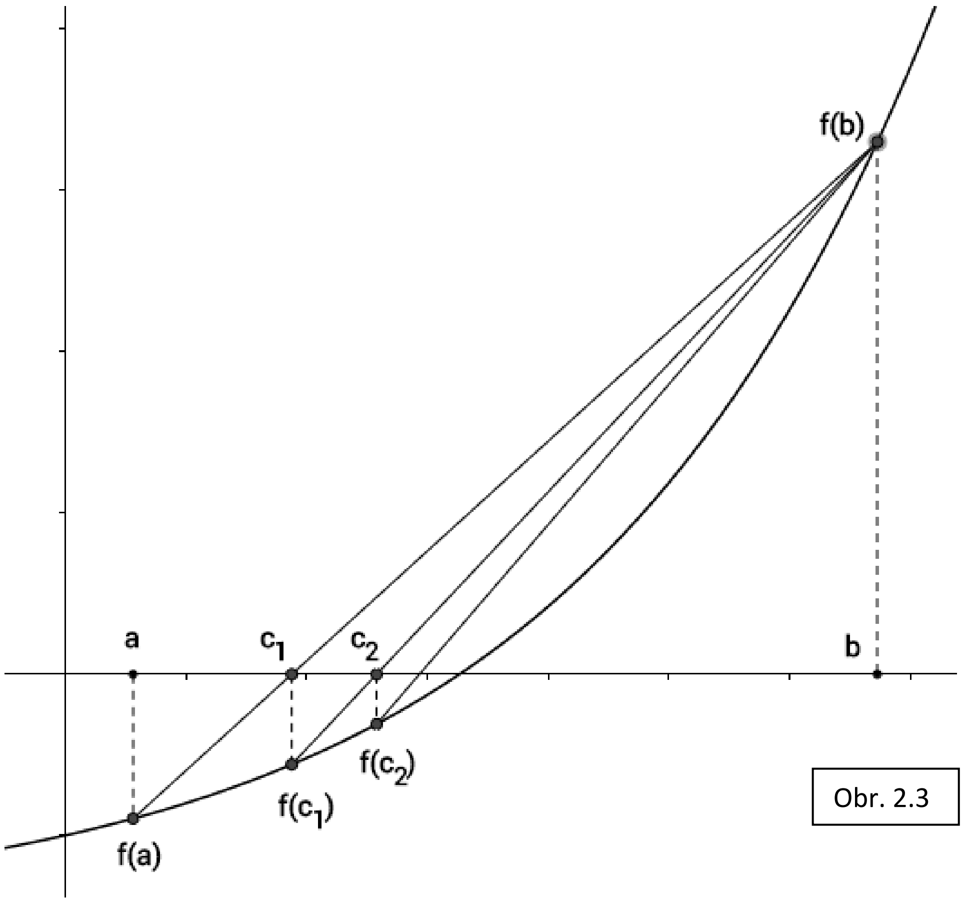
Potom jedna z posloupností je klesající, druhá je rostoucí a obě konverzují k číslu α.

Poznámka:

1. Při praktickém počítání budeme většinou sestrojovat jen jedinou posloupnost, a to samozřejmě posloupnost první z Věty 2.8.
2. Odvodíme vzorec pro chybu po n-tém kroku, který můžeme použít pro jakoukoliv posloupnost, která má za limitu číslo α. Nechť $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ je nějaká posloupnost, která konverguje k číslu α. Použijeme Větu 2.7 o střední hodnotě na interval $\langle \alpha_n, \alpha \rangle$ nebo $\langle \alpha, \alpha_n \rangle$ podle toho, zda je $\alpha_n < \alpha$ nebo $\alpha < \alpha_n$. Podle této věty existuje takový bod ξ, ležící mezi čísly α_n, α tak, že
$$f(\alpha) - f(\alpha_n) = (\alpha - \alpha_n) . f'(\xi)$$
Neboť $f(\alpha) = 0$, máme:
$$|\alpha - \alpha_n| = \frac{|f(\alpha_n)|}{|f'(\xi)|}.$$
Jestliže v intervalu $\langle a, b \rangle$ je $|f'(x)| \geq m > 0$, máme:
$$|\alpha - \alpha_n| \leq \frac{|f(\alpha_n)|}{m}. \tag{2.10}$$
To je hledaný vzorec, který nám umožňuje odhadnout, jak daleko leží číslo α_n od skutečné hodnoty kořenu α.
3. Chceme-li aproximovat kořen α s předem danou přesností ε, stačí někdy porovnat dva po sobě jdoucí členy posloupnosti $\{\alpha_n\}$.
Pokud je $|\alpha_i - \alpha_{i-1}| < \varepsilon$, můžeme chápat číslo α_i jako dostatečně přesnou aproximaci kořene α.

2.3 Metoda regula falsi – metoda tětiv

Opět uvažujme situaci, kdy $f(x)$ je rostoucí a konvexní funkcí, tedy $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$.



Obr. 2.3

Sestrojíme tětivu spojující body $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$. Tato tětiva má rovnici

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} . (x - a).$$

Průsečíkem této tětivy s osou x je bod

$$c_1 = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} . f(a).$$

(Kořen α leží v tom z intervalů $(a_1, c_1), (c_1, b)$, v jehož krajních bodech mají funkční hodnoty opačná znaménka, v našem případě v intervalu (a, b).)
Dále sestrojíme tětivu, která spojuje body $[c_1, f(c_1)]$, $[b, f(b)]$.
Ta protíná osu x v bodě

$$c_2 = c_1 - \frac{b - c_1}{f(b) - f(c_1)} . f(c_1).$$

Opakováním tohoto procesu dostáváme posloupnost reálných čísel

$$c_i = c_{i-1} - \frac{b - c_{i-1}}{f(b) - f(c_{i-1})} . f(c_{i-1}), \qquad i = 1,2,3, \dots \tag{2.11}$$

Dá se dokázat, že tato posloupnost je rostoucí, tj. $c_1 < c_2 < c_3 < \cdots$

Dále lze dokázat, že takto získaná posloupnost je konvergentní a že konverguje k hledanému kořenu α, tj. že

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha.$$

Je-li kromě toho $|f'(x)| \geq m$ pro všechna x z daného intervalu, pak pro absolutní chybu n –té tětivové aproximace c_n kořene α platí vztah

$$|\alpha - c_n| \leq \frac{|f(c_n)|}{m}.$$

<u>Důkaz:</u> Pro určitost předpokládejme, že $f(a) < 0, f(b) > 0$.
Za první aproximaci c_1 zvolme v intervalu (a, b) bod, který dělí úsečku délky $b - a$ v poměru $|f(a)|:|f(b)| = -f(a):f(b)$. Je tedy

$$\frac{c_1 - a}{b - c_1} = -\frac{f(a)}{f(b)}.$$

Odtud již po upravení dostáváme vzorec

$$c_1 = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)}.f(a).$$

Opakujeme-li postup podruhé, atd. až po n –té, dostáváme postupně aproximace $c_2, \dots, c_n$. Konvergenci tohoto procesu, tj. limitu $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$, dokážeme za předpokladu, že je (kromě předchozích podmínek) $f''(x) > 0$ pro všechna x z daného intervalu, neboť případ $f''(x) < 0$ se převede na předchozí tím, že vezmeme v úvahu rovnici $-f(x) = 0$ místo rovnice $f(x) = 0$. Za daného předpokladu leží křivka $y = f(x)$ pod tětivou AB. Tedy tato křivka je konvexní.

a) V případě, že je $f(a) < 0$, jak předpokládáme, je

$$f(c_1) < 0, \qquad f(c_2) < 0, \dots, \qquad f(c_n) < 0$$

a pro postupné aproximace c_i platí

$$a < c_1 < c_2 < \cdots < c_i < \cdots < \alpha < b.$$

Přitom

$$c_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)(b - c_n)}{f(b) - f(c_n)}. \tag{2.12}$$

Posloupnost $\{c_n\}$ je tedy rostoucí a shora ohraničená (bodem b). Má proto limitu, kterou označme $\hat{\alpha}$. Ze vztahu (2.12) limitním přechodem pro $n \to \infty$ dostaneme

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha} - \frac{f(\hat{\alpha})(b - \hat{\alpha})}{f(b) - f(\hat{\alpha})}.$$

Odtud plyne $f(\hat{\alpha}) = 0$. Protože pak má rovnice $f(x) = 0$ na intervalu (a, b) jediný kořen α, je nutně $\hat{\alpha} = \alpha$. Je tedy

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \hat{\alpha} = \alpha.$$

b) Kdyby platila rovnost $f(a) > 0$, pak by nutně platila nerovnost $f(b) < 0$. V tom případě funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle a, b\rangle$ klesající a postupné aproximace $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ splňují nerovnosti

$$a < \alpha < \cdots < c_n < c_{n-1} < \cdots < c_2 < c_1 < b.$$

Přitom je

$$c_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)(c_n - a)}{f(c_n) - f(a)}.$$

Posloupnost $\{c_n\}$ je tedy klesající a zdola ohraničená (bodem a). Má proto limitu

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \tilde{\alpha},$$

o níž zle podobně jako v případě a) dokázat, že $\tilde{\alpha} = \alpha$.

Z předpokladu $|f'(x)| \geq m$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ na základě věty o střední hodnotě, podle níž

$$f(c_n) - f(\alpha) = (c_n - \alpha) f'(\vartheta),$$

kde ϑ je vhodné číslo mezi c_n a α, plynou vztahy

$$|c_n - \alpha| \leq \frac{|f(c_n) - f(\alpha)|}{|f'(\vartheta)|} \leq \frac{|f(c_n)|}{m},$$

neboť $f(\alpha) = 0$. □

Poznámka:

1. Vyšetříme-li všechny čtyři případy, zjistíme, že při tomto postupu je třeba vzít za pevný bod (kterým byl v našem případě bod b) ten koncový bod intervalu $\langle a, b\rangle$, v němž má hodnota polynomu $f(x)$ a hodnota druhé derivace $f''(x)$ stejné znaménko (to platí právě pro jedno z čísel a, b).
2. Dá se dokázat, že Newtonova metoda je v jistém smyslu rychlejší než metoda tětiv. Někdy je proto výhodné obě metody kombinovat. Přitom se blížíme ke kořenu z obou stran a nemusíme používat vzorec (2.10), abychom zjistili, jak daleko jsme ještě od kořene.
3. Newtonova metoda se pro její účinnost a přesnost využívá velmi často ke zpřesnění výsledků získaných jinou metodou.
4. Podstatu Newtonovy metody lze vyložit i jinak:
   Nechť b je přibližná hodnota kořene a nechť $\alpha = b + h$ je přesná hodnota tohoto kořene. Tedy $f(b + h) = 0$ (číslo h neznáme). Pak můžeme psát:

   $$f(b+h) = f(b) + \frac{f'(b)}{1!}h + \frac{f''(b)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^n(b)}{n!}h^n = 0.$$

   Jsme-li dost blízko u kořene, je $|h|$ malé číslo a můžeme tedy zanedbat vyšší mocniny $h^2, h^3, \dots, h^n$. Dostaneme tak rovnici

   $$f(b) + \frac{f'(b)}{1!}h = 0,$$

   která dává pro h přibližnou hodnotu

   $$h = -\frac{f(b)}{f'(b)}.$$

   Přesnější hodnota kořene je tedy

   $$b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

V této formulaci se dá Newtonova metoda použít i na numerický výpočet komplexních kořenů rovnic s komplexními koeficienty a dá se snadno rozšířit i na numerické řešení soustavy více rovnic i více neznámých.

5. Někdy se k výpočtu kořenů také používá jistá modifikace Newtonovy metody:
   Stejně jako u Newtonovy metody zvolíme počáteční aproximaci c_0, stejným způsobem vypočítáme i
   $$c_1 = c_0 - \frac{f(c_0)}{f'(c_0)}.$$
   Další aproximace však již počítáme trochu odlišným způsobem
   $$c_i = c_{i-1} - \frac{f(c_{i-1})}{f'(c_0)},$$
   tj. používáme stále tutéž hodnotu derivace $f'(c_0)$.
   Výpočet se tím sice zjednoduší, ale vypočítané aproximace se k hledané hodnotě kořene α blíží pomaleji.

Jak jsme již zmínili, metodu regula falsi a Newtonovu metodu je možno použít současně, tzn. z jedné strany sestrojovat tětivy a z druhé strany tečny. Tímto způsobem se pak blížíme ke kořenu α z obou stran a můžeme např. okamžitě odhadnout velikost chyby. Tento postup je ukázán na následujícím příkladu.

Příklad 5: Je dána rovnice $x^3 - 3x - 1 = 0$, o níž jsme v předchozím příkladu zjistili, že má v intervalu $\langle 1; 2\rangle$ jeden kořen α. Vypočítejte tento kořen s přesností na 2 desetinná místa (tzn. chceme, aby chyba při jeho určení byla menší než 0,01).

Řešení: Výpočet provedeme současným užitím metody regula falsi a Newtonovy metody.

$f(x) = x^3 - 3x - 1$, tedy $f'(x) = 3x^2 - 3$ a zároveň $f''(x) = 6x$, odkud vidíme, že $f'(1) = 0$, tedy jeden z krajních bodů intervalu je kořenem první derivace. Potřebujeme tedy zúžit vyšetřovaný interval. Je vidět, že stačí vzít např. interval $\langle 1{,}1; 2\rangle$, v němž kořen α leží (neboť $f(1{,}1) = -2{,}969 < 0, f(2) = 1 > 0$) a obě derivace $f'(x), f''(x)$ v něm žádný kořen nemají. Navíc $f(2) > 0$ a zároveň $f''(2) > 0$, tedy pevný bod je $b = 2$.

Začneme metodou regula falsi: pro $a = 1{,}1, b = 2$. Dále podle (2.11) dostáváme:
$$c_1 = a - \frac{b-a}{f(b) - f(a)} . f(a) \doteq 1{,}7732$$
Spočteme $f(c_1) = -0{,}7442$, tzn. pro další výpočet užijeme body $[c_1, f(c_1)]$, $[b, f(b)]$ a dostáváme:
$$c_2 = c_1 - \frac{b - c_1}{f(b) - f(c_1)} . f(c_1) \doteq 1{,}8699$$

Pokračujeme Newtonovou metodou, a to v bodě $d_0 = b = 2$. Potom je $f(d_0) = 1$; $f'(d_0) = 9$, a tedy podle (2.7) máme:

$$d_1 = d_0 - \frac{f(d_0)}{f'(d_0)} \doteq 1{,}8889$$

Spočteme $f(d_1) = 0{,}07279$; $f'(d_1) = 7{,}7038$, odkud dostáváme:

$$d_2 = d_1 - \frac{f(d_1)}{f'(d_1)} \doteq 1{,}8795$$

Vidíme, že po tomto výpočtu pro hledaný kořen α platí:
$1{,}8699 < \alpha < 1{,}8795$, tj. $1{,}8795 - 1{,}8699 = 0{,}0096 < 0{,}01$,
čímž jsme kořen α určili s výše požadovanou přesností. [4]

2.4 Metoda řetězových zlomků

2.4.1 Řetězové zlomky

Obecně lze definovat řetězové zlomky jako výrazy (konečné i nekonečné) tvaru:

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}},$$

kde $a_0 \in Z$ a $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots \in N$.
V souhlasu s našimi potřebami se omezíme na speciální tvar řetězových zlomků.

Definice 2.3. Řetězovým zlomkem (řetězcem), konečným nebo nekonečným, rozumíme výraz

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots}}},$$

kde q_0 je libovolné celé číslo, $q_1, q_2, \dots$ jsou čísla kladná přirozená.

Poznámka:

1. Čísla $q_0, q_1, q_2, \dots$ se nazývají prvky (nebo také neúplné podíly) řetězového zlomku. Počet prvků řetězového zlomku může být konečný nebo nekonečný.
2. Je-li počet prvků konečný, píšeme daný řetězový zlomek ve tvaru:

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots + \cfrac{1}{q_n}}}} = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_n] \qquad (2.13)$$

   a nazýváme jej konečným řetězovým zlomkem řádu n nebo také konečným řetězovým zlomkem s n členy (tj. n-členný řetězový zlomek má $(n+1)$ prvků).
3. Je-li počet prvků nekonečný, píšeme daný řetězový zlomek ve tvaru:

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots}}} = [q_0; q_1, q_2, \dots] \qquad (2.14)$$

   a nazýváme jej nekonečným řetězovým zlomkem.
4. Každý konečný řetězový zlomek je výsledkem konečného počtu racionálních operací nad jeho prvky (celými čísly).
   Konečný řetězový zlomek tedy vyjadřuje racionální číslo.

5. Řetězový zlomek $r_k = [q_k, q_{k+1}, \dots, q_n]$ nazýváme zbytkem konečného řetězového zlomku.
   Řetězový zlomek $r_k = [q_k, q_{k+1}, q_{k+2}, \dots]$ nazýváme zbytkem nekonečného řetězového zlomku.
   Všechny zbytky konečného řetězového zlomku jsou zřejmě rovněž konečné řetězové zlomky, kdežto zbytky nekonečného řetězového zlomku jsou opět nekonečné řetězové zlomky.
6. Z definice přímo plyne:
   pro konečný řetězový zlomek (2.13):
   $[q_0, q_1, \dots, q_n] = [q_0, q_1, \dots, q_{k-1}, r_k]$
   pro nekonečný řetězový zlomek (2.14):
   $[q_0; q_1, q_2, \dots] = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_{k-1}, r_k]$.

Definice 2.4. Sblíženým (přibližným, parciálním) zlomkem řádu k (resp. k-tým sblíženým zlomkem, $k \geq 0$) daného řetězového zlomku $[q_0; q_1, q_2, \dots]$ (konečného nebo nekonečného) rozumíme veličinu

$$\delta_k = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \dots + \cfrac{1}{q_k}}}} = [q_0, q_1, \dots, q_k].$$

Uvažujme dvě posloupnosti celých čísel $P_0, P_1, P_2, \dots$, $Q_0, Q_1, Q_2, \dots$ definované rekurentními vztahy

$$\left.\begin{aligned} P_k &= q_k P_{k-1} + P_{k-2} \\ Q_k &= q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}, \quad k \geq 2 \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

a počátečními podmínkami:

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= q_0, \quad Q_0 = 1 \\ P_1 &= q_1 q_0 + 1, \quad Q_1 = q_1. \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

Je zřejmé, že tyto vztahy spolu s počátečními podmínkami pro daná čísla $q_0, q_1, q_2, \dots$ jednoznačně určují čísla $P_0, P_1, P_2, \dots$, $Q_0, Q_1, Q_2, \dots$.

Věta 2.9 Jsou-li $q_0, q_1, q_2, \dots$ prvky řetězového zlomku $[q_0; q_1, q_2, \dots]$ (konečného nebo nekonečného), pak pro posloupnost čísel $P_0, P_1, P_2, \dots$, $Q_0, Q_1, Q_2, \dots (k \geq 0)$ definované formulemi (2.15) a (2.16) platí

$$\delta_k = \frac{P_k}{Q_k}.$$

Důkaz: Tvrzení budeme dokazovat indukcí vzhledem ke k.
Pro $k = 0$ a $k = 1$ ihned dostáváme, že

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{q_0}{1} = q_0 = \delta_0$$

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{q_1 q_0 + 1}{q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1} = \delta_1.$$

Předpokládejme, že tvrzení věty platí pro k ($k \geq 2$), tj. sblížený zlomek

$$\delta_k = \frac{P_k}{Q_k} = \frac{q_k P_{k-1} + P_{k-2}}{q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}}. \tag{2.17}$$

Všimněme si nyní sblíženého zlomku δ_{k+1} a vyjádřeme ho ve tvaru

$$\delta_{k+1} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots + \cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{q_{k+1}}}}}}.$$

Ihned je zřejmé, že nahradíme-li ve sblíženém zlomku δ_k číslo q_k číslem $q_k + \frac{1}{q_{k+1}}$, dostaneme sblížený zlomek δ_{k+1}.

$P_{k-1}, P_{k-2}, Q_{k-1}, Q_{k-2}$ jsou vyjádřeny rekurentními vztahy (2.15) a (2.16) pomocí čísel $q_0, q_1, \dots, q_k$ a nezávisí na q_{k+1}. Nahradíme-li v (2.17) q_k číslem $q_k + \frac{1}{q_{k+1}}$, dostaneme

$$\delta_{k+1} = \frac{\left(q_k + \frac{1}{q_{k+1}}\right) P_{k-1} + P_{k-2}}{\left(q_k + \frac{1}{q_{k+1}}\right) Q_{k-1} + Q_{k-2}} = \frac{q_k P_{k-1} + P_{k-2} + \frac{P_{k-1}}{q_{k+1}}}{q_k Q_{k-1} + Q_{k-2} + \frac{Q_{k-1}}{q_{k+1}}} = \frac{P_k + \frac{P_{k-1}}{q_{k+1}}}{Q_k + \frac{Q_{k-1}}{q_{k+1}}}$$

$$= \frac{q_{k+1} P_k + P_{k-1}}{q_{k+1} Q_k + Q_{k-1}} = \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}.$$

Tedy vztah

$$\delta_k = \frac{P_k}{Q_k}$$

platí pro všechna $k \geq 0$. □

Poznámka:

1. Pojem sblížený zlomek je tedy definován zcela jednoznačně pro konečné i nekonečné řetězové zlomky. Rozdíl je pouze v tom, že konečný řetězových zlomek má konečný počet sblížených zlomků, kdežto nekonečný řetězový zlomek jich má nekonečně mnoho.

2. Pro n-členný řetězový zlomek $\alpha = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_n]$ je patrně

   $$\frac{P_n}{Q_n} = \alpha;$$

   takový řetězový zlomek má celkem $n + 1$ sblížených zlomků (řádů $0, 1, 2, \dots, n$).

3. Někdy je vhodné zavést také sblížený zlomek řádu -1, přičemž se položí
$$P_{-1} = 1 \quad a \quad Q_{-1} = 0.$$
Při této dohodě (a jen při ní) platí rekurentní vztahy (2.15) i pro $k = 1$.
4. Při výpočtech čitatelů P_k i jmenovatelů Q_k sblížených zlomků je výhodné postupovat podle schématu

q_k		q_0	q_1		q_k	…
P_k	1	q_0	$q_1 q_0 + 1$	…	$q_k P_{k-1} + P_{k-2}$	…
Q_k	0	1	q_1	…	$q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}$	…

Věta 2.10 Jmenovatelé sblížených zlomků řetězového zlomku $\alpha = [q_0; q_1, q_2, \dots]$ (konečného nebo nekonečného) tvoří rostoucí posloupnost, tj.
$$1 = Q_0 \leq Q_1 < Q_2 < Q_3 < \cdots,$$
tj.
$$\lim_{k \to \infty} Q_k = \infty.$$

Věta 2.11 Pro každé $k \geq 0$ je
$$P_k Q_{k-1} - Q_k P_{k-1} = (-1)^{k+1}.$$

Důsledek: Pro všechna $k \geq 1$ je
$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{Q_k Q_{k-1}},$$
tedy
$$\left|\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}\right| = \frac{1}{Q_k Q_{k-1}}.$$

Věta 2.12 Čitatel i jmenovatel libovolného sblíženého zlomku jsou čísla nesoudělná.

Věta 2.13 Pro $k \geq 1$ je
$$P_k Q_{k-2} - Q_k P_{k-2} = (-1)^k q_k.$$

Důsledek: Pro všechna $k \geq 2$ je
$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} = \frac{(-1)^k q_k}{Q_k Q_{k-2}}. \tag{2.18}$$

Poznámka:
1. Rovnost (2.18) ukazuje, že sblížené zlomky sudých řádů tvoří rostoucí posloupnost $\left(\text{pro } k \text{ sudé je } \frac{P_k}{Q_k} > \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}\right)$, kdežto sblížené zlomky lichých řádů tvoří klesající posloupnost $\left(\text{pro } k \text{ liché je } \frac{P_k}{Q_k} < \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}\right)$.

2. Z Důsledku Věty 2.11 plyne, že každý sblížený zlomek sudého řádu je menší než libovolný sblížený zlomek lichého řádu.

Poznámka: Je-li řetězový zlomek konečný a je-li jeho poslední prvek $q_n = 1$, je zřejmě zbytek $r_{n-1} = q_{n-1} + 1$ celé číslo. Tak můžeme v tomto případě napsat daný n −členný řetězový zlomek $[q_0; q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, 1]$ ve tvaru $(n-1)$ −členného řetězového zlomku $[q_0; q_1, q_2, \dots, q_{n-1} + 1]$ (kde $q_{n-1} + 1 > 1$), tj.
$[q_0; q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, 1] = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_{n-1} + 1]$.
V dalších úvahách tedy vyloučíme ty konečné řetězové zlomky, jejichž poslední prvek je roven 1.

Definice 2.5. Nekonečný řetězový zlomek $[q_0; q_1, q_2, \dots]$ se nazývá konvergentní, existuje-li limita posloupnosti jeho sblížených zlomků, tj. existuje-li

$$\lim_{k\to\infty} \frac{P_k}{Q_k}.$$

Definice 2.6. Hodnotou nekonečného konvergentního řetězového zlomku $[q_0; q_1, q_2, \dots]$ rozumíme limitu posloupnosti jeho sblížených zlomků, tj. číslo α takové, že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{P_k}{Q_k} = \alpha.$$

Píšeme: $\alpha = [q_0; q_1, q_2, \dots]$.

Věta 2.14 Libovolný nekonečný řetězový zlomek konverguje.

Věta 2.15 Nechť $\alpha = [q_0; q_1, q_2, \dots], r_k$ (pro $k \geq 1$) je zbytek daného řetězového zlomku. Pak

$$\alpha = \frac{r_k P_{k-1} + P_{k-2}}{r_k Q_{k-1} + Q_{k-2}}$$

a

$$r_k = \frac{P_{k-2} - \alpha Q_{k-2}}{\alpha Q_{k-1} - P_{k-1}},$$

kde $P_{k-1}, Q_{k-1}, P_{k-2}, Q_{k-2}$ jsou čitatelé a jmenovatelé sblížených zlomků řádu $(k-1)$ a $(k-2)$ řetězového zlomku α.

Věta 2.16 Ke každému reálnému číslu α existuje jediný řetězový zlomek, který má za hodnotu toto číslo.
Tento řetězový zlomek je konečný, je-li α číslo racionální. Je-li α číslo iracionální, je tento řetězový zlomek nekonečný.
<u>Důkaz:</u> Předpokládejme nejprve, že α je racionální číslo.
Libovolné racionální číslo můžeme vyjádřit ve tvaru $\alpha = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou celá čísla, $q \geq 1$.

Euklidovým algoritmem pro taková celá čísla p, q dostáváme řadu rovností:

$$
\begin{aligned}
p &= qq_0 + r_1 \\
q &= r_1 q_1 + r_2 \\
r_1 &= r_2 q_2 + r_3 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n \\
r_{n-1} &= r_n q_n,
\end{aligned}
$$

kde $q > r_1 > r_2 > \cdots > r_n > 0$.

Uvedené rovnosti můžeme psát ve tvaru:

$$
\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= q_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}} \\
\frac{q}{r_1} &= q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}} \\
\frac{r_1}{r_2} &= q_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}} \\
&\vdots \\
\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= q_{n-1} + \frac{1}{\frac{r_{n-1}}{r_n}} \\
\frac{r_{n-1}}{r_n} &= q_n.
\end{aligned}
$$

Odtud dostáváme

$$\frac{p}{q} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots + \cfrac{1}{q_n}}},$$

neboli

$$\frac{p}{q} = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_n].$$

Je-li α celé číslo, tj. pro $q = 1$ nám zůstane pouze jediná rovnost $p = 1.p + 0$, $q_0 = p$ a řetězový zlomek má tvar $\frac{p}{q} = p = [p]$.

Uvažujme nyní případ, kdy α je iracionální číslo.

Označme $q_0 = [\alpha]$ a jako r_1 označme převrácenou hodnotu k lomené části čísla α, tj.

$r_1 = \frac{1}{\alpha - [\alpha]} = \frac{1}{\alpha - q_0}$. Tedy $\alpha = q_0 + \frac{1}{r_1}$.

Pokud je α iracionální číslo, je $q_0 \neq \alpha$ a r_1 je také iracionální číslo, přičemž $r_1 > 1$ $(0 < \alpha - [\alpha] < 1)$.

Je zřejmé, že tímto způsobem můžeme pro libovolné iracionální číslo α nalézt celé číslo $q_0 = [\alpha]$ a iracionální číslo r_1 tak, že $\alpha = q_0 + \frac{1}{r_1}$.

Najdeme-li takovýmto způsobem pro r_1 čísla $q_1 = [r_1]$ a $r_2 > 1$, pro r_2 čísla $q_2 = [r_2]$ a $r_3 > 1$ atd., dostáváme:

$$\alpha = q_0 + \frac{1}{r_1}, \qquad q_0 = [\alpha]$$
$$r_1 = q_1 + \frac{1}{r_2}, \qquad q_1 = [r_1]$$
$$\vdots$$
$$r_n = q_n + \frac{1}{q_{n+1}}, \qquad q_n = [r_n],$$
$$\vdots$$

kde pro $n \geq 1$ jsou všechna iracionální čísla $r_n > 1$, a tedy pro všechna taková n je $q_n = [r_n] \geq 1$.

Čísla $q_0, q_1, q_2, \dots$ tvoří nekonečnou posloupnost celých čísel takovou, že pro $n \geq 1$ je $q_n \geq 1$ a my můžeme vytvořit nekonečný řetězový zlomek

$$\alpha = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots}} = [q_0; q_1, q_2, \dots],$$

který podle Věty 2.14 konverguje.

Dokážeme, že hodnota tohoto řetězového zlomku je rovna číslu α.

Z předchozích úvah plyne, že $\alpha = [q_0; q_1, q_2, \dots] = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_{k-1}, r_k]$, takže je

$$\alpha = \frac{r_k P_{k-1} + P_{k-2}}{r_k Q_{k-1} + Q_{k-2}}.$$

Položíme-li $[q_0; q_1, q_2, \dots, q_k] = \frac{P_k}{Q_k}$, pak je

$$\frac{P_k}{Q_k} = \frac{q_k P_{k-1} + P_{k-2}}{q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}}.$$

Odtud dostáváme

$$\left|\alpha - \frac{P_k}{Q_k}\right| = \left|\frac{r_k P_{k-1} + P_{k-2}}{r_k Q_{k-1} + Q_{k-2}} - \frac{q_k P_{k-1} + P_{k-2}}{q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}}\right| = \left|\frac{(P_{k-1}Q_{k-2} - P_{k-2}Q_{k-1})(r_k - q_k)}{(r_k Q_{k-1} + Q_{k-2})(q_k Q_{k-1} + Q_{k-2})}\right|$$
$$<< \frac{1}{(r_k Q_{k-1} + Q_{k-2})\big((q_k Q_{k-1} + Q_{k-2})\big)} < \frac{1}{Q_k^2}.$$

Protože je $Q_k \to \infty$, je $\lim_{k\to\infty} \frac{P_k}{Q_k} = \alpha$, tedy nekonečný řetězový zlomek $[q_0; q_1, q_2, \dots]$ má za hodnotu dané číslo α.

Zbývá dokázat jednoznačnost získaného vyjádření.

Nechť $\alpha = [q_0; q_1, q_2, \dots] = [q_0'; q_1', q_2', \dots]$, kde $q_{i,} q_i'$ jsou celá čísla a pro $i \geq 1$ jsou $q_i \geq 1$ a $q_i' \geq 1$, přičemž tyto řetězové zlomky mohou být jak konečné tak nekonečné.

Předpokládejme, že tyto dva řetězové zlomky mají různý alespoň jeden prvek a označme si jako k první index takový, že $q_k \neq q_k'$, tj. předpokládejme, že
$q_0 \neq q_0',\ q_1 \neq q_1', \dots, q_{k-1} \neq q_{k-1}', q_k \neq q_k'$.

Označme si

$$r_k = [q_k; q_{k+1}, q_{k+2}, \dots]$$
$$r_k' = [q_k';\ q_{k+1}', q_{k+2}', \dots].$$

Z rovnosti $\alpha = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_{k-1}, r_k] = [q'_0; q'_1, q'_2, \dots, q'_{k-1}, r'_k]$ dostáváme $r_k = r'_k$, což znamená, že $q_k = [r_k] = [r'_k] = q'_k$, a to je ovšem spor s předpokladem, že $q_k \neq q'_k$.
Předpoklad, že reálné číslo α má dva různé rozklady, nás přivedl ke sporu, a tedy rozklad reálného čísla α v řetězový zlomek je určen jednoznačně. □

Věta 2.17 Pro libovolný sblížený zlomek $\frac{P_k}{Q_k}$ reálného čísla α platí

$$\left|\alpha - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \frac{1}{Q_k^2}.$$

Příklad 6: Nalezněte sblížené zlomky řetězového zlomku $\alpha = [2; 2,1,3,1,1,4,3]$.

Řešení:

q_k		2	2	1	3	1	1	4	3
P_k	1	2	5	7	26	33	59	269	866
Q_k	0	1	2	3	11	14	25	114	367

Sblížené zlomky $\frac{P_k}{Q_k}$ $(0 \leq k \leq 7)$ jsou tedy:

$$\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{26}{11}, \frac{33}{14}, \frac{59}{25}, \frac{269}{114}, \frac{866}{367}.$$

Poslední řetězový zlomek je roven číslu α. [7]

2.4.2 Řešení algebraických rovnic řetězovými zlomky

Nechť

$$f(x) = 0, \qquad f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

je algebraická rovnice n –tého stupně s reálnými koeficienty.
Nechť c_0 je takové celé číslo, že v intervalu $(c_0;\ c_0 + 1\rangle$ leží jediný kořen α rovnice $f(x) = 0$.
Položme

$$\alpha = c_0 + \frac{1}{x_1}, \qquad 0 < \frac{1}{x_1} \leq 1, \qquad \Rightarrow \ x_1 \geq 1.$$

Sestrojme rovnici

$$f_1(x_1) = 0, \qquad f_1(x_1) = x_1^n f\left(c_0 + \frac{1}{x_1}\right).$$

Tato rovnice má nutně reálný kořen $x_1 \geq 1$ a současně má jediný kořen větší nebo roven 1, protože jinak by rovnice $f(x) = 0$ měla v intervalu $(c_0;\ c_0 + 1\rangle$ více než jeden kořen.
Nechť c_1 je takové celé číslo, pro které platí, že $c_1 < x_1 \leq c_1 + 1$
(tj. $x_1 \in (c_1;\ c_1 + 1\rangle$).
Položme

$$x_1 = c_1 + \frac{1}{x_2}, \qquad 0 < \frac{1}{x_2} \leq 1, \qquad \Rightarrow \ x_2 \geq 1.$$

Sestrojme rovnici

$$f_2(x_2) = 0, \qquad f_2(x_2) = x_2^n f_1\left(c_1 + \frac{1}{x_2}\right).$$

S touto rovnicí opakujme právě vyložený postup.
Je zřejmé, že pro přesnou hodnotu kořene α dostáváme řetězový zlomek

$$\alpha = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{c_3 + \cdots}}}$$

Sblížené zlomky, které náleží tomuto řetězovému zlomku, pak dávají přibližné hodnoty hledaného kořene α.

Poznámka:

1. Metoda řetězových zlomků má dvě výrazné přednosti:
   a) Díky vzorci

   $$\left|\alpha - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \frac{1}{Q_k^2}$$

   (Věta 2.17), umíme při každém kroku lehce odhadnout, jak daleko jsme ještě od přesného výsledku.
   b) Má-li rovnice racionální kořen, projeví se to přímo v tom, že řetězový zlomek zůstane konečný a dostaneme jeho přesnou hodnotu.
2. Předpoklad, že v intervalu $(c_0;\ c_0 + 1\rangle$ leží jediný kořen rovnice $f(x) = 0$, není podstatný. Opravdu:

- Předpokládejme, že v intervalu $\langle c_0; c_0 + 1\rangle$ leží např. dva různé kořeny naší rovnice $f(x) = 0$.
- Potom má rovnice $f_1(x_1) = 0$ dva reálné kořeny větší nebo rovné 1.
- Pokud v intervalech $\langle c_i; c_i + 1\rangle$, $(i = 0, 1, 2, \dots, k)$ leží dva kořeny rovnice $f_i(x_i) = 0$, znamená to pouze to, že oba kořeny mají začátek rozvoje řetězového zlomku stejný.
- Protože jsou oba kořeny navzájem různé, musí od jistého indexu začínajíc, např. $k + 1$, nastat případ, že kořeny rovnice $f_k(x_k) = 0$, které jsou větší nebo rovné 1, leží ve dvou různých intervalech s celočíselnými koncovými body.

3. Sbírka řešených úloh

Příklad 1: Separujte reálné kořeny polynomu $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20$ na intervalu $\langle -3; 5)$.

Řešení:

Nejprve vypočtěme polynomy Sturmova řetězce. Tedy:

$\boldsymbol{f(x) = f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20}$

$\boldsymbol{f'(x) = f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 10}$

$f(x) = f'(x).\,g_1(x) - f_1(x)$

$$(x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20) : (4x^3 - 6x^2 + 2x - 10) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$$

$$-\left(x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x\right)$$

$$-\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{15}{2}x - 20$$

$$-\left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}\right)$$

$$-\frac{1}{4}x^2 - \frac{29}{4}x - \frac{85}{4}$$

$\boldsymbol{f_1(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{29}{4}x + \frac{85}{4}}$

$f'(x) = f_1(x).\,g_2(x) - f_2(x)$

$$(4x^3 - 6x^2 + 2x - 10) : \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{29}{4}x + \frac{85}{4}\right)$$

$$(16x^3 - 24x^2 + 8x - 40) : (x^2 + 29x + 85) = 16x - 488$$

$$-(16x^3 + 464x^2 + 1360x)$$

$$-488x^2 - 1352x - 40$$

$$-(-488x^2 - 14152x - 41480)$$

$$12800x + 41440$$

$\boldsymbol{f_2(x) = -12800x - 41440 \sim -3200x - 10360}$

$f_1(x) = f_2(x).\,g_3(x) - f_3(x)$

$$\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{29}{4}x + \frac{85}{4}\right) : (-3200x - 10360) = -\frac{1}{14400}x - \frac{2351}{1296000}$$

$$-\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{259}{360}x + \frac{85}{4}\right)$$

$$\frac{2351}{360}x + \frac{85}{4}$$

$$-\left(\frac{2351}{360}x + \frac{608909}{32400}\right)$$

$$\frac{79591}{32400}$$

$\boldsymbol{f_3(x) = -\frac{79591}{32400}}$

Sturmův řetězec polynomu $f(x)$ má tedy tyto členy:

$f(x) = f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20$

$f'(x) = f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 10$

$f_1(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{29}{4}x + \frac{85}{4}$

$f_2(x) = -3200x - 10360$

$f_3(x) = -\frac{79591}{32400}$

Protože je $st(f(x), f'(x)) = 0$, nemá polynom $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 10x - 20$ vícenásobné kořeny (Věta 1.13).

Sestrojme nyní tabulku znamének polynomu ze Sturmova řetězce v intervalu $\langle -3; 5\rangle$, k výpočtu znamének hodnot v jednotlivých bodech můžeme využít také Hornerovo schéma.

c	$f(c)$	$f'(c)$	$f_1(c)$	$f_2(c)$	$f_3(c)$	$V(c)$
-3	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	3
-2	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	3
-1	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	2
0	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	2
1	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	2
2	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	2
3	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	2
4	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	1
5	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	1

Z tabulky vidíme, že polynom $f(x)$ má dva reálné kořeny v intervalu $(-3; 5)$, z toho jeden jednoduchý kořen v intervalu $(-2; -1)$ a jeden jednoduchý kořen v intervalu $(3; 4)$. [15]

Příklad 2: Odhadněte interval, kde leží reálné kořeny polynomu

$$f(x) = 2x^5 + 3x^3 - 4x^2 - 10x + 2.$$

Řešení:

1. Nalezneme horní mez kladných kořenů polynomu $f(x)$:
   a) Podle Věty 2.1 leží všechny reálné kořeny α polynomu $f(x)$ v intervalu $\langle -1 - \frac{A}{|a_0|}; 1 + \frac{A}{|a_0|}\rangle$, tj. $\alpha \in \langle -1 - 5; 1 + 5\rangle = \langle -6; 6\rangle$.

   b) Z Věty 2.2 plyne, že $\alpha < 1 + \sqrt[3]{5} < 3$.
   c) Pro zúžení intervalu, ve kterém leží kladné kořeny α polynomu $f(x)$ ještě použijeme Větu 2.3.

Nechť $\alpha = 2$, pak využitím Hornerova schématu

2	2	0	3	-4	-10	2
		4	8	22	36	52
	2	4	11	18	26	54

zjistíme, že $f(2) = 54 > 0$ a je zřejmé, že i hodnoty všech derivací $f'(2), f''(2), f'''(2), f^{(4)}(2), f^{(5)}(2)$ jsou kladná reálná čísla, tj. $\alpha < 2$.

Nechť $\alpha = 1$. Pak

1	2	0	3	-4	-10	2
		2	2	5	1	-9
	2	2	5	1	-9	-7

Protože $f(1) = -7 < 0$, nejsou splněny předpokladky Věty 2.3.
Tedy všechny reálné kořeny α jsou menší než 2.

2. Dolní mez záporných reálných kořenů polynomu $f(x)$ zúžíme podle Poznámky za Větou 2.2 tak, že vytvoříme polynom
$$f_1(x) = -f(-x) = 2x^5 + 3x^3 + 4x^2 - 10x - 2$$
a aplikujeme Větu 2.2 a Větu 2.3 na kladné kořeny β polynomu $-f(-x)$:
   a) $\beta < 1 + \sqrt[4]{5} < 3$.
   b) Nechť $\alpha = 2$. Využitím Hornerova schématu

2	2	0	3	4	-10	-2
		4	8	22	52	84
	2	4	11	26	42	82

Máme $f_1(2) = 82 > 0$ a zřejmě hodnoty všech derivací pro $\alpha = 2$ jsou kladná reálná čísla, tedy $\beta < 2$.

Nechť $\alpha = 1$. Pak

1	2	0	3	4	-10	-2
		2	2	5	9	-1
	2	2	5	9	-1	-3

Protože $f_1(1) = -3 < 0$, nejsou splněny předpoklady Věty 2.3, tj. $\beta < 2$.

Pro záporné kořeny $\alpha = -\beta$ polynomu $f(x)$ pak platí $\alpha > -2$.

Tedy všechny reálné kořeny α polynomu $f(x)$, pokud existují, leží v intervalu $(-2; 2)$.

Příklad 3: Separujte reálné kořeny polynomu $f(x)$, jestliže
$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1.$$

Řešení:

1. Nalezneme ohraničení kořenů
   a) $\alpha \in \langle -1 - 3; 1 + 3 \rangle = \langle -4; 4 \rangle$
   b) $\alpha < 1 + \sqrt[1]{3} = 4$

c) Nechť $a = 3$, pak pomocí Hornerova schématu

3	1	-2	-3	2	1
		3	3	0	6
	1	1	0	2	7

Zjistíme, že $f(3) = 7 > 0$, dále je z Hornerova schématu zřejmé, že hodnoty všech derivací jsou kladné, tedy $\alpha < 3$.

Nechť $a = 2$. Pak

2	1	-2	-3	2	1
		2	0	-6	-8
	1	0	-3	-4	-7

Protože $f(2) = -7 < 0$, nejsou splněny předpoklady Věty 2.3. Tedy $\alpha < 3$.

d) Dolní mez intervalu zjistíme z polynomu

$f(-x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$.

Platí: $\beta < 1 + \sqrt[3]{3} < 3$. Protože $\beta = -\alpha$, je $\alpha > -3$.

Všechny reálné kořeny polynomu $f(x)$, pokud existují, leží v intervalu $(-3; 3)$.

2. Sturmův řetězec polynomu $f(x)$:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1,$$
$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 6x + 2,$$
$$f_1(x) = 9x^2 - 3x - 5,$$
$$f_2(x) = 9x + 1,$$
$$f_3 = \frac{41}{9}.$$

c	$f(c)$	$f'(c)$	$f_1(c)$	$f_2(c)$	$f_3(c)$	$V(c)$
3	+	+	+	+	+	0
-3	+	-	+	-	+	4
0	+	+	-	+	+	2
-1	-	-	+	-	+	3
-2	+	-	+	-	+	4

Z tabulky vidíme, že v intervalu $(-3; 3)$ leží 4 reálné kořeny dané rovnice, dva záporné a dva kladné.

Přitom $\alpha_1 \in (-1; 0), \alpha_2 \in (-2; -1), \alpha_3 \in (0; 1), \alpha_4 \in (1; 3)$.

Příklad 4: Separujte reálné kořeny polynomu $f(x) = 0$, jestliže

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x + 5.$$

Řešení:

1. Nalezneme ohraničení kořenů
   a) $\alpha \in \langle -1 - 5; 1 + 5 \rangle = \langle -6; 6 \rangle$
   b) $\alpha < 1 + 4 = 5$

c) Nechť $\alpha = 3$. Pak

3	1	-2	-4	5	5
		3	3	-3	6
3	1	1	-1	2	11
		3	12	33	
	1	4	11	35	

Z tabulky je vidět, že $f(3) = 11 > 0$, $f'(3) = 35 > 0$ a je zřejmé, že i hodnoty ostatní derivací pro $\alpha = 3$ jsou kladné. Tedy $\alpha < 3$.

Nechť $\alpha = 2$. Využitím Hornerova schematu

2	1	-2	-4	5	5
		2	0	-8	-6
	1	0	-4	-3	-1

vidíme, že $f(2) = -1 < 0$, tedy nejsou splněny předpoklady Věty 2.3.

Tedy $\alpha < 3$.

d) Dolní mez záporných reálných kořenů polynomu $f(x)$ zjistíme z polynomu $f(-x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x + 5 = 0$.

Platí: $\beta < 1 + \sqrt[2]{5} < 4$.

Nechť $\alpha = 3$. Pomocí Hornerova schématu

3	1	2	-4	-5	5
		3	15	33	78
	1	5	11	28	83

zjistíme, že $f(3) = 83 > 0$, a zřejmě hodnoty všech derivací pro $\alpha = 3$ jsou kladná reálná čísla, tedy $\beta < 3$.

Nechť $\alpha = 2$. Pak

2	1	2	-4	-5	5
		2	8	8	6
	1	4	4	3	11

Opět vidíme, že $f(2) = 11 > 0$, hodnoty derivací v $\alpha = 2$ jsou kladné, tedy $\beta < 2$.

Nechť $\alpha = 1$. Z Hornerova schemtu

1	1	2	-4	-5	5
		1	3	-1	-6
	1	3	-1	-6	-1

zjistíme, že $f(1) = -1 < 0$. Tedy $\beta < 2$.

Pro záporné kořeny $\alpha = -\beta$ platí $\alpha > -2$.

Kořen α náleží intervalu $(-2; 3)$.

2. Sturmův řetězec polynomu $f(x)$:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x + 5,$$
$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 8x + 5,$$
$$f_1(x) = 22x^2 - 22x - 45,$$
$$f_2(x) = 2x - 1,$$
$$f_3 = \frac{101}{2}.$$

c	$f(c)$	$f'(c)$	$f_1(c)$	$f_2(c)$	$f_3(c)$	$V(c)$
3	+	+	+	+	+	0
-2	+	-	+	-	+	4
0	+	+	-	-	+	2
-1	-	+	-	-	+	3
1	+	-	-	+	+	2
2	-	-	-	+	+	1

Z tabulky vidíme, že v intervalu $(-2; 3)$ leží 4 reálné kořeny dané rovnice, dva záporné a dva kladné.
Přitom $\alpha_1 \in (-1; 0), \alpha_2 \in (-2; -1), \alpha_3 \in (1; 2), \alpha_4 \in (2; 3)$.

Příklad 5: Vypočtěte metodou regula falsi kořen rovnice

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0,$$

ležící v intervalu $\langle 1, 2 \rangle$.

Řešení:

1. Nejprve zúžíme interval, kde leží hledaný kořen α. Vytvoříme Sturmův řetězec polynomu $f(x)$:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2,$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2,$$
$$f_1(x) = 14x + 16 \sim 7x + 8,$$
$$f_2(x) = -\frac{18}{7}.$$

c	$f(c)$	$f'(c)$	$f_1(c)$	$f_2(c)$	$V(c)$
1	-	+	+	-	2
2	+	+	+	-	1
1,5	+	+	+	-	1
1,4	-	+	+	-	2

Z tabulky vidíme, že kořen α leží v intervalu $(1{,}4; 1{,}5)$.

2. Metoda regula falsi:
Nechť $(a, b) = (1{,}4; 1{,}5)$. Na intervalu $(1{,}4; 1{,}5)$ je $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$.
$f(a) = -0{,}096$, $f''(a) = 10{,}4$, $f(b) = 0{,}625$, $f''(b) = 11$, tedy $f(b).f''(b) > 0$, proto za pevný bod volíme $b = 1{,}5$.
Dále postupujeme podle (2.11):

$$c_1 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)}.f(a) = 1{,}4 + \frac{0{,}1}{0{,}625 + 0{,}096}.0{,}096 = 1{,}41331,$$
$$c_2 = c_1 - \frac{b-c_1}{f(b)-f(c_1)}.f(c_1) = 1{,}41331 + \frac{0{,}08669}{0{,}625 + 0{,}00617}.0{,}00617 = $$
$$= 1{,}41416,$$
$$c_3 = c_2 - \frac{b-c_2}{f(b)-f(c_2)}.f(c_2) = 1{,}41416 + \frac{0{,}08584}{0{,}625 + 0{,}00037}.0{,}00037 = $$
$$= 1{,}41421,$$
$$c_4 = c_3 - \frac{b-c_3}{f(b)-f(c_3)}.f(c_3) = 1{,}41421 - \frac{0{,}08579}{0{,}625 - 0}.0 = 1{,}41421,$$

Protože $f(c_3) = 0$, je $c_3 = 1{,}41421 \doteq \sqrt{2}$ kořenem polynomu $f(x)$.

Příklad 6: Vypočtěte kořen rovnice z Příkladu 5 Newtonovou metodou.

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2.$$

Řešení: Z Příkladu 5 víme, že $\alpha \in (1{,}4; 1{,}5)$.

Za pevný bod volíme opět $b = 1{,}4$ a postupujeme podle (2.7):

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 1{,}5 - \frac{0{,}625}{7{,}75} = 1{,}419354839$$

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)} = 1{,}419354839 - \frac{0{,}035245543}{6{,}882414155} = 1{,}414233737,$$

$$b_3 = b_2 - \frac{f(b_2)}{f'(b_2)} = 1{,}414233737 - \frac{0{,}00013776501}{6{,}828638663} = 1{,}414213562,$$

$$b_4 = b_3 - \frac{f(b_3)}{f'(b_3)} = 1{,}414213562 - \frac{0{,}00000000024}{6{,}828427121} = 1{,}414213562.$$

Vidíme, že $b_4 = b_3$, tedy kořen polynomu $f(x)$ je roven číslu $1{,}414213562 \doteq \sqrt{2}$.

Příklad 7: Metodou regula falsi určete kořen rovnice $x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$, který leží v intervalu $(2, 3)$. Výpočet provádějte s přesností na 4 desetinná místa.

Řešení:

1. Nejprve zúžíme interval, ve kterém leží hledaný kořen. Vytvoříme Sturmův řetězec polynomu $f(x)$:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3,$$
$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1,$$
$$f_1(x) = x + 8,$$
$$f_2(x) = -225.$$

c	$f(c)$	$f'(c)$	$f_1(c)$	$f_2(c)$	$V(c)$
2	-	+	+	-	2
3	+	+	+	-	1
2,5	+	+	+	-	1
2,25	+	+	+	-	1

Z tabulky vidíme, že $\alpha \in (2; 2{,}25)$.

2. Metoda regula falsi:

Nechť $(a, b) = (2; 2{,}25)$. Na intervalu $(2; 2{,}25)$ je $f'(x) > 0, f''(x) > 0$.
$f(a) = -1, f''(a) = 4, f(b) = 0{,}51563, f''(b) = 5$, tedy
$f(b).f''(b) > 0$, a proto za pevný bod volíme $b = 2{,}25$.

$$c_1 = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)}.f(a) = 2 + \frac{0{,}25}{0{,}515625 + 1}.1 = 2{,}164948454,$$

$$c_2 = c_1 - \frac{b - c_1}{f(b) - f(c_1)}.f(c_1) =$$
$$= 2{,}164948454 + \frac{0{,}085051456}{0{,}515625 + 0{,}061937843}.0{,}061937843 =$$
$$= 2{,}174069382,$$

$$c_3 = c_2 - \frac{b - c_2}{f(b) - f(c_2)} . f(c_2) =$$
$$= 2{,}174069382 + \frac{0{,}075930617}{0{,}515625 + 0{,}003178162} . 0{,}003178162 =$$
$$= 2{,}174528403,$$
$$c_4 = c_3 - \frac{b - c_3}{f(b) - f(c_3)} . f(c_3) =$$
$$= 2{,}174528403 + \frac{0{,}075471596}{0{,}515625 + 0{,}000201167} . 0{,}000201167 =$$
$$= 2{,}174557836.$$

Platí $|c_4 - c_3| = 0{,}000029433 < 10^{-4}$. Tedy podle 3. tvrzení Poznámky za Větou 2.8 je číslo $c_4 = 2{,}174557836$ již kořen rovnice určený s přesností na 4 desetinná místa.

Příklad 8: Vypočtěte kořen rovnice z Příkladu 7 Newtonovou metodou.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3.$$

Řešení: Z Příkladu 7 již víme, že $\alpha \in (2; 2{,}25)$.
Za pevný bod opět volíme $b = 2{,}25$.

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 2{,}25 - \frac{0{,}515625}{7{,}1875} = 2{,}17826087,$$
$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)} = 2{,}17826087 - \frac{0{,}024076682}{6{,}521417773} = 2{,}17456893,$$
$$b_3 = b_2 - \frac{f(b_2)}{f'(b_2)} = 2{,}17456893 - \frac{0{,}000061764}{6{,}487974374} = 2{,}17455941.$$

Platí $|b_3 - b_2| = 0{,}000009519$, tedy $b_3 = 2{,}17455941$ je již dostatečně přesná hodnota kořene α.

Příklad 9: Metodou regula falsi určete kořen rovnice $x^3 - 2x - 5 = 0$, který leží v intervalu $(2, 3)$. Výpočet provádějte s přesností 10^{-5}.
Řešení:

1. Provedeme zúžení intervalu. Vytvoříme Sturmův řetězec polynomu $f(x)$:

$$f(x) = x^3 - 2x - 5,$$
$$f'(x) = 3x^2 - 2,$$
$$f_1(x) = 4x + 15,$$
$$f_2(x) = -\frac{643}{4}.$$

c	$f(c)$	$f'(c)$	$f_1(c)$	$f_2(c)$	$V(c)$
2	-	+	+	-	2
3	+	+	+	-	1
2,5	+	+	+	-	1
2,1	+	+	+	-	1

Z tabulky vidíme, že $\alpha \in (2; 2{,}1)$.

2. Metoda regula falsi:
   Nechť $(a, b) = (2; 2{,}1)$. Na intervalu $(2; 2{,}25)$ je $f'(x) > 0, f''(x) > 0$.
   $f(a) = -1, f''(a) = 12, f(b) = 0{,}061, f''(b) = 12{,}6$, tedy
   $f(b).f''(b) > 0$, a proto za pevný bod volíme $b = 2{,}1$.

$$c_1 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)}.f(a) = 2 + \frac{0{,}1}{0{,}061+1}.1 = 2{,}0942507,$$

$$c_2 = c_1 - \frac{b-c_1}{f(b)-f(c_1)}.f(c_1) =$$

$$= 2{,}0942507 + \frac{0{,}0057493}{0{,}061+0{,}003356586}.0{,}003356586 =$$

$$= 2{,}097249308,$$

$$c_3 = c_2 - \frac{b-c_2}{f(b)-f(c_2)}.f(c_2) =$$

$$= 2{,}097249308 - \frac{0{,}002750692}{0{,}061-0{,}030157375}.0{,}030157375 =$$

$$= 2{,}09455973,$$

$$c_4 = c_3 - \frac{b-c_3}{f(b)-f(c_3)}.f(c_3) =$$

$$= 2{,}09455973 + \frac{0{,}00544027}{0{,}061+0{,}00009206508}.0{,}00009206508 =$$

$$= 2{,}094551507.$$

   Platí $|c_4 - c_3| = 0{,}00000866 < 10^{-5}$, tedy číslo $c_4 = 2{,}094551507$ je již hledaný kořen rovnice s požadovanou přesností.

   Funkce $f'' > 0$ na $(2; 2{,}5)$, tedy f' je na tomto intervalu rostoucí.
   Protože $f'(x) = 3x^2 - 2$ a $f'(2) = 10$, můžeme podle 2. tvrzení za Větou 2.8 odhadnout chybu aproximace také takto:

$$|f'(x)| \geq f'(2) = 10, \qquad |\alpha - c_n| \leq \frac{|f(c_n)|}{10}.$$

   V našem případě pak platí

$$|\alpha - c_4| \leq \frac{|f(c_4)|}{10},$$

   tj.

$$|\alpha - c_4| \leq \frac{0{,}00000028415}{10} = 2{,}8415.10^{-7} < 10^{-5},$$

   tedy číslo $c_4 = 2{,}094551507$ je hledaný kořen s požadovanou přesností.

Příklad 10: Vypočtěte kořen rovnice z Příkladu 9 Newtonovou metodou.

$$f(x) = x^3 - 2x - 5.$$

Řešení: Z Příkladu 9 víme, že $\alpha \in (2; 2{,}1)$.
Za pevný bod volíme opět $b = 2{,}1$ (protože $f(b).f''(b) > 0$).

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 2{,}1 - \frac{0{,}061}{11{,}23} = 2{,}09456812,$$

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)} = 2{,}09456812 - \frac{0{,}00018572324}{11{,}16164684} = 2{,}094551482,$$
$$b_3 = b_2 - \frac{f(b_2)}{f'(b_2)} = 2{,}094551482 - \frac{0{,}00000000053}{11{,}16143773} = 2{,}094551482,$$
Vidíme, že $b_3 = b_2$, tedy kořen polynomu $f(x)$ je $\alpha \doteq 2{,}094551482$.

Příklad 11: Metodou regula falsi vypočítejte kořen rovnice
$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 11x - 12 = 0,$$
ležící v intervalu $(3; 4{,}5)$ s přesností na dvě desetinná místa.

Řešení:

Nechť $(a, b) = (3; 4{,}5)$. Na intervalu $(3; 4{,}5)$ je $f'(x) > 0, f''(x) > 0$.
$f(a) = -24, f''(a) = 32, f(b) = 42{,}5625, f''(b) = 131$, tedy
$f(b).f''(b) > 0$, a proto za pevný bod volíme $b = 4{,}5$.
$$c_1 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)}.f(a) = 3 - \frac{4{,}5-3}{f(4{,}5)-f(3)}.f(3) = 3{,}540845,$$
$$c_2 = c_1 - \frac{b-c_1}{f(b)-f(c_1)}.f(c_1) =$$
$$= 3{,}540845 - \frac{4{,}5 - 3{,}540845}{f(4{,}5) - f(3{,}540845)}.f(3{,}540845) =$$
$$= 3{,}831542,$$
$$c_3 = c_2 - \frac{b-c_2}{f(b)-f(c_2)}.f(c_2) =$$
$$= 3{,}831542 - \frac{4{,}5 - 3{,}831542}{f(4{,}5) - f(3{,}831542)}.f(3{,}831542) =$$
$$= 3{,}944883.$$
Pokračujeme analogicky dále a dostáváme
$$c_4 = 3{,}982730,$$
$$c_5 = 3{,}994665,$$
$$c_6 = 3{,}999410.$$
Platí $|c_6 - c_5| = 0{,}004745 < 0{,}01$, tedy číslo $c_6 = 3{,}999410$ je již kořen rovnice s požadovanou přesností.

Příklad 12: Vypočtěte kořen rovnice z Příkladu 11 Newtonovou metodou:
$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 11x - 12 = 0.$$
Řešení:

Nechť $(a, b) = (3; 4{,}5)$. Na intervalu $(3; 4{,}5)$ je $f'(x) > 0, f''(x) > 0$.
Abychom mohli porovnat účinnost obou metod, zvolme jako počáteční aproximaci $b_0 = 3{,}540845$.
$$b_1 = b_0 - \frac{f(b_0)}{f'(b_0)} = 3{,}540845 + \frac{18{,}509436}{23{,}960176} \doteq 4{,}313353,$$
$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)} = 4{,}313353 - \frac{23{,}383431}{99{,}486390} \doteq 4{,}078312,$$

$$b_3 = b_2 - \frac{f(b_2)}{f'(b_2)} = 4{,}078312 - \frac{4{,}908319}{66{,}427404} \doteq 4{,}004422,$$
$$b_4 = b_3 - \frac{f(b_3)}{f'(b_3)} = 4{,}004422 - \frac{0{,}261804}{59{,}407527} \doteq 4{,}000015,$$
$$b_5 = b_4 - \frac{f(b_4)}{f'(b_4)} = 4{,}000015 - \frac{0{,}000885}{59{,}001380} \doteq 4{,}000000,$$
Dosazením se přesvědčíme, že číslo 4 je kořenem rovnice.

Pro porovnání uvedeme tabulku, ze které bude zřejmé, jak se postupně vypočítané aproximace liší od skutečné hodnoty kořene $\alpha = 4$ u obou metod:

	Regula falsi		*Newtonova metoda*	
		odchylka		odchylka
i	c_i	$\lvert c_i - 4\rvert$	b_i	$\lvert b_i - 4\rvert$
0	3,540845	0,459155	3,540845	0,459155
1	3,831542	0,168458	4,313353	0,313353
2	3,944883	0,055117	4,078312	0,078312
3	3,982730	0,017270	4,004422	0,004422
4	3,994665	0,005335	4,000015	0,000015
5	3,999410	0,000590	4,000000	0,000000

Newtonova metoda je tedy přesnější než metoda regula falsi.

Příklad 13: Nalezněte hodnotu řetězového zlomku $\alpha = [2; , 6, 2, 6, \dots]$, kde všechny další prvky jsou rovny posloupnosti 2 a 6.

Řešení: Zřejmě je
$$\alpha = [2; 6, r_2] = [2; 6, \alpha] = 2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\alpha}} = 2 + \frac{\alpha}{6\alpha + 1} = \frac{13\alpha + 2}{6\alpha + 1}.$$
Z tohoto vztahu dostáváme kvadratickou rovnici $3\alpha^2 - 6\alpha - 1 = 0$ s kořeny
$$\alpha_{1,2} = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}.$$
Protože je $\alpha > 0$, je
$$\alpha = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}.$$

Příklad 14: Nalezněte hodnotu řetězového zlomku $\alpha = [3; 3, 1, 1, \dots]$, kde všechny další prvky postupně nabývají hodnot 3, 3, 1, 1.

Řešení: Zřejmě je $\alpha = [3; 3, 1, 1, r_4] = [3; 3, 1, 1, \alpha]$, a tedy podle Věty 2.15 máme
$$\alpha = \frac{r_4 P_3 + P_2}{r_4 Q_3 + Q_2} = \frac{\alpha P_3 + P_2}{\alpha Q_3 + Q_2}.$$

Sestrojme si tabulku hodnot P_k, Q_k:

q_k		3	3	1	1	…
P_k	1	3	10	13	23	…
Q_k	0	1	3	4	7	…

Pak

$$\alpha = \frac{\alpha.23 + 13}{\alpha.7 + 4},$$

tj. $7\alpha^2 - 19\alpha - 13 = 0$, a protože $\alpha > 0$, je

$$\alpha = \frac{19 + 5\sqrt{29}}{14}.$$

Příklad 15: Zkraťte zlomek

$$\frac{1781}{6279}.$$

Řešení: Vyjádříme tento zlomek ve tvaru konečného řetězového zlomku. Budeme postupovat podle důkazu Věty 2.17:

$$\begin{aligned}
1781 &= 6279.0 + 1781\\
6279 &= 1781.3 + 936\\
1781 &= 936.1 + 845\\
936 &= 845.1 + 91\\
845 &= 91.9 + 26\\
91 &= 26.3 + 13\\
26 &= 13.2 + 0
\end{aligned}$$

Tedy

$$\frac{1781}{6279} = [0; 3, 1, 1, 9, 3, 2]$$

Nalezneme sblížené zlomky:

q_k		0	3	1	1	9	3	2
P_k	1	0	1	1	2	19	59	137
Q_k	0	1	3	4	7	67	208	483

$$\frac{P_k}{Q_k} = \frac{137}{483} = \frac{1781}{6279},$$

a

$$\frac{137}{483}$$

je už zlomek v základním tvaru.

Příklad 16: Rozložte v řetězový zlomek číslo

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{7}}{2}.$$

Řešení: Budeme postupovat podle důkazu Věty 2.17. Zřejmě platí:

$$q_0 = [\alpha] = \left[\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right] = 1,$$

$$r_1 = \frac{1}{\alpha - [\alpha]} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{7}}{2} - 1} = \frac{2}{\sqrt{7}-1} = \frac{1+\sqrt{7}}{3},$$

$$q_1 = \left[\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right] = 1,$$

$$r_2 = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{7}}{3} - 1} = \frac{3}{\sqrt{7}-2} = \frac{3(\sqrt{7}+2)}{3} = \sqrt{7}+2,$$

$$q_2 = \left[\sqrt{7}+2\right] = 4,$$

$$r_3 = \frac{1}{\sqrt{7}+2-4} = \frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{3},$$

$$q_3 = \left[\frac{\sqrt{7}+2}{3}\right] = 1,$$

$$r_4 = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}+2}{3} - 1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}-1}{3}} = \frac{3}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{2} = \alpha$$

Tedy

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{7}}{2} = [1; 1,4,1,1,1,4,1, \dots].$$

Příklad 17: Nalezněte první čtyři prvky rozkladu v řetězový zlomek čísla

$$\pi = 3{,}14159265 \dots$$

Řešení: Nalezneme

$$q_0 = [\pi] = 3; \quad r_1 = \frac{1}{0{,}14159265} = 7{,}062513305,$$

$$q_1 = [r_1] = 7; \quad r_2 = \frac{1}{r_1 - [r_1]} = \frac{1}{0{,}62513305} = 15{,}99659464,$$

$$q_2 = [r_2] = 15; \quad r_3 = \frac{1}{r_2 - [r_2]} = \frac{1}{0{,}99659464} = 1{,}003416996,$$

$$q_2 = [r_3] = 1; \quad \dots$$

Tedy $\pi = [3; 7,15,1, \dots]$. [7]

Poznámka:

Pro číslo π byla vypočítána řada prvků řetězového zlomku. Rozklad čísla π v řetězový zlomek má tvar: $\pi = [3; 7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1, \dots]$.

Příklad 18: Nalezněte sblížený zlomek, který se od reálného čísla $3+\sqrt{7}$ liší o méně než 10^{-5}.

Řešení: Nalezneme rozvoj čísla $3+\sqrt{7}$ v řetězový zlomek, tj.

$$\alpha = 3+\sqrt{7}$$
$$q_0 = \left[3+\sqrt{7}\right] = 5$$
$$r_1 = \frac{1}{3+\sqrt{7}-5} = \frac{1}{\sqrt{7}-2} = \sqrt{7}+2$$
$$q_1 = \left[\sqrt{7}+2\right] = 4$$
$$r_2 = \frac{1}{\sqrt{7}+2-4} = \frac{1}{\sqrt{7}-2} = \sqrt{7}+2$$
$$\dots$$

Tedy $3+\sqrt{7} = [5; 4,4,4, \dots]$.

Dále zjistíme posloupnost čitatelů a jmenovatelů sblížených zlomků čísla $3+\sqrt{7}$:

q_k		5	4	4	4	4	4	...
P_k	1	5	21	89	377	1597	6765	...
Q_k	0	1	4	17	72	305	1292	...

Podle Věty 2.17 platí

$$\left|\alpha - \frac{P_k}{Q_k}\right| \leq \frac{1}{Q_k^2},$$

tj.

$$\left|\alpha - \frac{P_5}{Q_5}\right| \leq \frac{1}{1292^2} < 6.10^{-7} < 10^{-5}.$$

Tedy sblížený zlomek

$$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{6765}{1292}$$

se od čísla $3+\sqrt{7}$ liší o méně než 10^{-5}.

Příklad 19: Najděte metodou řetězových zlomků přibližnou hodnotu kořene α rovnice

$$f(x) = 0, \qquad f(x) = x^3 + 18x - 30,$$

který leží v intervalu $(1, 2\rangle$.

Řešení:

1. Položme

$$\alpha = 1 + \frac{1}{x_1}, \qquad x_1 > 1$$

a sestrojme rovnici $f_1(x_1) = 0$, kde

$$f_1(x_1) = x_1^3 f\left(1 + \frac{1}{x_1}\right):$$

$$x_1^3\left(\left(1+\frac{1}{x_1}\right)^3+18\left(1+\frac{1}{x_1}\right)-30\right)=$$
$$=x_1^3\left(1+3\frac{1}{x_1^2}+3\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1^3}+18+18\frac{1}{x_1}-30\right)=$$
$$=x_1^3+3x_1+3x_1^2+1+18x_1^3+18x_1^2-30x_1^3=$$
$$=-11x_1^3+21x_1^2+3x_1+1=0,$$

tj. rovnice

$$11x_1^3-21x_1^2-3x_1-1=0.$$

Tato rovnice má jediný reálný kořen větší nebo roven 1, který leží v intervalu $(2,3)$.

Opravdu:

- Všechny reálné kořeny polynomu $f_1(x_1)$ leží v intervalu
$$\left\langle -1-\frac{21}{11};1+\frac{21}{11}\right\rangle,$$
tj. v intervalu $(-3,3)$.
- Sturmův řetězec polynomu $f_1(x_1)$ má tvar:
$$f_1(x_1)=11x_1^3-21x_1^2-3x_1-1$$
$$f_1'(x_1)=33x_1^2-42x_1-3$$
$$(f_1)_1(x_1)=20x_1+3$$
$$(f_1)_2(x_1)=-1$$
- Máme

c	$f_1(c)$	$f_1'(c)$	$(f_1)_1(c)$	$(f_1)_2(c)$	$V(c)$
-3	-	+	-	-	2
3	+	+	+	-	1
0	-	-	+	-	2
2	-	+	+	-	2

- Tedy kladný reálný kořen leží v intervalu $(2,3)$.
-

2. Položme
$$x_1=2+\frac{1}{x_2},\qquad x_2>1$$
a sestrojme rovnici $f_2(x_2)=0$, kde
$$f_2(x_2)=x_2^3f_1\left(2+\frac{1}{x_2}\right).$$

Poznámka:

- Rozvineme-li polynom $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ v Taylorův polynom se středem v c, máme
$$f(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n.$$
- Pro $x-c=h$, tj. $x=c+h$ pak je
$$f(c+h)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}h+\frac{f''(c)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^n(c)}{n!}h^n.$$

Tedy pro

$$\frac{1}{x_2} = h,$$

dostáváme

$$f_1(x_1) = f_1\left(2 + \frac{1}{x_2}\right) = f_1(2 + h) = f_1(2) + \frac{f_1'(2)}{1!}h + \frac{f_1''(2)}{2!}h^2 + \frac{f_1^3(2)}{3!}h^3.$$

Pomocí Hornerova schématu určíme koeficienty v Taylorově rozvoji $f_1(x_1)$:

2	11	-21	-3	-1
		22	2	-2
2	11	1	-1	-3
		22	46	
2	11	23	45	
		22		
	11	45		

máme

$$f_1(x_1) = f_1(2 + h) = -3 + 45h + 45h^2 + 11h^3,$$

tedy

$$f_2(x_2) = x_2^3 f_1\left(2 + \frac{1}{x_2}\right) = x_2^3\left(-3 + 45\frac{1}{x_2} + 45\left(\frac{1}{x_2}\right)^2 + 11\left(\frac{1}{x_2}\right)^3\right) =$$
$$= -3x_2^3 + 45x_2^2 + 45x_2 + 11.$$

Sestrojili jsme tak rovnici

$$3x_2^3 - 45x_2^2 - 45x_2 - 11 = 0.$$

Opět najdeme interval, kde leží jediný reálný kořen této rovnice větší nebo roven 1:

- Všechny reálné kořeny leží v intervalu $\langle -1 - 15; 1 + 15\rangle$, tj. v intervalu $(-16; 16)$.
- Sturmův řetězec polynomu $f_2(x_2)$ má tvar:

$$f_2(x_2) = 3x_2^3 - 45x_2^2 - 45x_2 - 11$$
$$f_2'(x_2) = 9x_2^2 - 90x_2 - 45$$
$$(f_2)_1(x_2) = 36x_2 + 17$$
$$(f_2)_2(x_2) = 1$$

- Máme

c	$f_2(c)$	$f_2'(c)$	$(f_2)_1(c)$	$(f_2)_2(c)$	$V(c)$
-16	-	+	-	+	3
16	+	+	+	+	0
0	-	-	+	+	1
15	-	+	+	+	1

- Tedy kladný reálný kořen leží v intervalu $(15; 16)$.

3. Položme

$$x_2 = 15 + \frac{1}{x_3}, \qquad x_3 > 1$$

a sestrojme rovnici $f_3(x_3) = 0$, kde

$$f_3(x_3) = x_3^3 f_2\left(15 + \frac{1}{x_3}\right):$$

Tedy pro

$$\frac{1}{x_3} = h$$

dostáváme

$$f_2(x_2) = f_2\left(15 + \frac{1}{x_3}\right) = f_2(15 + h)$$
$$= f_2(15) + \frac{f_2'(15)}{1!}h + \frac{f_2''(15)}{2!}h^2 + \frac{f_2^3(15)}{3!}h^3$$

Pomocí Hornerova schématu opět určíme koeficienty:

15	3	-45	-45	-11
		45	0	-675
15	3	0	-45	-686
		45	675	
15	3	45	630	
		45		
	3	90		

máme

$$f_2(x_2) = f_2(15 + h) = -686 + 630h + 90h^2 + 3h^3,$$

tedy

$$f_3(x_3) = x_3^3 f_2\left(15 + \frac{1}{x_3}\right) = x_3^3\left(-686 + 630\frac{1}{x_3} + 90\left(\frac{1}{x_3}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{x_3}\right)^3\right) =$$
$$= -686x_3^3 + 630x_3^2 + 90x_3 + 3.$$

Sestrojili jsme tak rovnici

$$686x_3^3 - 630x_3^2 - 90x_3 - 3 = 0.$$

Opět zjistíme, že v intervalu $(1; 2)$ leží jediný reálný kořen této rovnice větší nebo roven 1.

4. Položme

$$x_3 = 1 + \frac{1}{x_4}, \qquad x_4 > 1$$

a sestrojme rovnici $f_4(x_4) = 0$, kde

$$f_4(x_4) = x_4^3 f_3\left(1 + \frac{1}{x_4}\right).$$

Analogicky jako v předchozích případech dostaneme

$$f_4(x_4) = 37x_4^3 - 70x_4^2 - 1428x_4 - 686,$$

tj. $37x_4^3 - 70x_4^2 - 1428x_4 - 686 = 0$,

a zjistíme, že jediný reálný kořen této rovnice větší nebo roven 1 leží v intervalu $(21; 22)$.

5. Je tedy

$$x_4 = 21 + \frac{1}{x_5}, \qquad x_5 > 1.$$

A pokračujeme analogicky dál.

Celkem tedy máme

$$\alpha = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{21 + \cdots}}}}.$$

Najdeme nyní prvních pět sblížených zlomků čísla α:

Z tabulky

q_k	-	1	2	15	1	21	...
P_k	1	1	3	46	49	1075	...
Q_k	0	1	2	31	33	724	...

dostáváme sblížené zlomky

$$\frac{1}{1}; \ \frac{3}{2}; \ \frac{46}{31}; \ \frac{49}{33}; \ \frac{1075}{724}; \ldots.$$

Vezmeme-li za přibližnou hodnotu kořene α číslo

$$\frac{1075}{724} = 1{,}48480662\ \ldots,$$

je podle Věty 2.17

$$\left|\alpha - \frac{1075}{724}\right| < \frac{1}{724^2} < 0{,}000002.$$

V našem výsledku je tedy zaručených nejméně 5 desetinných míst (ve skutečnosti je správných 7 desetinných míst). [7]

Příklad 20: Metodou řetězových zlomků vypočítejte kořen rovnice

$$x^3 - 3x - 1 = 0,$$

který leží v intervalu $(1; 2)$.

Řešení:

1. Položme

$$\alpha = 1 + \frac{1}{x_1}, \qquad x_1 > 1$$

a sestrojme rovnici $f_1(x_1) = 0$, kde

$$f_1(x_1) = x_1^3 f\left(1 + \frac{1}{x_1}\right):$$

$$x_1^3\left(\left(1+\frac{1}{x_1}\right)^3-3\left(1+\frac{1}{x_1}\right)-1\right)=$$
$$=x_1^3\left(1+3\frac{1}{x_1^2}+3\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1^3}-3-3\frac{1}{x_1}-1\right)=$$
$$=x_1^3+3x_1+3x_1^2+1-3x_1^3-3x_1^2-x_1^3=-3x_1^3+3x_1+1,$$

tj. rovnice

$$3x_1^3-3x_1-1=0.$$

- Všechny reálné kořeny polynomu $f_1(x_1)$ leží v intervalu
$$\left\langle -1-\frac{3}{3};1+\frac{3}{3}\right\rangle,$$
tj. v intervalu $(-2,2)$.
- Sturmův řetězec polynomu $f_1(x_1)$ má tvar:
$$f_1(x_1)=3x_1^3-3x_1-1$$
$$f_1'(x_1)=9x_1^2-3$$
$$(f_1)_1(x_1)=6x_1+3$$
$$(f_1)_2(x_1)=\frac{3}{2}$$
- Máme

c	$f_1(c)$	$f_1'(c)$	$(f_1)_1(c)$	$(f_1)_2(c)$	$V(c)$
-2	-	+	-	+	3
2	+	+	+	+	0
0	-	-	+	+	1
1	-	+	+	+	1

- Tedy kladný reálný kořen leží v intervalu $(1,2)$.

2. Položme
$$x_1=1+\frac{1}{x_2},\qquad x_2>1$$
a sestrojme rovnici $f_2(x_2)=0$, kde
$$f_2(x_2)=x_2^3f_1\left(1+\frac{1}{x_2}\right):$$
$$x_2^3\left(3\left(1+\frac{1}{x_2}\right)^3-3\left(1+\frac{1}{x_2}\right)-1\right)=$$
$$=x_2^3\left(3+9\frac{1}{x_2}+9\frac{1}{x_2^2}+3\frac{1}{x_2^3}-3-3\frac{1}{x_2}-1\right)=$$
$$=3x_2^3+9x_2^2+9x_2+3-4x_2^3-3x_2^2=-x_2^3+6x_2^2+9x_2+3,$$
tj. rovnice
$$x_2^3-6x_2^2-9x_2-3=0.$$
- Všechny reálné kořeny polynomu $f_2(x_2)$ leží v intervalu
$$\langle -1-9;1+9\rangle,$$
tj. v intervalu $(-10;\ 10)$.

- Sturmův řetězec polynomu $f_2(x_2)$ má tvar:

$$f_2(x_2) = x_2^3 - 6x_2^2 - 9x_2 - 3,$$
$$f_2'(x_2) = 3x_2^2 - 12x_2 - 9,$$
$$(f_2)_1(x_2) = 14x_2 + 9,$$
$$(f_2)_2(x_2) = \frac{3}{14}$$

- Máme

c	$f_2(c)$	$f_2'(c)$	$(f_2)_1(c)$	$(f_2)_2(c)$	$V(c)$
-10	-	+	-	+	3
10	+	+	+	+	0
0	-	-	+	+	1
2	-	-	+	+	1
5	-	+	+	+	1
7	-	+	+	+	1
8	+	+	+	+	0

- Tedy kladný reálný kořen leží v intervalu $(7; 8)$.

3. Položme

$$x_2 = 7 + \frac{1}{x_3}, \qquad x_3 > 1$$

a sestrojme rovnici $f_3(x_3) = 0$, kde

$$f_3(x_3) = x_3^3 f_2\left(7 + \frac{1}{x_3}\right):$$

Nechť

$$\frac{1}{x_3} = h.$$

Pak

$$f_2\left(7 + \frac{1}{x_3}\right) = f_2(7 + h) = f_2(7) + \frac{f_2'(7)}{1!}h + \frac{f_2''(7)}{2!}h^2 + \frac{f_2'''(7)}{3!}h^3.$$

Pomocí Hornerova schématu určíme koeficienty:

7	1	-6	-9	-3
		7	7	-14
7	1	1	-2	-17
		7	56	
7	1	8	54	
		7		
	1	15		

a máme

$$f_3(x_3) = x_3^3 f_2\left(7 + \frac{1}{x_3}\right) = x_3^3[-17 + 54h + 15h^2 + h^3] =$$
$$= x_3^3\left[-17 + 54\frac{1}{x_3} + 15\left(\frac{1}{x_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{x_3}\right)^3\right] =$$
$$= -17x_3^3 + 54x_3^2 + 15x_3 + 1$$

Sestrojili jsme tak rovnici $17x_3^3 - 54x_3^2 - 15x_3 - 1 = 0$

- Všechny reálné kořeny této rovnice leží v intervalu
$$\left\langle -1 - \frac{54}{17}; 1 + \frac{54}{17}\right\rangle,$$
tj. přibližně v intervalu $(-5;\ 5)$.
- Můžeme ještě snížit ohraničení kladných reálných kořenů α:
Nechť např. $a = 4$. Pak

4	17	-54	-15	-1
		68	54	164
	17	14	41	163

Tedy $f_3(4) > 0$ a je zřejmé, že všechny derivace funkce f_3 pro $a = 4$ jsou kladné, tedy $\alpha < 4$.
Všechny reálné kořeny dané rovnice leží v intervalu $(-5; 4)$.
- Sturmův řetězec polynomu $f_3(x_3)$ má tvar:
$$f_3(x_3) = 17x_3^3 - 54x_3^2 - 15x_3 - 1,$$
$$f_3'(x_3) = 51x_3^2 - 108x_3 - 15,$$
$$(f_3)_1(x_3) = 2454x_3 + 321 \sim 818x_3 + 107,$$
$$(f_3)_2(x_3) = 153$$
- Máme

c	$f_3(c)$	$f_3'(c)$	$(f_3)_1(c)$	$(f_3)_2(c)$	$V(c)$
-5	-	+	-	+	3
4	+	+	+	+	0
0	-	-	+	+	1
2	-	-	+	+	1
3	-	+	+	+	1

- Tedy kladný reálný kořen leží v intervalu $(3; 4)$.

4. Položme
$$x_3 = 3 + \frac{1}{x_4}, \qquad x_4 > 1$$
a sestrojme rovnici $f_4(x_4) = 0$, kde
$$f_4(x_4) = x_4^3 f_3\left(3 + \frac{1}{x_4}\right):$$
Nechť
$$\frac{1}{x_4} = h.$$

Pak

$$f_3\left(3+\frac{1}{x_4}\right)=f_3(3+h)=f_3(3)+\frac{f_3'(3)}{1!}h+\frac{f_3''(3)}{2!}h^2+\frac{f_3'''(3)}{3!}h^3.$$

Pomocí Hornerova schématu určíme koeficienty:

3	17	-54	-15	-1
		51	-9	-72
3	17	-3	-24	-73
		51	144	
3	17	48	120	
		51		
	17	99		

a máme

$$f_4(x_4)=x_4^3f_2\left(3+\frac{1}{x_4}\right)=x_4^3[-73+120h+99h^2+17h^3]=$$

$$=x_4^3\left[-73+120\frac{1}{x_4}+99\left(\frac{1}{x_4}\right)^2+17\left(\frac{1}{x_4}\right)^3\right]=$$

$$=-73x_4^3+120x_4^2+99x_4+17$$

Sestrojili jsme tak rovnici $73x_4^3-120x_4^2-99x_4-17=0$

- Všechny její reálné kořeny leží v intervalu
$$\left\langle -1-\frac{120}{73};1+\frac{120}{73}\right\rangle,$$
tj. v intervalu $(-3;\ 3)$.
- Sturmův řetězec polynomu $f_4(x_4)$ má tvar:
$$f_4(x_4)=73x_4^3-120x_4^2-99x_4-17,$$
$$f_4'(x_4)=219x_4^2-240x_4-99\ \sim 73x_4^2-80x_4-33\ ,$$
$$(f_4)_1(x_4)=8018x_4+2561,$$
$$(f_4)_2(x_4)=\frac{3611315046}{8018^2}.$$
- Máme

c	$f_4(c)$	$f_4'(c)$	$(f_4)_1(c)$	$(f_4)_2(c)$	$V(c)$
-3	-	-	-	+	1
3	+	+	+	+	0
0	-	-	+	+	1
2	-	+	+	+	1

- Tedy kladný reálný kořen leží v intervalu $(2;3)$.

5. Je tedy

$$x_4 = 2 + \frac{1}{x_5}, \qquad x_5 > 1.$$

A pokračujeme analogicky dál.

Celkem tedy máme

$$\alpha = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}.$$

Najdeme nyní prvních pět sblížených zlomků čísla α:

q_k	-	1	1	7	3	2	...
P_k	1	1	2	15	47	109	...
Q_k	0	1	1	8	25	58	...

Vezmeme-li za přibližnou hodnotu kořene α číslo

$$\frac{109}{58} = 1{,}879310345$$

je podle Věty 2.17

$$\left|\alpha - \frac{109}{58}\right| < \frac{1}{58^2} < 0{,}0003.$$

Výsledek je tedy správný nejméně na 3 desetinná místa.

Příklad 21. Nalezněte všechny kořeny rovnice

$$6x^5 - x^4 - 20x^3 - 3x^2 + 7x + 2 = 0,$$

víte-li, že má alespoň jeden racionální kořen.

Řešení:

Nechť

$$\frac{r}{s}, \qquad r \in Z, s \in Z^+,$$

je racionální kořen dané rovnice. Podle Věty 1.7 tvrzení a) $r \mid 2$, $s \mid 6$. Tedy $r \in \{1, -1, 2, -2\}, s \in \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$.

Jako racionální kořeny dané rovnice tak připadají v úvahu čísla

$$1, -1, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}.$$

Protože $f(1) = -9$ a $f(-1) = 5$, podle Věty 1.7 tvrzení b) pak jako možné kořeny vybereme čísla

$$-2, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}.$$

Snadno zjistíme, že racionálními kořeny dané rovnice jsou čísla

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}, \qquad \alpha_2 = \frac{3}{2}.$$

Z Hornerova schématu

$-\frac{1}{2}$	6	-1	-20	-3	7	2
		-3	2	9	-3	-2
$\frac{2}{3}$	6	-4	-18	6	4	0
		4	0	-12	-4	
	6	0	-18	-6		

můžeme danou rovnici vyjádřit ve tvaru

$$6x^5 - x^4 - 20x^3 - 3x^2 + 7x + 2 = 6(x^3 - 3x - 1)\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Tedy zbývá nalézt kořeny rovnice $x^3 - 3x - 1 = 0$.
V Příkladu 20 jsme nalezli přibližnou hodnotu jednoho kořene

$$\alpha_3 \doteq \frac{109}{58} = 1{,}879310345.$$

Např. opět pomocí Hornerova schématu

1,879310345	1	0	-3	-1
		1,879310345	3,531807373	0,999431098
	1	1,879310345	0,531807373	0,000568902

získáme kvadratickou rovnici

$$x^2 + 1{,}879310345x + 0{,}531807373 = 0$$

pro výpočet přibližných hodnot zbývajících dvou kořenů

$$\alpha_4 \doteq -1{,}532229616, \qquad \alpha_5 \doteq -0{,}34708073.$$

Závěr

Vytvořená práce shrnuje poznatky o polynomech, algebraických rovnicích a přibližných metodách jejich řešení. Jsou zde uvedeny všechny základní pojmy a vysvětleny postupy hledání přibližných hodnot kořenů algebraických rovnic vyšších stupňů. Práce je zaměřena na metody klasické, ale také se zabývá méně tradiční metodou řetězových zlomků.

Sbírka úloh zahrnuje příklady různé obtížnosti, které jsou řešeny v práci uvedenými metodami.

Při psaní této diplomové práce pro mě bylo nejnáročnější naučit se používat přibližné metody řešení algebraických rovnic, o kterých v ní pojednávám. První kapitola teoretické části pro mě byla spíše opakováním a doplněním poznatků, které jsem nastudovala při psaní práce bakalářské. Druhá kapitola byla složitější – něco z teorie těchto metod jsem již znala ze svého bakalářského studia, ale převážná část (především metoda řetězových zlomků) pro mne byla neznámou. Bylo tedy nutné vyhledat si literaturu, která se tímto zabývá, a nejprve teorii nastudovat a naučit se metody používat. Teprve potom jsem již mohla dávat dohromady informace z různých zdrojů a zpracovat z nich teoretickou část. Sbírka úloh byla náročná tím, že při převzetí řešení z nějaké literatury jsem často narážela na různé způsoby zápisu postupů. Musela jsem je tedy utřídit a přepracovávat tak, aby se shodovaly s postupem, který uvádím v teorii.

Psaním mé diplomové práce jsem si prohloubila znalosti o algebraických rovnicích a také jsem se naučila nové metody jejich řešení. Ucelila jsem si vědomosti z dané oblasti a procvičila jsem si práci s více zdroji a zpracování informací, což jistě do budoucna využiji.

Seznam literatury

[1] Bican, L.: *Algebra*, AVČR, Praha, 2001

[2] Grešák, P.: *Algebra a geometria*, Vydavatelstvo technickej a ekonomickej literatury, Bratislava, 1982

[3] Halaš, R.: *Teorie čísel*, Vydavatelství Univerzity Palackého, Olomouc, 1997

[4] Horák, P.: *Algebra a teoretická aritmetika – II*. SPN, Brno, 1988

[5] Horová, I., Zelinka, J.: *Numerické metody*, MU Brno, 2004

[6] Kořínek, V.: *Základy algebry,* ČSAV, Praha, 1956

[7] Kühnová, J.: *Vybrané partie z teorie čísel*, Gaudeamus

[8] Míka, S.: *Numerické metody algebry*, SNTL, Praha, 1985

[9] Maroš, B. – Marošová, M.: *Základy numerické matematiky*, Vysoké učení technické v Brně, Brno, 1997

[10] Procházka, L. – Bican, L. – Kepka, T. – Němec, P.: *Algebra*, Academia, Praha, 1990

[11] Schwarz, Š.: *Základy náuky o riešení rovníc*, ČSAV, 1958

[12] Skýva, L. – Machalík, F.: *Numerické metody*, Vydavatelstvo technickej a ekonomickej literatury, Bratislava 1985

[13] Šisler, M. – Andrys, J.: *O řešení algebraických rovnic*, Mladá fronta, Praha, 1966

[14] Škrášek, J. – Tichý, Z.: *Základy aplikované matematiky I*, SNTL, Praha, 1989

[15] www.matematika.webz.cz, 29. 12. 2015