Univerzita Hradec Králové

Pedagogická fakulta

Katedra informatiky Přírodovědecké fakulty

Vliv vizuální reprezentace důkazů matematických vět na jejich srozumitelnost

Dizertační práce

2020

RNDr. Andrea Ševčíková

Univerzita Hradec Králové

Pedagogická fakulta

Katedra informatiky Přírodovědecké fakulty

Vliv vizuální reprezentace důkazů matematických vět na jejich srozumitelnost

Dizertační práce

Autor: RNDr. Andrea Ševčíková

Studijní program: P 7507 Specializace v pedagogice

Studijní obor: Informační a komunikační technologie ve vzdělávání

Školitel: prof. RNDr. Eva Milková, Ph.D.

2020

Prohlášení

„Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracovala pod vedením školitelky samostatně a uvedla všechny použité prameny a literaturu.“

V Hradci Králové dne 3. 2. 2020

Poděkování

Ráda bych tímto poděkovala vedoucí práce prof. RNDr. Evě Milkové, PhD. za cenné rady, připomínky a metodické vedení práce.

Děkuji všem respondentům za ochotu zúčastnit se mého výzkumu a své rodině za trpělivost.

Abstrakt

Matematické důkazy pro svoji obtížnost většinou nepatří u studentů k oblíbené oblasti vzdělávání. Proto se hledají různé nástroje, které by pomohly studentům význam vět a myšlenkovou hloubku jejich důkazů lépe objasnit. Vzhledem k tomu, že studenti inklinují převáženě k vizuálnímu učebnímu stylu, vhodná vizualizace matematických důkazů by mohla být velmi užitečným nástrojem pro zvýšení pochopení této oblasti. V teoretické části pojednání se zaměřujeme na zdůvodnění významu důkazů matematických vět a podáváme přehled výzkumů zabývajících se jejich vizualizací. Výzkumná část pojednání představuje výzkum zkoumající vliv vizuální reprezentace důkazů matematických vět na jejich srozumitelnost pomocí aplikací vytvořených v rámci doktorského studia pro prezentaci důkazů vět zařazených do předmětů zabývajících se teorií grafů na Fakultě informatiky a managementu Univerzity Hradec Králové.

Klíčová slova

Důkaz, vizualizace, teorie grafů, multimediální aplikace.

Abstract

Mathematical proofs do not belong to popular topics of education among students due to their difficulty. Therefore, we are searching for various tools to help students to better clarify the meaning of theorems and the thought depth of their proofs within educational process. As students tend predominantly to a visual learning style, suitable visualization could become a very convenient instrument used to enhance understanding of this area of mathematics. First we focus on justifying the importance of the mathematical proofs and provide an overview of the research dealing with their visualization in the theoretical part of the paper. The following research part of the paper represents the original research on the impact of visual representation of mathematical theorem proofs on their clarity based on the applications created within the framework of the doctoral study and focused on presentation of the proofs of theorems presented in lectures and seminars of the courses covering selected parts of graph theory at the Faculty of Informatics and Management of the University of Hradec Králové.

Keywords

Proof, visualization, graph theory, multimedia applications.

Prohlášení

Prohlašuji, že disertační práce je uložena v souladu s rektorským výnosem č. 13/2017 (Řad pro nakládání s bakalářskými, diplomovými, rigorózními, disertačními a habilitačními pracemi na UHK).

Datum: …………   Podpis studenta: ………………………

Obsah

Seznam použitých zkratek

DIMA	Diskrétní matematika
FIM	Fakulta informatiky a managementu
ICMI	International Commission on Mathematical Instruction
ICT	Informační a komunikační technologie
ILS	Index of Learning Style
OECD	Organisation for Economic Co-operation and Development
PISA	The Programme for International Student Assessment
SV	Specifický výzkum
UHK	Univerzita Hradec Králové
VŠ	vysokoškolské/ý, vysoká škola
ZMAT1	Základy matematiky 1
ZMAT2	Základy matematiky 2
ZMI1	Základy matematiky pro informatiky 1
ZMI2	Základy matematiky pro informatiky 2

Motto:

„Někteří matematici, snad 10 ze 100, myslí ve vzorcích. Taková je jejich intuice. Zbývající myslí v obrazech, jejich intuice je geometrická. Obrazy přenášejí mnohem více informací než slova. Po mnoho let jsme odvykali žáky používat obrázky, protože "nejsou přesné". To je smutné nedorozumění. Ovšem obrázky nejsou přesné, ale pomáhají myslet, a takovou pomocí nelze opovrhovat.“

I. STEWART [KUŘINA, 1990]

1 Úvod

Mezi základní předměty studia informatiky na Fakultě informatiky a managementu Univerzity Hradec Králové (FIM UHK) patří předměty zabývající se teorií grafů a kombinatorickou optimalizací. Jejich cílem je především rozvíjet a prohlubovat schopnost logického a algoritmického myšlení studentů.

Autorka práce vede kurz Diskrétní matematika (DIMA) od roku 2002 na FIM UHK, který zahrnuje především oblast teorie grafů. Nejprve jako cvičící, později jako přednášející. Teorie grafů nám dává elegantní nástroj k popisu různých situací nebo problémů ze skutečného života [Mareš, Valla, 2007]. Také často poskytuje i návod na jejich řešení. Díky praktickému využití je předmět DIMA pro naše studenty přitažlivý a přínosný. Je však zapotřebí, aby přednášenou látku chápali ve všech souvislostech a porozuměli i teoretické podstatě předmětu. Právě toto podle názoru studentů činí tento předmět náročný a patří mezi ty obtížnější. Jedním z důvodů, které vedou k takovémuto názoru, mohou být nižší matematické vědomosti a schopnosti českých středoškoláků v posledních letech, což je zřejmé z výzkumu OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development) PISA (The Programme for International Student Assessment), který probíhá každé tři roky. V roce 2009 se čeští patnáctiletí žáci propadli až na 22. místo z 34 zemí OECD**,** přičemž pokles ve výsledku byl u českých žáků největší ze všech zúčastněných zemí, v roce 2012 se matematická gramotnost mírně zvedla, ale v roce 2015 se už čeští žáci opět propadli na 21. místo [PISA, 2009], [PISA, 2013], [PISA, 2015]. Tyto nedostatečné matematické znalosti studentů středních škol jsou také patrné z jejich výsledků i v dalších matematických předmětech vyučovaných v rámci vysokoškolského vzdělávání. Je vidět postupné zvyšování počtu studentů, kteří mají problém hlouběji pochopit probíranou látku a stavět na získaných znalostech ze střední školy.

V roce 2014 Horizont Report se zaměřením na významné technologické trendy ve výuce anticipoval, že žáci budou do školy nosit vlastní digitální přístroje nejdéle v pětiletém horizontě [The New Media Consortium, 2014]. Už několik let je možné pozorovat studenty VŠ na přednáškách s tablety či notebooky, do kterých si zapisuji poznámky. Tužka a papír ztrácejí u studentů na popularitě. Dokonce i na cvičeních matematických předmětů je možné vidět studenty, kteří raději používají notebooky místo tužky a papíru. Rozvoj technologií významně ovlivňuje život studenta, na který se vyučující snaží reagovat.

S cílem přizpůsobit se tomuto trendu a podpořit efektivitu výuky předmětu DIMA v oblasti grafových algoritmů byly na FIM UHK před několika lety vyvinuty specifické podpůrné multimediální nástroje GrAlg a A-DIMA. Tyto aplikace se používají jako doplněk k existujícímu výkladu na přednáškách, ke zlepšení představivosti a celkovému pochopení náročných algoritmických témat v této oblasti. Vizualizace grafových pojmů, vztahů a grafových algoritmů pomocí multimediálních nástrojů zlepšila schopnost soustředit se na konkrétní cíl a na jeho dosažení. Studenti začali dosahovat v této oblasti lepších výsledků.

Neoddělitelnou součástí předmětu DIMA jsou však i matematické věty a jejich důkazy. Tyto ale nepatří mezi populární témata našich studentů, a to kvůli obtížnosti porozumět tomuto oboru matematiky. Nebylo možné si nepovšimnout, že úkoly týkající se matematické logiky, což je v případě DIMA především tvorba negací a obměněných vět a úkoly typu dokaž nebo vyvrať tvrzení, přičemž v případě těchto úkolů jde o jednoduchá tvrzení, kde je důkaz založen na porozumění definic pojmů a vztahů mezi objekty teorie grafů, studenti nemají v oblibě. Dá se říct, že mají před těmito úlohami respekt a raději se do nich nepouštějí a v testech tyto úlohy vynechávají. Přičemž u ústního zkoušení tyto definice a vztahy ovládají a s malým popostrčením dovedou jak znegovat tvrzení, tak ho i dokázat. Znamená to tedy, že jim chybí odvaha se do toho pustit, především proto, jak říkají, neví, jak začít. Vhodná vizualizace, jak se ukázalo v oblasti grafových algoritmů, by se mohla stát velmi vhodným nástrojem používaným i ke zlepšení porozumění větám, tvrzením a jejich důkazům. Využití vizualizace a hloubkové analýzy tématu spolu s diskusí o vzájemných vztazích mezi řešeními problémů umožní učiteli rozvíjet logické myšlení studentů a podpořit jejich porozumění komplexnějším důkazům.

Autoři studií [Marrades, Gutierrez, 2000], [Sarracco 2005], [Baccaglini-Frank, Mariotti, 2010], [Abdelfatah, 2011], [Erbas, Aydogan-Yenmez, 2011], [Kilic, 2013], [Ugurel a kol, 2016] zkoumali souvislost mezi používáním vizualizačních nástrojů při výuce důkazů v geometrii a studijní úspěšností nebo úrovní dosažených znalostí a došli k závěru, že vizuální podpora výuky má často kladný vliv na lepší srozumitelnost důkazů i na schopnosti vytvářet vlastní důkazy. Zjistili, že zapojení dynamické geometrie do výuky pomáhá pochopit abstrakci zdůvodnění objevených relací a ulehčuje přechod od experimentální činnosti s matematickými objekty k formálnímu deduktivnímu důkazu. Předkládaný výzkum navazuje na tyto výzkumy, věnuje se však zkoumání výše uvedeného vztahu (souvislosti mezi používáním vizualizačních nástrojů při výuce důkazů) v oblasti teorie grafů.

Předkládaná dizertační práce se zabývá důležitostí matematických důkazů pro studenty informatiky a vizualizací dokazování matematických vět v oblasti teorie grafů. Záměrem je představit výzkum, který se věnoval zkoumání vlivu vizuální reprezentace důkazů matematických vět na jejich srozumitelnost. Práce je členěná na část teoretickou a empirickou. Teoretická část vymezuje pojem důkaz jak v matematickém, tak i v informatickém kontextu. Věnuje se důležitosti dokazování a předkládá vizualizaci jako vhodný nástroj při výuce důkazů matematických vět. Dále podává přehled relevantních výzkumů v oblasti využití vizualizace při výuce důkazů v matematice a představuje výuku předmětu DIMA na FIM UHK. Záměrem empirické části je seznámit čtenáře s kvantitativním a kvalitativním výzkumem. V kvantitativní části je ověřeno, zda vytvořené vizuální prezentace a multimediální aplikace mají vliv na studijní úspěšnost studentů v oblasti výrokové logiky, formulaci negací a dokazování matematických vět. Kvalitativní část interpretuje vztah studentů k důkazům, dokazování a vizualizaci důkazů na základě výsledků jejich závěrečných prací a vyplněných dotazníků. Závěr dizertační práce poskytuje shrnutí a zhodnocení výsledků výzkumu.

Na základě vlastních zkušeností autorky z výuky důkazů v rámci předmětu DIMA, výsledků zkouškových testů a rozhovorů se studenty, vycházela zkoumaná problematika z následujících předpokladů:

a) Studenti většinou nemají k výuce matematických vět a jejich dokazování kladný vztah, dokazování považují za zbytečné, neuvědomují si jeho podstatu a důležitost. Proto je nutné, aby koncept výuky matematických vět a jejich důkazů byl změněn.
b) Studenti mají k vizuálním prostředkům pozitivní vztah.

2 Cíl disertační práce

Jaký je postoj studentů k dokazování matematických vět v oblasti teorie grafů? Jak lze podpořit srozumitelnost výuky matematických vět a jejich důkazů? Může vizualizace pomoci při výuce důkazů matematických vět z oblasti teorie grafů? Jaký je postoj studentů k používání vizualizací při výuce matematických důkazů? Budou v oblasti matematické logiky, v oblasti pochopení matematických vět a jejich důkazů a v oblasti dokazování jednodušších tvrzení dosahovat lepších výsledků studenti, kteří při výuce používají vizuální prezentace a multimediální aplikace prezentující postupy důkazů matematických vět, než studenti, kteří při výuce tyto vizualizační technologie nepoužívají?

Na základě výše uvedených výzkumných otázek byl formulován hlavní cíl práce.

2.1 Hlavní cíl práce

V dále uvedeném textu se pod pojmem výuka chápe výuka v rámci DIMA na FIM UHK zaměřená na vysvětlení matematických vět a jejich důkazů, přičemž pojmem matematická věta máme na mysli jak matematickou větu, tak tvrzení (tj. jednodušší matematickou větu) z oblasti teorie grafů. Studijní úspěšnost bude chápaná jako bodový rozdíl mezi pre-testem a post-testem.

Hlavním cílem práce je analýza procesu výuky důkazů matematických vět.

2.2 Dílčí cíle práce

Dílčí cíle práce byly zformulovány následovně:

- Kvantitativně a kvalitativně analyzovat studijní úspěšnost;
- Kvantitativně a kvalitativně analyzovat vztah studentů k výuce důkazů a jejich vizualizacím;
- Analyzovat vztah mezi vizuálním stylem učení studentů a studijní úspěšnosti.

Během výzkumu na základě pozorování byly definovány další dva dílčí cíle:

- Analyzovat vztah mezi figurální inteligencí studentů a studijní úspěšnosti;
- Analyzovat vztah mezi vizuálním stylem učení a figurální inteligencí studentů.

K dosažení cílů bylo zapotřebí:

- Zjistit současný stav poznání v oblasti realizace vizualizací v teoretické matematice;

- Prozkoumat dostupné vizualizační nástroje na FIM UHK použitelné jako vhodný doplněk k výuce důkazů matematických vět vyučovaných v rámci předmětu teorie grafů;
- Navrhnout a vytvořit s pomocí ICT vizuální prezentace důkazů matematických vět jako další vizualizační pomůcky při výuce důkazů v oblasti teorie grafů.

2.3 Hypotézy

V souvislosti s prováděným výzkumem, na základě stanovených předpokladů, výzkumných otázek a formulace cílů, byly stanoveny následující hypotézy:

$\mathbf{H}_{\mathbf{výrok}}$

Studijní úspěšnost v oblasti výrokové logiky [1] nezávisí na použití vizuální technologie při výuce.

$\mathbf{H}_{\mathbf{negace}}$

Studijní úspěšnost v oblasti formulování negací matematických vět nezávisí na použití vizuální technologie při výuce.

$\mathbf{H}_{\mathbf{důkazy}}$

Studijní úspěšnost v oblasti dokazování matematických vět nezávisí na použití vizuální technologie při výuce.

$\mathbf{H}_{\mathbf{výrok+negace+důkazy}}$

Studijní úspěšnost v oblasti výrokové logiky, formulování negací a dokazování matematických vět nezávisí na použití vizuální technologie při výuce.

$\mathbf{H}_{\mathbf{viz}}$

Neexistuje vztah mezi vizuálním stylem učení a studijní úspěšností studentů navštěvujících kurz DIMA.

$\mathbf{H}_{\mathbf{fig}}$

Neexistuje vztah mezi figurální inteligenci a studijní úspěšností studentů navštěvujících kurz DIMA.

[1] tj. výroky, negace, obměny, implikace, ekvivalence, konjunkce, disjunkce

$H_{viz\text{-}fig}$

Neexistuje vztah mezi figurální inteligencí a vizuálním stylem učení studentů navštěvujících kurz DIMA.

2.4 Restrikce disertační práce

Omezení práce vychází z objektu pozornosti výzkumu – matematické důkazy vět v teorii grafů projednávaných v rámci výuky předmětu DIMA. Analyzovány budou výsledky studia studentů navštěvující daný kurz v akademických rocích 2015/16 až 2017/18 na FIM UHK, a to jenom těch respondentů, kteří kurz DIMA dokončili, tj. napsali všechny testy – pre-test, post-test, zápočtový a zkouškový test. Výsledky výzkumu budou platné jenom pro výše uvedené skupiny studentů a vztahují se pouze na předmět DIMA. Autorka si je těchto omezení vědomá a při interpretaci závěru budou zohledněna.

3 Teoretický rámec disertační práce

Základními pilíři teoretického rámce disertační práce jsou důkazy matematických vět, proces výuky důkazů matematických vět a vizualizace.

3.1 Vymezení základních pojmů

Důkaz – pojem, který je často používán jak v běžném životě, tak i v určitých odborných oborech (v každé oblasti v jiném pojímaní).

V soudním i správním řízení je důkaz věc, postup nebo vše, co může přispět k objasnění projednávané věci v rámci dokazování, jako například výpověď, znalecké posudky, ohledání, listiny důležité pro trestní řízení či rekonstrukce (dle §89 odst. 2 zákona č. 141/1961 Sb. [Sbírka zákonu ČR, 1961]). Jiný význam má pojem důkazu v přírodních vědách, jde o experimentální ověření toho, že daná teorie opravdu popisuje realitu, že předpovědi týkající se reality jsou v souladu s tím, co vidíme či měříme [Myslín, 1999].

3.1.1 Důkazy v matematice

Otázku „*Co máme na mysli pod pojmem matematický důkaz?*" si položil ve své práci se stejnojmenným titulem Cadwalladerolsker, ve které se zabýval tím, co může být matematický důkaz. V práci popisuje vývoj matematického důkazu, podává formální definice důkazu a tyto definice zkoumá v kontextu různých rolí důkazu. Jako základní definici bere definici Rota: „*Každý ví, co je matematický důkaz. Důkazem matematické věty je posloupnost kroků, která vede k požadovanému závěru.* [Rota, 1997]" [Cadwalladerolsker, 2011]. Důkaz byl, je a bude jedním z konceptů, které charakterizují matematiku. Garnier a Taylor tvrdí, že striktně definovaný pojem matematického důkazu zřetelně vyčleňuje matematiku ze spektra ostatních vědeckých disciplín. „*Matematický důkaz je na rozdíl od důkazů v jiných oblastech principiálně nezpochybnitelný* [Garnier, Taylor, 1996]".

Dawson ve své práci [Dawson, 2006] podtrhává výskyt formálních důkazů výhradně v matematice a v informatice, jako předměty studia, na které se následně aplikují navazující neformální argumenty. Sám se přiklání k názoru posuzovat důkaz jako neformální argument, jehož záměrem je přesvědčit o správnosti výroku ty, kteří se usilují o pochopení pravdivosti dokazovaného výroku. Pochopení důkazu záleží rovněž na publiku, kterému je důkaz prezentován. [Dawson, 2006]

Hanna a Barbeau v [Hanna, Barbeau, 2006] shrnuli následující funkce důkazů v matematice:

- *ověření* pravdivosti důkazu;
- *vysvětlení*, proč je dané tvrzení pravdivé;
- *přesvědčení* – odstranění pochybnosti souvisejících s důkazem výroku;
- *systematizace* – využití výsledku v širších souvislostech;
- *objevování* nových matematických výsledků;
- *komunikace* – vzájemné předávání poznatků a porozumění prostřednictvím publikování;
- *potěšení* z úspěchu dokázaného výroku.

3.1.2 Důkazy v informatice

O důležitosti matematického důkazu v informatice píše ve své práci [Hliněný, 2010] profesor Hliněný: *„Studium informatiky nezahrnuje jen pouhé naučení se nějakému programovacímu jazyku, nýbrž zahrnuje celý soubor dalších relevantních předmětů, mezi nimi i matematicko-teoretické (formální) základy moderní informatiky. Právě tento odborný nadhled nad celou informatikou včetně nezbytné formální teorie nejspíše odliší řadové programátory, kterých je dnes mnoho i bez VŠ vzdělání, od skutečného a mnohem lépe placeného počítačového experta.“* Dále Hliněný podává vztah mezi konstruktivním matematickým důkazem a algoritmem: *„V matematice je důležité - přesně se vyjadřovat a být si svými tvrzeními naprosto jistí, v informatice – naučit se správně navrhovat algoritmy a být si svými programy naprosto jistí. Bez schopnosti přesného vyjadřování a chápaní definic a vět se v informatice nelze obejít. Umění programovat není zdaleka jen o tom naučit se syntaxi programovacího jazyka, ale především o schopnosti vytvářet a správně formálně zapisovat algoritmy.*“

Jak již bylo zmíněno, metody dokazování a pochopení principů důkazů jsou důležité i pro studenty informatických oborů, konstruktivní matematické důkazy úzce souvisí se správně zapsanými algoritmy. Například, uvažujme matematické tvrzení ve tvaru implikace $A \rightarrow B$ slovy: „**Jestliže** platí tvrzení A, **pak** platí tvrzení B“ a algoritmus, základní pojem informatiky. Jako definici algoritmu se v oblasti informatiky uplatňuje Church-Turingova teze, která tvrdí: „Ke každému algoritmu existuje ekvivalentní Turingův stroj“. Jedná se o přesnou, ale v praxi nepoužitelnou definici. Zjednodušeně je možné říct, že algoritmus je konečná posloupnost elementárních výpočetních kroků, ve které každý další krok vyplývá z předchozích kroků. Pro zápis algoritmu, jeho přehledné uspořádání a zkrácení se využívají algoritmické konstrukce: podmíněné větvení (**if** …. **then**….) a cykly. Je potřeba klást důraz na správný zápis algoritmů i na důkazy jejich vlastností a správnosti. Mezi nejčastější používaný důkazový nástroj v informatice patří matematická indukce. [Hliněný, 2010]

3.1.3 Výuka důkazů

Důkaz je od pradávna považován za základní součást matematické vědy. Do učebních osnov matematiky byl zaveden již dávno a stal se důležitou součástí výuky euklidovské geometrie. Během nového matematického hnutí od 50. do 60. let byl důkaz zdůrazňován i v dalších oblastech matematiky. Jak již bylo zmíněno, důkazy nepatří u studentů mezi oblíbenou oblast matematiky. O problémech studentů s dokazováním psali už ve svých pracích např. Williams [Williams, 1979], Senk [Senk, 1985]. V posledních desetiletích se výzkum v oblasti výuky důkazů a jejího zlepšení rozšířil, viz [Bittinger, 1968], [Brennan, 1976], [Carlson, 1971], [Summa, 1981]. Odráží to růst výzkumu matematického vzdělávání obecně a také zvýšený důraz na porozumění důkazům v matematickém vzdělávání. [Lee, 2002]

I v dnešní době se na důkazy ve výuce v matematice klade důraz. Kopka ve své práci [Kopka, 2013] píše, že k nejdůležitějším cílům matematiky patří naučit studenty řešit matematické problémy následujícím procesem: matematický problém → experimentování → hypotéza → ověření → důkaz (odpověď). Důkaz je nedílnou součástí daného procesu řešení problému. To, že provádění důkazů je nedílnou součástí výuky matematiky, potvrzuje i Rámcový vzdělávací program pro gymnázia [RVP, 2007], ve kterém je matematika charakterizována jako vzdělávací oblast následovně: „*Výuka matematiky na gymnáziu rozvíjí a prohlubuje pochopení kvantitativních a prostorových vztahů reálného světa, utváří kvantitativní gramotnost žáků a schopnost geometrického vhledu. Ovládnutí požadovaného matematického aparátu, elementy matematického myšlení,* ***vytváření hypotéz a deduktivní úvahy jsou prostředkem pro nové hlubší poznání a předpokladem dalšího studia****. Osvojené matematické pojmy, vztahy a procesy pěstují myšlenkovou ukázněnost, napomáhají žákům k prožitku celistvosti. Matematické vzdělávání napomáhá rozvoji abstraktního a analytického myšlení, rozvíjí logické usuzování, učí srozumitelné a věcné argumentaci s cílem najít spíše objektivní pravdu než uhájit vlastní názor. Těžiště výuky spočívá v osvojení schopnosti formulace problému a strategie jeho řešení, v aktivním ovládnutí matematických nástrojů a dovedností, v pěstování schopnosti aplikace.* ***Matematika přispívá k tomu, aby žáci byli schopni hodnotit správnost postupu při odvozování tvrzení a odhalovat klamné závěry.*** *…*“

Dále uvádí: „*Žáka vede k rozvoji logického myšlení a úsudku, vytváření hypotéz na základě zkušenosti nebo pokusu, k jejich ověřování nebo vyvracení pomocí protipříkladů.*“

Mezi očekávané výstupy v sekci ARGUMENTACE A OVĚŘOVÁNÍ jsou zařazeny: „ *žák*

- *čte a zapisuje tvrzení v symbolickém jazyce matematiky;*
- *užívá správně logické spojky a kvantifikátory;*
- *rozliší definici a větu, rozliší předpoklad a závěr věty;*
- *rozliší správný a nesprávný úsudek;*
- *vytváří hypotézy, zdůvodňuje jejich pravdivost a nepravdivost, vyvrací nesprávná tvrzení;*
- *zdůvodňuje svůj postup a ověřuje správnost řešení problému.*“

Tento vývoj a uvědomění si důležitosti dokazování již ve středoškolské matematice je ze strany matematiků vítán, ale představuje pro vyučující velkou výzvu, především v hledání správného způsobu výuky důkazů - jak je studentům podat, jak je vyučovat, aby z dané oblasti studenti neměli obavy, aby danou problematiku lépe chápali, a tím pro ně přestal být důkaz obtížným konceptem i ve vysokoškolské matematice.

3.1.4 Vizualizace

„*Termín vizualizace má svůj původ v příčestí visus latinského slova videre* (= *viděti*) [Hlaváček, 2012].“ Biologický aspekt „vidění“ popisují ve své práci [Adams, Victor, 1993]: „*Vidění je naším nejdůležitějším zdrojem informací o světě. Největší část mozku se zabývá vizí a vizuální kontrolou pohybu, vnímáním a zpracováním slov a formou a barvou objektů. Optický nerv obsahuje více než 1 milion vláken, ve srovnání s 50 000 ve sluchovém nervu.*“ [Arcavi, 2003]

Vizualizace jako mapy, schéma, grafy, značky nebo piktografy jsou nedílnou součástí běžného života. Lidé využívají vizualizaci ke komunikaci už od doby kamenné – jeskynní malby. Říká se, že jeden obrázek řekne víc než tisíce slov, viz obrázek 1, ale naproti tomu, na vizualizaci není možné nahlížet výlučně jako na vizuální proces související s okem. Jde o komplexnější proces pojímající také činnost mozku. Je potřeba si uvědomit, že naše vizualizace obsahují mnoho aspektů – tradice, tiché konvence, konsense, a to je činí závislými při používání celého kódu každého z jejich uživatelů. U korektní vizualizace se předpokládá důležitá podmínka – správné dešifrování a pochopení, jinak vizualizace ztrácí význam. [Guzman, 2002]

Obrázek 1: Čínské přísloví – Jeden obrázek dokáže nahradit 10 000 slov,
(*zdroj: http://www.phrases.org.uk/meanings/a-picture-is-worth-a-thousand-words.html*)

Arcavi ve své práci [Arcavi, 2003] propojil definici vizualizace Zimmermanna a Cunninghama [Zimmermann a Cunningham, 1991] s definici Hershkowitza [Hershkowiz a kol., 2001] a parafrázoval ji následovně: „*Vizualizace je schopnost, proces a produkt tvorby, interpretace, použití a reflexe obrázků, snímků, diagramů v našich myslích, na papíře nebo s využitím technologických nástrojů za účelem znázornění a předávání informací, přemýšlení a rozvíjení dříve neznámých myšlenek a rozvíjení porozumění.* “

3.1.5 Vizualizace v matematice

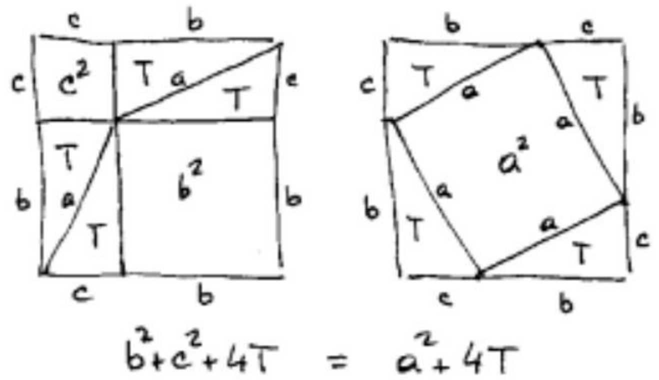
Vizualizace je jedním ze tří výrazových prostředků, které matematika používá. Dalšími výrazovými prostředky jsou jazyk přirozený a jazyk symbolický [Alsina a Nelsen, 2006]. Vizuální prezentace má v matematickém textu dlouhou tradici. Už Lagrange byl přesvědčen o důležitosti vizuální složky a Gauss nazýval matematiku vědou „oka“ [Davis, 1993].

Alsina a Nelsen v [Alsina a Nelsen, 2006] píšou o dvou hlavních důvodech, proč byla v historii vizualizace zahrnuta do matematického textu. První důvod – vhodný obrázek může nahradit dlouhý popis, druhý důvod – dobře zvolený nákres může pomocí obrazové představivosti a následného usuzování a argumentace vést k řešení problému.

Guzmanimu se jeví vizualizace jako něco naprosto přirozeného, a to nejen při zrození matematického myšlení, ale také při objevování nových vztahů mezi matematickými objekty a samozřejmě také v přenosových a komunikačních procesech, které odpovídají matematické aktivitě [Guzman, 2002]. V následující části je uvedeno pár příkladů využití vizualizace matematiky v průběhu staletí, dle [Guzman, 2002]:

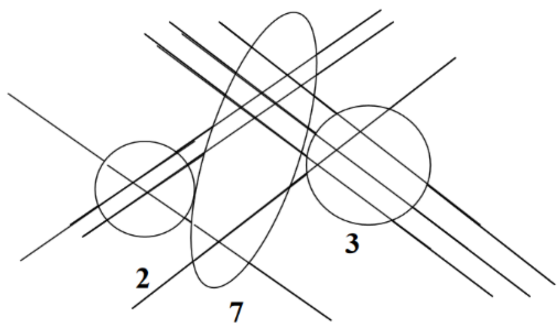
- Raní Pythagorejci, kteří jako první kultivovali matematiku v našem moderním smyslu, studium čísel a vztahů mezi nimi prováděli pomocí různých konfigurací učiněných prostřednictvím oblázků, malých kamenů.
- Descartes má ve svých Pravidlech pro řízení intelektu (*Regulae ad directionem ingenii*[2]) několik pravidel, která přímo zahrnují procesy vizualizace. Silně zdůrazňuje roli obrázků v matematickém myšlení.
- Důkaz věty „Problém čtyř barev“, provedený Arthurem Kempem v roce 1879, byl založen na geometrickém vztahu. I když jeho důkaz nebyl pravdivý, zdál se být tak jasný, že ho matematická komunita akceptovala 11 let, dokud Percy John Heawood nezjistil, že důkaz byl neúplný.

Svůj souhrn Guzman zakončil slovy: „*Vizualizace, jak vidíme, byla technikou používanou nejkreativnějšími matematiky všech dob*.“ Jako paradigma vizualizace v matematice uvádí obrázek 2 s důkazem Pythagorovy věty.



Obrázek 2: Vizuální důkaz Pythagorovy věty, (*zdroj:* [*Guzman, 2002*])

Zajímavá je také čínská metoda pro násobení pomocí geometrické vizualizace, viz obrázek 3, kterou Číňané původně prováděli pomocí bambusových tyčí [Smartick, 2020].



*Obrázek 3: Násobení pomocí geometrické vizualizace: 21*13=273*
(*zdroj: http://www.pf.ujep.cz/kpr/studium/didaktika-matematiky/514-dejiny-matematiky/file*)

[2] https://archive.org/details/regulaeaddirecti00desc

František Kuřina, český matematik a autor několika učebnic matematiky a mnoha jiných publikací, patří v České republice mezi velké příznivce aplikovaní vizualizací v matematice. V práci [Kuřina, 1990] poukazuje na významnost uplatnění vizualizace v matematické výuce: „*Vizuální přístupy k matematice mohou kladně ovlivnit výsledky vyučování. Obrázky, grafy, schémata jsou nositeli informace, přispívají k rozvíjení představivosti a intuice při řešení úloh.*" Ve své publikaci s názvem Matematika jako pedagogický problém [Kuřina, 2016] cituje filozofa a matematika Petra Vopěnku: „*Neuznání obrázků a náčrtů za plnohodnotný způsob sdělování matematických poznatků, to je důsledné trvání na úplných slovních popisech sdělovaných poznatků, výrazně umrtvuje dynamiku matematického poznávání.*"

Vývoj moderních technologií a zavedení počítačů do výuky nabídl možnost vytvořit nové aplikace, programové vizualizace, multimediální interaktivní nástroje. Mnoho učitelů na celém světě neustále hledá, navrhuje techniky, metody, jak efektivně a také atraktivně vysvětlit složité téma svým studentům. „*Za jeden z vhodných prostředků pro přiblížení výuky žákům jsou považována multimédia, respektive vhodná implementace různých typů médií do výuky s ohledem na didaktickou znalost obsahu a potřeb žáků. Aplikace multimédií do výukového procesu je bezpochyby jednou z variant, jak žákům zprostředkovat mnohdy nestravitelné učivo cestou, která je jim v dnešní době blízká.* [Odcházelová, 2014]" Multimediální aplikace by mohly být vhodnou podporou především pro studenty, jejichž studijní styly inklinují k vizuálnímu stylu učení.

3.1.6 Styly učení

Existuje mnoho definic pojmu styl učení. V této studii byla použita definice podle Mareše: „*Jde o svébytný postup člověka při učení, který v daném období preferuje. Postup je svébytný svou strukturou, posloupností, kvalitou, pružností aplikace. Učící se člověk jej užívá ve většině situací, relativně nezávisle na obsahové stránce učení, na učivu. Styl učení má charakter metastrategie, tedy grupuje dílčí strategie učení, monitoruje je, kontroluje, vyhodnocuje, reguluje s ohledem na podmínky, vlastní průběh i podmínky učení. Vede k výsledkům určitého typu, ale znesnadňuje či zabraňuje dosažení výsledků jiných (často lepších). Člověk si jej zpravidla neuvědomuje, nezabývá se jím, promyšleně jej neanalyzuje* [Mareš, 1994]".

Podle toho jaký učební styl a přístup k učení studenti preferují, jak nejsnadněji přijímají nové informace či podněty, je možné je rozdělit do skupin. Existují různé modely vyvinuté nezávislými odborníky, např. Taxonomie vzdělávacích cílů Benjamína Blooma [Hudecová, 2004], Dunn a Dunn model stylu učení [Dunn, Dunn, 1978], Felderův model [Felder, Silverman, 1988], Kolbův cyklus [Seidlerová, 2006]. Pro potřeby výzkumu byl aplikován Felderův model, který vychází ze spolupráce profesora Feldera s dr. Silverman, která je specialistkou v oboru psychologie ve vzdělávání. Felderův model rozlišuje čtyři hlavní styly učení:

- smyslový ↔ intuitivní (Senging ↔ Intuitive)
- vizuální ↔ verbální (Visual ↔ Verbal)
- aktivní ↔ reflexivní (Active ↔ Reflective)
- sekvenční ↔ globální (Sequential ↔ Global)

K detekci jednotlivých stylu učení slouží standardizovaný dotazník Index of Learning Style (ILS), který je dostupný na stránkách https://www.webtools.ncsu.edu/learningstyles/.

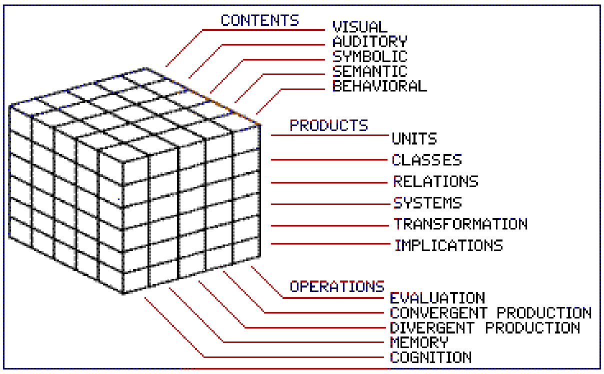
3.1.7 Figurální inteligence

Slovo inteligence pramení z latinského „inter-legere“, což v překladu představuje „poznávat, rozlišovat, chápat“ [Sokol, 2010]. Existuje mnoho různých přístupů, jak inteligenci definovat. Pohled expertů se na inteligenci v průběhu dekád transformoval a zpřesňoval. Mackintosh ve své práci [Mackintosh, 2000] uvádí rozdílné pojímaní inteligence několika odborníku - psychologů :

- 1944, Wechsler - souhrnná nebo celková schopnost jednotlivce jednat účelně, myslet racionálně a účinně jednat se svým okolím;
- 1949, Burt - obecná duševní výkonnost;
- 1955, Burt - přirozená obecná poznávací schopnost;
- 1968, Butcher - svou vlastní podstatou zásadní schopnost, která se nachází na prvním místě v hierarchii intelektuálních schopností;
- 1985, Sternberg - duševní schopnost se vhodně chovat v těch oblastech kontinuity zkušeností, které obsahují reakci na nový jev nebo automatizaci zpracování informací jako funkci metakomponentů, výkonnostních komponentů a komponentů při osvojování si vědomostí;
- 1991, Kline - obecná logická schopnost, která je užitečná při nejrozmanitějších úkolech, které zahrnují řešení problémů.

V průběhu 20. století vzniklo mnoho teorií a modelů inteligence: Thorndikeho teorie [Svoboda, 1999], Spearmanova teorie [Sternberg, 2002], Thurstonova teorie [Sternberg, 2002], Guilfordův model [Sternberg, 2002], Cattellův model [Svoboda a kol., 2009] nebo Carrollův model [Svoboda a kol., 2009]. Na Guilfordův model inteligence se třemi prolínajícími se rozměry, který demonstroval na trojrozměrném zobrazení krychle, viz obrázek 4, navázal v roce 1983 americký psycholog Howard Gardner, který je autorem teorie multidimenzionální inteligence neboli teorie mnohočetných inteligencí. Ten předpokládá existenci sedmi různých, vzájemně relativně nezávislých inteligencí [Gardner, 1999]:

- **Lingvistická inteligence** - schopnost vyjadřovat se verbálně a rozumět verbálnímu vyjádření (spisovatelé, politici, odborníci na vztahy s veřejností);
- **Logicko-matematická inteligence** - schopnost logického, vědeckého a matematického myšlení, řešení matematických a logických problémů, schopnost odvozovat důkazy a provádět výpočty (logici, matematici, fyzici);
- **Prostorová inteligence (figurální)** - schopnost myslet vizuálně, tvořit vizuální představy a řešit prostorové problémy (architekti, kartografové, navigátoři);
- **Hudební inteligence** - schopnost rozumět hudbě a komponovat hudbu (hudebníci, hudební skladatele, dirigenty);
- **Tělesně-pohybová inteligence** - schopnost velmi přesně ovládat své tělo a provádět komplexní a přitom velmi precizní, obratní pohyby (jemní mechanici, chirurgové, sportovce, tanečníci);
- **Interpersonální inteligence** - schopnost efektivního fungování v sociálních vztazích, umění vycházet s jinými lidmi, rozumět druhým, přesvědčovat je apod. (psychologové, psychoterapeuti, učitele, pomáhající profese, obchodníci);
- **Intrapersonální inteligence** - schopnost rozumět sám sobě a „pracovat na sobě" a na svém osobním rozvoji, chápat své myšlenky (velmi úspěšní lidé v jakémkoli oboru).



Obrázek 4: Guilfordův model inteligence,
(*zdroj: http://reshmavinayanrv.blogspot.com/2015/10/guilfords-structure-of-intellect-model.html*)

Vzhledem k tématu tohoto výzkumu, bude další text zaměřen pouze na prostorovou (figurální) inteligenci. K následující části je potřeba vymezit pojem schopnost. Podle Mayera lze schopnost definovat jako potenciál získávání znalostí podporující kognitivní výkon [Mayer a kol., 2003].

První zmínku, která souvisela s pozdějšími prostorovými schopnostmi, provedl Francis Galton v roce 1880. Na základě vlastních experimentů definoval „mentální obraz“ jako součást inteligence. V roce 1921 Thorndike publikoval příspěvek, ve kterém byla poprvé přijata identifikace prostorových schopností. Tuto část inteligence popsal jako schopnost vizualizovat vztahy mezi objekty. V průběhu 20. století došlo k četným výzkumům, novým teoriím a novým metodám, ve kterých se vědci ([Spearman, 1925], [Kelley 1928], [El-Khoussy, 1935], [Thurstone, 1950], [Guilford, 1967], [Cattell, 1971]) pokusili specifikovat tuto dimenzi lidské inteligence a pokusili se objasnit specifické vlastnosti prostorové inteligence [Guttman a kol., 1990], [Mohler, 2008].

Gardner v [Gardner, 1983] uvádí, že prostorová schopnost je definována jako neuropsychologická schopnost vnímat formu objektu, když se s ní setkáváme v prostředí. Definuje jí jako samostatný faktor lidské inteligence, kterou lze také empiricky testovat a hodnotit, a která popisuje potenciál rozpoznávat a manipulovat se vzory jak v širším prostoru, tak i v omezenějších oblastech. Ze svého výzkumu vyvodil, že prostorová inteligence zahrnuje schopnost vnímat a reprezentovat vizuálně-prostorový svět přesně a manipulovat s mentálními obrazy. [Gardner, 1993]

3.2 Současný stav studované problematiky

3.2.1 Teoretická východiska

Vizualizace důkazů, nebo také pojem „důkazy beze slov“, se objevují už v dávné minulosti. Staří Řekové z ostrova Aigina v 6. století př. n. l. používali k placení stříbrné mince, na jejichž zadní straně byl geometrický důkaz beze slov druhé mocniny dvojčlenu a + b: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ [Jones, 2011], viz obrázek 5.

Obrázek 5: Stříbrná mince z 6. st. př. n. l.,
(*zdroj:http://historicmysteries.com/ancient-coinage*)

V současné době bylo publikováno mnoho výsledků týkajících se výzkumů vizualizace důkazů v matematice. K velmi známým knihám patří knihy Nelsena ([Nelsen, 1993], [Nelsen, 2001]), které obsahují mnoho statických vizuálních důkazů.

Marrades a Gutierez v roce 2000 zkoumali, zda dynamická geometrie může studentům ulehčit přechod od experimentální činnosti s matematickými objekty k formálnímu deduktivnímu důkazu. Zjistili, že včlenění aplikace dynamické geometrie do výuky pomáhá studentům pochopit abstrakci zdůvodnění objevených vztahů a také, že studenti potřebují více času pro experimentální činnosti v prostředí aplikace, než dokážou přejít k dokazování hypotéz. [Marrades, Gutierrez, 2000]

V roce 2002 Gawlick ve své studii, která se zabývala zkoumáním vlivu dynamické geometrie na objevování, prověřování a dokazování hypotéz, zjistil, že studenti pracující s dynamickou geometrii nedosáhli lepších výsledků z hlediska vědomostí a dovedností, byli však úspěšnější v úkolech, ve kterých měli objevit vztahy mezi geometrickými objekty. Dospěl k závěru, že dynamická geometrie podporuje vytváření hypotéz, ne jejich prověřování. [Gawlick, 2002]

Účinek zahrnutí dynamického geometrického softwaru Sketchpad do osnov matematiky zkoumal Sarracco ve své studii [Sarracco, 2005]. Zkoumal vliv softwaru na zlepšení chápání geometrických vět. Výsledky analýzy kvantitativní části výzkumu neukázaly vliv softwaru na vizuální schopnosti ani na zlepšení studijních výsledků. Pozorování a rozhovory však naznačily, že existují výhody použití softwaru a ten může být pozitivním nástrojem ve výuce. Studie ukázala, že studenti v experimentální skupině vyvinuli pozitivnější postoj k matematice a dříve pochopili věty než studenti v kontrolní skupině. [Sarracco, 2005]

V roce 2007 Hanna a Sidoli v [Hanna, Sidoli, 2007] podali stručný přehled možností použití vizualizace, které byly předmětem diskuse v literatuře matematické filozofie. Zabývali se otázkou – do jaké míry mohou být vizualizace použity jako důkaz. Dospěli k závěru, že se nacházíme ještě daleko od konsensu ve všech možných rolích vizualizace v matematice, v matematickém vzdělávání a především její roli v důkazech. [Hanna, Sidoli, 2007]

Cheng-Yao Lin v roce 2008 provedl kvalitativní výzkum, jehož předmětem zkoumaní byli vysokoškolští studenti oboru učitel základní školy. Studenti zkoumali vhodné technologie zlepšující výuku matematiky. Výsledky rozhovorů ukázaly, že počítače a webové zdroje jsou velmi důležité a pomáhají studentům učit se matematiku, a vizuální reprezentace pomáhají lépe pochopit to, co se děje. [Lin, 2008]

V roce 2010 Baccaglini-Frank a Mariotti se ve svém výzkumu [Baccaglini-Frank, Mariotti, 2010] zaměřili na kognitivní procesy žáků při řešení otevřených problému ve formě konstrukčních úloh. Na základě pozorování práce žáků a rozhovorů s nimi dospěli ke zjištění, že dynamická geometrie podporuje induktivní způsoby uvažování a rozvíjí u žáků specifickou formu argumentování, která je spjatá s nástroji dostupnými v prostředí dynamické geometrie (instrumented argument). [Baccaglini-Frank, Mariotti, 2010]

Otázkou „Proč výuka geometrie a dokazování geometrických vět často vyvolává ve studentech a někdy i u samotných učitelů negativní pocity?“ se v roce 2011 zabýval ve své práci [Abdelfatah, 2011] Abdelfatah. Analýzou jednotlivých položek postojového dotazníku dospěl k závěru, že u experimentální skupiny, kde výuka probíhala s pomocí aplikace dynamické geometrie, došlo k pozitivnímu posunu z hlediska chápání role důkazu v matematice. [Abdelfatah, 2011]

Výzkumem vlivu geometrického dynamického softwaru na rozvoj geometrického myšlení, na vědomosti a dovednosti dokazovat geometrická tvrzení na tureckých školách, se v roce 2013 zabýval Kilic. Zjistil, že experimentální skupina v porovnání s kontrolní skupinou dosáhla výrazného zlepšení v testech zaměřených na geometrické myšlení a v testech zaměřených na provádění důkazů. [Kilic, 2013]

Pro přehlednost už popsaných a dalších dosavadních výzkumů je přiložená následující tabulka 1, která obsahuje stručný popis studií:

Tabulka 1: Přehled výzkumů zabývajících se vizualizací dokazování v matematice, (*zdroj: autor*)

<table>
<tr><td>2000</td><td>Marrades, Gutierrez</td><td>Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment</td></tr>
<tr><td colspan="3">Zkoumali vliv aplikace dynamická geometrie na ulehčení přechodu od experimentální činnosti s matematickými objekty k formálnímu deduktivnímu důkazu.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Závěr: Včlenění dynamické geometrie do výuky pomáhá studentům pochopit abstrakci zdůvodnění objevených vztahů.</td></tr>
<tr><td>2002</td><td>Pandiscio</td><td>Exploring the Link Between Preservice Teachers' Conception of Proof and the Use of Dynamic Geometry Software</td></tr>
<tr><td colspan="3">V případové studii zkoumal, jak učitelé matematiky vnímají potřebu a výhody formálního důkazu při zadávání geometrických úloh v kontextu softwaru dynamické geometrie.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Závěr: Učitelé mají obavu, že po použití dynamického softwaru studenti středních škol neuvidí potřebu důkazů. Ale také vidí největší výhodu geometrického softwaru v pomoci porozumět klíčovým vztahům v rámci problému nebo matematické věty. Účastnici měli tendenci studovat problém hlouběji se softwarem než bez něj.</td></tr>
<tr><td>2002</td><td>Gawlick</td><td>On Dynamic Geometry Software in the Regular Classroom</td></tr>
<tr><td colspan="3">Zkoumal vliv dynamické geometrie na objevování, prověřování a dokazování hypotéz.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Závěr: Dynamická geometrie podporuje vytváření hypotéz, ne jejich prověřování.</td></tr>
<tr><td>2004</td><td>Hull, Brovey</td><td>The Impact of the Use of Dynamic Geometry Software on Student Achievement and Attitudes towards Mathematics</td></tr>
<tr><td colspan="3">V studii popisují účinky používaní softwaru dynamické geometrie Geometry's Sketchpad na výsledcích studentů deváté třídy a postoje studentů ke geometrii.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Závěr: Výsledky neprokázaly významný rozdíl v hodnocení studentů ve srovnání s výsledky z předchozích let a průzkum ukázal, že používání softwaru významně nezměnilo postoje studentů ke geometrii.</td></tr>
<tr><td>2005</td><td>Isaksal, Askar</td><td>The effect of spreadsheet and dynamic geometry software on the achievement and self-efficacy of7th-grade students</td></tr>
<tr><td colspan="3">Zkoumali vliv tabulkového a dynamického geometrického softwaru na matematické výsledky a matematickou soběstačnost u studentů 7. ročníku. Dále zkoumali genderové rozdíly s ohledem na počítačovou efektivitu, matematickou efektivitu a matematické výsledky.</td></tr>
</table>

Závěr: Skupina, která používala při výuce dynamickou aplikaci Autogram, měla výrazně vyšší průměrné skóre než tradiční skupina. Nebyl zjištěn žádný významný průměrný rozdíl ve výsledcích matematiky a matematické soběstačnosti mezi chlapci a dívkami. Ve výsledcích programové soběstačnosti měli výrazně vyšší průměrné skóre chlapci než dívky.

2005	Sarracco	**The Effects of Using Dynamic Geometry Software in the Middle School Classroom**

Studoval účinek zahrnutí dynamického geometrického softwaru Sketchpad do osnov matematiky 7 třídy – dívčí soukromá škola v New Rochelle – 14 d. kontrolní skupina (pravítka, úhloměry) a 14 d. experimentální skupina (software) - 4 týdny výuka – post-testy a rozhovory.

Závěr: Studentky v experimentální skupině vyvinuly pozitivnější postoj k matematice a dříve pochopily věty než studentky v kontrolní skupině.

2006	Presmeg	**Research on visualization in learning and teaching mathematics**

Ve své práci popisuje dostupné kvalitativní i kvantitativní studie, které se zabývaly vizualizací v matematice od první poloviny do konce 20. století.

Závěr: Zformuloval 13 zásadních otázek pro výzkum vizualizace ve výuce matematiky.

2007	Hanna, Sidoli	**Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives**

Podávají krátký přehled způsobů, kterými se vizualizace diskutuje v literatuře o filozofii matematiky. Průzkum není vyčerpávající, ale věnuje zvláštní pozornost způsobům, kterými je vizualizace považována za užitečnou pro některé aspekty matematického důkazu, zejména pro ty, které souvisejí s vysvětlením a zdůvodněním.

Závěr: Jsme ještě daleko od konsensu ve všech možných rolích vizualizace v matematice, v matematickém vzdělávání a především její roli v důkazech.

2008	Lin	**Beliefs about using technology in the mathematics classroom: interviews with pre-service elementary teachers**

Vysokoškolští studenti oboru učitel základní školy zkoumali vhodné technologie zlepšující výuku – interview s 10 studenty.

Závěr: Všichni respondenti se shodli, že počítače a webové zdroje jsou důležité, pomáhají při učení se matematice a poskytují vizuální reprezentaci.

2009	Biza a kol.	**Teachers' views on the role of visualisation and didactical intentions regarding proof**

Zabývali se názory středoškolských učitelů na úlohu vizualizace v opodstatnění tvrzení – 91 učitelů – zpětná vazba chybného studentského řešení úkolu – interview s 11 učiteli.

Cíl – prozkoumat potencionální vlivy na didaktiku týkající se důkazů.

Závěr: Vliv – stabilita přesvědčení o významné roli vizualizace.

2010	Alsina, Nelsen	**An Invitation to Proofs Without Words**

Věnovali se důkazům beze slov v oblasti elementární kombinatoriky. Prezentovali kombinatorický důkaz založený na dvou jednoduchých principech počítání – Fubiního princip a Kantorův princip, které beze slov dokazují několik jednoduchých vět o přirozených číslech.

2010	Baccaglini-Frank, Mariotti	**Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model**

Zkoumali kognitivní procesy žáků při řešení otevřených problémů ve formě konstrukčních úloh pomocí dynamické geometrie.

Závěr: Na základě pozorování práce žáků a rozhovorů s nimi dospěli ke zjištění, že dynamická geometrie podporuje induktivní způsoby uvažování a rozvíjí u žáků specifickou formu argumentování.

2011	Abdelfatah	**Story-based Dynamic Geometry Approach to Improve Attitudes toward Geometry and Geometric Proof**

Zabýval se otázkou, proč výuka geometrie a dokazování geometrických vět často vyvolává ve studentech a někdy i u samotných učitelů negativní pocity.

Závěr: U studentů s výukou probíhající za pomocí aplikace dynamické geometrie došlo k pozitivnímu posunu z hlediska chápání role důkazu v matematice.

2011	Erbas, Aydogan-Yenmez	**The effect of inquiry-based explorations in a dynamic geometry environment on sixth grade students' achievements in polygons**

Ve své studii zkoumali účinky používaní prostředí dynamické geometrie DGE u studentů šestého ročníku.

Závěr: Výkony studentů, kteří při výuce používali DGE (experimentální skupina) byly lepší než studentů bez DGE (kontrolní skupina). Studenti v experimentální skupině projevili větší zájem a motivaci k učení geometrie ve srovnání se studenty v kontrolní skupině, kteří často projevovali nezájem. Také komentáře a interpretace studentů během lekcí a testů byly v experimentální skupině přesnější, protože se více zapojili do výuky s DGE. Kvalitativní údaje navíc naznačují, že v experimentálních skupinách chlapci projevili větší zájem o učení v počítačovém prostředí než dívky.

2012	Hanna, De Villiers	**Proof and Proving in Mathematics Education: Aspects of Proof in Mathematics Education**

Ve své práci zkoumají několik teoretických a praktických představ o tom, proč a jak by měli pedagogové matematiky přistupovat k výuce a učení důkazů. Představují hlavní témata a podtémata, která vzešla z prezentací a diskusí na konferenci The 19th ICMI Study.

Závěr: Komunita matematického vzdělávání musí neustále a zásadně přehodnocovat roli experimentování a důkazů ve světle rychle se rozvíjejících počítačových technologií, dynamických softwarových prostředí a současného pokroku v kognitivní vědě a v nově vznikající vědě o automatizovaném důkazu.

2012	Štrausová	**Vizuální důkazy ve výuce matematiky**
Zabývá se tím, jak může vhodná vizualizace pomoci při řešení matematických problému a ukázkou na příkladu popisuje, jak je možné ve výuce využít vizuálních důkazů.		
Závěr: Pro zařazení vizuálních materiálů do výuky je potřeba změnit přístup k učení – aktívní zapojení žáku do výuky.		
2013	Kilic	**The effects of dynamic geometry software on learning geometry**
Popisuje pilotní výzkum – vliv geometrie na rozvoj geometrického myšlení, na vědomosti studentů a dovednost dokazovat geometrická tvrzení na tureckých středních školách (145 – experimentální skupina, 82 – kontrolní skupina).		
Závěr: Experimentální skupina v porovnání s kontrolní skupinou dosáhla výrazného zlepšení v testech geometrického myšlení a v testech dokazování.		
2013	Knill, Slavskovsky	**Illustrating mathematics using 3D printers**
Zabývají se technologii 3D tisku jako vhodného nástroje pro vizualizaci důkazů v matematice. Ve své práci uvádí příklady, které vyvinuli pro potřeby výuky důkazů v základním matematickém vzdělávaní.		
2013	Robová	**Role programů dynamické geometrie při objevování a dokazování hypotéz**
Zabývá se analýzou využití programu dynamické geometrie při objevování, formulování a zdůvodňování vlastností a vztahů mezi matematickými objekty.		
Závěr: Program dynamická geometrie mohou u studentů podporovat osvojování i rozvíjení matematických poznatků, objevování i formulování matematických hypotéz.		
2016	Ugurel a kol.	**Mathematically gifted high school students' approaches to developing visual proofs (VP) and preliminary ideas about VP**
Ve své studii popsali postupy a příklady vizuálních důkazů, které sestrojili nadaní studenti středních škol – kvalitativní výzkum.		
Závěr: Studenti měli pozitivní zkušenost s vizuálními důkazy a ve tvorbě byli produktivní. I když se nikdy s vizuálními důkazy nesetkali, dosáhli v této oblasti výborných výsledků.		

3.2.2 DIMA na UHK

Předmět DIMA vyučovaný na FIM UHK zahrnuje především oblast teorie grafů. Jak už bylo zmíněno v úvodu, teorie grafů je vhodná k popisu různých situací a problému ze skutečného života a poskytuje i jejich řešení. Nejen proto je předmět DIMA pro naše studenty prospěšný. Je velmi důležité, aby studenti chápali témata a příslušné procesy vyučované v tomto předmětu. Kromě grafových algoritmů, kterým je věnovaná značná část předmětu, je kladen velký důraz na pochopení matematických vět a jejich důkazů a také na odvození a dokázaní určitých vlastností grafů a grafových struktur.

Přestože jsou důkazy v informatice důležité, studenti informatických oborů je považují za složité a dokonce za zbytečné (vlastní nepublikovaný výzkum - dotazníkové šetření, 2015). Nejčastějšími důvody, proč studenti nemají důkazy v oblibě, je skutečnost, že je nechápou a že nejsou k provádění důkazů motivováni. Od vysokoškolských studentů se však očekává, že budou mít zájem o jimi zvolený předmět a že se budou chtít naučit co nejvíce a látce dobře porozumět. Pouhé memorování znění vět je špatné. Studenti si pak ani pořádně neuvědomují, co je předpokladem věty a co jejím tvrzením, jaký je vůbec její smysl, k čemu se věta hodí, jak ji dále používat. Je tudíž zapotřebí neustále hledat možnosti, jak zlepšit výuku matematických důkazů. Jejich neporozumění vede k demotivaci učení důkazů.

Často nám k lepšímu pochopení toho, co je třeba dokázat, pomůže pouhé rozepsání, znázornění definic a pojmů, které se v dané větě vyskytují, výstižná grafika implikací, vztahů, které mezi nimi platí, tj. vizualizace důkazů. Jak ukazují různé studie, viz podkapitola 3.2.1, vhodná vizualizace nebo animace důkazů vět by mohla studentům pomoci k jejich lepšímu a hlubšímu pochopení.

4 Výzkumné šetření

Záměrem výzkumu bylo navržení a vytvoření vizuálních prezentací vhodných jako doplněk výuky matematických vět v oblasti teorie grafů probíraných v kurzu DIMA na FIM UHK a zkoumaní vlivu daných podpor na porozumění probrané látky.

4.1 Metody zpracování a způsob řešení

Na základě stanovených předpokladů a výzkumných otázek byly k analýze vlivu vizuální reprezentace důkazů matematických vět na jejich srozumitelnost v oblasti teorie grafů využity kvalitativní a kvantitativní výzkumné metody.

Byly stanoveny tyto výzkumné nástroje:

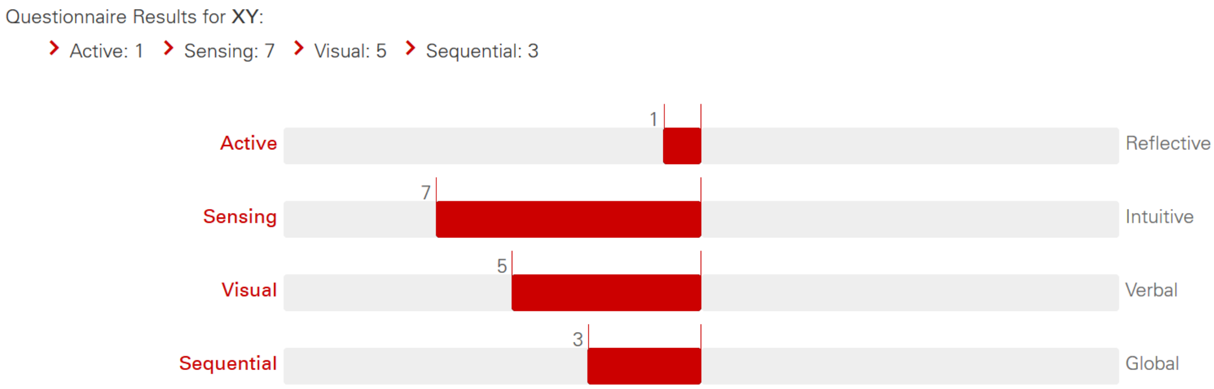
- *úvodní testování znalostí a dovedností z matematické logiky*, která je nezbytná při dokazování matematických vět, nebo jejich vyvrácení - detekováno formou pre-testů na úvodní hodině kurzu DIMA;
- *závěrečné testování* - detekováno formou post-testů a skupinových závěrečných projektů v závěru kurzu DIMA;
- *dotazníkové šetření* týkající se důležitosti a porozumění důkazům – v závěru kurzu DIMA;
- *eseje* k získání informací o vztahu studentů k dokazování v teorii grafů a vizualizaci důkazů – v závěru kurzu DIMA;
- *dotazník Index of Learning Styles* k zjištění preference učebních stylů - na začátku kurzu DIMA;
- *test struktury inteligence I-S-T 2000 R* k diagnostice figurální inteligence - v průběhu kurzu DIMA.

Pre-testy a post-testy jsou nestandardizované testy, prošly obsahovou validitou provedenou kompetentními odborníky, vyučujícími předmětu DIMA na UHK. Reliabilita pre-testů a post-testů byla na začátku výzkumu ověřena metodou „půlení“ (half-split method) podle [Chráska, 2007] použitím Spearman – Brownova vzorce:

$$r_{sb} = \frac{2r}{1+r},$$

kde r je Pearsonův korelační koeficient determinující korelaci mezi výsledky lichých a sudých úloh testu; koeficient reliability pre-testu r_{sb} = 0.82, post-testu r_{sb} = 0.81. Pre-test a post-test obsahoval 10 úloh, z toho jedna úloha měla 7 částí, celkem 16 úloh. Každá úloha byla bodována v rozmezí 0-1 bod, celkem bylo možné dosáhnout 16 bodů. Prvních sedm úloh byly obecné úlohy z výrokové logiky (dále značeno jako pre-test - výroková logika), kde student vybíral ze tří nebo čtyř možností. Osmá úloha obsahovala sedm částí, v každé byl uveden výrok, ke kterému měl student formulovat jeho negaci (dále značeno jako pre-test - negace). Poslední dvě úlohy byly důkazové, student měl napsat důkaz uvedeného tvrzení (dále značeno jako pre-test - důkazy). V úvodu byly studenti instruováni, že správná odpověď nemusí být jenom jedna. Pre-test (viz Příloha A) obsahoval úlohy z výroků, negací, implikací, ekvivalencí, obměn a dokazování z obsahu kurzu ZMAT 1, který studenti absolvovali před kurzem DIMA a daný kurz je prerekvizitou předmětu DIMA. Post-test (viz Příloha B) obsahoval úlohy z výroků, negací, implikací, ekvivalencí, obměn a dokazování z obsahu kurzu DIMA (dále značeno analogicky jako u pre-testu: post-test – výroková logika, post-test – negace, post-test – důkazy, post-test – negace+důkazy). Struktura úloh pre-testu a post-testu byla analogická.

Dotazník ILS je standardizovaný on-line nástroj, který určí preferující učební styl studentů. Detekuje jednu ze čtyř dichotomních dimenzí stylu učení: aktívní ↔ reflexivní, smyslový ↔ intuitivní, vizuální ↔ verbální a sekvenční ↔ globální. Dotazník obsahuje 44 otázek s možností výběrů odpovědí (viz Příloha C). Po vyplnění je automaticky vyhodnocen. Výstupem dotazníku je graf, který zobrazuje uživateli jeho preferenci k určitému stylu a intenzitu této preference, viz obrázek 6.



Obrázek 6: Výstup ILS dotazníku jednoho respondenta, (zdroj: autor)

Intenzita preference je rozdělena do škál:

- **1-3** – slabá preference, preference je vyrovnaná k oběma kategoriím;

- **5-7** – střední preference, preference k danému stylu je mírná a při aplikovaní učebních prostředků podporující opačnou kategorii mohou při učení nastat problémy;
- **9-11** – silná preference, preference k danému učebnímu stylu je natolik silná, že při používání učebních materiálů podporujících opačnou kategorii nastávají podstatné problémy při pochopení nové látky.

Validita a reliabilita ILS dotazníku je opakovaně testována [Felder, Spurlin, 2005], [Litzinger a kol., 2007]. Pro účely tohoto výzkumu byla uvažovaná pouze vizuální - verbální dichotomní dimenze.

I-S-T 2000 R je strukturovaný test, jehož autory jsou němečtí psychologové Brocke, Liepmann a Beauducel. Jde o přepracovaný původní test I-S-T 70, který byl rozšířením prvotního testu struktury inteligence sestaveného německým psychologem Rudolfem Amthauerem v roce 1953. Česká verze testu s původní standardizací a normami byla zpracovaná pražským Testcentrem. [Amthauer a kol., 2005]

I-S-T 2000 R je vyhrazen hlavně pro diagnostické účely. Diagnostikuje následující poznávací schopnosti:

základní modul

- Verbální inteligence
- Numerická inteligence
- Figurální inteligence
- Celková úroveň poznávacích schopností
- Paměť

rozšířený modul

- Znalosti (verbálné, numericky a figurálně kódované)
- Krystalizovaná inteligence
- Fluidní inteligence

Při diagnostice je doporučeno použití celého základního modulu, případně jeho zkrácené verze bez testu paměti [Amthauer a kol., 2005].

Pro účel tohoto výzkumu byla použita zkrácená verze, jejíž škály verbální, numerické a figurální inteligence umožňují určit dispozice k výkonům v určitých kognitivních oblastech [Amthauer a kol., 2005], přičemž při statistickém zpracování byl důraz kladen pouze na škálu figurální inteligence studentů. Škála figurální inteligence diagnostikuje způsobilost zacházet s tvarově-obrazným materiálem, včetně manipulace s dvojrozměrnými a trojrozměrnými obrazci. S výjimkou schopnosti zachytit plošné a prostorové proporce, měří škála také schopnost nacházet mezi obrazci logické souvislosti. [Amthauer a kol., 2005]

Každý student dostal své celkového hodnocení testování pro své vlastní uplatnění, například pro rozhodování volby povolání. Poznámka: ukázka testu není uvedena, z důvodů zákazu rozmnožování, ukládání a přenášení elektronickými, mechanickými, kopírovacími, filmovacími, záznamovými či jinými prostředky.

V rámci výzkumu vypracovali studenti v závěru předmětu DIMA zápočtový projekt, ve kterém vytvořili vizualizaci vybrané matematické věty z oblastí teorie grafů. Také byli požádáni, aby napsali dobrovolnou esej o své práci (s jakými komplikacemi se potýkali, s čím měli problém, proč si vybrali daný způsob dokazování apod.), o svých postojích k důkazům obecně a k vizualizaci důkazů.

Na konci kurzu byl studentům rozdán dotazník zaměřený na srozumitelnost výuky důkazů v kurzu DIMA. Jde o nestandardizovaný anonymní dotazník, který vznik jenom pro účel tohoto výzkumu. Obsahuje 9 otázek, tři jsou informativního charakteru (pohlaví, nejvyšší dosažené vzdělání, čas věnovaný zápočtovému projektu), další otázky zjišťovaly, jak naši studenti hodnotí důležitost důkazů a jak dalece byl pro ně výklad důkazů probíraných v rámci předmětu DIMA srozumitelný. V dotazníku měli také prostor vyjádřit se k výuce, co by jim dál pomohlo pochopit lépe výuku důkazů (viz. Příloha D) .

Kurz DIMA je povinným předmětem na FIM UHK pro informatický obor Aplikovaná informatika a volitelným pro Informační management. Studenti zapsání na tento předmět musí pro úspěšné absolvování složit zkoušku, která se skládá z písemné části (zkouškový test) a z ústní části. Součástí předmětu je i předpoklad napsání zápočtového testu před zkouškou. Oba testy, jak zápočtový, tak i zkouškový (viz Příloha E a F) obsahují úlohy z oblastí tvorby negací, obměn, dokazování a vyvrácení tvrzení. V rámci výzkumu bylo také sledováno dosažené bodové skóre v uvedených typech úloh ze zápočtových a zkouškových testů, které byly připraveny vyučující pro potřebu závěrečného testování celého předmětu DIMA. Testy byly používaný a ověřovány několik let před začátkem výzkumu jak autorkou výzkumu, tak i jejími spolupracovníky, kteří se podílí na výuce kurzu DIMA. Toto dosažené bodové skóre bylo srovnáno se studijní úspěšnosti (tj. post-test – pre-test) v částech týkajících se negace + důkazy a byl zjišťovaný vzájemný vztah mezi těmito veličinami.

4.2 Výzkumný soubor

Předmětem předkládaného výzkumu jsou studenti informatických oborů FIM UHK, kteří se zúčastnili kurzu DIMA v akademickém roce 2015/16 až 2017/18. Základní soubor, který tvoří 201 studentů, byl rozdělen do tří skupin – nazvaných Fáze 1, Fáze 2 a Fáze 3. Fáze 1 měla 67 studentů, kteří navštěvovali kurz DIMA v akademickém roce 2015/16, Fáze 2 byla reprezentována 71 studenty, kteří navštěvovali DIMA v akademickém roce 2016/17 a Fáze 3 zahrnovala 63 studentů, kteří navštěvovali předmět DIMA v akademickém roce 2017/18. Důvodem vedení výzkumu tímto způsobem a nevyužití designu náhodného experimentu, který vyžaduje náhodné rozdělení studentů do experimentální a kontrolní skupiny ve stejném čase, byl důvod organizační, tj. nerealizovatelnost rozdělení studentů do skupin v rámci téhož akademického roku. Výuka matematických vět a jejich důkazů probíhá na přednáškách, které jsou pro všechny studenty společné. Proto se jedná o kvazi-experimentální výzkum, který se přes kritické výhrady považuje za užitečný a nezbytný nástroj pedagogického výzkumu při maximální míře dodržování techniky zabezpečující alespoň relativní kontrolu všech zúčastněných faktorů [Maňák a kol, 2005].

Všem Fázím byly vytvořeny stejné podmínky, výuka důkazů pro všechny tři akademické roky probíhala stejně (tj. stejný vyučující, stejný obsah učiva), rozdíl byl právě a pouze v použití vizuálních reprezentacích při výuce matematických vět a jejich důkazů následujícím způsobem:

- **Fáze 1:** tradiční výuka důkazů; Poznámka: *tradiční výuka* je chápaná jako výuka bez vizuálních podpor. Je reprezentována učebním materiálem, ve kterém jsou matematické důkazy sepsány pomocí výrokové logiky.
- **Fáze 2:** výuka důkazů probíhala pomocí vizuálních prezentací;
- **Fáze 3:** výuka důkazů probíhala pomocí vizuálních prezentací a multimediálních aplikací.

Následující výstup, tabulka 2, popisuje výzkumný vzorek vzhledem ke skupinám Fáze 1 až 3 a pohlaví:

Tabulka 2: Výzkumný vzorek respondentů, (*zdroj: autor, nástroj: SPSS Statistics, Exel2016*)

*Fáze * pohlaví Crosstabulation*

Count

		pohlaví				Total	
		žena		muž			
		Frequency	Percent	Frequency	Percent	Frequency	Percent
Fáze	Fáze 1	5	2,5	62	30,8	67	33,3
	Fáze 2	6	3	65	32,3	71	35,3
	Fáze 3	5	2,5	58	28,9	63	31,4
Total		16	8	185	92	201	100

4.3 Způsob zpracování dat

4.3.1 Kvantitativní data

Pro kvantitativní zpracování dat byl použit statistický software IBM SPSS Statistics a MS Exel 2016. IBM SPSS Statistics je přední světový statistický software určený k řešení obchodních a výzkumných problémů pomocí ad hoc analýzy, testování hypotéz, geoprostorové analýzy a prediktivní analýzy [IBM, 2019]. Pro tvorbu grafů a využití základných statistických výpočtu byl použit MS Exel 2016. Je to tabulkový kalkulátor a výkonný nástroj pro vizualizaci a analýzu dat [Office, 2019].

Byly využity deskriptivní statistiky pro pre-testy, post-testy (jak pro celkové pre-testy a post-testy, tak i pro částí pre-testů a post-testů: výroková logika, negace, důkazy, negace + důkazy), studijní úspěšnost ve všech Fázích (celkovou i částečnou), skóre úloh z oblasti negací, obměn, důkazů a vyvrácení tvrzení ze zápočtových a zkouškových testů a figurální inteligenci pro všechny Fáze. Pro popis ordinální proměnné – vizuální styl učení studentů byla použita kontingenční tabulka.

Pro testování normality se v softwaru SPSS používají dva testy. Kolmogorův-Smirnův test se používá v případě velikosti dat větší než 50. Shapirův-Wilkův test se používá při menším počtu dat, když je ve vzorku méně než 50 respondentů. [Almašiová, Kohútová, 2016] Někteří autoři jako [Lajčiaková, Tabačková, 2010] uvádí pro použití testu nejnižší možnou velikost 30 elementů. Vzhledem k velikosti zkoumaného vzorku byl test normality u všech skupin prováděn pomocí Kolmogorova-Smirnova testu na hladině významnosti 0.05.

Při testování hypotéz vzhledem k typu dat byla využita Analýza rozptylu (ANOVA) a Kruskalův-Wallisův test. Test ANOVA se používá u testování dat s normálním rozdělením pro zkoumání rozdílů dvou a více nezávislých výběrů v závislé, kardinálně škálové proměnné. Testuje, zda se průměry závislé proměnné signifikantně liší mezi třemi a více skupinami. V případě nepotvrzené normality se používá neparametrická alternativa Kruskalův-Wallisův test. Kromě normality jsou podmínkou při použití testu ANOVA stejné rozptyly jednotlivých výběrů, tzv. homosketastisticita, zjišťovaná pomocí Leveneho testu. V případě nehomogenity rozptylů se používá opět Krusklův-Wallisův test. Pro zjištění, mezi kterými skupinami existují statisticky významné rozdíly (po potvrzení existence statisticky významných rozdílů mezi výsledky) se používají tzv. post-hoc testy. [Almašiová, Kohútová, 2016] U ANOVY byly použity post-hoc testy s Bonferonniho korekcí.

Pro zjištění závislosti mezi vizuálním studijním stylem, figurální inteligenci a studijní úspěšnosti byla použita korelační analýza, která se používá na měření vztahů. Danou analýzou byl také zjišťován i vztah mezi studijní úspěšností negace + důkazy a dosaženým skóre sledovaných zápočtových a zkouškových úloh. Odpověď byla poskytnuta prostřednictvím korelačního koeficientu, který se pohybuje mezi -1 a 1. [Almašiová, Kohútová, 2016] Rimančík ve své práci [Rimančík, 2007] uvádí následující interpretaci velikosti korelačního koeficientu (v absolutní hodnotě):

- $r < 0,1$ - triviální korelace;
- $0,1 \leq r \leq 0,3$ - malá korelace;
- $0,3 < r \leq 0,5$ - střední korelace;
- $r > 0,5$ - velká korelace.

Vzhledem k povaze dát byl pro zjištění vztahů použit ve většině případů Spearmanův koeficient, který se používá pro měření vztahů mezi ordinální a kardinální proměnnou nebo také pro dvě kardinální proměnné při nesplnění normality. Při splnění normality byl pro porovnání kardinálních hodnot použit Pearsonův koeficient.

Pro srovnání četností a následné porovnání hodnocení zápočtových projektů a při analýze chyb ze zápočtových + zkouškových testů byl použit MS Exel 2006.

4.3.2 Kvalitativní data

Kvalitativní data byla získána ze závěrečných projektů a esejí, které studenti vytvářeli na konci kurzu. V závěrečném projektu studenti sami vytvořili vizualizaci jednoduchého tvrzení z oblasti teorie grafů, popsali proces konstrukce důkazu tvrzení a sdělili, s jakými problémy se potýkali. V eseji uvedli svůj vztah k matematickým důkazům a jejich vizualizacím. Další data byla získána z odpovědí na otevřené otázky dotazníku. Analýza dat byla interpretována grafickými výstupy pomocí grafů a tabulek vytvořených v MS Exelu 2006, doplněná rozbory.

4.4 Časový harmonogram

Časové rozpětí výzkumu bylo rozčleněno do tří Fází, kde každá Fáze odpovídá jednomu akademickému roku:

- V akademickém roce 2015/16, která odpovídá Fázi 1, byl zahájen výzkum studiem odborné literatury a zjišťováním současného stavu poznání, sběrem dat z pre-testů, post-testů, zápočtových a zkouškových testů od studentů z Fáze 1. Studenti také odevzdali zápočtové projekty, eseje a vyplnili ILS dotazníky, jejichž výsledky byly v daném roce zpracovány a proběhlo dotazníkové šetření ohledně důležitosti a srozumitelnosti důkazů a případných potřeb při výuce dokazování. Výuka matematických důkazů u studentů z Fáze 1 proběhla klasickým způsobem, tj. bez zařazení vizuálních prezentací. V daném akademickém roce byly vytvořeny vizuální prezentace důkazů matematických vět.
- V akademickém roce 2016/17, který odpovídá Fázi 2, pokračovala studie odborné literatury a zjišťování současného stavu problematiky, sbírala se data z pre-testů, post-testů, zápočtových a zkouškových testů od studentů z Fáze 2. Taktéž studenti odevzdali zápočtové projekty a eseje jako v předchozím akademickém roce a vyplnili ILS dotazníky, jejichž výsledky byly také zpracovány a proběhlo dotazníkové šetření ohledně důležitosti, srozumitelnosti důkazů a potřeb při výuce dokazování. Proběhla analýza dat získaných z předchozího akademického roku z pre-testů, post-testů, zápočtových a zkouškových testů, zápočtových projektů, esejí a dotazníků. Výuka matematických důkazů studentů z Fáze 2 proběhla pomocí vizuálních prezentací. V daném roce také bylo nabídnuto studentům z Fáze 2 testování strukturální inteligence pomocí testu I-S-T 2000 R – Základní modul. Testování mohli zpětně využít i studenti navštěvující kurz DIMA v akademickém roce 2015/16. Testování prováděla dle etických pravidel pro použití testových psychodiagnostických metod psycholožka

PhDr. Ivana Křelinová, která testy také diagnostikovala. Z daného testování byla získaná figurální inteligence studentů. Testování využilo 36 studentů z Fáze 2 a 7 studentů z Fáze 1. Testování bylo placeno ze Specifického výzkumu 2017 (SV 2017), jehož odpovědnou řešitelkou byla autorka výzkumu. Zároveň v daném roce byly autorkou navrženy a pod jejím vedením jako diplomové práce vytvořeny multimediální aplikace GraPro a ProofVis.

- V akademickém roce 2017/18, který odpovídá Fázi 3, pokračoval sběr dat z pre-testů, post-testů, zápočtových a zkouškových testů od studentů z Fáze 3. Studenti vypracovali a odevzdali zápočtové projekty a eseje, vyplnili ILS dotazník (výsledky ILS dotazníků byly hned vyhodnoceny), také vyplnili dotazník ohledně srozumitelnosti důkazů a potřeb při výuce dokazování. Výuka matematických důkazů studentů z Fáze 3 proběhla pomocí vizuálních prezentací a multimediálních aplikací vytvořených v předchozím roce. V daném roce se analyzovaly zápočtové projekty, eseje a dotazníky a byla zpracována data z pre-testů, post-testů, zápočtových a zkouškových testů z Fáze 2. 54 studentů z Fáze 3 se během kurzu také zúčastnilo testování struktury inteligence testem I-S-T 2000 R, které provedla a diagnostikovala opět psycholožka PhDr. Ivana Křelinová. Testování bylo hrazeno ze SV 2018.
- V akademickém roce 2018/19 proběhlo zpracování dat z pre-testů, post-testů, zápočtových a zkouškových testů od studentů z Fáze 3. Také se analyzovaly zápočtové projekty, eseje a zpracovávaly dotazníky ohledně srozumitelnosti důkazů z Fáze 3. Také proběhlo zpracování výsledku testování strukturální inteligence ze všech Fází.
- V roce 2019 se uskutečnilo zpracování a interpretace získaných dat, kompletace získaných výsledků zkoumání vlivu použitých vizuálních prostředků ve výuce důkazů.

Podrobněji je časový harmonogram rozepsán v tabulce 3.

Tabulka 3: Časový harmonogram výzkumu, (*zdroj: autor*)

Aktivita	2015/16 ≈Fáze 1	2016/17 ≈Fáze 2	2017/18 ≈Fáze 3	2018/19	2019/20
Rešerše	✓	✓			
Analýza dostupných multimediálních nástrojů na FIM UHK vhodných pro výuku důkazů matematických vět	✓				

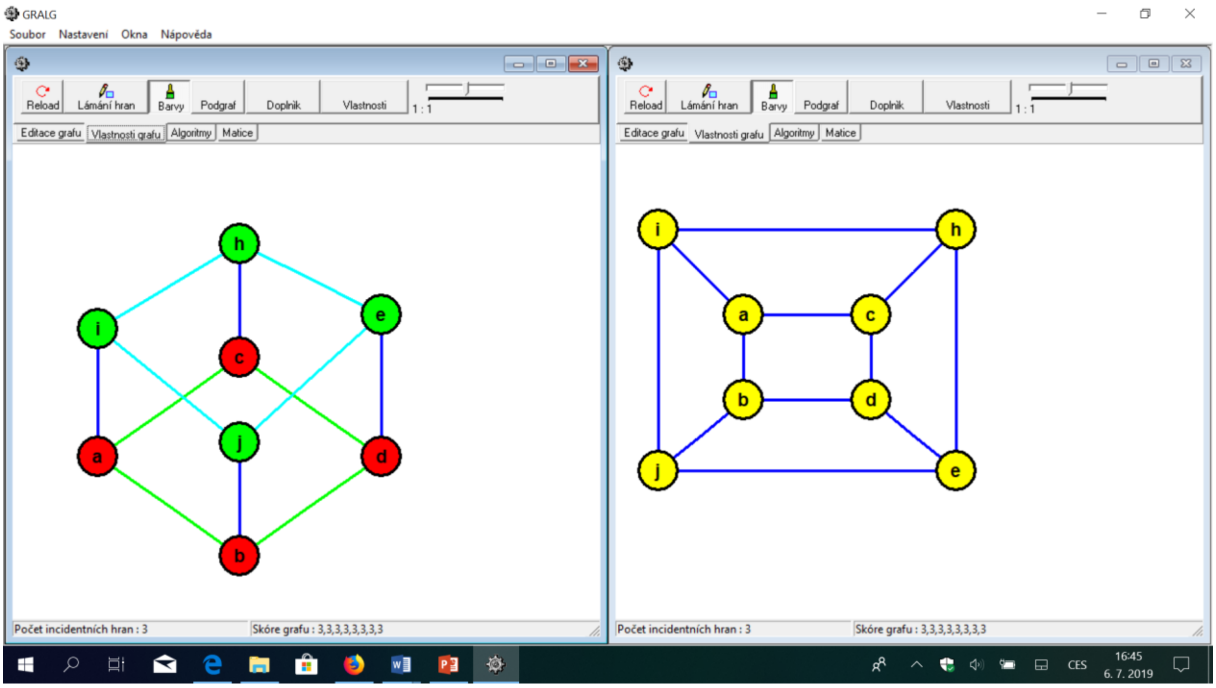
Sběr dat z pre-testů a post-testů	✓	✓	✓		
Analýza dat z pre-testů a post-testů		✓	✓	✓	
Sběr dat ze zápočtových a zkouškových testů	✓	✓	✓		
Analýza dat ze zápočtových a zkouškových testů		✓	✓	✓	
Sběr dat ze zápočtových projektů	✓	✓	✓		
Analýza zápočtových projektů		✓	✓	✓	
Sběr dat ze studentských esejí	✓	✓	✓		
Analýza studentských esejí		✓	✓	✓	
Vyplňování ILS dotazníků	✓	✓	✓		
Analýza ILS dotazníků	✓	✓	✓		
Dotazníkové šetření ohledně dokazování matematických vět	✓	✓	✓		
Analýza dat z dotazníkového šetření		✓	✓	✓	
Tvorba vizuálních prezentací	✓				
Výuka klasickým způsobem, bez použití vizuálních pomůcek	✓				
Výuka podpořená vizuálními prezentacemi		✓	✓		
Tvorba multimediálních aplikací		✓			
Výuka podpořená vizuálními prezentacemi a multimediálními aplikacemi			✓		
Testování strukturální inteligence		✓	✓		
Zpracování výsledků testování strukturální inteligence				✓	
Zpracování a interpretace výsledků				✓	✓

5 Výsledky výzkumu

S cílem podpořit efektivitu výuky grafových algoritmů v předmětu DIMA byly v předchozích letech vytvořeny specifické podpůrné multimediální aplikace:

- GrAlg – hlavním účelem je snadné vytváření a modifikace grafů a vizualizace grafových algoritmů na grafech zadaných obrázkem (grafem);
- A-DIMA – aplikace je vhodná pro demonstraci grafových algoritmů na grafech zadaných maticí sousedností.

Největší výhodou obou nástrojů je vizualizace grafových algoritmů, GrAlg na grafech zadaných obrázkem a A-DIMA na grafech zadaných maticí sousedností. Obě aplikace byly designově navrženy a naprogramovány našimi studenty podle scénářů vyučujících (GrAlg - Milková, A - DIMA - Ševčíková) jako součást diplomových a bakalářských prací. Jsou uživatelsky přívětivé a studenty pozitivně hodnocené. Aplikace A-DIMA z důvodů, že pracuje s grafy zadanými na matici sousednosti, není vhodná pro vizualizaci důkazů nebo jejich kroků. Program GrAlg umožňuje přiřazovat barvy vrcholům a hranám, dále umožňuje zobrazit více oken vedle sebe, viz obrázek 7, proto je vhodným doplňkem nejen při vysvětlování grafových pojmů a vlastností grafů, ale můžeme ho požít i do prezentací pro zobrazení jednotlivých kroků důkazů matematických vět z oblasti teorie grafů.

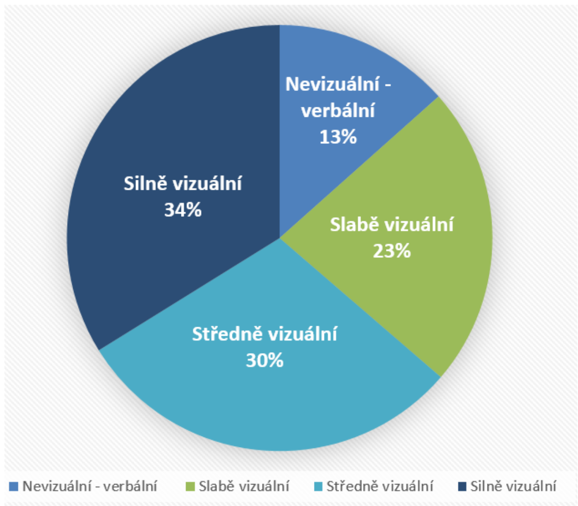


Obrázek 7: Program GrAlg – ukázka, (zdroj: autor)

5.1 Vizuální styl učení

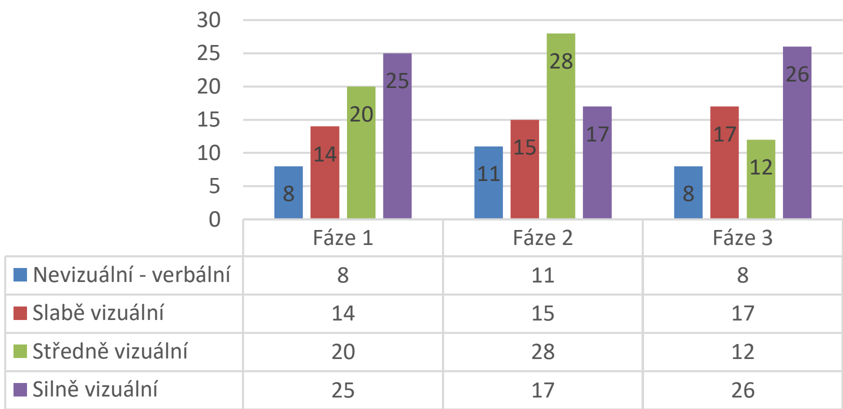
V akademickém roce 2015/16 až 2017/18 v rámci výzkumu vyplnilo celkem 201 studentů FIM navštěvujících předmět DIMA dotazník ILS profesora Feldera, který byl vložen do výukového prostředí BlackBoard.

Pomocí tohoto dotazníku byly detekovány preference jednotlivých pólů dichotomních dimenzí učebních stylů. Bylo zjištěno, že 87% studentů preferuje vizuální styl učení (34% silně, 30% středně, 23% slabě), viz graf 1. Vzhledem k popisu škál ILS dotazníku v kapitole 4.1 je možné tvrdit, že celkově ve všech Fázích 64% studentů bylo vizuálních.

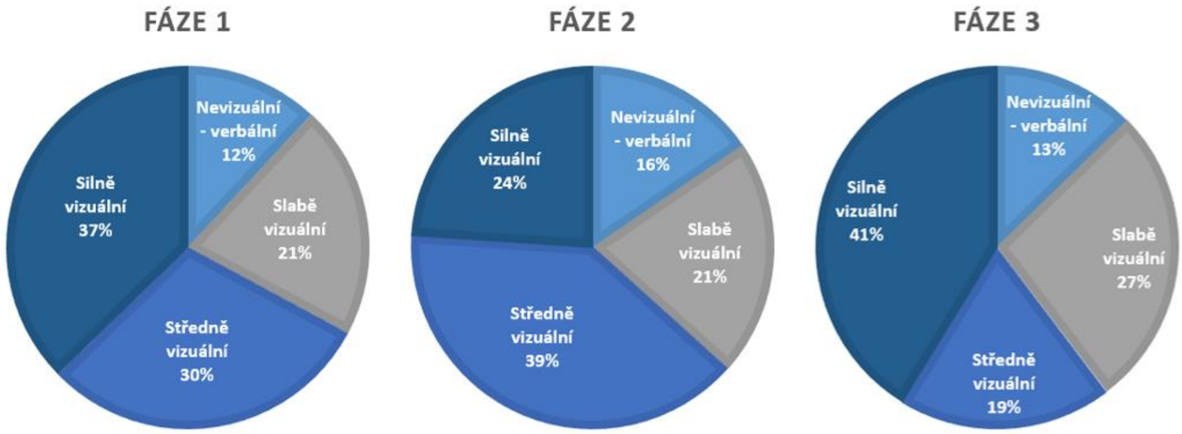


Graf 1: Preferující styl učení: vizuální ↔ verbální, (*zdroj: autor, nástroj: MS Exel 2016*)

Následující graf 2 uvádí zastoupení vizuální stylu učení u studentů podle Fází a graf 3 procentuální rozdělení v každé z Fází (zaokrouhleno na celé číslo):



Graf 2: Preferující styl učení (vizuální ↔ verbální) podle Fází,
(*zdroj: autor, nástroj MS Exel 2016*)

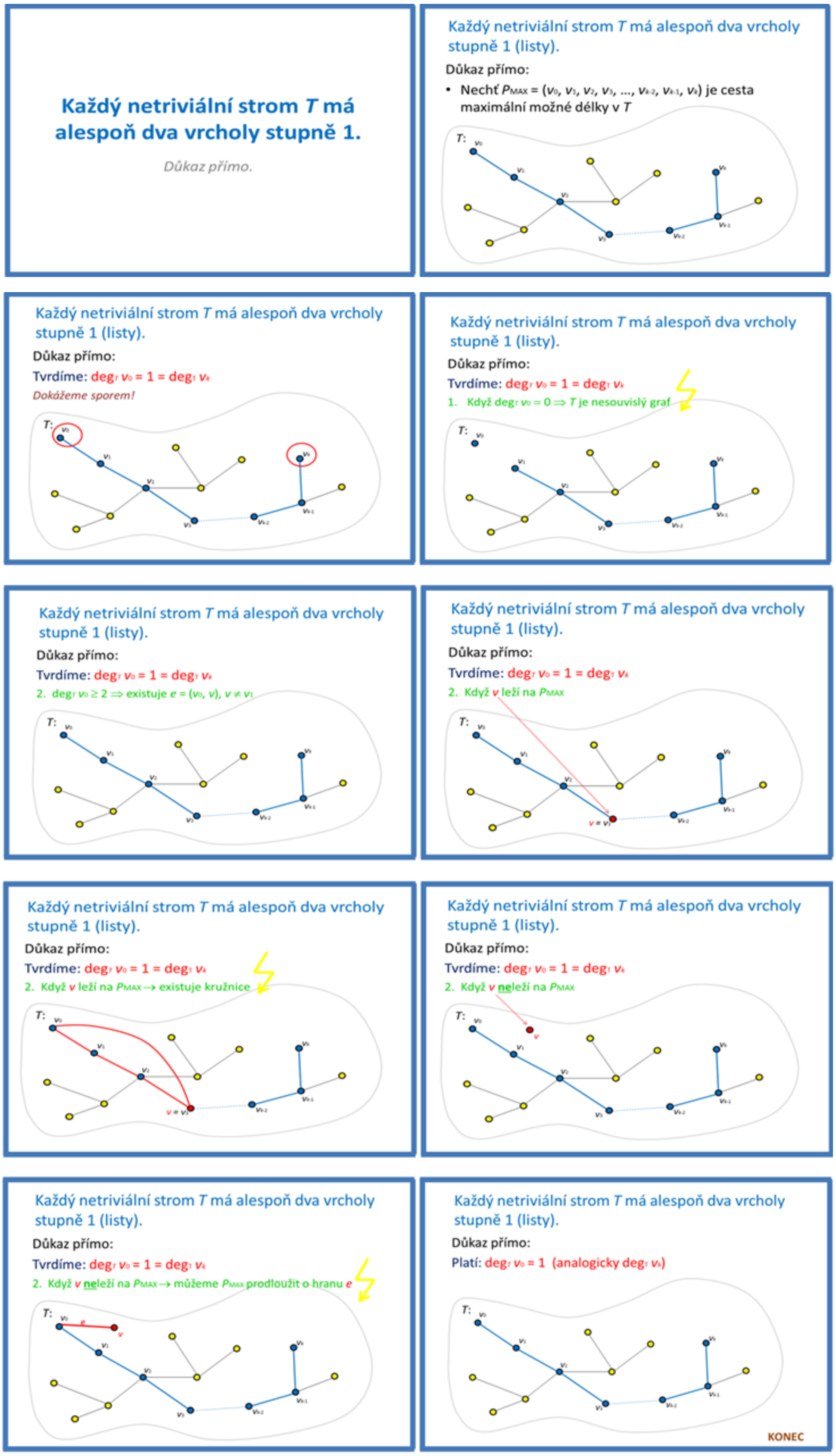


Graf 3: Preferující styl učení (vizuální ↔ verbální) podle Fází – procentuální zastoupení,
(*zdroj: autor, nástroj MS Exel 2016*)

5.2 Vizuální prezentace

V akademickém roce 2014/15 v rámci individuálního šetření autorky byli studenti kurzu DIMA tázáni, co by jim pomohlo při výuce důkazů. Většina studentů se vyjádřila, že důkazy jsou pro ně abstraktní záležitost a že je potřebují lépe zobrazit, aby si důkaz mohli lépe představit.

Vzhledem k výsledkům předchozího šetření z roku 2014/15 a s ohledem výsledkům ILS dotazníků, byly pro podporu výuky vět a důkazů v předmětu DIMA vytvořeny prezentace v PowerPointu. Dané prezentace, které krok po kroku podávají důkaz tvrzení, se postupně vytvářely a doplňovaly i o dynamické části jako animace či videa, které by lépe studentům přiblížily, vysvětlily danou problematiku. Některé prezentace byly vytvořeny s podporou multimédiální aplikace GrAlg. Na obrázku 8 je ukázka vizualizace důkazů z teorie grafů používaná ve výuce předmětu DIMA v akademickém roce 2016/17. Jde o PowerPoint obrazovky vizualizace důkazu matematického tvrzení týkajícího se základní vlastnosti stromů: „Nechť $T = (V, E)$ je strom. Každý netriviální strom T s nejméně dvěma vrcholy obsahuje nejméně dva koncové vrcholy, tj. vrcholy stupně jedna.“ (Poznámka: Jedná se o výběr obrazovek dokončených animací; celá vizualizace obsahuje více než 400 obrazovek.) Formální důkaz daného tvrzení je možné najít v [Matoušek, Nešetřil, 2009] nebo [Milková, 2013], viz. také obrázek 9. Vizuální prezentace jsou uloženy v http:oliva.uhk.cz – kurz DIMA a také na disku UHK N\Ukazky\Sevcikova\DIMA.



Obrázek 8: Vizuální prezentace – ukázka, (zdroj: autor)

Věta (o listech):
Každý netriviální strom *T* má alespoň dva vrcholy stupně 1 (listy).

Důkaz:
Nechť vrcholy $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ jsou vrcholy nějaké nejdelší cesty *P* v *T*. Délka cesty *P* je *k*.
(Využíváme předpoklad, že *T* je konečný graf.) Pak tvrdíme, že $\deg_T v_0 = \deg_T v_k = 1$, v opačném případě by existovala:
- buď hrana $\{v_i, v_s\}, i \in \{0, k\}, v_s \in P, s \in \{1,2,\ldots, k-1\}$, co by vedlo k existenci kružnice, a to by byl spor s tím, T je strom,
- nebo hrana $\{v_i, v_s\}, i \in \{0, k\}, v_s \notin P$, co by vedlo k existenci cesty $P' = P \cup \{v_i, v_s\}$ délky *k*+1, a to by byl spor s nejdelší cestou *P*,
- nebo $\deg_T v_i = 0$, $i \in \{0, k\}$, pak *T* obsahuje izolovaný vrchol a není souvislý, což je spor s tím, že *T* je strom.

V každém případě dojdeme k sporu, proto $\deg_T v_0 = \deg_T v_k = 1$. □

Obrázek 9: Formální důkaz ukázkové vizuální prezentace, (zdroj: autor)

V akademickém roce 2016/17 byli studenti, u kterých už probíhala výuka pomocí prezentací vizualizujících důkazy matematických vět, opět dotazování stejným dotazníkem jako studenti v akademickém roce 2015/16. Studenti žádali další multimediální/vizuální nástroje. S cílem více podpořit efektivitu výuky důkazů byly vyvinuty specifické podpůrné multimediální aplikace GraPro a ProofVis. Oba programy byly navrženy autorkou této práce a vznikly pod jejím vedením jako součást diplomových prací. (Poznámka: Vzhledem k počtu odpřednášených matematických tvrzení, která bylo zapotřebí vizualizovat pomocí multimediální aplikace, a k náročnosti na tvorbu aplikace, byla vypsána dvě stejná diplomová zadání s požadavkem komplementarity obou programů.) Multimediální aplikace GraPro a ProofVis byly v akademickém roce 2017/18 zařazeny do výuky k existujícím vizuálním prezentacím.

5.3 Aplikace GraPro a ProofVis

Multimediální nástroj GraPro[3] byl vytvořen v editoru zdrojového kódu Visual Studio Code od společnosti Microsoft [Šťasná, 2017]. Multimediální aplikace ProofVis[4] byla vytvořena jako single-page aplikace, kterou je možné spustit bez nutnosti instalace z majoritních zástupců webových prohlížečů na různých zařízeních [Skořepa, 2018]. I když při tvorbě aplikací byly použity jiné technologie, uživatelská rozhraní si jsou podobná, aby studenti neměli při přechodu z jedné aplikace na druhou potíže (jeden z požadavků při zadání diplomových prací). Aplikace byly na konci akademického roku 2016/17 testovány několika studenty, kteří poskytli cenné podněty při jejich tvorbě, například dali náměty pro jednodušší ovládaní aplikace. Tito studenti

[3] https://graspproofs.bitbucket.io/dist/#/uvod
[4] https://skoreto.github.io/proof-vis/

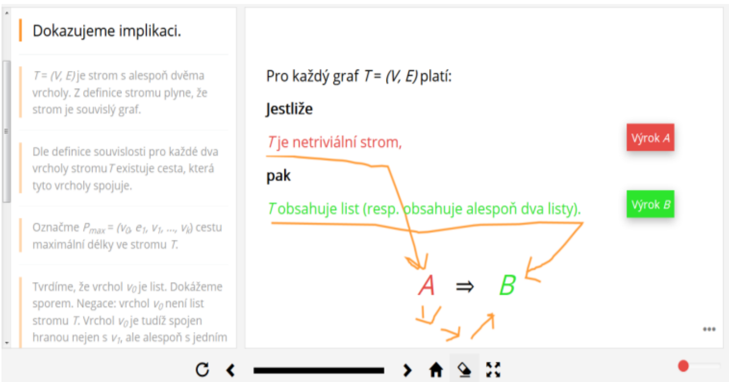
pak ještě vyplnili dotazník, ve kterém byli tázáni na výhody vytvořených aplikací. Na základě výsledku dotazníku lze hlavní benefity aplikací pro studenty charakterizovat následovně:

- snadné ovládání a přehlednost;
- interaktivní prostředí a animace;
- možnost vlastního pohybu v čase;
- kvalitní provedení vizualizace.

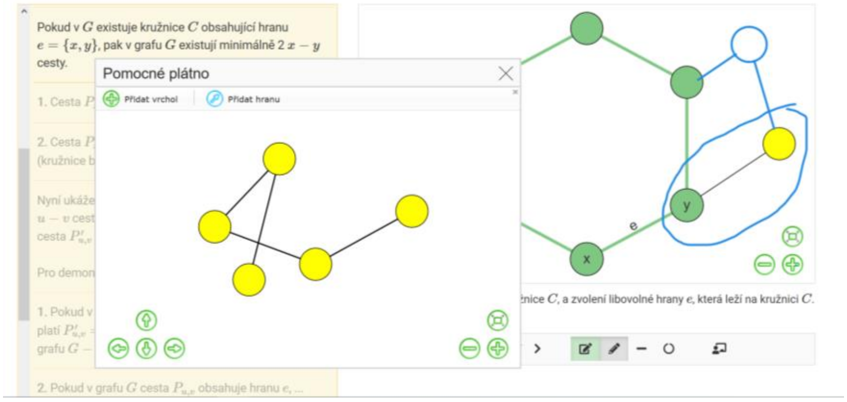
Přehrávač vizualizace důkazů u obou aplikací obsahuje kroky důkazů popsané slovně pomocí výrokové logiky na levé straně, hlavní vykreslovací plochu na pravé straně. U aplikace GraPro tlačítko „…“ v pravém dolním rohu slouží pro zobrazení definic a dalších pomocných informací, které se zobrazují pod hlavní obrazovkou, a u aplikace ProofVis jsou definice používaných pojmů napsané hned pod hlavním plátnem. Aktuální krok prezentovaného důkazu se vždy automaticky zvětší a zvýrazní. Aplikace umožňují kreslit na zobrazovací plochu barevným perem, je možné vyznačit různé části, dokreslovat prvky do grafu a následně je mazat, viz obrázek 10 a obrázek 11.

Nástroje obsahují několik ovládacích prvků:

- Tlačítko pro opakování animace v daném kroku důkazu;
- Tlačítko pro pohyb zpět;
- Ukazatel průběhu animace;
- Tlačítko pro pohyb vpřed;
- Tlačítko pro návrat na první krok;
- Tlačítko pro mazání nakreslených tvarů;
- Tlačítko pro zvětšení na celou obrazovku;
- Posuvník pro zpomalení animace;
- U ProofVis tlačítko pro otevření pomocného plátna.



Obrázek 10: Program GraPro – ukázka, (zdroj: autor)



Obrázek 11: Program ProofVis – ukázka, (zdroj: autor)

5.3.1 Benefity aplikací GraPro a ProofVis

Hlavní benefity GraPro a ProofVis pro učitele při výkladu látky a pro studenty při samostudiu jsou následující:

- Možnost kreslení do vizualizace umožňuje učiteli zdůraznit určité části, úseky v důkazu při výkladu. V aplikaci ProofVis je navíc možnost otevření pomocného plátna, na němž můžou být určité kroky detailněji vysvětleny.
- Sepsaný důkaz pomocí výrokové logiky v levé části a vizualizace v pravé části pomáhá učiteli podat důkaz současně, a to jak formálním zápisem pomocí výrokové logiky, tak vizualizací, což studentovi pomůže pochopit zápisy důkazu ve výrokové logice.
- Zvýraznění prvků grafů při najetí myší a pohyb kamery – oddělování a přibližování určitých částí grafů u aplikace PoofVis umožňuje opět lépe poukázat na určité úseky v důkazu.
- Možnost zobrazení definic a pojmů, které jsou použité v důkazu - vhodné pro připomenutí pojmů a definic využívaných v důkazu.
- Pohyb zpět a vpřed umožňuje vracení se k nepochopené části důkazu, nebo naopak ke zrychlení zřejmých kroků.
- Část týkající se výrokové logiky u GraPro pomáhá studentům zopakovat a procvičit si základy negování, jejichž znalost je nutná při nepřímém dokazování nebo u důkazu sporem.
- Část Typy důkazů u aplikace GraPro také podává studentům ucelený přehled o typech důkazů a jejich postupech.

5.4 Statistické šetření

V rámci výzkumu byly porovnávány výsledky pre-testů a post-testů jako celek a také výsledky všech částí pre-testů a post-testů (výroková logika, negace, důkazy, negace + důkazy), které byly sledovány v rámci výzkumu ve všech Fázích. Dále bylo sledováno výsledné skóre úloh zápočtových a zkouškových testů z oblasti negace, obměn, vyvrácení a dokazování tvrzení ve všech Fázích výzkumu. Byly analyzovány závěrečné projekty, ve kterých studenti vytvářeli vlastní vizualizace důkazů, a zpracovávány eseje a dotazníky. Proběhlo statistické zpracování a vyhodnocování výsledků. Dílčí práce na výzkumu byly prezentovány na konferencích a publikovány v časopisech, viz [Ševčíková, Milková, 2016], [Ševčíková, 2017], [Ševčíková a kol., 2017], [Ševčíková, Milková, 2018], [Milková, Ševčíková, 2016], [Milková, Ševčíková, 2017].

Studenti všech Fází zapojení do výzkumu v akademických rocích 2015/16 až 2017/18 vyplnili pre-test, post-test, zápočtový, zkouškový test a vypracovali závěrečný projekt (vizualizaci důkazu). Byli požádáni o napsání eseje o své práci, o svých postojích k dokazování obecně a k vizualizaci důkazů a o vyplnění dotazníku ohledně srozumitelnosti důkazů na výuce.

5.4.1 Popisná statistika získaných kvantitativních dat

Pre-test studenti vyplňovali v prvním týdnu letního semestru v rámci předmětu DIMA. Výsledkem tohoto pre-testu byla data ukazující vstupní úroveň znalostí výrokové logiky, tvorby negací výroků a jednoduchých důkazů probíraných v předmětu ZMAT1 nebo ZMI1 (Poznámka: ZMAT1 a ZMI1 jsou analogické, paralelně probíhající, kurzy se stejným obsahem. Důvodem dvou stejných kurzů je velký počet studentů, ZMAT1 je kurz určen pro obor Informační management a ZMI1 pro obor Aplikovaná informatika.), který všichni úspěšně absolvovali na FIM UHK v předešlém roce. Post-test proběhl po ukončení předmětu DIMA a jeho výsledkem byla data výstupní úrovně znalostí výrokové logiky, tvorby negací výroků a jednoduchých důkazů z teorie grafů probíraných v předmětu DIMA. Konečnou úroveň znalostí poskytly také výsledky ze zápočtových a zkouškových testů.

V následujícím textu jsou uvedeny deskriptivní statistiky pro všechny výsledky pre-testů a post-testů a jejich částí (výroková logika, tvorba negací, důkazy, negace + důkazy), bodové skóre zápočtových a zkouškových úloh z oblastí negací, obměn, vyvrácení a dokazování tvrzení ve všech Fázích. Základní veličiny popisné statistiky jsou uvedeny v tabulkách, srovnání mediánů výsledků všech pre-testů a post-testů a všech studijních úspěšností je provedeno pomocí krabicových grafů. Pro popis vizuálního stylu učení studentů byla použita kontingenční tabulka. Všechny výstupy byly vytvořeny v programu IBM SPSS Statistics.

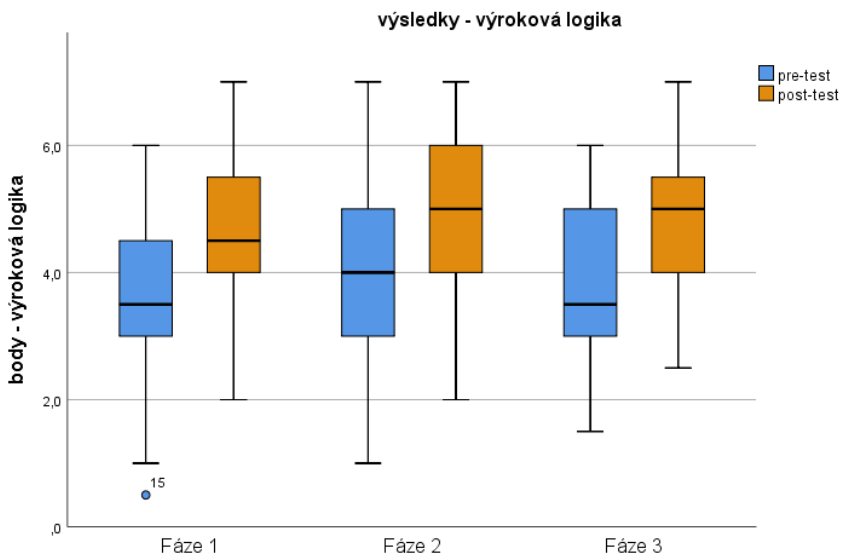
5.4.1.1 Výroková logika

Tabulka 4: Deskriptivní statistika pre-testu a post-testu – výroková logika ve všech Fázích, (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

výroková logika

		pre-test			post-test		
		Fáze 1	Fáze 2	Fáze 3	Fáze 1	Fáze 2	Fáze 3
N	Valid	67	71	63	67	71	63
	Missing	0	0	0	0	0	0
Mean		3,612	4,035	3,873	4,701	4,789	4,786
Median		3,500	4,000	3,500	4,500	5,000	5,000
Mode		3,5	3,0	3,0	4,5	4,0[a]	5,5
Std. Deviation		1,3195	1,4622	1,2731	1,1679	1,2238	1,1278
Minimum		,5	1,0	1,5	2,0	2,0	2,5
Maximum		6,0	7,0	6,0	7,0	7,0	7,0

a. Multiple modes exist. The smallest value is shown



Graf 4: Rozdíly v mediánech pre-testů a post-testů – výroková logika v jednotlivých Fázích, (*zdroj: autor, nástroje: SPSS Statistic*)

Z tabulky 4 a grafu 4 je vidět, že dosažené výsledky z výrokové logiky v post-testech vzhledem k výsledkům z pre-testů jsou srovnatelné, a tudíž lze v následujícím statistickém šetření očekávat, že v oblasti úspěšnosti výrokové logiky mezi Fázemi se nedospěje k významným rozdílům.

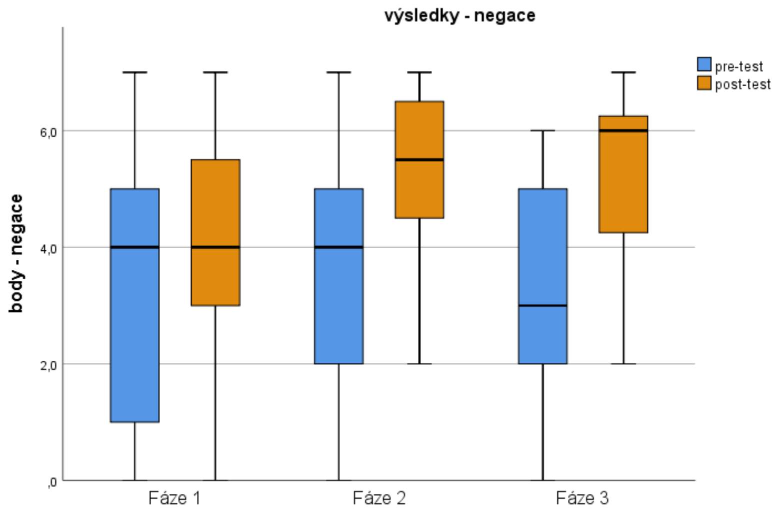
5.4.1.2 Tvorba negací

Tabulka 5: Deskriptivní statistika pre-testů a post-testů - negace ve všech Fázích, (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

negace

		pre-test			post-test		
		Fáze 1	Fáze 2	Fáze 3	Fáze 1	Fáze 2	Fáze 3
N	Valid	67	71	63	67	71	63
	Missing	0	0	0	0	0	0
Mean		3,448	3,655	3,302	4,187	5,310	5,278
Median		4,000	4,000	3,000	4,000	5,500	6,000
Mode		1,0	1,0[a]	2,0[a]	4,0[a]	6,0	6,0
Std. Deviation		2,0396	2,0064	1,6425	1,6139	1,3021	1,3760
Minimum		,0	,0	,0	,0	2,0	2,0
Maximum		7,0	7,0	6,0	7,0	7,0	7,0

a. Multiple modes exist. The smallest value is shown



Graf 5: Rozdíly v mediánech pre-testů a post-testů – negace v jednotlivých Fázích, (zdroj: *autor, nástroje: SPSS Statistic*)

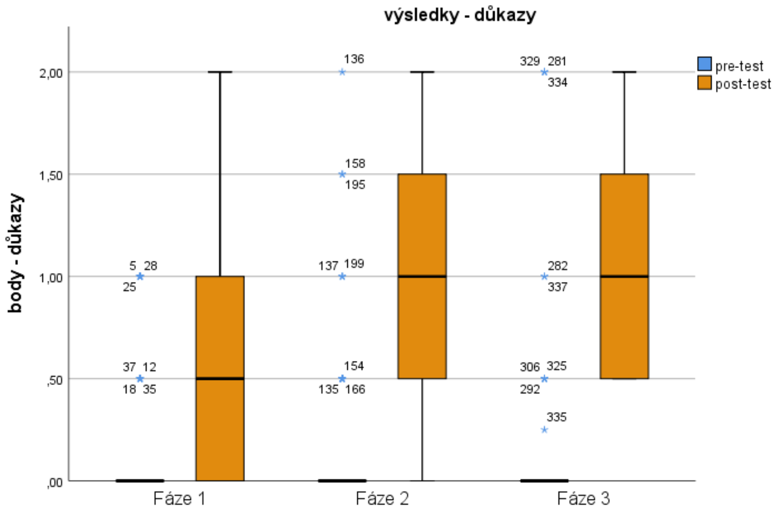
Na krabicovém grafu 5 je možné pozorovat, že rozdíly v mediánech mezi pre-testy - negace a post-testy - negace ve Fázi 2 a 3 jsou dost velké, především ve Fázi 3. Ve Fázi 1 jsou stejné, a tudíž lze z toho usuzovat, že při následném statistickém šetření se bude očekávat statistický významný rozdíl mezi Fází 1 a Fázemi 2 a 3. Potvrzuje to také deskriptivní statistika pre-testů - negace a post-testů - negace, kde je možné vidět, že průměr ve Fázi 1 vzrost o necelý bod, kdežto ve Fázi 2 o více než jeden a půl bodu a ve Fázi 3 o necelé dva body, viz tabulka 5.

5.4.1.3 Důkazy

Tabulka 6: Deskriptivní statistika pre-testů a post-testů - důkazy ve všech Fázích, (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

důkazy

		pre-test			post-test		
		Fáze 1	Fáze 2	Fáze 3	Fáze 1	Fáze 2	Fáze 3
N	Valid	67	71	63	67	71	63
	Missing	0	0	0	0	0	0
Mean		,1716	,1831	,1706	,5896	1,0634	1,1349
Median		,0000	,0000	,0000	,5000	1,0000	1,0000
Mode		,00	,00	,00	,00	1,00	1,50
Std. Deviation		,34325	,40743	,46625	,54997	,49229	,52522
Minimum		,00	,00	,00	,00	,00	,50
Maximum		1,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00



Graf 6: Rozdíly v mediánech pre-testů a post-testů – důkazy v jednotlivých Fázích, (*zdroj: autor, nástroje: SPSS Statistic*)

Jak je vidět z grafu 6 a popisné statistiky v tabulce 6, rozdíl mediánů v pre-testech - důkazy a post-testech - důkazy je výrazný, především ve Fázích 2 a 3. Nejčastěji se v pre-testech - důkazy vyskytovalo nulové hodnocení ve všech Fázích a průměrné hodnocení bylo 0,17 až 0,18. V post-testech - důkazy vzrostlo průměrné hodnocení ve Fázi 1 o 0,59 bodu a nejčastěji vyskytující se hodnocením byla nula. Ve Fázi 2 a 3 byl nárůst průměrného hodnocení o něco málo přes celý bod. Nejčastějším hodnocením ve Fázi 2 byl jeden bod a ve Fázi 3 jeden a půl bodu. Ve statistickém šetření se očekávají významné rozdíly mezi Fází 1 a Fázemi 2 a 3.

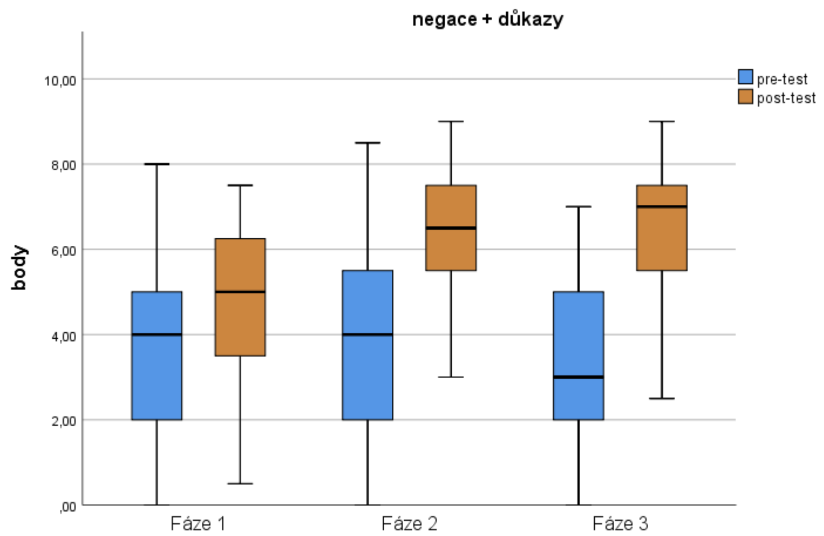
5.4.1.4 Negace + důkazy

Tabulka 7: Deskriptivní statistika pre-testů a post-testů – negace+důkazy ve všech Fázích, (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

negace + důkazy

		pre_test			post_test		
		Fáze 1	Fáze 2	Fáze 3	Fáze 1	Fáze 2	Fáze 3
N	Valid	67	71	63	67	71	63
	Missing	0	0	0	0	0	0
Mean		3,6194	3,8380	3,4722	4,7761	6,3732	6,4127
Median		4,0000	4,0000	3,0000	5,0000	6,5000	7,0000
Mode		1,00	1,00	3,00	4,00[a]	7,00	7,00[a]
Std. Deviation		2,13217	2,21000	1,80396	1,79284	1,36988	1,66205
Minimum		,00	,00	,00	,50	3,00	2,50
Maximum		8,00	8,50	7,00	7,50	9,00	9,00

a. Multiple modes exist. The smallest value is shown



Graf 7: Rozdíly v mediánech pre-testů a post-testů – negace+důkazy v jednotlivých Fázích, (*zdroj: autor, nástroje: SPSS Statistic*)

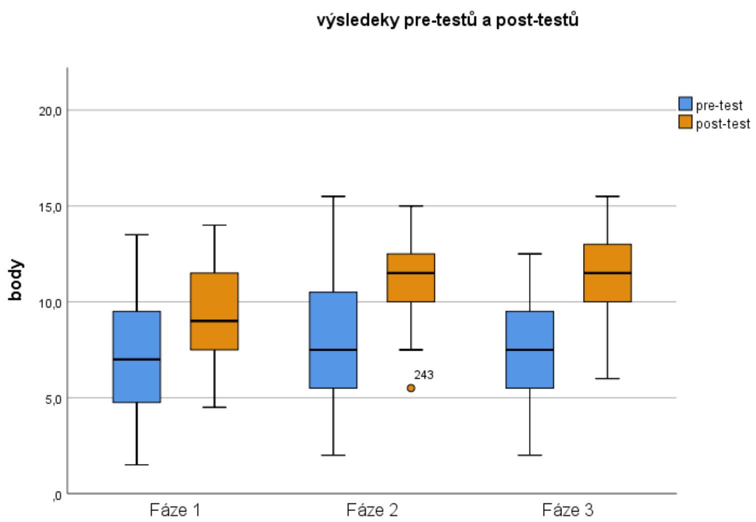
Na krabicovém grafu 7 je možné pozorovat, že rozdíly v mediánech mezi pre-testem – negace + důkazy a post-testem – negace + důkazy ve Fázích 2 a 3 jsou daleko větší než ve Fázi 1, z čehož lze usuzovat, že při následném statistickém šetření se bude očekávat významný statistický rozdíl mezi Fází 1 a Fázemi 2 a 3. Z deskriptivní statistiky pre-testů – negace + důkazy a post-testů – negace + důkazy v tabulce 7 je možné vidět, že průměr ve Fázi 1 vzrostl o málo něco přes bod, kdežto ve Fázi 2 o dva a půl bodu a ve Fázi 3 dokonce o skoro tři body.

5.4.1.5 Pre-test a post-test

Tabulka 8: Deskriptivní statistika pre-testů a post-testů ve všech Fázích, (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

		PRE_test			POST_test		
		Fáze 1	Fáze 2	Fáze 3	Fáze 1	Fáze 2	Fáze 3
N	Valid	67	71	63	67	71	63
	Missing	0	0	0	0	0	0
Mean		7,246	7,873	7,395	9,4776	11,1620	11,1984
Median		7,000	7,500	7,500	9,0000	11,5000	11,5000
Mode		4,5	8,5	5,0	8,00[a]	12,50[a]	13,00
Std. Deviation		3,0568	3,1404	2,5015	2,62626	1,88940	2,40386
Minimum		1,5	2,0	2,0	4,50	5,50	6,00
Maximum		13,5	15,5	12,5	14,00	15,00	15,50

a. Multiple modes exist. The smallest value is shown



Graf 8: Rozdíly v mediánech pre-testů a post-testů v jednotlivých Fázích, (zdroj: *autor, nástroje: SPSS Statistic*)

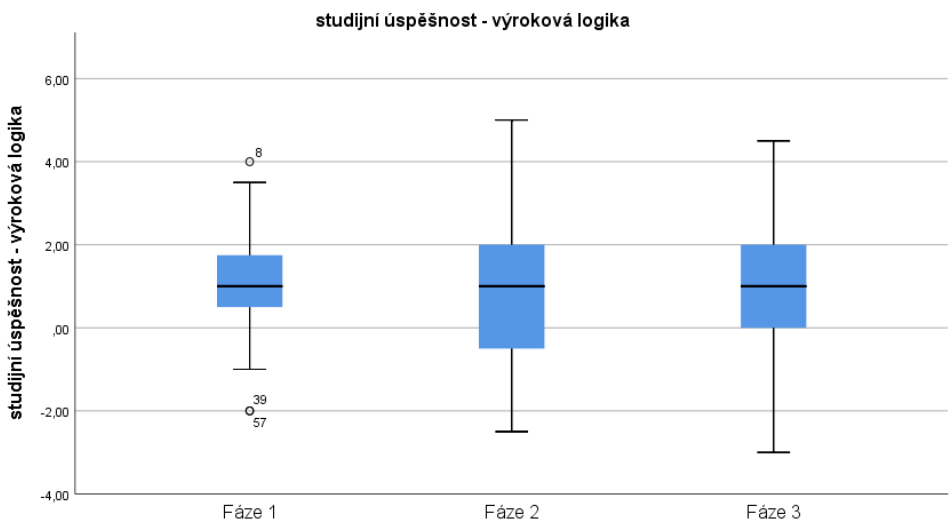
Pokud jde o celkové pre-testy a post-testy, ve Fázích 2 a 3 oproti Fázi 1došlo k vyššímu zvýšení mediánů, viz graf 8. Ve Fázi 1 to bylo o 2 body a o 4 body ve Fázích 2 a 3. Průměrné hodnocení ve Fázi 1 narostlo o 2.23 bodu, ve Fázi 2 o 3.23 bodu a ve Fázi 3 o 3.8 bodu, viz tabulka 8. Nejčastějším bodovým hodnocením bylo 8 bodů ve Fázi 1, 12.5 bodu ve Fázi 2 a 13 bodů ve Fázi 3. Ve statistickém šetření se předpokládá dosažení významného rozdílu mezi Fází 1 a Fázemi 2 a 3.

5.4.1.6 Studijní úspěšnost – výroková logika

Tabulka 9: Deskriptivní statistika studijní úspěšnosti – výroková logika ve všech Fázích, (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

		Fáze 1	Fáze 2	Fáze 3
N	Valid	67	71	63
	Missing	0	0	0
Mean		1,0896	,7535	,9127
Median		1,0000	1,0000	1,0000
Mode		,50[a]	,00	,00
Std. Deviation		1,26708	1,90464	1,62277
Minimum		-2,00	-2,50	-3,00
Maximum		4,00	5,00	4,50

a. Multiple modes exist. The smallest value is shown



Graf 9: Rozdíly v mediánech studijní úspěšnosti – výroková logika v jednotlivých Fázích, (*zdroj: autor, nástroje: SPSS Statistic*)

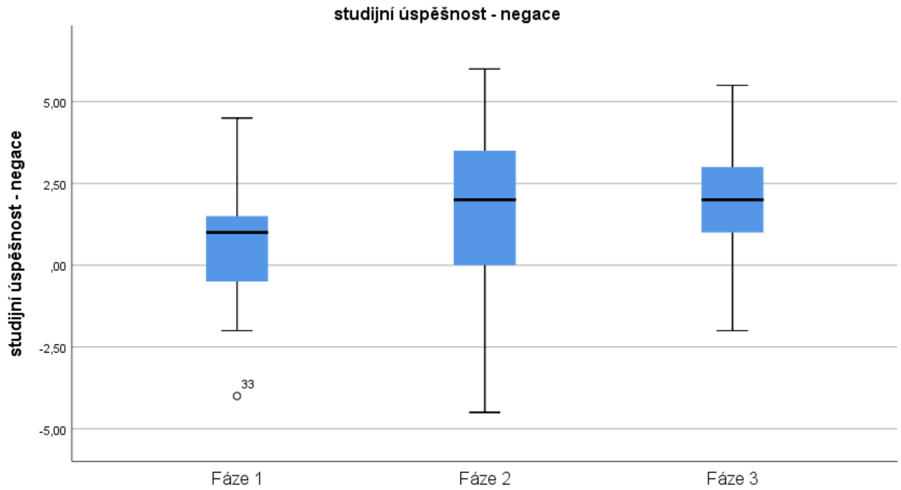
Mediány studijní úspěšnosti – výroková logika jsou stejné, viz popisní statistika v tabulce 9. Z krabicového grafu 9 vyplývá, že mezikvartilové rozpětí ve Fázi 1 je nejužší a vyskytují se v ní odlehlé hodnoty. Ve Fázi 2 je mezikvartilové rozpětí nejširší a byla v ní dosažena nejvyšší studijní úspěšnost – výroková logika. Ve Fázi 3 byla dosažena nejnižší studijní úspěšnost – výroková logika a rozložení dat v mezikvartilovém rozpětí je symetrické. Celkově jsou výsledky srovnatelné a ve statistickém šetření se nepředpokládá dosažení statisticky významných rozdílů mezi Fázemi.

5.4.1.7 Studijní úspěšnost – tvorba negací

Tabulka 10: Deskriptivní statistika studijní úspěšnosti – negace ve všech Fázích, (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

		Fáze 1	Fáze 2	Fáze 3
N	Valid	67	71	63
	Missing	0	0	0
Mean		,7388	1,6549	1,9762
Median		1,0000	2,0000	2,0000
Mode		1,00	,00[a]	2,00
Std. Deviation		1,69527	2,47933	1,66663
Minimum		-4,00	-4,50	-2,00
Maximum		4,50	6,00	5,50

a. Multiple modes exist. The smallest value is shown



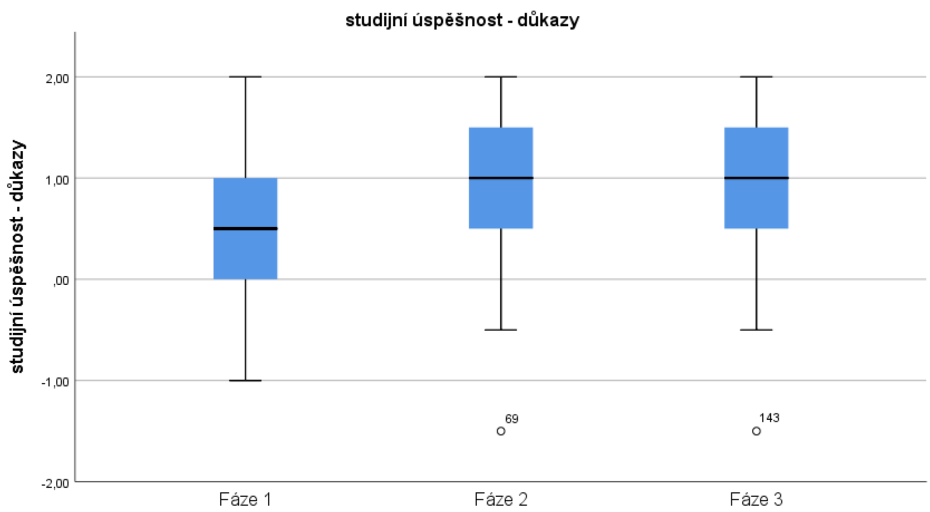
Graf 10: Rozdíly v mediánech studijní úspěšnosti - negace v jednotlivých Fázích, (*zdroj: autor, nástroje: SPSS Statistic*)

Na krabicovém grafu 10 je možno pozorovat, že vyšší studijní úspěšnosti – negace bylo dosaženo ve Fázích 2 a 3. Také mezikvartilové rozpětí je vyrovnanější ve Fázi 2 oproti Fázi 1 a ve Fázi 3 je symetrické. Nejvyšší a také nejnižší studijní úspěšnosti - negace bylo dosaženo ve Fázi 2. Z popisné statistiky, viz tabulka 10, je možné vyčíst, že mediány ve Fázích 2 a 3 jsou o jeden bod vyšší než ve Fázi 1. Rozdílné je i průměrné bodové hodnocení, mezi Fázemi 1 a 2 je to necelý bod a 1.2 bodu mezi Fázemi 1 a 3. Ve statistickém šetření se očekávají významné rozdíly, jak již bylo předpokládáno v popisné statistice u pre-testů - negace a post-testů – negace.

5.4.1.8 Studijní úspěšnost – důkazy

Tabulka 11: Deskriptivní statistika studijní úspěšnosti – důkazy ve všech Fázích, (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

		Fáze 1	Fáze 2	Fáze 3
N	Valid	67	71	63
	Missing	0	0	0
Mean		,4179	,8803	,9643
Median		,5000	1,0000	1,0000
Mode		,00	1,00	,50
Std. Deviation		,60676	,65173	,63794
Minimum		-1,00	-1,50	-1,50
Maximum		2,00	2,00	2,00



Graf 11: Rozdíly v mediánech studijní úspěšnosti - důkazy v jednotlivých Fázích, (*zdroj: autor, nástroje: SPSS Statistic*)

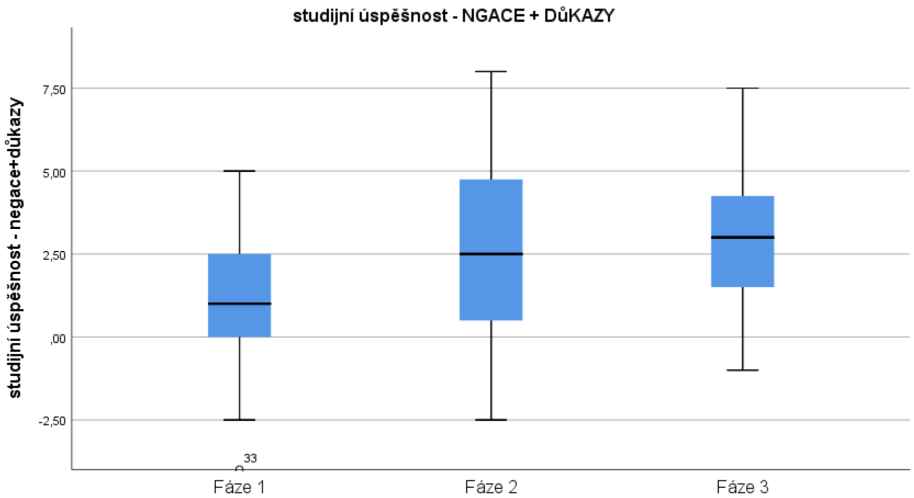
Mediány ve Fázích 2 a 3 jsou o půl bodu vyšší než ve Fázi 1, mezikvartilové rozpětí je v každé Fázi rovnoměrně rozložené, viz krabicový graf 11. Nejvyšší studijní úspěšnost – důkazy byla dosažená ve všech Fázích a nejnižší úspěšnosti dosáhly odlehlé hodnoty ve Fázích 2 a 3. Průměrné skóre ve Fázích 2 a 3 bylo více než dva krát větší než ve Fázi 1. Nejčastěji vyskytující se skóre ve Fázi 1 bylo nulové, ve Fázi 2 jednobodové a ve Fázi 3 půl bodové, viz tabulka 11. Ve statistickém šetření se očekává dosažení významných rozdílů mezi Fázemi 1 a 2 a mezi Fázemi 1 a 3, jak již bylo předpokládáno v popisné statistice u pre-testů – důkazy a post-testů – důkazy.

5.4.1.9 Studijní úspěšnost – negace + důkazy

Tabulka 12: Deskriptivní statistika studijní úspěšnosti – negace+důkazy ve všech Fázích,
(zdroj: *autor, vytvořeno v SPSS*)

		Fáze 1	Fáze 2	Fáze 3
N	Valid	67	71	63
	Missing	0	0	0
Mean		1,1567	2,5352	2,9405
Median		1,0000	2,5000	3,0000
Mode		,50[a]	5,00	1,50
Std. Deviation		1,87530	2,59852	1,93165
Minimum		-4,00	-2,50	-1,00
Maximum		5,00	8,00	7,50

a. Multiple modes exist. The smallest value is shown



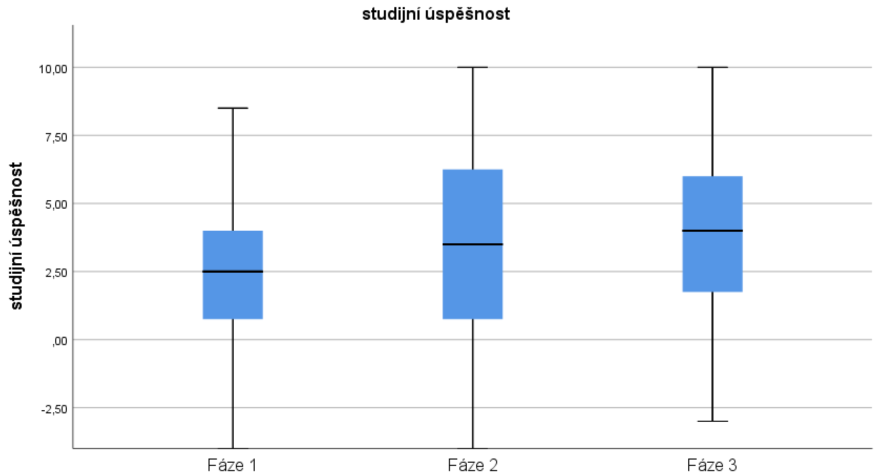
Graf 12: Rozdíly v mediánech studijní úspěšnosti – negace + důkazy v jednotlivých Fázích,
(zdroj: *autor, nástroje: SPSS Statistic*)

Na krabicovém grafu 12 a z deskriptivní statistiky v tabulce 12 je možno pozorovat, že vyšší studijní úspěšnost – negace + důkazy byla dosažena ve Fázích 2 a 3, což vzhledem k předešlým popisným statistikám studijní úspěšnosti – negace a studijní úspěšnosti – důkazy se očekávalo. Mediány Fáze 2 a Fáze 3 se liší, nejsou shodné, jak tomu bylo u studijní úspěšnosti – negace a studijní úspěšnosti - důkazy. Rozdíl mediánu mezi Fázemi 1 a 2 je jeden a půl bodu a mezi Fázemi 1 a 3 dva body. Nejširší mezikvartilové rozpětí je ve Fázi 2, kde bylo dosaženo nejvyšší studijní úspěšnosti – negace + důkazy a nejužší ve Fázi 1, kde byla dosažena odlehlými hodnotami nejnižší studijní úspěšnost – negace + důkazy.

5.4.1.10 Studijní úspěšnost

Tabulka 13: Deskriptivní statistika studijní úspěšnosti ve všech Fázích, (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

		Fáze 1	Fáze 2	Fáze 3
N	Valid	67	71	63
	Missing	0	0	0
Mean		2,2313	3,2887	3,8032
Median		2,5000	3,5000	4,0000
Mode		2,50	2,50	4,00
Std. Deviation		2,51409	3,71547	2,97142
Minimum		-4,00	-4,00	-3,00
Maximum		8,50	10,00	10,00



Graf 13: Rozdíly v mediánech studijní úspěšnosti v jednotlivých Fázích, (*zdroj: autor, nástroje: SPSS Statistic*)

Na krabicovém grafu 13 je možné pozorovat, že mediány celkové studijní úspěšnosti jsou ve Fázích 2 a 3 o něco vyšší než ve Fázi 1, ve Fázi 2 o jeden bod a ve Fázi 3 o jeden a půl bodu, viz tabulka 13. Zda se jedná o statisticky významný rozdíl, to ukáže statistické šetření. Mezikvartilové rozpětí je ve všech Fázích téměř symetrické. Z popisné statistiky je také vidět, že nejnižší studijní úspěšnost byla dosažena ve Fázích 1 a 2 a nejvyšší ve Fázích 2 a 3. Průměrná studijní úspěšnost ve Fázi 1 byla 2.2 bodu, ve Fázi 2 byla o jeden bod vyšší a ve Fázi 3 o jeden a půl bodu vyšší než ve Fázi 1. Nejčastěji vyskytující se hodnota ve Fázích 1 a 2 byla dva a půl bodu a ve Fázi 3 čtyři body.

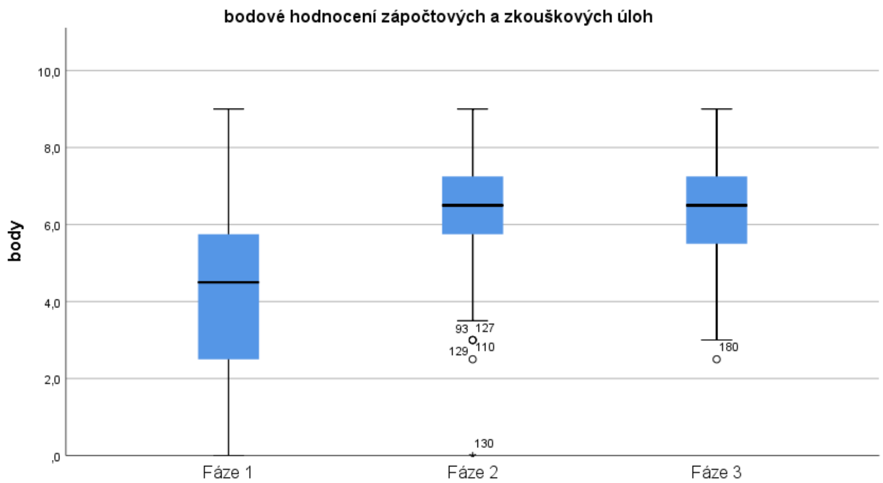
5.4.1.11 *Skóre zápočtových a zkouškových úkolů*

Tabulka 14: Deskriptivní statistika bodového hodnocení zápočtových a zkouškových úloh ve všech Fázích, (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

bodové hodnocení zápočtových a zkouškových úloh

bodyZK

		Fáze 1	Fáze 2	Fáze 3
N	Valid	67	71	63
	Missing	0	0	0
Mean		4,209	6,317	6,421
Median		4,500	6,500	6,500
Mode		5,0	7,0	7,0
Std. Deviation		2,1710	1,7591	1,6294
Minimum		,0	,0	2,5
Maximum		9,0	9,0	9,0



Graf 14: Rozdíly v mediánech bodového hodnocení zápočtových a zkouškových úloh v jednotlivých Fázích, (*zdroj: autor, nástroje: SPSS Statistic*)

Z popisné statistiky bodového hodnocení, viz tabulka 14, je vidět, že mediány ve Fázích 2 a 3 jsou vyšší o dva body než ve Fázi 1. Také průměrné hodnoty ve Fázích 2 a 3 nabývají o 2.1 až 2.2 bodu víc než ve Fázi 1. Minimální nulové skóre bylo získané ve Fázi 1 a také i ve Fázi 2, kde bylo dosaženo odlehlou hodnotou. Maximální bodové skóre bylo dosaženo ve všech Fázích. Krabicový graf 14 ukazuje, že mezikvartilové rozpětí ve Fázích 2 a 3 je přibližně dvakrát menší než ve Fázi 1.

5.4.1.12 Figurální inteligence

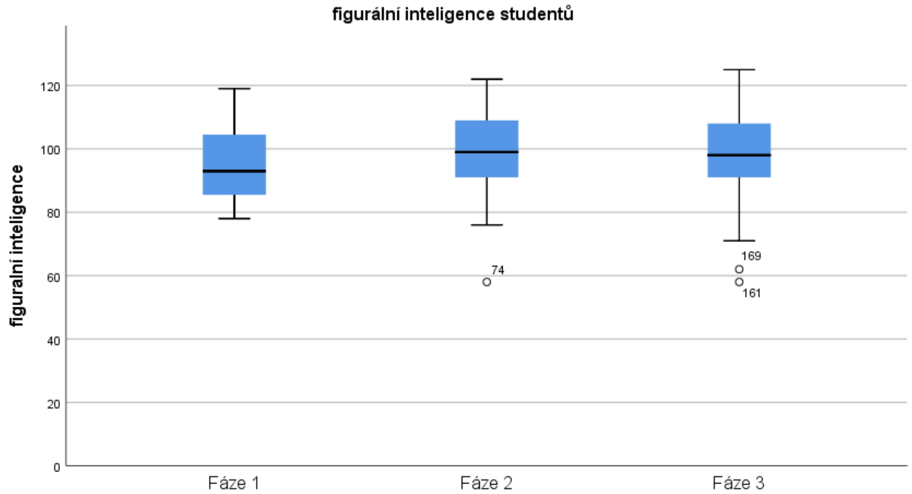
Tabulka 15: Deskriptivní statistika figurální inteligence ve všech Fázích, (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

figurální inteligence studentů

figuralni_inteligence

		Fáze 1	Fáze 2	Fáze 3
N	Valid	7	36	54
	Missing	60	35	9
Mean		95,71	99,06	97,93
Median		93,00	99,00	98,00
Mode		78[a]	91	97[a]
Std. Deviation		14,557	14,081	13,679
Minimum		78	58	58
Maximum		119	122	125

a. Multiple modes exist. The smallest value is shown



Graf 15:Rozdíly v mediánech figurální inteligence studentů v jednotlivých Fázích, (*zdroj: autor, nástroje: SPSS Statistic*)

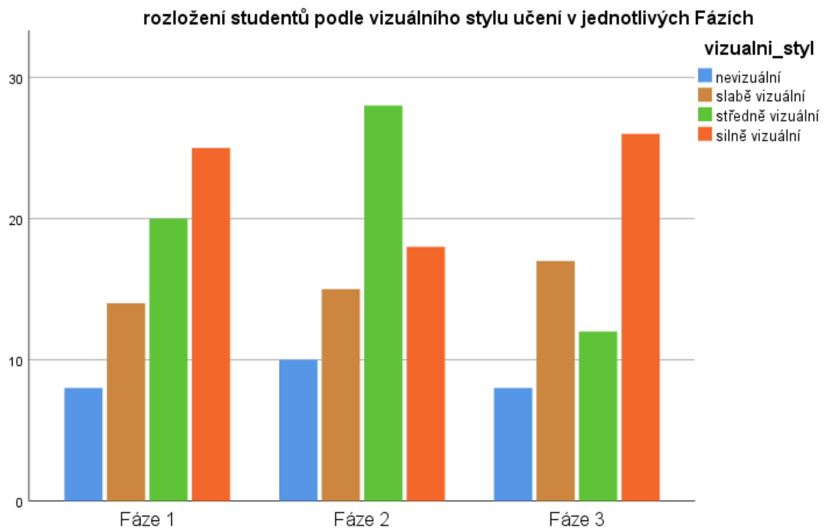
Mediány a průměrné hodnoty figurální inteligence jsou srovnatelné ve všech Fázích. Minimální hodnota byla dosažena ve Fázích 2 a 3 a maximální ve Fázi 3, viz popisná statistika v tabulce 15. Na krabicovém grafu 15 je vidět, že mezikvartilové rozpětí ve všech Fázích je téměř stejné, Fáze 2 a 3 obsahují odlehlé hodnoty. Výsledky jsou celkově srovnatelné a dá se říct, že skupiny jsou i z pohledu figurální inteligence vyrovnané. Je však potřeba podotknout, že ve Fázi 1 se měření účastnilo jen sedm studentů, a proto tento závěr nemůže být směrodatný.

5.4.1.13 *Vizuální studenti*

Vzhledem k ordinální proměnné byla pro data vizuální studijní styl studentů sestrojena kontingenční tabulka 16, ve které je možné vidět přesné a procentuální (zaokrouhleno na jedno desetinné místo) zastoupení nevizuálních (=verbálních), slabě vizuálních, středně vizuálních a silně vizuálních studentů. V grafu 16 je toto rozložení znázorněno graficky.

Tabulka 16: Kontingenční tabulka – rozložení studentů podle vizuálního stylu v jednotlivých Fázích, (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

		Fáze 1		Fáze 2		Fáze 3		Total	
		Count	% within FAZE	Count	% within FAZE	Count	% within FAZE	Count	% within FAZE
vizualni_styl	nevizuální	8	11,9%	10	14,1%	8	12,7%	26	12,9%
	slabě vizuální	14	20,9%	15	21,1%	17	27,0%	46	22,9%
	středně vizuální	20	29,9%	28	39,4%	12	19,0%	60	29,9%
	silně vizuální	25	37,3%	18	25,4%	26	41,3%	69	34,3%
Total		67	100,0%	71	100,0%	63	100,0%	201	100,0%



Graf 16: Rozložení studentů podle vizuálního stylu učení v jednotlivých Fázích, (*zdroj: autor, nástroje: SPSS Statistic*)

5.4.2 Normalita proměnných

V této kapitole je testována normalita dat pomocí Kolmogorova – Smirnova testu. Pro každou Fázi byly testovány všechny skupiny dat: pre-test - výroková logika, pre-test - negace, pre-test – důkazy, pre-test- negace + důkazy, pre-test, studijní úspěšnost – výroková logika, studijní úspěšnost – negace, studijní úspěšnost – důkazy, studijní úspěšnost – negace + důkazy, studijní úspěšnost, skóre bodů sledovaných úloh ze zápočtových a zkouškových testů, vizuální styl studentů a figurální inteligence. Získané výsledky Kolmogorova – Smirnova testu jsou zobrazeny v následujících tabulkách:

Tabulka 17: Výsledky normality u všech pre-testů a bodů ze zápočtových a zkouškových úloh pro Fázi 1, (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of vyrokPRE is normal with mean 3,6 and standard deviation 1,319.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,001[1]	Reject the null hypothesis.
2	The distribution of negacePRE is normal with mean 3,4 and standard deviation 2,040.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,000[1]	Reject the null hypothesis.
3	The distribution of dukazyPRE is normal with mean 0,17 and standard deviation 0,343.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,000[1]	Reject the null hypothesis.
4	The distribution of PRE_test is normal with mean 7,2 and standard deviation 3,057.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,099[1]	Retain the null hypothesis.
5	The distribution of pre_NEG_DUK is normal with mean 3,62 and standard deviation 2,132.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,001[1]	Reject the null hypothesis.
6	The distribution of bodyZapZk is normal with mean 4,2 and standard deviation 2,171.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,061[1]	Retain the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is ,05.

[1] Lilliefors Corrected

Tabulka 18: Výsledky normality u všech pre-testů a bodů ze zápočtových a zkouškových úloh pro Fázi 2, (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of vyrokPRE is normal with mean 4,0 and standard deviation 1,462.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,041[1]	Reject the null hypothesis.
2	The distribution of negacePRE is normal with mean 3,7 and standard deviation 2,006.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,014[1]	Reject the null hypothesis.
3	The distribution of dukazyPRE is normal with mean 0,18 and standard deviation 0,407.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,000[1]	Reject the null hypothesis.
4	The distribution of PRE_test is normal with mean 7,9 and standard deviation 3,140.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,200[1,2]	Retain the null hypothesis.

5	The distribution of pre_NEG_DUK is normal with mean 3,84 and standard deviation 2,210.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,012[1]	Reject the null hypothesis.
6	The distribution of bodyZapZk is normal with mean 6,3 and standard deviation 1,759.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,000[1]	Reject the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is ,05.

[1]Lilliefors Corrected

[2]This is a lower bound of the true significance.

Tabulka 19: Výsledky normality u všech pre-testů a bodů ze zápočtových a zkouškových úloh pro Fázi 3, (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of vyrokPRE is normal with mean 3,9 and standard deviation 1,273.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,010[1]	Reject the null hypothesis.
2	The distribution of negacePRE is normal with mean 3,3 and standard deviation 1,643.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,000[1]	Reject the null hypothesis.
3	The distribution of dukazyPRE is normal with mean 0,17 and standard deviation 0,466.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,000[1]	Reject the null hypothesis.
4	The distribution of PRE_test is normal with mean 7,4 and standard deviation 2,502.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,061[1]	Retain the null hypothesis.
5	The distribution of pre_NEG_DUK is normal with mean 3,47 and standard deviation 1,804.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,000[1]	Reject the null hypothesis.
6	The distribution of bodyZapZk is normal with mean 6,4 and standard deviation 1,629.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,046[1]	Reject the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is ,05.

[1]Lilliefors Corrected

Tabulka 20: Výsledky testu normality dat všech studijních úspěšností ve Fázi 1, (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of stud_uspVYROK is normal with mean 1,09 and standard deviation 1,267.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,019[1]	Reject the null hypothesis.

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
2	The distribution of stud_uspNEGACE is normal with mean 0,74 and standard deviation 1,695.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,002[1]	Reject the null hypothesis.
3	The distribution of stud_uspDUKAZY is normal with mean 0,42 and standard deviation 0,607.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,000[1]	Reject the null hypothesis.
4	The distribution of studijni_uspesnost is normal with mean 2,23 and standard deviation 2,514.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,200[1,2]	Retain the null hypothesis.
5	The distribution of stud_uspNEG_DUK is normal with mean 1,16 and standard deviation 1,875.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,027[1]	Reject the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is ,05.

[1] Lilliefors Corrected

[2] This is a lower bound of the true significance.

Tabulka 21: Výsledky testu normality dat všech studijních úspěšností ve Fázi 2, (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of stud_uspVYROK is normal with mean 0,75 and standard deviation 1,905.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,200[1,2]	Retain the null hypothesis.
2	The distribution of stud_uspNEGACE is normal with mean 1,65 and standard deviation 2,479.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,200[1,2]	Retain the null hypothesis.
3	The distribution of stud_uspDUKAZY is normal with mean 0,88 and standard deviation 0,652.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,000[1]	Reject the null hypothesis.
4	The distribution of studijni_uspesnost is normal with mean 3,29 and standard deviation 3,715.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,200[1,2]	Retain the null hypothesis.
5	The distribution of stud_uspNEG_DUK is normal with mean 2,54 and standard deviation 2,599.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,048[1]	Reject the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is ,05.

[1] Lilliefors Corrected

[2] This is a lower bound of the true significance.

Tabulka 22: Výsledky testu normality dat všech studijních úspěšností ve Fázi 3, (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of stud_uspVYROK is normal with mean 0,91 and standard deviation 1,623.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,200[1,2]	Retain the null hypothesis.
2	The distribution of stud_uspNEGACE is normal with mean 1,98 and standard deviation 1,667.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,200[1,2]	Retain the null hypothesis.
3	The distribution of stud_uspDUKAZY is normal with mean 0,96 and standard deviation 0,638.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,000[1]	Reject the null hypothesis.
4	The distribution of studijni_uspesnost is normal with mean 3,80 and standard deviation 2,971.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,200[1,2]	Retain the null hypothesis.
5	The distribution of stud_uspNEG_DUK is normal with mean 2,94 and standard deviation 1,932.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,200[1,2]	Retain the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is ,05.

[1] Lilliefors Corrected

[2] This is a lower bound of the true significance.

Tabulka 23: Výsledky normality pro data – vizuální styl a figurální inteligence studentů Fáze 1, (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of vizualni_styl is normal with mean 2 and standard deviation 1,034.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,000[1]	Reject the null hypothesis.
2	The distribution of figuralni_inteligence is normal with mean 96 and standard deviation 14,557.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,200[1,2]	Retain the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is ,05.

[1] Lilliefors Corrected

Tabulka 24: Výsledky normality pro data – vizuální styl a figurální inteligence studentů Fáze 2, (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of vizualni_styl is normal with mean 2 and standard deviation 1,003.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,000[1]	Reject the null hypothesis.

2	The distribution of figuralni_inteligence is normal with mean 96 and standard deviation 20,194.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,002[1]	Reject the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is ,05.

[1]Lilliefors Corrected

Tabulka 25: Výsledky normality pro data – vizuální styl a figurální inteligence studentů Fáze 3, (zdroj: *autor, vytvořeno v SPSS*)

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of vizualni_styl is normal with mean 2 and standard deviation 1,094.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,000[1]	Reject the null hypothesis.
2	The distribution of figuralni_inteligence is normal with mean 98 and standard deviation 13,679.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,046[1]	Reject the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is ,05.

[1]Lilliefors Corrected

Tabulka 26: Výsledky normality pro data – vizuální styl, figurální inteligence a studijní úspěšnost všech studentů bez ohledu na Fázi, (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of vizualni_styl is normal with mean 2 and standard deviation 1,036.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,000[1]	Reject the null hypothesis.
2	The distribution of figuralni_inteligence is normal with mean 98 and standard deviation 13,770.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,200[1,2]	Retain the null hypothesis.
3	The distribution of studijni_uspesnost is normal with mean 3,10 and standard deviation 3,174.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,013[1]	Reject the null hypothesis.

Tabulka 27: Výsledky testování normality pro post-testy – negace + důkazy v každé Fázi, (zdroj: *autor, nástroje: SPSS Statistic*)

F1 1	The distribution of post_NEG_DUK is normal with mean 4,78 and standard deviation 1,793.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,200[1,2]	Retain the null hypothesis.
F2 1	The distribution of post_NEG_DUK is normal with mean 6,37 and standard deviation 1,370.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,006[1]	Reject the null hypothesis.
F3 1	The distribution of post_NEG_DUK is normal with mean 6,41 and standard deviation 1,662.	One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test	,001[1]	Reject the null hypothesis.

5.4.3 Ověření vstupných podmínek

Předpokladem pro porovnání účinnosti tří výukových metod (klasická výuka, výuka pomocí vizuálních prezentací, výuka pomocí vizuálních prezentací podpořena multimediálními aplikacemi) je srovnatelnost úrovně vědomostí studentů v jednotlivých Fázích z oblasti výrokové logiky, tvorby negací a dokazování jednodušších matematických vět před začátkem samotného pedagogického výzkumu. Pro ověření vstupných podmínek byly ověřeny následující hypotézy:

H^{P1}: Vstupní vědomosti studentů v oblasti výrokové logiky ze základní matematiky ve všech Fázích jsou srovnatelné.

H^{P2}: Vstupní vědomosti studentů v oblasti tvorby negací ze základní matematiky ve všech Fázích jsou srovnatelné.

H^{P3}: Vstupní vědomosti studentů v oblasti dokazování matematických vět ze základní matematiky ve všech Fázích jsou srovnatelné.

H^{P4}: Vstupní vědomosti studentů v oblasti výrokové logiky, tvorby negací a dokazování matematických vět ze základní matematiky ve všech Fázích jsou srovnatelné.

H^{P5}: Vstupní vědomosti studentů v oblasti tvorby negací a dokazování matematických vět ze základní matematiky ve všech Fázích jsou srovnatelné.

Tyto pracovní hypotézy byly přeformulovány do hypotéz statistických (nulové a alternativní):

- **H_0^{P1}:** Průměrný počet bodů dosažených v pre-testu – výroková logika se ve Fázích, Fázi1, Fázi 2 a Fázi 3, neliší.

  H_A^{P1}: Průměrný počet bodů dosažených v pre-testu – výroková logika se ve Fázích, Fáze1, Fáze 2 a Fáze 3, liší.

- **H_0^{P2}:** Průměrný počet bodů dosažených v pre-testu – negace se ve Fázích, Fázi1, Fázi 2 a Fázi 3, neliší.

  H_A^{P2}: Průměrný počet bodů dosažených v pre-testu – negace se ve Fázích, Fáze1, Fáze 2 a Fáze 3, liší.

- **H_0^{P3}:** Průměrný počet bodů dosažených v pre-testu – důkazy se ve Fázích, Fázi1, Fázi 2 a Fázi 3, neliší.

  H_A^{P3}: Průměrný počet bodů dosažených v pre-testu – důkazy se ve Fázích, Fáze1, Fáze 2 a Fáze 3, liší.

- **H_0^{P4}:** Průměrný počet bodů dosažených v pre-testu se ve Fázích, Fázi1, Fázi 2 a Fázi 3, neliší.

  H_A^{P4}: Průměrný počet bodů dosažených v pre-testu se ve Fázích, Fáze1, Fáze 2 a Fáze 3, liší.

- **H_0^{P5}:** Průměrný počet bodů dosažených v pre-testu – negace a důkazy se ve Fázích, Fázi1, Fázi 2 a Fázi 3, neliší.

  H_A^{P5}: Průměrný počet bodů dosažených v pre-testu – negace a důkazy se ve Fázích, Fáze1, Fáze 2 a Fáze 3, liší.

Vzhledem k charakteru dat (viz kapitola 5.4.2) při zvolené hladině významnosti 0.05 a na základě Kruskalova-Wallisova testu (H_0^{P1}, H_0^{P2}, H_0^{P3}, H_0^{P5}) a ANOVY (H_0^{P4}) nebyla zamítnuta žádná z výše uvedených nulových hypotéz H_0^{P1} ($p = 0.358$), H_0^{P2} ($p = 0.642$), H_0^{P3} ($p = 0.743$), H_0^{P4} ($F = 0.868$; $p = 0.508$), H_0^{P5} ($p = 0.734$), viz tabulky 28 a 29, a tudíž vstupní podmínka pro pedagogický výzkum, že úroveň vědomostí studentů v jednotlivých Fázích ve všech zkoumaných oblastech je srovnatelná, byla splněna.

Tabulka 28: Výsledky Kruskalova-Wallisova testu pro dílčí pre-testy – výroková logika, negace, důkazy, negace + důkazy (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of vyrokPRE is the same across categories of FAZE.	Independent-Samples Kruskal-Wallis Test	,358	Retain the null hypothesis.
2	The distribution of negacePRE is the same across categories of FAZE.	Independent-Samples Kruskal-Wallis Test	,642	Retain the null hypothesis.
3	The distribution of dukazyPRE is the same across categories of FAZE.	Independent-Samples Kruskal-Wallis Test	,743	Retain the null hypothesis.

4	The distribution of pre_NEG_DUK is the same across categories of FAZE.	Independent-Samples Kruskal-Wallis Test	,734	Retain the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is ,05.

Tabulka 29: Výsledky ANOVY pro celkový pre-test s Leveneho testem shody rozptylu (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

Test of Homogeneity of Variances

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
1,594	2	198	,206

ANOVA

PRE_test

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	14,854	2	7,427	,868	,422

5.4.4 Verifikace hypotéz

Vzhledem k testování normality u všech dat (kapitola 5.4.2) a výsledků deskriptivní statistiky (kapitola 5.4.1) je možné přistoupit k verifikaci hypotéz stanovených na začátku výzkumu.

5.4.4.1 Hypotéza – výroková logika

$H_{výrok}$: Studijní úspěšnost v oblasti výrokové logiky nezávisí na použití vizuální technologie využívané v předmětu DIMA.

Pro ověření hypotézy $H_{výrok}$ byly stanoveny následující statistické hypotézy:

Nulová hypotéza
$H_0^{výrok}$: Studijní úspěšnost – výroková logika se ve Fázích 1 až 3 neliší.

Alternativní hypotéza
$H_A^{výrok}$: Studijní úspěšnost – výroková logika se ve Fázích 1 až 3 liší.

Testovací data studijní úspěšnosti – výroková logika ve Fázi 1 nepochází z normálního rozdělní, z toho důvodu byl k testování hypotézy zvolen Kruskalův – Wallisův test. Na základě výsledku testu při zvolené hladině významnosti 0.05 (p = 0.54), viz tabulka 30, nulová hypotéza $H_0^{výrok}$ nebyla zamítnuta, tj. nemůžeme zamítnout, že studijní úspěšnost – výroková logika ve Fázích 1 až 3 se neliší.

Tabulka 30: Výsledky Kruskalova – Wallisova testu pro studijní úspěšnost – výroková logika, (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of stud_uspVYROK is the same across categories of FAZE.	Independent-Samples Kruskal-Wallis Test	,540	Retain the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is ,05.

Resumé statistického šetření hypotézy – výroková logika

Na základě testování hypotézy – výroková logika a výsledků pre-testů – výroková logika a post-testů - výroková logika se neprokázalo, že by výuka důkazu matematických vět s vizuální podporou ve Fázích 2 a 3 byla v oblasti výrokové logiky účinnější než tradiční výuka ve Fázi 1. Nebylo možné zamítnout hypotézu, že studijní úspěšnost v oblasti výrokové logiky nezávisí na použití vizuální technologie využívané v předmětu DIMA.

5.4.4.2 Hypotéza - negace

H_{negace}: Studijní úspěšnost v oblasti formulování negací matematických vět nezávisí na použití vizuální technologie při výuce.

Pro ověření hypotézy H_{negace} byly stanoveny následující statistické hypotézy:

Nulová hypotéza

H_0^{negace}: Studijní úspěšnost – negace se ve Fázích 1 až 3 neliší.

Alternativní hypotéza

H_A^{negace}: Studijní úspěšnost – negace se ve Fázích 1 až 3 liší.

Vzhledem k charakteru dat studijní úspěšnosti – negace, data z Fáze 1 nejsou normálního rozdělní, byl k testování hypotézy zvolen opět Kruskalův – Wallisův test. Při zvolené hladině významnosti 0.05, výsledek testu (p = 0.001) prokázal, že mezi skupinami existují statisticky významné rozdíly, viz tabulka 31.

Tabulka 31: Výsledky Kruskalova – Wallisova testu pro studijní úspěšnost – negace, (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of stud_uspNEGACE is the same across categories of FAZE.	Independent-Samples Kruskal-Wallis Test	,001	Reject the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is ,05.

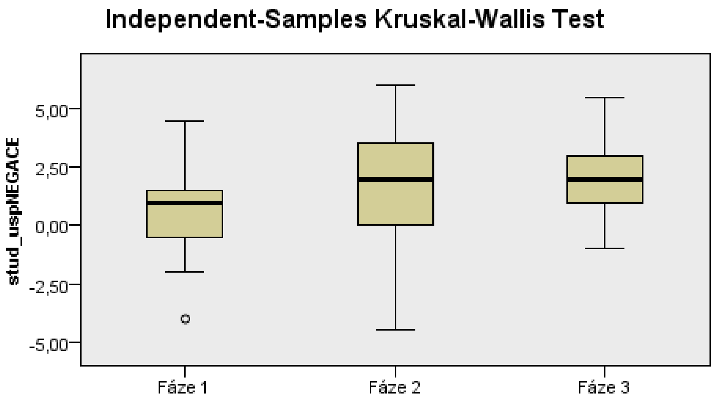
Pro zjištění, mezi kterými skupinami existují statisticky významné rozdíly, byly použity tzv. post-hoc testy s Bonferonniho korekcí, viz tabulka 32. Z post-hoc testů je vidět, že statisticky významný rozdíl existuje mezi Fázemi 1 a 2 ($p = 0.027$) a mezi Fázemi 1 a 3 ($p = 0.001$). Mezi Fází 2 a Fází 3 statisticky významný rozdíl ($p = 0.886$) neexistuje.

Tabulka 32: Studijní úspěšnost - negace v post-hoc testech, (*zdroj: autor, nástroje: SPSS Statistic*)

Each node shows the sample average rank of FAZE.

Sample1-Sample2	Test Statistic	Std. Error	Std. Test Statistic	Sig.	Adj.Sig.
Fáze 1-Fáze 2	-25,780	9,873	-2,611	,009	,027
Fáze 1-Fáze 3	-36,279	10,173	-3,566	,000	,001
Fáze 2-Fáze 3	-10,499	10,033	-1,046	,295	,886

Each row tests the null hypothesis that the Sample 1 and Sample 2 distributions are the same.
Asymptotic significances (2-sided tests) are displayed. The significance level is ,05.



Graf 17: Krabicové grafy studijní úspěšnosti – negace z pohledu post-hoc testů, (zdroj: autor, *nástroje: SPSS Statistic*)

Resumé statistického šetření hypotézy - negace

Na základě výsledku Kruskalova - Wallisova testu byla zamítnuta nulová hypotéza H_0^{negace} a byla přijata alternativní hypotéza H_A^{negace}: studijní úspěšnost – negace ve Fázích 1 až 3 se liší, tj. studijní úspěšnost v oblasti formulování negací matematických vět závisí na použití vizuální technologie při výuce. Na základě provedených post-hoc testů a z pohledu krabicových grafů je možné tvrdit, že studenti navštěvující výuku důkazů matematických vět podpořenou vizuálními prezentacemi a multimediálními aplikacemi dosáhli vyšší studijní úspěšnosti v oblasti tvorby negací než studenti navštěvující tradiční výuku důkazů. Post-hoc testy dále ukázaly, že účinnost vizuální výuky důkazů matematických vět pomocí vizuálních prezentací (Fáze 2) je srovnatelná s vizuální výukou podpořenou multimediálními aplikacemi (Fáze 3).

5.4.4.3 Hypotéza - důkazy

$H_{důkazy}$: Studijní úspěšnost v oblasti dokazování matematických vět nezávisí na použití vizuální technologie při výuce.

Pro ověření hypotézy $H_{důkazy}$ byly stanoveny následující statistické hypotézy:

Nulová hypotéza

$H_0^{důkazy}$: Studijní úspěšnost – důkazy se ve Fázích 1 až 3 neliší.

Alternativní hypotéza

$H_A^{důkazy}$: Studijní úspěšnost – důkazy se ve Fázích 1 až 3 liší.

K testování nulové hypotézy byl opět zvolen Kruskalův-Wallisův test, jelikož data z každé Fáze nepochází z normálního rozdělení. Při zvolené hladině významnosti 0.05, výsledek testu ($p = 0.000$) ukázal, že mezi skupinami existují statisticky významné rozdíly, viz tabulka 33.

Pro zjištění, mezi kterými skupinami existují statisticky významné rozdíly, byly použity post-hoc testy s Bonferroni korekci. Z výsledku post-hoc testů, viz tabulka 34, je vidět, že statisticky významné rozdíly existují mezi Fází 1 a Fází 2 ($p = 0.000$) a mezi Fází 1 a Fází 3 ($p = 0.000$). Mezi Fází 2 a Fází 3 neexistuje statisticky významný rozdíl ($p = 1.000$).

Tabulka 33: Výsledky Kruskalova-Wallisova testu – studijní úspěšnost - důkazy, (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of stud_uspDUKAZY is the same across categories of FAZE.	Independent-Samples Kruskal-Wallis Test	,000	Reject the null hypothesis.

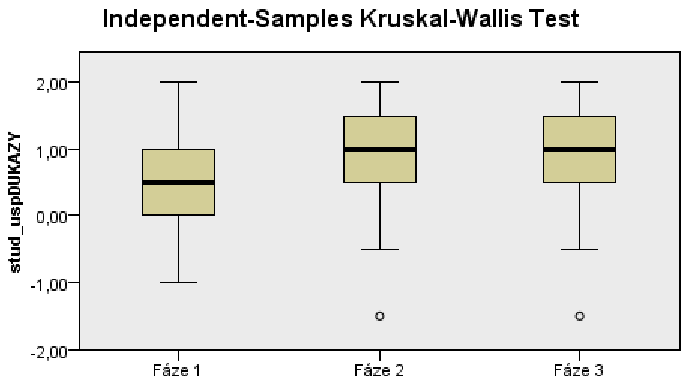
Asymptotic significances are displayed. The significance level is ,05.

Tabulka 34: Studijní úspěšnost - důkazy v post-hoc testech, (*zdroj: autor, vytvořeno v SPSS*)

Each node shows the sample average rank of FAZE.

Sample1-Sample2	Test Statistic	Std. Error	Std. Test Statistic	Sig.	Adj.Sig.
Fáze 1-Fáze 2	-42,020	9,657	-4,351	,000	,000
Fáze 1-Fáze 3	-49,478	9,950	-4,973	,000	,000
Fáze 2-Fáze 3	-7,458	9,813	-,760	,447	1,000

Each row tests the null hypothesis that the Sample 1 and Sample 2 distributions are the same.
Asymptotic significances (2-sided tests) are displayed. The significance level is ,05.



Graf 18: Krabicové grafy studijní úspěšnosti – důkazy z pohledu post-hoc testů, (zdroj: *autor, nástroje: SPSS Statistic*)

Resumé statistického šetření hypotézy - důkazy

Na základě výsledku Kruskalova - Wallisova testu byla zamítnuta nulová hypotéza $H_0^{\text{důkazy}}$ a byla přijata alternativní hypotéza $H_A^{\text{důkazy}}$: studijní úspěšnost – důkazy se ve Fázích 1 až 3 liší, tj. studijní úspěšnost v oblasti dokazování matematických vět závisí na použití vizuální technologie při výuce. Na základě provedených post-hoc testů a z pohledu krabicových grafů je možné tvrdit, že studenti navštěvující výuku důkazů podpořenou vizuálními prezentacemi a multimediálními aplikacemi dosáhli vyšší studijní úspěšnosti v oblasti vytváření důkazů matematických vět než studenti navštěvující tradiční výuku důkazů. Testy dále potvrdily, že mezi studijními úspěšnostmi - důkazy u studentů s vizuální výukou důkazů matematických vět (Fáze 2) a studentů s vizuální výukou důkazů matematických vět podpořenou multimediálními aplikacemi (Fáze 3) není statisticky významný rozdíl, což je patrné i z krabicových grafů 18 .

5.4.4.4 Hypotéza – studijní úspěšnost

$\mathbf{H}_{\mathbf{výrok+negace+důkazy}}$: Studijní úspěšnost v oblasti výrokové logiky, formulování negací a dokazování matematických vět nezávisí na použití vizuální technologie při výuce.

Pro ověření hypotézy $H_{výrok+negace+důkazy}$ byly stanoveny následující statistické hypotézy:

Nulová hypotéza

$\mathbf{H_0}^{\mathbf{výrok+negace+důkazy}}$**:** Studijní úspěšnost – výroková logika + negace + důkazy se ve Fázích 1 až 3 neliší.

Alternativní hypotéza

$\mathbf{H_A}^{\mathbf{výrok+negace+důkazy}}$**:** Studijní úspěšnost – výroková logika + negace + důkazy se ve Fázích 1 až 3 liší.

K testování nulové hypotézy byla zvolena analýza rozptylu (ANOVA), vzhledem k tomu, že data ze všech Fází mají normální rozdělení. Před použitím samotného testu byl proveden test shody rozptylů Leveneho testem, viz tabulka 35.

Tabulka 35: Výsledek Leveneho testu shody rozptylů, (*zdroj: autor, nástroje: SPSS Statistic*)

Test of Homogeneity of Variances

	Levene Statistic	df1	df2	Sig.
studijni_uspesnost	7,299	2	198	,001

Z tabulky 35 je patrné, že test shody rozptylů vychází statisticky významný, což znamená, že rozptyly jednotlivých studijních úspěšností nejsou homogenní a tudíž je porušen jeden z předpokladů pro analýzu rozptylu (pro splnění musí být $p > 0.005$). Porušení tohoto předpokladu je možné ignorovat, jestliže je splněno následující pravidlo: pokud je poměr mezi největším a nejmenším rozptylem ve skupinách maximálně 4:1 (analogicky a z hlediska výstupů SPSS Statistics má být poměr mezi největší a nejmenší směrodatnou odchylkou maximálně 2), lze analýzu rozptylu použít [Mareš a kol, 2015]. Poznámka: v tomto případě je poměr hodnot $\frac{3{,}71547}{2{,}51409} = 1{,}48$, viz tabulka 36, což je menší než dva a je možné pokračovat v analýze prostřednictvím analýzy rozptylu.

Tabulka 36: Výstup deskriptivní statistiky při testu ANOVA, (zdroj: *autor, nástroje: SPSS Statistic*)

Descriptives

studijni_uspesnost

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean		Minimum	Maximum
					Lower Bound	Upper Bound		
Fáze 1	67	2,2313	**2,51409**	,30715	1,6181	2,8446	-4,00	8,50
Fáze 2	71	3,2887	**3,71547**	,44095	2,4093	4,1682	-4,00	10,00
Fáze 3	63	3,8032	2,97142	,37436	3,0548	4,5515	-3,00	10,00
Total	201	3,0975	3,17423	,22389	2,6560	3,5390	-4,00	10,00

Na základě výsledku testu ANOVA (F = 4.319; p = 0.015) byla nulová hypotéza zamítnuta, viz tabulka 37, a lze očekávat, že průměry se v některých Fázích budou lišit.

Tabulka 37: Výsledek testu ANOVA pro studijní úspěšnost, (zdroj: *autor, nástroje: SPSS Statistic*)

ANOVA

studijni_uspesnost

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	84,234	2	42,117	4,319	**,015**
Within Groups	1930,915	198	9,752		
Total	2015,149	200			

Pro zjištění, mezi kterými Fázemi existují statisticky významné rozdíly, byla použita post-hoc procedura, tzv. mnohonásobné srovnání (Post Hoc Multiple Comparison). V tomto případě byl zvolen Gamesův-Howellův test z důvodu neshodných rozptylů (viz Leveneho test, tabulka 35). Z výsledku, viz tabulka 38, je vidět, že statisticky významný rozdíl existuje pouze mezi Fází 1 a Fází 3 (p = 0.004). Mezi Fázemi 1 a 2 a Fázemi 2 a 3 neexistuje statisticky významný rozdíl.

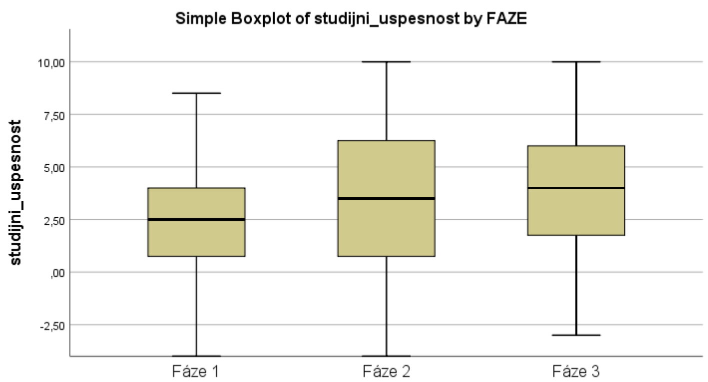
Tabulka 38: Výsledek mnohonásobného srovnáni Gamesova - Howellova testu pro studijní úspěšnost, (zdroj: *autor, nástroje: SPSS Statistic*)

Multiple Comparisons

studijni_uspesnost
Games-Howell

(I) FAZE	(J) FAZE	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
Fáze 1	Fáze 2	-1,05739	,53737	,125	-2,3322	,2174
	Fáze 3	**-1,57183***	,48424	**,004**	-2,7208	-,4229
Fáze 2	Fáze 1	1,05739	,53737	,125	-,2174	2,3322
	Fáze 3	-,51444	,57843	,648	-1,8857	,8569
Fáze 3	Fáze 1	**1,57183***	,48424	**,004**	,4229	2,7208
	Fáze 2	,51444	,57843	,648	-,8569	1,8857

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.



Graf 19: Krabicové grafy studijní úspěšnosti z pohledu post-hoc testů,
(zdroj: *autor, nástroje: SPSS Statistic*)

Resumé statistického šetření hypotézy – studijní úspěšnost

Vzhledem k uvedeným testovým hodnotám testu ANOVA byla nulová hypotéza $H_0^{\text{výrok+negace+důkazy}}$ zamítnuta a byla přijata hypotéza alternativní $H_A^{\text{výrok+negace+důkazy}}$. Je možné připustit, že studijní úspěšnost v oblasti výrokové logiky, formulování negací a dokazování matematických vět není ve Fázích 1 až 3 stejná. Výsledkem post-hoc Gamesova-Howellova testu bylo zjištěno, že účinnost výuky s vizuálními prezentacemi podpořená multimediálními aplikacemi (Fáze 3) je vyšší než tradiční výuka důkazů matematických vět (Fáze 1), tj. studenti s vizuální výukou podpořenou multimédií dosahují lepší studijní úspěšnosti v oblasti výrokové logiky, formulace negací a dokazování matematických vět než studenti s tradiční výukou. Z pohledu krabicových grafů je vidět, že i studenti z Fáze 2 dosáhli vyšší studijní úspěšnosti než studenti z Fáze 1, ale tento rozdíl podle výsledků testu není statisticky významný, i když v jednotlivých úspěšnostech – negace a důkazy tento rozdíl statisticky významný byl, viz šetření hypotézy – negace a hypotézy - důkazy. Tento výsledek byl nejpravděpodobněji ovlivněn výsledkem šetření hypotézy – výroková logika, kde nebylo statistického rozdílu dosaženo ani pro jednu dvojici z Fází. Mezi Fázemi 2 a 3 nebyl zjištěn statisticky významný rozdíl.

5.4.4.5 Hypotéza – vizuální styl vs. studijní úspěšnost

H_{viz}: Neexistuje korelace mezi vizuálním stylem učení a studijní úspěšností studentů navštěvujících kurz DIMA.

Pro ověření hypotézy H_{viz} byly stanoveny následující statistické hypotézy pro všechny Fáze:

Nulová hypotéza pro Fázi 1

$H_0^{viz\text{-}F1}$: Korelační koeficient mezi vizuálním stylem učení a studijní úspěšností studentů z Fáze 1 je nulový.

Alternativní hypotéza pro Fázi 1

$H_A^{viz\text{-}F1}$: Korelační koeficient mezi vizuálním stylem učení a studijní úspěšností studentů z Fáze 1 není nulový.

Nulová hypotéza pro Fázi 2

$H_0^{viz\text{-}F2}$: Korelační koeficient mezi vizuálním stylem učení a studijní úspěšnosti studentů z Fáze 2 je nulový.

Alternativní hypotéza pro Fázi 2

$H_A^{viz\text{-}F2}$: Korelační koeficient mezi vizuálním stylem učení a studijní úspěšností studentů z Fáze 2 není nulový.

Nulová hypotéza pro Fázi 3

$H_0^{viz\text{-}F3}$: Korelační koeficient mezi vizuálním stylem učení a studijní úspěšností studentů z Fáze 3 je nulový.

Alternativní hypotéza pro Fázi 3

$H_A^{viz\text{-}F3}$: Korelační koeficient mezi vizuálním stylem učení a studijní úspěšností studentů z Fáze 3 není nulový.

Vzájemný vztah mezi vizuálním stylem (ordinální proměnná) a mezi studijní úspěšností (kardinální proměnná) byl měřen Spearmanovým koeficientem. Výsledek pro každou z Fází poskytuje tabulka 39. Těsnost vztahu se nepotvrdila u studentů v žádné z Fází, ve všech případech byl koeficient korelace $|r| > 0.1$, ale také signifikance větší než 0.05, což značí, že tyto vztahy jsou dané náhodou. Proto nulové hypotézy $H_0^{viz\text{-}F1}$, $H_0^{viz\text{-}F2}$, $H_0^{viz\text{-}F3}$ není možné zamítnout.

Tabulka 39: Výstupová tabulka vztahu vizuální styl a studijní úspěšnost studentů v každé Fázi, (zdroj: *autor, nástroje: SPSS Statistic*)

			studijni_uspesnost
Spearman's rho	vizualni_styl	Correlation Coefficient	,103
		Sig. (2-tailed)	,406
		N	67

a. FAZE = Fáze 1

			studijni_uspesnost
Spearman's rho	vizualni_styl	Correlation Coefficient	,102
		Sig. (2-tailed)	,398
		N	71

a. FAZE = Fáze 2

			studijni_uspesnost
Spearman's rho	vizualni_styl	Correlation Coefficient	,155
		Sig. (2-tailed)	,225
		N	63

a. FAZE = Fáze 3

Zajímala nás i korelační analýza mezi vizuálním stylem a studijní úspěšností u všech studentů bez ohledu na Fázi, výsledek testu pomocí Spearmanova koeficientu ukazuje tabulka 40. Je vidět, že ani pro celou skupinu se nepotvrdila těsnost vztahu.

Tabulka 40: Vztah vizuálního stylu a studijní úspěšnosti studentů bez ohledu na Fázi, (zdroj: *autor, nástroje: SPSS Statistic*)

			studijni_uspesnost
Spearman's rho	vizualni_styl	Correlation Coefficient	,110
		Sig. (2-tailed)	,122
		N	201

Resumé statistického šetření hypotézy – vizuální styl vs. studijní úspěšnost

Na základě výpočtu Spearmanova koeficientu nebyla prokázána existence statisticky významného vztahu mezi vizuálním stylem a studijní úspěšností studentů ani v jedné z Fází, ani v celém vzorku respondentů. Nulovou hypotézu nebylo možné zamítnout pro žádnou Fázi. Není možné potvrdit, že vizuální výuka byla u studentů s preferencí k vizuálnímu stylu učení účinnější.

5.4.4.6 Hypotéza – figurální inteligence vs. studijní úspěšnost

H_{fig}: Neexistuje vztah mezi figurální inteligencí a studijní úspěšností studentů navštěvujících kurz DIMA s vizuální podporou výuky důkazů matematických vět.

Pro ověření hypotézy H_{fig} byly stanoveny následující statistické hypotézy pro každou Fázi:

Nulová hypotéza pro Fázi 1
$H_0^{fig\text{-}F1}$: Korelační koeficient mezi figurální inteligencí a studijní úspěšností studentů z Fáze 1 je nulový.
Alternativní hypotéza pro Fázi 1
$H_A^{fig\text{-}F1}$: Korelační koeficient mezi figurální inteligencí a studijní úspěšností studentů z Fáze 1 není nulový.

Nulová hypotéza pro Fázi 2
$H_0^{fig\text{-}F2}$: Korelační koeficient mezi figurální inteligencí a studijní úspěšností studentů z Fáze 2 je nulový.
Alternativní hypotéza pro Fázi 2
$H_A^{fig\text{-}F2}$: Korelační koeficient mezi figurální inteligencí a studijní úspěšností studentů z Fáze 2 není nulový.

Nulová hypotéza pro Fázi 3
$H_0^{fig\text{-}F3}$: Korelační koeficient mezi figurální inteligencí a studijní úspěšností studentů z Fáze 3 je nulový.
Alternativní hypotéza pro Fázi 3
$H_A^{fig\text{-}F3}$: Korelační koeficient mezi figurální inteligencí a studijní úspěšností studentů z Fáze 3 není nulový.

Vzájemný vztah mezi figurální inteligenci (kardinální proměnná) a mezi studijní úspěšností (kardinální proměnná) byl měřen Pearsonovým koeficientem pro Fázi 1 a Spearmanovým koeficientem pro Fázi 2 a 3, s ohledem na normalitu dat. Výsledek poskytuje tabulka 41.

Těsnost vztahu se nepotvrdila u studentů v žádné z Fází, ve všech případech byl koeficient korelace |r| > 0.1 se signifikancí větší než 0.05, jde o vztahy dané náhodou.

Tabulka 41: Výstupová tabulka vztahu figurální inteligence a studijní úspěšnost studentů v každé Fázi, (zdroj: *autor, nástroje: SPSS Statistic*)

		studijni_uspesnost
figuralni_inteligence	Pearson Correlation	-,081
	Sig. (2-tailed)	,863
	Sum of Squares and Cross-products	-21,643
	Covariance	-3,607
	N	7

a. FAZE = Fáze 1

			studijni_uspesnost
Spearman's rho	figuralni_inteligence	Correlation Coefficient	-,113
		Sig. (2-tailed)	,513
		N	36

a. FAZE = Fáze 2

			studijni_uspesnost
Spearman's rho	figuralni_inteligence	Correlation Coefficient	-,010
		Sig. (2-tailed)	,943
		N	54

a. FAZE = Fáze 3

Zajímala nás i korelační analýza mezi figurální inteligencí a studijní úspěšností u všech studentů bez ohledu na Fázi, výsledek testu pomocí Spearmanova koeficientu ukazuje tabulka 42. Je vidět, že ani pro celou skupinu se nepotvrdila těsnost vztahu.

Tabulka 42: Vztah figurální inteligence a studijní úspěšnost studentů bez ohledu na Fázi, (zdroj: *autor, nástroje: SPSS Statistic*)

			studijni_uspesnost
Spearman's rho	figuralni_inteligence	Correlation Coefficient	-,056
		Sig. (2-tailed)	,588
		N	97

Resumé statistického šetření hypotézy – figurální inteligence vs. studijní úspěšnost

Na základě výpočtu Pearsonova a Spearmanova koeficientu nebyla prokázána existence statisticky významného vztahu mezi figurální inteligenci a studijní úspěšností studentů ani v jedné Fázi, ani v celém souboru. Nulovou hypotézu nebylo možné zamítnout pro žádnou Fázi.

Není možné potvrdit, že vizuální podpora výuky důkazů matematických vět byla u studentů s vyšší figurální inteligencí účinnější.

5.4.4.7 Hypotéza – figurální inteligence vs. vizuální styl učení

$H_{viz\text{-}fig}$: Neexistuje korelace mezi figurální inteligencí a vizuálním stylem učení studentů navštěvujících kurz DIMA.

Pro ověření hypotézy $H_{viz\text{-}fig}$ byly stanoveny následující statistické hypotézy pro každou Fázi:

Nulová hypotéza pro Fázi 1
$H_0^{viz\text{-}fig\text{-}F1}$: Korelační koeficient mezi figurální inteligencí a vizuálním stylem učení studentů z Fáze 1 je nulový.
Alternativní hypotéza pro Fázi 1
$H_A^{viz\text{-}fig\text{-}F1}$: Korelační koeficient mezi figurální inteligencí a vizuálním stylem učení studentů z Fáze 1 není nulový.

Nulová hypotéza pro Fázi 2
$H_0^{viz\text{-}fig\text{-}F2}$: Korelační koeficient mezi figurální inteligencí a vizuálním stylem učení studentů z Fáze 2 je nulový.
Alternativní hypotéza pro Fázi 2
$H_A^{viz\text{-}fig\text{-}F2}$: Korelační koeficient mezi figurální inteligencí a vizuálním stylem učení studentů z Fáze 2 není nulový.

Nulová hypotéza pro Fázi 3
$H_0^{viz\text{-}fig\text{-}F3}$: Korelační koeficient mezi figurální inteligencí a vizuálním stylem učení studentů z Fáze 3 je nulový.
Alternativní hypotéza pro Fázi 3
$H_A^{viz\text{-}fig\text{-}F3}$: Korelační koeficient mezi figurální inteligencí a vizuálním stylem učení studentů z Fáze 3 není nulový.

Vzájemný vztah mezi vizuálním stylem (ordinální proměnná) a figurální inteligencí (kardinální proměnná) byl měřen Spearmanovým koeficientem. Výsledek ukazuje tabulka 43. Těsnost vztahu se nepotvrdila u studentů z Fáze1 a z Fáze 2, v obou případech byl koeficient korelace $|r| > 0.1$ se signifikanci větší než 0.05. Nulové hypotézy $H_0^{viz\text{-}fig\text{-}F1}$ a $H_0^{viz\text{-}fig\text{-}F2}$ není možné zamítnout. Ve Fázi 3 bylo prokázáno, že těsnost tohoto vztahu je statistický významná (r = 0.321, p = 0.018) na hladině významnosti 0.05. Jde o střední korelaci, nulová hypotéza pro Fázi 3 $H_0^{viz\text{-}fig\text{-}F3}$ byla zamítnuta a byla přijata alternativní hypotéza $H_A^{viz\text{-}fig\text{-}F3}$.

Tabulka 43: Výstupová tabulka vztahu vizuálního stylu a figurální inteligence studentů v každé Fázi, (zdroj: *autor, nástroje: SPSS Statistic*)

			figuralni_inteligence
Spearman's rho	vizualni_styl	Correlation Coefficient	-,202
		Sig. (2-tailed)	,664
		N	7

a. FAZE = Fáze 1

			figuralni_inteligence
Spearman's rho	vizualni_styl	Correlation Coefficient	,242
		Sig. (2-tailed)	,154
		N	36

a. FAZE = Fáze 2

			figuralni_inteligence
Spearman's rho	vizualni_styl	Correlation Coefficient	,321*
		Sig. (2-tailed)	,018
		N	54

*. Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

a. FAZE = Fáze 3

Zajímala nás i korelační analýza mezi vizuálním stylem a figurální inteligencí u všech studentů bez ohledu na Fázi, výsledek testu pomocí Spearmanova koeficientu, viz tabulka 44. Pro celou skupinu bylo prokázáno, že existuje statisticky významný vztah (r = 0.238, p = 0.019) na hladině významnosti 0.05. Jde o malou korelaci.

Tabulka 44: Vztah figurální inteligence a vizuálního stylu učení studentů bez ohledu na Fázi, (zdroj: *autor, nástroje: SPSS Statistic*)

			vizualni_styl
Spearman's rho	figuralni_inteligence	Correlation Coefficient	,238*
		Sig. (2-tailed)	,019
		N	97

*. Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

Resumé statistického šetření hypotézy – figurální inteligence vs. vizuální styl učení

Na základě výsledku Spearmanova koeficientu nebyla prokázána existence statisticky významného vztahu mezi figurální inteligencí a vizuálním stylem studentů ve Fázi 1 a ve Fázi 2.

Ve Fázi 3 byl tento vztah potvrzen právě tak, jako i v celkovém souboru. Proto je možné předpokládat, že čím silnější preferenci má student k vizuálnímu stylu učení, tím má vyšší figurální inteligenci.

5.4.4.8 Skóre zápočet + zkouška vs. Studijní úspešnost – negace + důkazy

V rámci výzkumu bylo u každého studenta sledováno i bodové skóre zápočtových a zkouškových úloh z oblastí formulace negací, obměn, dokazování a vyvrácení tvrzení. Toto skóre bylo v této části porovnáno se studijní úspěšnosti – negace + důkazy (část pre-testu a post-testu analogická s danými zápočtovými a zkouškovými úlohami). Pro zjištění vzájemného vztahu byla formulována následující pracovní hypotéza:

$H_{ZápZk}$: Neexistuje vztah mezi dosaženým bodovým skóre zápočtových a zkouškových úloh – negace + důkazy a mezi studijní úspěšností – negace + důkazy u studentů navštěvujících kurz DIMA.

Pro ověření pracovní hypotézy $H_{ZápZk}$ byly stanoveny následující statistické hypotézy pro každou Fázi:

Nulová hypotéza pro Fázi 1

$H_0^{ZápZk-F1}$: Korelační koeficient mezi bodovým skóre zápočtových a zkouškových úloh – negace + důkazy a mezi studijní úspěšností – negace + důkazy u studentů z Fáze 1 je nulový.

Alternativní hypotéza pro Fázi 1

$H_A^{ZápZk-F1}$: Korelační koeficient mezi bodovým skóre zápočtových a zkouškových úloh – negace + důkazy a mezi studijní úspěšností – negace + důkazy u studentů z Fáze 1 není nulový.

Nulová hypotéza pro Fázi 2

$H_0^{ZápZk-F2}$: Korelační koeficient mezi bodovým skóre zápočtových a zkouškových úloh – negace + důkazy a mezi studijní úspěšností – negace + důkazy u studentů z Fáze 2 je nulový.

Alternativní hypotéza pro Fázi 2

$H_A^{ZápZk-F2}$: Korelační koeficient mezi bodovým skóre zápočtových a zkouškových úloh – negace + důkazy a mezi studijní úspěšností – negace + důkazy u studentů z Fáze 2 není nulový.

Nulová hypotéza pro Fázi 3

$H_0^{ZápZk-F3}$: Korelační koeficient mezi bodovým skóre zápočtových a zkouškových úloh – negace + důkazy a mezi studijní úspěšností – negace + důkazy u studentů z Fáze 3 je nulový.

Alternativní hypotéza pro Fázi 3

$H_A^{ZápZk\text{-}F3}$: Korelační koeficient mezi bodovým skóre zápočtových a zkouškových úloh – negace + důkazy a mezi studijní úspěšností – negace + důkazy u studentů z Fáze 3 není nulový.

Vzájemný vztah mezi bodovým skóre sledovaných zápočtových a zkouškových úloh a mezi studijní úspěšností – negace + důkazy byl měřen Spearmanovým koeficientem vzhledem k charakteru dat a typu proměnné (obě proměnné jsou kardinální, avšak srovnávací dvojice nesplňují normální rozdělení pro žádnou z Fází). Výsledek poskytuje tabulka 45. Ve Fázi 1 bylo prokázáno, že těsnost tohoto vztahu je statistický významná ($r = 0.316$, $p = 0.009$) na hladině významnosti 0.01. Jde o střední korelaci a nulová hypotéza $H_0^{ZápZk\text{-}F1}$ byla zamítnuta a byla přijata alternatívní hypotéza. Ve Fázích 2 a 3 se těsnost vztahu nepotvrdila, v obou případech vyšel koeficient korelace $|r| > 0.1$, ale se signifikancí v obou případech větší než 0.05. Proto nulové hypotézy $H_0^{ZápZk\text{-}F2}$ a $H_0^{ZápZk\text{-}F2}$ není možné zamítnout.

Tabulka 45: Výstupová tabulka vztahu Záp+Zk bodů a studijní úspěšnosti – negace+důkazy v každé Fázi, (zdroj: *autor, nástroje: SPSS Statistic*)

			stud_uspNEG_DUK
Spearman's rho	bodyZapZk	Correlation Coefficient	,316**
		Sig. (2-tailed)	,009
		N	67

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

a. FAZE = Fáze 1

			stud_uspNEG_DUK
Spearman's rho	bodyZapZk	Correlation Coefficient	-,156
		Sig. (2-tailed)	,193
		N	71

a. FAZE = Fáze 2

			stud_uspNEG_DUK
Spearman's rho	bodyZapZk	Correlation Coefficient	,151
		Sig. (2-tailed)	,237
		N	63

a. FAZE = Fáze 3

Resumé statistického šetření hypotézy –

Skóre zápočet + zkouška vs. Studijní úspěšnost – negace + důkazy

Na základě výpočtu Spearmanova koeficientu bylo prokázáno, že existuje vztah mezi získaným bodovým skóre zápočtových a zkouškových úloh – negace + důkazy a mezi studijní úspěšností

– negace + důkazy u studentů z Fáze 1. Je možné předpokládat, že čím více bodů studenti z Fáze 1 získali v daných zápočtových a zkouškových úlohách, tím dosáhli vyšší studijní úspěšnosti – negace + důkazy. U studentů z Fáze 2 a 3 se tento vztah nepotvrdil a nulové hypotézy pro Fázi 2 a Fázi 3 nebyly zamítnuty.

Zajímal nás i vztah mezi zápočtovými a zkouškovými body – negace a důkazy a mezi výsledným skóre v post-testech – negace + důkazy. Výsledek těsnosti tohoto vztahu dává tabulka 46. (Poznámka: Data ve Fázi 1 splnila podmínku normality, z toho důvodu byl použit pro Fázi 1 Personův korelační koeficient.)

Tabulka 46: Výstupová tabulka vztahu Záp+Zk bodů a post-test – negace+důkazy v každé Fázi, (*zdroj: autor, nástroje: SPSS Statistic*)

		post_NEG_DUK
bodyZapZk	Pearson Correlation	,559**
	Sig. (2-tailed)	,000
	Sum of Squares and Cross-products	143,634
	Covariance	2,176
	N	67

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

a. FAZE = Fáze 1

			post_NEG_DUK
Spearman's rho	bodyZapZk	Correlation Coefficient	,225
		Sig. (2-tailed)	,060
		N	71

a. FAZE = Fáze 2

			post_NEG_DUK
Spearman's rho	bodyZapZk	Correlation Coefficient	,414**
		Sig. (2-tailed)	,001
		N	63

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

a. FAZE = Fáze 3

Jak je možné z výsledků vidět, těsnost vztahu je ve Fázích 1 a 3 statisticky významná. Ve Fázi 1 jde o velkou korelaci ($r = 0.559$) na hladině významnosti 0.01 a ve Fázi 3 jde o střední korelaci ($r = 0.414$) na hladině významnosti 0.01. Ve Fázi 2 nebyl potvrzen ani tentokrát významný vztah, ale s $p = 0.06$ to bylo poměrně blízko. Dalo by se říct, že studenti vynaložili stejné úsilí jak při post-testech, tak i při zápočtových a zkouškových testech.

5.4.5 Interpretace kvalitativního šetření

5.4.5.1 Analýza chyb

Chyba reflektuje úroveň studenta, jeho osvojení učiva [Červenka, 1992]. Chyba není jenom nežádoucí jev, i když studenti ji vnímají jako nežádoucí, negativní, něco špatného, protože každá chyba pro ně značí méně bodů a následně horší známku, někdy i nesložení zkoušky. Podle Kuliče [Kulič, 1971] je dopouštění se chyb přirozené. Chyba má pro vyučujícího kognitivní a didaktický význam. Skalková v [Skalková, 1999] tvrdí, že je významné zjistit, jaké chyby studenti dělají a jejich četnosti. Autorka této práce z vlastních zkušeností souhlasí s Kuřinou, který tvrdí v [Kuřina, 2017], že častou příčinou chyb bývá pouhé formální zvládnutí matematických poznatků, někdy ovšem např. i nepozornost.

V rámci výzkumu byly zkoumány chyby, kterých se studenti dopouštěli v zápočtových a zkouškových testech.

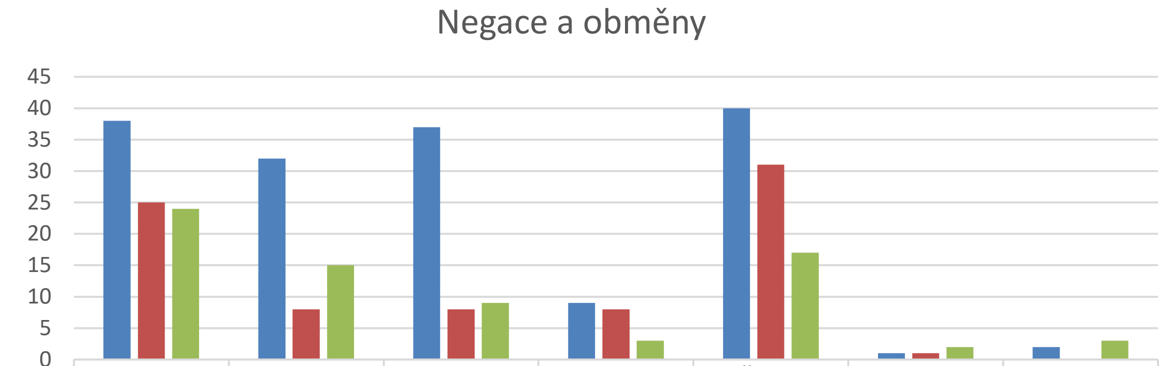
Analýzou byly chyby u negací a obměn rozděleny do následujících skupin:

1) **Nedodržený postup:** nedodržený postup při negovaní nebo vytváření obměny implikace;
2) **Malý kvantifikátor:** špatně znegovaný kvantifikátor v druhé části negované implikace nebo při vytváření obměny;
3) **Chybné negace:** chybně negovaná druhá část negované implikace $A \rightarrow B$ nebo chybně negované částí u obměny;
4) **Velký kvantifikátor:** neznegovaný hlavní kvantifikátor u negované implikace nebo naopak znegovaný kvantifikátor u obměny;
5) **Žádný kvantifikátor:** žádný hlavní kvantifikátor po negaci implikace nebo po vytvoření obměny;
6) **Negace i obměna:** nerozlišení negace a obměny: student kromě negace, provede i obměnu, jakoby nevěděl, co je co, a tak raději udělá všechno a opačně;
7) **Nic:** žádná akce: student nezneguje nic, neudělá obměnu, neudělá úkol.

Chyby studentů u dokazování a vyvrácení tvrzení byly kategorizovány následovně:

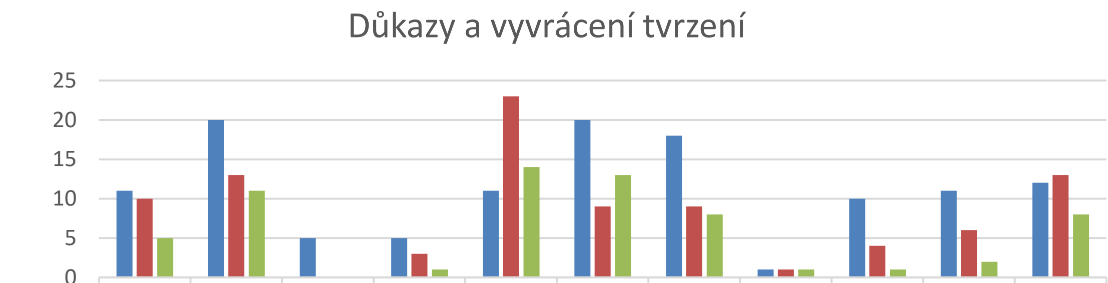
1) **Špatný první krok:** nedodrží prvotní krok při dokazování různých typů, např. při důkazu sporem použije obměnu, pro nepřímý důkaz zase negaci, pro důkaz přímo neguje;
2) **Špatná negace/obměna:** špatně zneguje/provede obměnu při důkazu sporem/nepřímo;
3) **Negace i obměna:** při důkazu sporem/nepřímo provede jak negaci, tak i obměnu;
4) **Špatný postup pro spor:** po správném znegovaní implikace $A \rightarrow B$ vychází z neznegované části A;
5) **Nedotáhnutý důkaz:** začne správně dokazovat, ale důkaz nedokončí, nedotáhne do konce;
6) **Jen negace/obměna:** provede jen negaci u důkazu sporem nebo obměnu u důkazu nepřímo a dál již nepokračuje, tj. pouze provede formulaci negovaného/obměněného tvrzení;
7) **Konkrétní příklad:** ukáže, že tvrzení platí na jednom konkrétním grafu a již tvrdí, že tvrzení platí;
8) **Definice:** jenom sepíše definice pojmů z tvrzení;
9) **Nesmysly:** něco dělá, ale nedává to smysl;
10) **Kontra-příklad:** nenalezne kontra-příklad u vyvrácení tvrzení, jen zneguje tvrzení nebo nakreslí špatný kontra-příklad;
11) **Nic:** nezačne, nic neudělá.

Následující graf 20 a graf 21 znázorňují četnosti chyb ve formulaci negací a obměn a v dokazování a vyvrácení tvrzení dle Fází. Jak je možné vidět, četnosti chyb ve formulaci negací a obměn ve Fázi 2 a ve Fázi 3, tj. u studentů s vizuální výukou, jsou většinou nižší. Výjimku tvoří chyby Negace i obměna a Nic, v těchto případech však jde jen o malý počet. Totéž platí i pro četnosti chyb v dokazování a vyvrácení tvrzení, většinou jsou u studentů s vizuální výukou nižší, s výjimkou chyby Kontra-příklad, která je nejvíce zastoupená ve Fázi 2. Jedná se však jen o malý rozdíl, o jednu chybu více než ve Fázi 1. Také chyba Nedotáhnutý důkaz je početnější ve Fázích 2 a 3, ale zde je zapotřebí si uvědomit, že toto rozložení četnosti chyby ukazuje na to, že více studentů z Fáze 2 a z Fáze 3 než studentů z Fáze 1 umělo důkaz začít a pokračovat v něm.



	Nedodržený postup	Malý kvantifikátor	Chybne negace	Velký kvantifikátor	Žádny kvantifikátor	Negace i obměna	Nic
Fáze 1	38	32	37	9	40	1	2
Fáze 2	25	8	8	8	31	1	0
Fáze 3	24	15	9	3	17	2	3

Graf 20: Četnosti chyb při formulaci negací a obměn ve všech Fázích,
(zdroj: autor; *nástroj: Exel2016*)

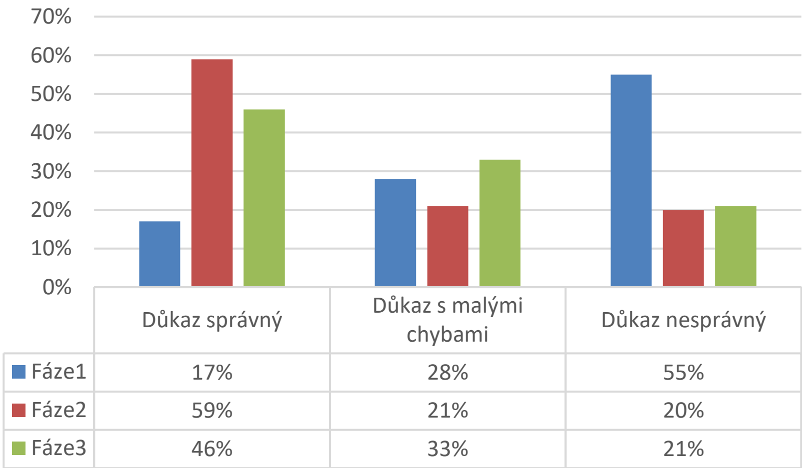


	Špatní první krok	Špatná negace/ obměna	Negace i obměna	Špatný postup pro spor	Nedotáhnutý důkaz	Jen negace/ obměna	Konkretní příklad	Definice	Nesmysl	Nic	Kontra příklad
Fáze 1	11	20	5	5	11	20	18	1	10	11	12
Fáze 2	10	13	0	3	23	9	9	1	4	6	13
Fáze 3	5	11	0	1	14	13	8	1	1	2	8

Graf 21: Četnosti chyb při dokazování a vyvracování tvrzení ve všech Fázích,
(zdroj: autor; *nástroj: Exel2016*)

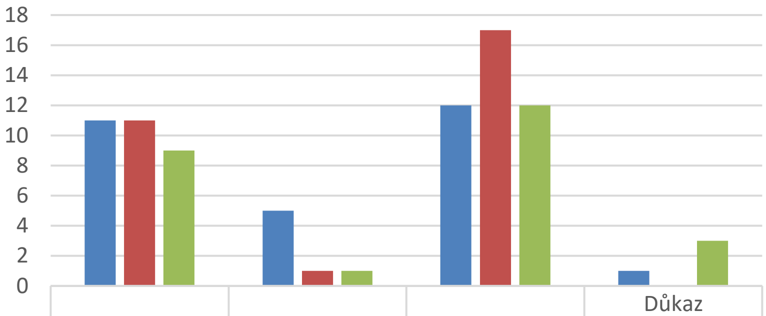
5.4.5.2 Závěrečné projekty

V závěru kurzu DIMA se v každé Fázi (akademické roky 2015/16 až 2017/18) studenti rozdělili do skupin (1-5 členná) a každá skupina vypracovala závěrečný projekt, jehož úlohou byla vizualizace zvoleného tvrzení. Ve Fázi 1 bylo vytvořeno 29 projektů, ve Fázi 2 29 projektů a ve Fázi 3 24 projektů. Danou vizualizaci měla skupina představit ostatním studentům tak, aby důkazu porozuměli. Na základě prezentace a odprezentování vizualizace byly projekty hodnoceny podle následujících parametrů: Důkaz správný, Důkaz s menšími chybami a Důkaz nesprávný. Výsledky jsou uvedeny v grafu 22. Je možné vidět, že značné rozdíly jsou v počtu správných a nesprávných důkazů ve Fázi 1 oproti Fázím 2 a 3. Co se tyče důkazů s malými chybami, je četnost ve všech Fázích srovnatelná.



Graf 22: Výsledky finálních projektů ve všech Fázích, (zdroj: autor; *nástroj: Exel2016*)

Zajímavým bylo zjištění, jaké typy důkazů byly použity. Ve Fázi 1, ve které probíhala tradiční, tj. důkazy se zapisovaly pomocí výrokové logiky a studenti měli k dispozici výukové texty se zapsanými důkazy, studenti nepreferovali žádný typ důkazů. Ve svých esejích psali, že hlavním důvodem pro výběr důkazů je to, aby důkaz byl jednoduchý. Z pozorování prezentování důkazů je možné zhodnotit, že i když si studenti vybrali podle jejich mínění „lehký“ důkaz, často ho nechápali, a z toho důvodu nedokázali k němu vytvořit odpovídající vizualizaci, na které by důkaz vysvětlili. Ve Fázi 2 a ve Fázi 3, kde výuka důkazu probíhala pomocí vizualizací, studenti preferovali důkaz sporem, i ve svých esejích (viz kapitola Analýza esejí) psali o tom, že se jim tento typ důkazů zdá jednodušší, vědí, jak mají přesně postupovat a tím logicky odvozovat části důkazů, dokud nedojdou k závěru. O důkazu matematickou indukcí, i když je to podle Hliněného [Hliněný, 2010] nejčastější aparát dokazování v informatice, se vyjadřovali, že mu nerozumí, což dokazuje i to, že byl použit ve Fázi 1 jednou, ve Fázi 2 ani jednou a ve Fázi 3 třikrát. Výsledky použitých typů důkazů je možné vidět v grafu 23.



	Důkaz přímo	Důkaz nepřímo	Důkaz sporem	Důkaz matematickou indukcí
Fáze 1	11	5	12	1
Fáze 2	11	1	17	0
Fáze 3	9	1	12	3

Graf 23: Přehled použitých typů důkazů, (*zdroj: autor; nástroj: Exel2016*)

Bez ohledu na styl výuky, problémy se objevovaly ve všech Fázích. Byly zjištěny následující nejčastější problémy při konstrukci důkazů:

1) Studenti nevědí jak začít, pro který typ důkazu se rozhodnout. Neuvědomují si, že někdy musí zkusit dokazovat určitým způsobem a když to nikam nevede, zkusit jiný způsob. Vybrat typ důkazů není někdy jednoduché ani pro zkušeného matematika.
2) Neovládají přesný postup pro určité typy důkazů. Při přesně zadaném typu dokazování se nedrží postupu, např. při důkazu nepřímo znegovali větu nebo při dokazování sporem nevycházeli z negované části, ale z předpokladu, se kterým se měli dostat do sporu.
3) Špatné negování při dokazování sporem.
4) Místo obecného důkazu předvedou platnost věty na konkrétním příkladu.

Je možné říci, že tvorba vizualizace studenty bavila a snažili se vymýšlet zajímavé, přitažlivé či originální vizualizace, pomocí nichž by kolegům nejen pomohli lépe pochopit důkaz, ale právě svojí originalitou si postup důkazu zapamatovat a dokázat ho pak aplikovat. Ty nejzajímavější vizualizace se správně provedeným důkazem budou používány jako pomůcka při výuce důkazů. Se svými programátorskými schopnostmi se studenti snažili vytvářet někdy až podivuhodné projekty, jenom aby zaujali svoje spolužáky. Ne vždy však jejich programátorská zručnost korelovala se schopností korektně dokázat tvrzení.

5.4.5.3 Analýza esejí

Kromě vizualizace jednoduchého tvrzení byly studenti požádání, aby napsali „esej“ (pár vět) o své práci, o svém vztahu k dokazování a k vizualizacím. Celkem 145 studentů odevzdalo esej: 36 studentů ve Fázi 1, 49 ve Fázi 2 a 60 ve Fázi 3. Někteří studenti vzali psaní esejí dost vážně a napsali i „celý sloh“. Ne vždy byla délka podstatní, někdy v dlouhém psaní popsal student jen svůj postup, jak postupoval při dokazování v projektu nebo obecné věci o dokazování, ale o svém vztahu k důkazům či vizualizacím nenapsal nic. Jiní napsali jenom pár vět, které však přesně vystihly jak jejich vztah k dokazování, tak i k vizualizacím. A někteří nenapsali nic. V následujícím bude uveden výsledek analýzy esejí, který je ilustrován ukázkami a zajímavými výroky z esejí studentů:

Významná fakta a pozorování získaných z esejí studentů:

Jak se předpokládalo, většina studentů má k dokazování negativní vztah, má problémy s dokazováním, obává se jich, mají s nimi problémy, nebo jak někteří píší: „*není to jejich šálek čaje*“. O svém negativním vztahu ve své práci psalo otevřeně 42,5 % studentů ($F_1$16,5 / $F_2$13,5 / $F_3$12,5)[5]. Dle Fází bylo procentuální zastoupení následující: 50% ve Fázi 1; 41% ve Fázi 2; 37% ve Fázi 3. U některých se tento vztah vybudoval už na střední škole, a ani po absolvování předmětu si neuvědomují důležitost dokazování.

Poznámka: Označení v závorce F1, F2, F3 značí Fáze 1, Fáze 2, Fáze 3.

- „*Není motivace, není chuť řešit důkazy. V důkazu musíte něco vymyslet, něco logicky odvodit a pak to zapisujete pomocí obrácených E a přeškrtnutých V a to je i pro mě dost šílené.*“ (F1)
- „*Beru je s jistou mírou nadsázky jako "nutné zlo" či "samoúčelnou záležitost.*“ (F1)
- „*V důkazu musíte něco vymyslet, něco logicky odvodit, a pak to zapisujete pomocí obrácených E a přeškrtnutých V a to je i pro mě dost šílené.*“ (F1)
- „*Měl jsem pocit, že dokazování je jen jeden ze způsobů, jak ještě více zkomplikovat už tak nelehkou situaci studentů.*“ (F2)

[5] 16.6% studentů bylo z Fáze 1, 13.5% studentů bylo z Fáze 2, 12.5% studentů bylo z Fáze 3 (analogický zkrácený zápis bude použit v celém textu)

- „*Dokazování patří k oblastem, které nejsou mé oblíbené. Dokonce bych řekl, že se jí snažím co nejvíce vyhýbat.*“ (F2)

- „*V první řadě musím říct, že k výrokům nemám zrovna kladný vztah a to už od našeho prvního “setkání” někdy v průběhu prvního ročníku na gymnáziu. Od začátku mi to přišlo jen jako náhodné skládání nesmyslných vět, které nedávají vůbec žádný smysl a nemají moc velký význam v mém budoucím studiu.*“ (F2)

- „*Co se dokazování týče – toho nejsem úplným příznivcem. Matematika pro mě byla vždy spíše o počítání a číslech a teorie, důkazy, věty a to vše okolo pro mne bylo spíše nutné zlo, které je třeba se naučit ke zkoušce a hned potom raději co nejrychleji zapomenout a udělat v mozkovně místo pro záležitosti důležitějšího charakteru.*“ (F3)

- „*Obecně mám matematiku rád a vždy jsem měl. Nicméně ji chápu jenom jako nástroj a teorie a důkazy, že něco opravdu platí, přenechávám matematikům, mě nechávají chladným. Spoustě složitějším důkazům ani nerozumím, protože mám problém číst text, který je napsán silně „matematicky“ (silně abstraktně se spoustou značek a symbolů). Bohužel takovéto jsem měl přednášky z matematiky na VŠ, což mi dokázalo celou tuhle část matematiky dokonale zhnusit. Takže, kdybych mohl ovlivnit náplň předmětu, složitější důkazy bych vůbec neřešil a zabýval se pouze tím, co jde nějak jednoduše vizualizovat. Taky bych se vykašlal na formální zápis důkazů. Pro praxi je stejně irelevantní a podstatné je umět dané věty využít. Přínos vidím v procvičení logického, analytického a abstraktního uvažování.* “ (F3)

17% studentů se vyjádřilo, že k dokazování mají dokonce kladný vztah ($F_1$2 / $F_2$3,5 / $F_3$0,5). Dle Fází bylo zastoupení následující: 5,5% ve Fázi 1; 10% ve Fázi 2; 1 student ve Fázi 3. Mnozí z těchto studentů se s dokazováním už setkali, jako například jedna studentka, která maturovala z profilové matematiky a studovala i na jiné VŠ, kde dokazování složitějších tvrzení probírali.

- „*Lze říci, že od chvíle, kdy jsem pochopil výrokovou logiku, se mi zalíbila. Na rozdíl od okolního světa dává matematika smysl a je logická. Výroková logika spolu s binární poskytují nástroje, jak svázat nelogiku kolem sebe a transformovat ji na logiku.*“ (F2)

6, 5% ($F_1$4 / $F_2$2 / $F_3$0,5) studentů má k dokazování neutrální vztah. Dle Fází bylo zastoupení následující: 11% ve Fázi 1; 6% ve Fázi 2; 1 student ve Fázi 3.

Navzdory negativnímu postoji k dokazování, 28% ($F_1$9 / $F_2$7,5 / $F_3$11,5) studentů chápe důležitost dokazování a někteří studenti si uvědomují význam dokazování i v informatickém oboru. Dle Fází bylo zastoupení tohoto postoje následující: 27% ve Fázi 1; 22,5% ve Fázi 2; 35% ve Fázi 3.

- „*Rozhodně z pohledu logického myšlení bych to hodnotil jako pozitivní zkušenost.*“ (F1)

- „*Dokazování tvrzení pro mě představuje důležitou součást myšlení analytika, protože si musí vytvořit jakousi analýzu daného problému, kterou si musí zdůvodnit právě třeba vyvrácením negace výroku. Tato schopnost určitě přináší pozitivní dopad pro správné a logické uvažování.*“ (F2)

- „*Důležitost a podstatu dokazování jsem si uvědomil, až když jsem započal studium online kurzu „Design and Analysis of Algorithms“, který nám doporučil učitel v závěru předmětu Programování I. Teprve tehdy jsem pochopil, proč jsou důkazy důležité a jak souvisejí s algoritmy, které budeme jakožto programátoři v budoucnu určitě vymýšlet. Coby návrháři algoritmů, je bezpochyby důležité mít jistotu, že náš algoritmus je hromadný (např. že výstupem třídícího algoritmu QuickSort bude vždy setříděný seznam, bez ohledu na délku původního seznamu), nebo že skutečně má takovou výpočetní složitost, jakou si myslíme, že má.*“ (F2)

I když dokazování u studentů není oblíbené, po absolvování kurzu DIMA, kde se s dokazováním setkali blíže, sami museli důkazy vytvářet a vizualizovat, přiznalo 10% ($F_1$2 / $F_2$5 / $F_3$3) studentů, že jejich vztah k dokazování se změnil k lepšímu a důkazy chápou lépe. Dle Fází bylo zastoupení následující: 5,5% ve Fázi 1; 14% ve Fázi 2; 10% ve Fázi 3.

- „*Tento semestr jsem si však rozšířil obzory ohledně důkazů a mám k nim pozitivnější vztah než dříve. Objevil jsem nové metody dokazování výroků a už to pro mě není takový problém.*“ (F3)

- „*S dokazováním jsem se doposud setkal jen jako posluchač, proto pro mne bylo mírně obtížné zvolit správný způsob, jak vybrané tvrzení dokázat, neboť pro různá tvrzení se hodí různé způsoby dokazování. Proto jsem vděčný za možnost si dokazování vyzkoušet.*“ (F3)

- „*Osobně jsem se s negací výroků setkal na střední škole a poté u přijímacích zkoušek na vysoké školy, kde mi negování moc nešlo. Nyní mohu říci, že jsem v negování více sebejistý a dokážu jej s občasnými chybami použít.*“ (F3)

Vizualizaci celkově vnímá pozitivně 42% ($F_1$26 / $F_2$6/ $F_3$10) studentů. Uvědomují si, že jim pomáhá lépe porozumět problému, složitějším pojmům či celým oblastem učiva. Při vlastní tvorbě vizualizace si někteří uvědomili, co je důležité znázornit, co je podstatné. Studenti s tradiční výukou si při tvorbě nejvíc uvědomili, že vizualizace by jim pomohla lépe pochopit danou problematiku. Dle Fází bylo zastoupení následující: 78% ve Fázi 1; 18,5% ve Fázi 2; 30% ve Fázi 3.

- „*Vizualizace vnáší do problematiky dostatek světla.*“ (F1)

- „*Vhodně zvolená vizualizace důkazu může mít zásadní význam.*“ (F1)

- „*Rozhodně nejlepším studijním materiálem jsou pro mne nahraná videa s komentářem, co se proč jak dělá*.“ (F1)

- „*Tvorba vizualizace je dobrá i pro tvůrce prezentace. V případě, že v některých částech tápe, tak si lépe vybaví souvislosti.*“ (F2)

- „*Takové pomůcky jsou přesně to, co mě osobně hodně pomáhá věci pochopit.*“ (F2)

- „*Není pro mne jednoduché slovy dokázat pravdivost výroku, avšak s vizualizací je to mnohem jednodušší.*“ (F2)

- „*Myslím si, že ke každému dokazování by měla být k dispozici nějaká vizualizaci, aby si to člověk lépe představil a také pochopil.*“ (F3)

- „*Díky vizualizaci jsem mimo jiné zjistil, že u důkazů téměř nikdy neexistuje pouze jedna cesta, kterou lze danou úlohu vyřešit.*“ (F3)

- „*Ted´, hlavně díky DIMA jsem zjistil, že dokazování a vizualizace má své uplatnění ve mnoha oblasti a je docela užitečná pro řešení různých druhů problémů či testování algoritmů pro jiné systémy. A taky pomocí vizualizace se řeší hodně programátorských úloh, které takto jde řešit opravdu jednoduše, jsou přehlednější (ne jen pro jednoho* *programátora ale i pro celý tým) a taký šetři čas, který je možno použit pro jinou práci.*“ (F3)

Studenti též vyjádřili své mínění ohledně použití vizualizace důkazu tvrzení.

- „*Vhodně zvolená vizualizace důkazu může mít zásadní význam.*“ (F1)
- „*Jistě nemá cenu vytvářet velice složité vizualizace, pokud by nevnesly do problematiky dostatek světla. Zde někdy může méně znamenat více. Proto jsem se také rozhodl pro jednoduché řešení, které by ale mělo plně představit problematiku a objasnit ji.*“ (F2)

A najdou se i takový, kteří vizualizaci rádi nemají (1 student z F3).

- „*Samotná tvorba „vizualizace“ pro mě byla vcelku obtížná – osobně je mi blízký ucelený, slovní, sekvenční styl důkazu. Tvorba jakési posloupnosti roztříštěných za sebou jdoucích slajdů s nucenými prvky neslovní vizualizace pro mě byla nepřirozená a tento koncept se mi ani ve výsledku nepovedl, protože je mi naprosto cizí.*“

Hlavní problém vidělo 15% studentů v tom, že nevědí jak začít, pro který typ důkazu se rozhodnout ($F_1$0 / $F_2$8,5 / $F_3$6,5). Uvědomili si, že tvorba důkazu není lehká věc, že neexistuje přesný postup, návod, který by jim řekl, jaký typ důkazu si vybrat, a že musí provést řadu důkazů, aby v sobě vyvinuli cit a intuici pro tvorbu důkazů. Dle Fází bylo zastoupení následující: 0% ve Fázi 1; 24,5% ve Fázi 2; 20% ve Fázi 3. Ve Fázi 1 se žádný student nevyjádřil, většinou psali, že s dokazováním matematických vět problémy neměli, i když výsledky projektů tomu nenaznačují. Studenti z Fáze 1 si ani sami neuvědomovali, že mají s něčím problém, což je možné usuzovat, z toho, že si neuvědomují, co je a co není důkaz, za důkaz považují konkrétní příklad, na kterém platí tvrzení, nebo napíšou několik definic pojmů z tvrzení a hned tvrdí, že dané tvrzení platí. Dalším problémem je také to, že si studenti často neuvědomují, že každý typ důkazů má určité kroky, které je potřeba dodržet.

- „*Obecně při dokazování považuji za nejobtížnější zvolení metody, která bude pro dokazování daného tvrzení vhodná.*“ (F2)
- „*Myslím si, že nejtěžší část dokazování přichází již z počátku – určit způsob dokazování.*“ (F3)

- „*Největší problém při dotazování nastává kde a jak začít s tvrzením („kudy do něho vniknout“)*.“ (F3)

Někteří si uvědomují, že sami nevědí co je a co není důkaz, což dokazují chyby v dokazování, kde napíší jenom definice týkající se pojmů z tvrzení nebo nakreslí konkrétní příklad, u kterého tvrzení platí.

- „*Často mám také problém nalézt hranici mezi tím, co už je důkaz a co ještě ne*." (F2)

Nejoblíbenějším důkazem pro 13% studentů je důkaz sporem ($F_1$0 / $F_2$7,5 / $F_3$5,5) a někdy ho chtějí použít i u důkazu tvrzení, pro které není úplně nejvhodnějším. Dle Fází bylo zastoupení následující: 0 ve Fázi 1 (potvrzuje rozbor projektů v podkapitole 5.4.5.2, kde bylo vidět, že studenti Fáze 1 nepreferují žádný typ důkazu); 7,5% ve Fázi 2; 5,5% ve Fázi 3.

Studenti si uvědomují důležitost dokazování nejen v matematice, ale i v jiných oborech či dokonce v životě, 5,5% ($F_1$2 / $F_2$3 / $F_3$0,5) vidí další využití dokazování ve svém profesním životě. Dle Fází bylo zastoupení následující: 1 student ve Fázi 1; 10% ve Fázi 2; 1 student ve Fázi 3.

- „*Využití pro mě jako takového, vidím hlavně v přínosu pokročilejšího programování, kde jsem před tím nevěděl, jak danou problematiku řešit. Jsem moc rád, že jsem se mohl vzdělávat a poodkrýt tuto dosud neznámou*.“ (F3)
- „*Co se týče mého všeobecného vztahu k dokazování, mohu konstatovat, že dokazování v běžném životě používám velice často a to především, když s někým vedu slovní spor. Díky matematickému dokazování jsem vyhrál ne jednu hádku, a proto považuji důkazy za přinejmenším užitečnou věc, kterou je možné bez problémů aplikovat i v běžném životě*.“ (F3)

Naopak 6% ($F_1$3,5 / $F_2$2 / $F_3$0,5) studentů nevidí další využití. Dle Fází bylo zastoupení: 11% ve Fázi 1; 6% ve Fázi 2; 1,5% ve Fázi 3.

- „*Pro mě, jakožto FE programátora, tyto důkazy nemají větší význam, jelikož se v praxi nepoužívají. Myslím si, že znát matematické důkazy není rozhodně na škodu, nicméně rozhodně to není důležitá součást mého současného/budoucího povolání*.“ (F3)

Celkově hodnotili studenti projekt pozitivně, protože je přiměl se na dokazování podívat hlouběji.

- „*Bez toho bych důkazy opravdu jen prolétl.*“ (F1)

Jeden student doporučil zmenšit skupinu.

- „*Myslím, že by se to dalo zlepšit, já bych ty úkoly udělal třeba maximálně pro dvojice nebo i pro každého studenta. Aby každý student musel zapojit mozek a zkusit si to sám.*” (F1)

Jiný si týmovou práci pochvaloval.

- „*Samotná práce mi zlepšila komunikaci a týmovou práci.*” (F2)

Ale našli se i tací, který nebrali práci na projektu či dokazování pozitivně.

- „*Vytváření vizualizace důkazu, pro mě znamenalo pouze nutné splnění úkolu pro úspěšné splnění zápočtu z předmětu DIMA.*“ (F2)
- „*Ale nemyslím si, že bych se někdy k tomu (tvorbě důkazů) dobrovolně vrátil.*“ (F2)

5.4.5.4 Analýza dotazníku

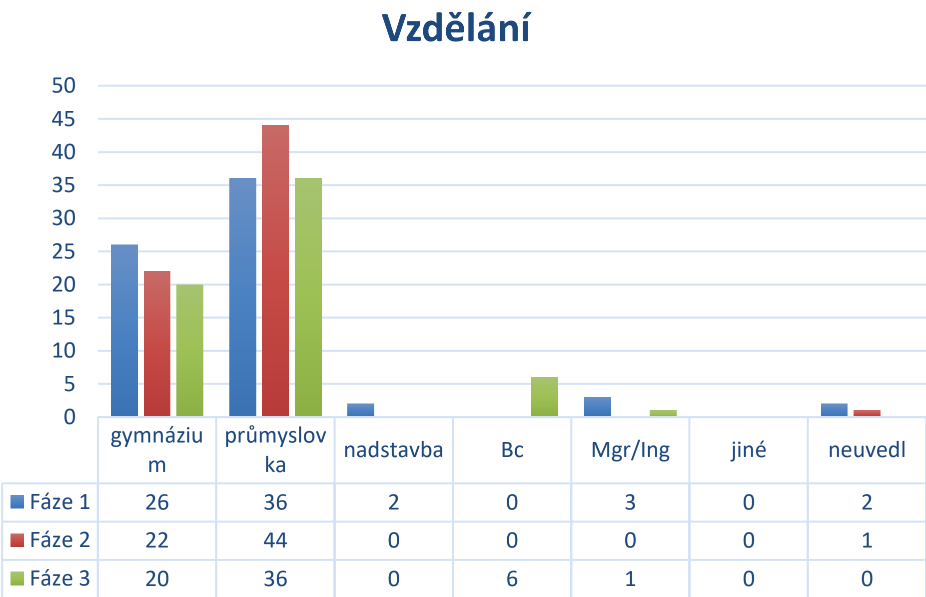
V květnu 2015 byl vypracován anonymní dotazník zaměřený na srozumitelnost důkazů matematických vět při výuce kurzu DIMA a byl rozdán studentům, kteří absolvovali kurz v akademickém roce 2014/15. Na základě rozboru dotazníků byl upraven a použit při tomto výzkumu ve Fázi 1 až 3.

Ve Fázi 1 vylo vyplněno 67 dotazníků, ve Fázi 2 67 dotazníků a ve Fázi 3 63 dotazníků, celkově byla 98% návratnost. Z celkového počtu respondentů bylo 16 žen a 181 mužů (Fáze 1: 5 žen, 62 mužů; Fáze 2: 6 žen, 61 mužů; Fáze 3: 5 žen, 58 mužů).

V evaluaci dotazníků jsou uvedené nejfrekventovanější odpovědi. Dotazník obsahoval 9 otázek. První dvě byly informativního charakteru, týkaly se pohlaví a nejvyššího dosaženého vzdělání. Třetí otázka byla orientační, studenti u ní měli vybrat časový interval, který odpovídal časové přípravě zápočtového projektu. Následující otázka, čtvrtá, měla pro výzkum signifikantní hodnotu. Studenti v ní měli označit, zda považují důkazy za důležité a zda je chápou. V páté otázce měli studenti zaškrtnout, zda probírali důkazy i v jiných předmětech. Šestá otázka byla opět pro výzkum významná, zjišťovala, jak studenti chápou výklad na přednášce. Další dvě otázky, sedmá a osmá, byly sdělující, zjišťovaly, zda se studenti zabývají dokazováním i mimo kurz DIMA a které materiály jim stačily při přípravě na zkoušku. V poslední, deváté otázce otevřeného charakteru, měli studenti napsat, co by jim při výuce pomohlo nebo co by jim bylo nápomocné při přípravě na zkoušku. Na konci dotazníku měli prostor vyjádřit, v případě zájmu, svůj názor.

5.4.5.4.1 Komentář k jednotlivým otázkám dotazníku

1. **Vaše pohlaví – informativní otázka, popsaná v předchozí částí.**
2. **Vaše nejvyšší dosažené vzdělání:**

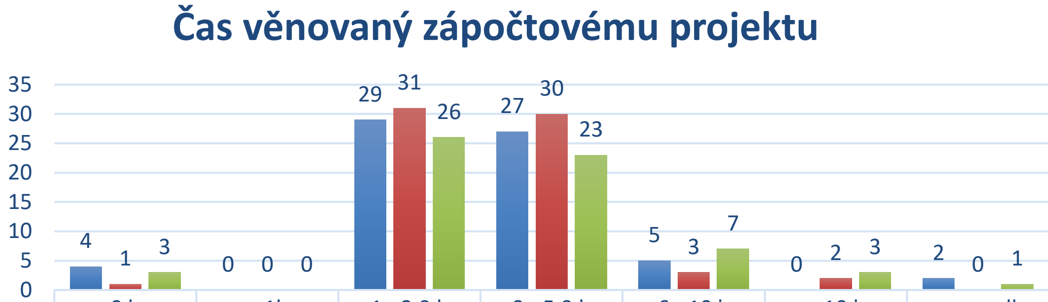


	gymnázium	průmyslovka	nadstavba	Bc	Mgr/Ing	jiné	neuvedl
Fáze 1	26	36	2	0	3	0	2
Fáze 2	22	44	0	0	0	0	1
Fáze 3	20	36	0	6	1	0	0

Graf 24: Nejvyšší dosažené vzdělání studentů zúčastněných ve výzkumu dle Fází,
(zdroj: *autor; nástroj: Exel2016*)

Většina studentů ve všech Fázích absolvovala průmyslovou školu:
Fáze 1 – 52%, Fáze 2 – 66%, Fáze 3 – 57%.
Velká část studentů má gymnaziální vzdělání:
Fáze 1 – 52%, Fáze 2 – 33%, Fáze 3 – 32%,
a 10 studentů již absolvovalo jinou VŠ, viz graf 24.

3. Kolik času jste věnovali zápočtovému projektu?



	0 h	< 1h	1 - 2,9 h	3 - 5,9 h	6 - 10 h	> 10 h	neuvedl
Fáze 1	4	0	29	27	5	0	2
Fáze 2	1	0	31	30	3	2	0
Fáze 3	3	0	26	23	7	3	1

Graf 25: Graf znázorňující čas, který studenti věnovali práci na zápočtovém projektu, (*zdroj: autor; nástroj: Exel2016*)

Majoritní část studentů svůj zápočtový projekt vypracovávala za 1 až 6 hodin:

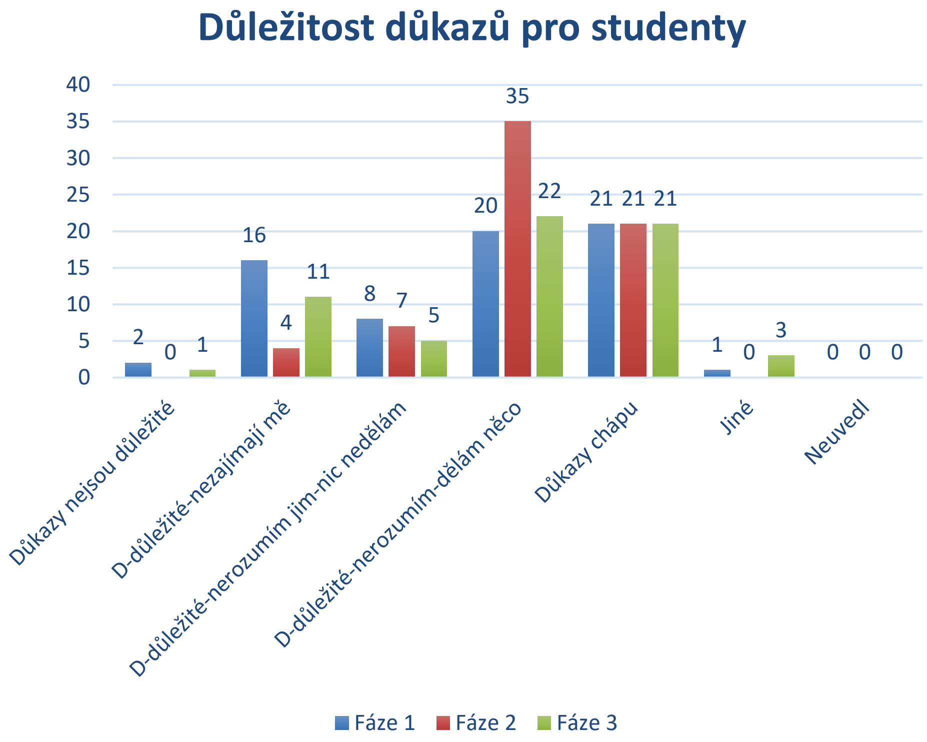
- Fáze 1: 43% - 1 až 2,9 hod, 40% - 3 až 5,9 hod;
- Fáze 2: 46% - 1 až 2,9 hod, 45% - 3 až 5,9 hod;
- Fáze 3: 41% - 1 až 2,9 hod, 36% - 3 až 5,9 hod.

Byli i studenti, kteří se projektu věnovali několik dní a byly i tací, kteří na projektu nedělali a svezli se s pracovitější částí své pracovní skupiny, viz graf 25.

4. Co si myslíte o důležitosti důkazů?

Studenti v dané otázce měli na výběr ze šesti možností:

- Důkazy nejsou důležité
- Důkazy jsou důležité, ale nezajímají mě
- Důkazy jsou důležité, ale nerozumím jim a pro lepší pochopení nic nedělám
- Důkazy jsou důležité, nerozumím jim a snažím se je chápat, dělám pro to něco
- Důkazy jsou důležité, často je chápu
- Jiné



Graf 26: Přehled důležitosti důkazů pro studenty, (zdroj: autor; *nástroj: Exel2016*)

Zajímavým pozorováním bylo, že počet studentů, kteří se vyjádřili, že důkazy chápou, byl vzhledem k Fázím vyrovnaný, a také hodně studentů dělá něco pro to, aby důkazům porozumělo:

- Důkazy jsou důležité, často je chápu: 31% (F1) / 31% (F2) / 33% (F3),
- Důkazy jsou důležité, nerozumím jim a snažím se je chápat, dělám pro to něco:
  - 29% (F1) / 52% (F2) / 35% (F3), viz graf 26.

Z toho by se mohlo usuzovat, že výsledky hodnocení otázek týkajících se důkazů v post-testech budou vyrovnané. Nebylo tomu však. Co z toho možno usuzovat? Studenti označili, co si myslí, co považují za skutečnost, ale výsledky tomu neodpovídají. Možno tvrdit, že sebereflexe studentů z Fáze 1 neodpovídá skutečností? Dokážou studenti reálně posoudit svoje skutečné vědomosti? Jsou to otázky, ne jednoduché a v rámci tohoto výzkumu na ně není možné odpovědět, zaslouží si samostatný výzkum.

5. **Probírali jste důkazy i v jiných kurzech? Když ano, napište, v kterých konkrétně.**

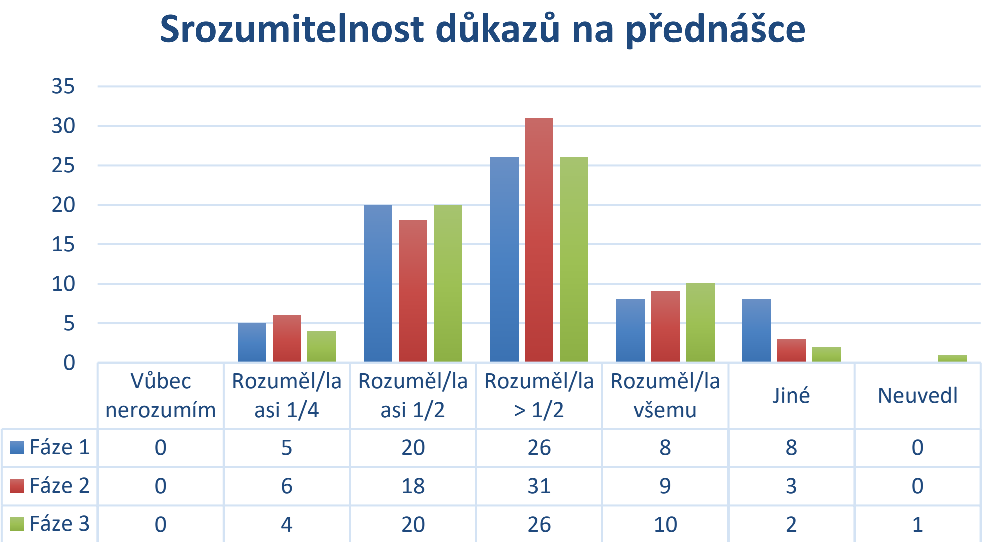
Protože všichni studenti navštěvující kurz DIMA, kteří se zúčastnili výzkumu, absolvovali předměty ZMAT1 a ZMAT2, resp. ZMI1 a ZMI2, jejichž učivo obsahuje i základní matematické věty a na přednáškách se jejich pravdivost dokazuje, očekávalo se, že všichni studenti odpovědí kladně. Výsledek této otázky je tudíž zmapováním, kolik studentů si uvědomilo, že probírali a měli rozumět důkazům vysvětlovaným v rámci již absolvovaného předmětu:

- Fáze 1: 72% ne, 28% ano;
- Fáze 2: 55% ne, 42% ano, 3% neodpovědělo;
- Fáze 3: 57% ne, 43% ano.

6. **Rozuměli jste výkladu důkazů na přednáškách?**

Studenti v teto otázce měli na výběr ze šesti možností:

- Vůbec nerozumím
- Rozuměl/la asi 1/4
- Rozuměl/la asi 1/2
- Rozuměl/la víc než 1/2
- Rozuměl/la všemu
- Jiné



	Vůbec nerozumím	Rozuměl/la asi 1/4	Rozuměl/la asi 1/2	Rozuměl/la > 1/2	Rozuměl/la všemu	Jiné	Neuvedl
Fáze 1	0	5	20	26	8	8	0
Fáze 2	0	6	18	31	9	3	0
Fáze 3	0	4	20	26	10	2	1

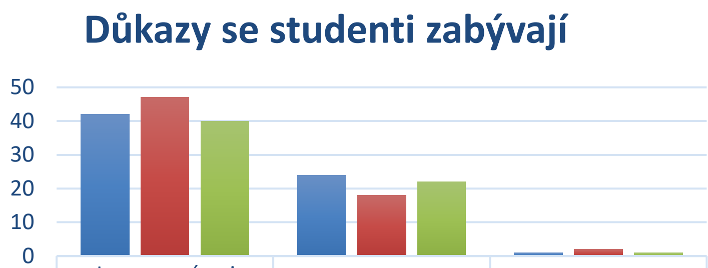
Graf 27: Znázornění srozumitelnosti výuce důkazů v kurzu DIMA,
(zdroj: *autor; nástroj: Exel2016*)

Jak je vidět z grafu 27, dle odpovědí jsou Fáze vyrovnané, což opět navádí k podobnému rozboru jako při otázce o důležitosti důkazů, kde byly vyrovnané odpovědi u možnosti – všemu rozumím. Nejvíce studentů si myslí, že rozumí více než polovině odpřednášených důkazů:

- Fáze 1: 30% - 1/2, 39% - > 1/2;
- Fáze 2: 27% - 1/2, 46% - > 1/2;
- Fáze 3: 32% - 1/2, 41% - > 1/2.

7. Zabýváte se dokazováním i v rámci jiných předmětů na FIM UHK?

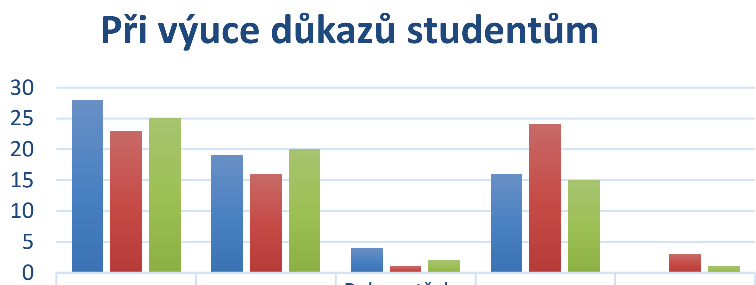
Tato otázka měla informativní charakter. Jak je možné vidět z grafu 28, necelá polovina studentů v každé Fázi se věnuje dokazování i mimo předmět DIMA.



	Jenom v rámci kurzu DIMA	I mimo kurz DIMA	Jiné
Fáze 1	42	24	1
Fáze 2	47	18	2
Fáze 3	40	22	1

Graf 28: Zabývání se důkazy mimo DIMA, (zdroj: autor; *nástroj: Exel2016*)

8. Označte možnost, týkající se vašeho učení se důkazů při přípravě na zkoušku:



	Stačily přednášky	Stačily učební texty	Byla potřeba přednášky i učební texty	Jiné	Neuvedl
Fáze 1	28	19	4	16	0
Fáze 2	23	16	1	24	3
Fáze 3	25	20	2	15	1

Graf 29: Potřeby studentů při přípra vě na zkoušku, (zdroj: autor; *nástroj: Exel2016*)

Je potřeba podotknout, že u Fáze 1 tvořily učební texty sepsané důkazy pomocí výrokové logiky a u Fáze 2 a 3 to byly vizualizace. Většina studentů si vystačila s přednáškami a učebními texty, viz graf 29:

- Fáze 1: 42% - přednášky, 28% - učební texty, 6% - oba, 24% - jiné;
- Fáze 2: 34% - přednášky, 24% - učební texty, 2% - oba, 36% - jiné, 3 studenti - neuvedli;
- Fáze 3: 40% - přednášky, 32% - učební texty, 3% - oba, 24% - jiné, 1 student neuvedl.

Položce Jiné se zabývá následující část.

9. Popište jiné objekty, o kterých si myslíte, že by vám pomohli líp pochopit důkazy nebo byly nápomocné u přípravy na zkoušku:

Ve Fázi 1 - 31,5% studentů psalo, že by jim pomohla nějaká vizualizace. Také se objevily návrhy:

- Internet
- Souhrn sepsaný na jednom místě
- Sepsat slovně bez logických operátorů
- Nemám tušení

Ve Fázi 2 – 27% napsalo, že by uvítali ještě další vizualizace a 25,5% studentů chtělo formálně zapsané důkazy. Objevovaly se také následující odpovědi:

- Víc procvičovat
- Stačí se zamyslet
- Kdybych věděl
- Jeden student napsal: „Výklad je dobrý, to já mám problém, definice mi nikdy moc nelezly do hlavy.“

Ve Fázi 3 – 11% studentů požadovalo další vizualizace ve formě videi s výkladem, 30,5% studentů si přálo formálně zapsaný důkaz. Další:

- Internet
- Psát jenom slovy
- Výuka od základu
- Věnovat důkazům víc času, jako celému kurzu
- Sám nevím

5.4.5.4.2 Resumé analýzy dotazníku

Dotazník zmapoval názory studentů na důležitost důkazů, a co si o svých vědomostech samotní studenti myslí. Pro vyučujícího byly významné odpovědi na porozumění výkladu, což může být námětem pro další zkoumání, jak se v této oblasti zlepšit. Přínosné byly odpovědi na nápomocnost při výuce a také další podněty pro tvorbu dalších možností vizualizace důkazů.

6 Shrnutí a diskuse

Provedený výzkum zaměřený na zjištění vlivu vizuálních prezentací a multimediálních aplikací na studijní úspěšnost ve výuce důkazů teorie grafů patří v České republice a také v jiných krajinách mezi pilotní. Vliv a účinnost vizualizace ve výuce důkazů je už několik let objektem zájmu mnoha zahraničních studií [Marrades, Gutiérrez, 2000], [Gawlick, 2002], [Sarracco, 2005], [Lin, 2008], [Baccaglini-Frank, Mariotti, 2010], [Kilic, 2013], [Isiksal, Askar, 2005], [Abdelfatah, 2011] a v posledních letech i českých studií [Štrausová, 2012], [Robová, 2013]. Ve většině případů je tento vliv zkoumaný v oblasti důkazů v geometrii. Důvodem je existence geometrických dynamických softwarů vhodných pro provádění důkazů v dané oblasti. Pro účely tohoto výzkumu v oblasti teorie grafů byly vizuální prezentace a multimediální aplikace navrženy a vytvořeny autorkou nebo vyvinuty pod jejím vedením.

Po prostudování výsledků mnoha studií v dané oblasti je možné shrnout, že vizualizace ve výuce důkazů má v mnoha případech pozitivní vliv na studijní výsledky, viz [Marrades, Gutiérrez, 2000], [Gawlick, 2002], [Lin, 2008], [Kilic, 2013], [Ugurel a kol., 2016], [Erbas, Aydogan-Yenmez, 2011], avšak existují i studie, které nepřinesly žádný efekt, viz [Hull, Brovey, 2004], [Sarracco, 2005]. Mnohé výzkumy se již zaměřují na zjištění, která forma vizualizace je nejúčinnější, statická nebo dynamická popřípadě jejich kombinace, interaktivní nebo neinteraktivní, animace rychlá nebo pomalá neboli segmentová nebo nesegmentová, viz [Hegarty, 2004], [Fischer a kol., 2008], [Mayer a Chandler, 2001], [Kühl a kol., 2011], [Kühl a kol., 2011], [Arguel a Jamet, 2009].

Cílem tohoto pedagogického výzkumu byla analýza procesu výuky důkazů matematických vět v předmětu DIMA na FIM UHK. Výzkum probíhal v rámci výuky daného kurzu a výsledky kvantitativního a kvalitativního statistického šetření plynou ze zkoumaného vzorku studentů druhého ročníku oborů Aplikovaná informatika a Informační managemet navštěvující kurz DIMA. Předmětem zkoumání bylo zjištění, zda studijní úspěšnost v oblastí výrokové logiky, formulace negací/obměn a dokazování/vyvracení matematických tvrzení v oblasti teorie grafů závisí na použití vizuální technologie při výuce.

Z organizačních důvodů nebyli studenti rozděleni na kontrolní a experimentální skupinu. Byli rozděleni do tří skupin podle akademického roku, ve kterém navštěvovali kurz: Fáze 1 (akademický rok 2015/16), Fáze 2 (akademický rok 2016/17) a Fáze 3 (akademický rok 2017/18). Ve Fázi 1 (67 studentů) probíhala výuka důkazů tradičním způsobem, ve Fázi 2 (71 studentů) probíhala výuka pomocí vizuálních prezentací a ve Fázi 3 (63 studentů) byla vizuální výuka podpořená multimediálními aplikacemi. Pro všechny Fáze byly vytvořeny stejné studijní podmínky, lišily se jenom v použití technologie při výuce důkazů.

Celý výzkumný vzorek (201 studentů) byl testován standardizovaným testem ILS profesora Feldera na preference stylů učení s cílem zjistit, jak silné je zastoupení preferencí k vizuálnímu stylu učení. Studenti mohli využít také testování standardizovaným testem I-S-T 2000 R pro zjištění strukturální inteligence studentů (pro náš výzkum byla využita pouze figurální inteligence), testování se zúčastnilo 97 studentů. Studenti ve všech Fázích vyplnili pre-test, post-test, zápočtový a zkouškový test a vypracovali závěrečný projekt. Byli též požádaní o napsání eseje o svých postojích k důkazům a k vizualizacím a o vyplnění dotazníku týkajícího se porozumění důkazům vysvětleným v rámci výuky. Esej napsalo 145 studentů a dotazník vyplnilo 197 studentů.

V rámci výzkumu bolo zjišťováno:

1. *Zda se studijní úspěšnost v oblasti výroková logika liší ve Fázích vzhledem k použití vizuální technologie při výuce důkazů.*

   Statisticky nebylo prokázáno, že studijní úspěšnost v oblasti výrokové logiky zahrnující pojmy z teorie grafů závisí na použití vizuální technologie využívané v předmětu DIMA. Tento fakt je možné připsat skutečnosti, že otázky výrokové logiky v pre-testu / post-testu byly typu „vyber odpověď/odpovědi“. Pro studenta je tento typ otázek oblíbený, protože nemusí sám formulovat implikaci nebo ekvivalenci. Na druhé straně je tento typ otázek někdy zrádný, protože student občas vybere pouze první odpověď, která se mu zdá správná. Neuvědomí si, že správných odpovědí může být více, nedočte odpovědi až do konce, a i když vybere jednu správnou možnost, ztratí bod za celou odpověď.

2. *Zda se studijní úspěšnost v oblasti formulace negací liší ve Fázích vzhledem k použití vizuální technologie při výuce důkazů.*

   Bylo statisticky prokázáno, že studijní úspěšnost v oblasti formulování negací matematických vět závisí na použití vizuální technologie při výuce. Studenti navštěvující výuku důkazů matematických vět podpořenou vizuálními prezentacemi a multimediálními aplikacemi (Fáze 2 a 3) dosáhli vyšší studijní úspěšnosti v oblasti tvorby negací než studenti navštěvující tradiční výuku důkazů (Fáze 1). Dále bylo prokázáno, že účinnost vizuální výuky důkazů matematických vět pomocí vizuálních prezentací (Fáze 2) byla srovnatelná s vizuální výukou podpořenou multimediálními aplikacemi (Fáze 3). Tyto statistické rozdíly mezi Fázemi lze připsat skutečnosti, že tvorba negace byla vizuálně prezentována krok za krokem v každé prezentaci, která popisovala důkaz sporem.

3. *Zda se studijní úspěšnost v oblasti dokazování matematických vět liší ve Fázích vzhledem k použití vizuální technologie při výuce důkazů.*

   Výsledek byl analogický jako u studijní úspěšnosti – negace v předchozím bodu. Studenti navštěvující výuku důkazů podpořenou vizuálními prezentacemi a mediálními aplikacemi (Fáze 2 a 3) dosáhli vyšší studijní úspěšnosti v oblasti vytváření důkazů matematických vět než studenti navštěvující tradiční výuku důkazů (Fáze 1). Mezi výukou z Fáze 2 a Fáze 3 nebyly zjištěny rozdíly. Příčinou tohoto statistického rozdílu mezi Fázemi 1 a 2 a mezi Fázemi 1 a 3 jsou nejpravděpodobněji právě vizuální prezentace používané při výuce, studenti si mohli tyto vizualizace při učení se důkazů opakovaně prohlížet, což mohlo suplovat výuku důkazů navíc, kdežto studenti Fáze 1 výuku slyšeli jednou na přednášce a učit se mohli jenom ze svých zápisků a výukových textů, kde byly důkazy zapsané pouze formálně a tomuto formálnímu zápisu nemuseli úplně rozumět.

4. *Zda se studijní úspěšnost v oblasti výroková logika + formulace negací + dokazování matematických vět liší ve Fázích vzhledem k použití vizuální technologie při výuce důkazů.*

   Bylo statisticky prokázáno, že účinnost výuky s vizuálními prezentacemi podpořené multimediálními aplikacemi (Fáze 3) byla vyšší než tradiční výuka důkazů matematických vět (Fáze 1), tj. studenti s vizuální výukou podpořenou multimédií dosáhli lepší studijní úspěšnosti v oblasti výrokové logiky, formulace negací a dokazování matematických vět než studenti s tradiční výukou. Studenti z Fáze 2 (výuka s vizuálními prezentacemi) dosáhli vyšší studijní úspěšnosti než studenti z Fáze 1 (tradiční výuka), ale tento rozdíl podle výsledků testu nebyl statisticky významný, i když v jednotlivých studijních úspěšnostech (studijní úspěšnost - negace a studijní úspěšnost – důkazy) tento rozdíl statisticky významný byl. Tento výsledek byl nejpravděpodobněji ovlivněn výsledkem šetření hypotézy ohledem úspěšnosti výrokové logiky, kde nebylo statistického rozdílu dosaženo ani pro jednu dvojici Fází. Mezi Fázemi 2 a 3 nebyl zjištěn statisticky významný rozdíl.

5. *Zda existuje vztah mezi studijní úspěšností studentů a jejich preferenci k vizuálnímu stylu učení studentů.*

   Nebyla prokázána existence statisticky významného vztahu mezi vizuálním stylem a studijní úspěšností studentů ani v jedné z Fází, ani v celém vzorku respondentů. Nebylo možné potvrdit, že vizuální výuka byla u studentů s preferencí k vizuálnímu stylu učení účinnější.

6. *Zda existuje vztah mezi studijní úspěšností a jejich figurální inteligenci studentů.*

   Ani tady nebyla prokázána existence statisticky významného vztahu mezi figurální inteligencí a studijní úspěšností studentů ani v jedné Fázi, ani v celém souboru. Nebylo možné potvrdit, že vizuální podpora výuky důkazů matematických vět byla u studentů s vyšší figurální inteligencí účinnější.

7. *Zda existuje vztah mezi figurální inteligenci a preferenci k vizuálnímu stylu učení studentů.*

   Vztah byl zjišťován v každé Fázi zvlášť a také v celém souboru. Ve Fázích 1 a 2 nebyla prokázána existence statisticky významného vztahu mezi figurální inteligencí a vizuálním stylem studentů. Ve Fázi 3 byl tento vztah potvrzen právě tak, jako i v celkovém souboru. Proto je možné předpokládat, že čím má student vyšší figurální inteligenci, tím silnější preferenci má k vizuálnímu stylu učení.

8. *Zda existuje vztah mezi studijní úspěšností (resp. skóre úloh) v oblasti formulace negací + dokazování matematických vět a dosaženým bodovým skóre zápočtových a zkouškových úloh týkajících se formulace negací/obměn a dokazování/vyvracení matematických tvrzení.*

   Bylo prokázáno, že existuje vztah mezi získaným bodovým skóre zápočtových a zkouškových úloh – negace + důkazy a mezi studijní úspěšností – negace + důkazy u studentů z Fáze 1 (tradiční výuka). Čím více bodů studenti z Fáze 1 získali v daných zápočtových a zkouškových úlohách, tím dosáhli vyšší studijní úspěšnosti – negace + důkazy. U studentů z Fáze 2 a 3 (vizuální výuka) se tento vztah nepotvrdil. Co se týče vztahu skóre sledovaných úloh z post-testů a zápočtových + zkouškových testů, tam se vztah prokázal jak ve Fázi 1, tak i ve Fázi 3, v obou případech šlo o dost významný vztah na hladině významnosti 0.01. Ve Fázi 2, se ani tentokrát nepodařilo prokázat významný vztah, podle výsledku testu to bylo dost těsné.

Součástí kvalitativního výzkumu byla analýza závěrečných projektů, esejí, dotazníků a chyb v zápočtových a zkouškových testech.

V rámci analýzy chyb v zápočtových a zkouškových testech byly chyby rozděleny do skupin charakterizujících určitou chybu a byla zjišťována jejich četnost. Bylo užitečné zjistit, které chyby se objevovaly nejčastěji, aby se při následné výuce na danou oblast kladl větší důraz a věnovalo se jí více času.

V závěru kurzu DIMA v každé Fázi se studenti rozdělili do skupin a každá skupina vypracovala závěrečný projekt, jehož úlohou byla vizualizace zvoleného tvrzení. Danou vizualizaci měla skupina představit ostatním studentům tak, aby důkazu porozuměli. Na základě prezentace a odprezentování vizualizace byly projekty hodnoceny a rozděleny na: Důkaz správný, Důkaz s menšími chybami a Důkaz nesprávný. Výsledky ukázaly, že značné rozdíly byly v počtu správných a nesprávných důkazů ve Fázi 1 oproti Fázím 2 a 3. Nesprávných důkazů ve Fázi 1 bylo skoro trojnásobně více než správných. Také byly zmapovány nejčastější problémy, se kterými se při konstrukci vizualizace důkazů studenti setkávali.

Významná fakta a pozorování z esejí studentů, kterou napsali na konci kurzu, jsou sepsána v kapitole Analýza esejí. Sumárně se dá přístup studentů k důkazům a vizualizacím shrnout následovně:

- studenti mají k důkazům a dokazování celkově negativní vztah, který si vybudovali už na střední škole;
- důležitost důkazů si uvědomují a k získání tohoto názoru jim pomohl i kurz DIMA,
- vizualizace vnímají pozitivně;
- největší problém při dokazování vidí v tom, že se nedokážou rozhodnout, jakým typem důkazu dané tvrzení dokazovat;
- nevidí hranici mezi důkazem a konkrétním příkladem.

Dotazník zmapoval názory studentů na důležitost důkazů, a co si o svých vědomostech samotní studenti myslí. Pro vyučujícího byly významné odpovědi na porozumění výkladu, což bude námětem dalšího hledání, jak se v této oblasti zlepšit. Přínosné byly také další podněty pro tvorbu dalších možností vizualizace důkazů pro lepší srozumitelnost při výuce a přípravě na zkoušku. V průběhu zpracování výsledků dotazníku se objevily další otázky, které by mohly vyznačovat další směr zkoumání, jako například, zda studenti dokážou reálně posoudit svoje skutečné vědomosti.

I když výsledky našeho výzkumu ukazují kladný vliv vizualizace na studijní úspěšnost formulace negací a dokazování matematických vět při výuce důkazů, nelze je interpretovat jednoznačně ve prospěch vizuální výuky a celkově je zobecňovat. Omezení je dáno především tím, že ne všechny alternativní hypotézy, které byly vysloveny ve prospěch vyšší účinnosti vizuální výuky důkazů, byly přijaty. Je potřeba připustit i roli motivace, tento výzkum byl začleněn do běžné výuky a úlohy typu formulace negací a důkaz tvrzení byly součástí zkouškového testu. Motivací studentů v tomto případě jistě bylo dosažení dobrých klasifikovaných studijních výsledků ve všech Fázích. Dalším omezením je počet respondentů, který byl limitován jak počtem studentů v ročníku, tak prováděním výzkumu jen na jedné fakultě. Vyšší počet testovaných respondentů, delší testovací časový úsek, více fakult zapojených do testování, to vše by zřejmě poskytlo více pozitivních výsledků ve prospěch vizualizace.

Je zapotřebí mít na paměti, že vizualizace má i svoje negativní aspekty. Ne všichni studenti inklinují k vizuálnímu stylu učení. Jsou studenti, kterým více vyhovují důkazy sepsané formou výrokové logiky. A dokonce i studenti inklinující k vizuálnímu stylu, jak ukazují výsledky dotazníků, kromě vizuálních prezentací vyžadují i formálně zapsané důkazy, které k vysokoškolskému vzdělání jednoznačně patří. Na základě vlastních zkušeností autorky je možné tvrdit, že matematické vysokoškolské výukové texty by měly být nejen zapsány formálně správně, ale měly by být i vhodně doplněny precizně vytvořeným vizuálním materiálem. Tím by si studenti jak vizuálního stylu učení, tak verbálního, sami vybrali výukový materiál, který jim lépe vyhovuje. Většinou by se patrně jednalo o kombinaci obojího.

7 Závěr

Důkaz představuje pro studenty někdy až gorgonský problém. Při vyslovení slova „důkaz" při výuce je vidět na tvářích studentů, jaký k němu mají respekt až odpor. Navzdory tomu je to pojem, který by měl mít své místo ve slovníku vysokoškolského studenta s informatickým zaměřením. Během předešlých let se ukázalo, že úroveň studentů v této oblasti je velice nízká. Důvodem byl jejich přístup k důkazům, který si vybudovali už na střední škole. Z tohoto důvodu jsme začali aktivně řešit koncepci výuky důkazů tak, aby studenti dosahovali větší úspěšnosti při dokazování, negaci výroků, a aby jejich přístup k dokazování byl přívětivý a postoj kladný. Na základě zahraničních studii týkajících se podpory výuky matematických důkazů byla jako nejvhodnější nástroj zvolena vizualizace.

Cílem našeho výzkumu byla analýza procesu výuky důkazů matematických vět v kurzu DIMA na FIM UHK. Bylo ověřeno, zda studijní úspěšnost v oblasti výrokové logiky, formulace negací a dokazování matematických vět závisí na technologii použité při výuce důkazů. Dosavadní studie zabývající se vlivem vizualizace matematických důkazů přinesly celkově pozitivní výsledky, viz [Pandiscio, 2002], [Hull a Brovey, 2004], [Sarracco, 2005], [Abdelfatah, 2011], [Erbas a Aydogan-Yenmez, 2011], [Kilic, 2013], [Ugurel a kol., 2016].

Výsledky našeho výzkumu také potvrdily efektivnost využití vizualizace při výuce matematických důkazů (viz výsledky dosažené u skupin Fáze 2 a Fáze 3). Většina učitelů souhlasí s tím, že využití vizualizace ve výuce by mělo usnadnit učení a učení se. O tom, že vizuální prezentace informací je účinnější, se píše např. v článku [Kostromina a Gnedykh, 2015]. [Kosslyn, 1980] a [Shepard, Cooper, 1982] potvrdili argument, že obrazy jsou lépe zapamatovatelné než slova a studie [Domik, 1994] ukázala, že využití vizualizace ve výuce předpokládá aktivní, vyšetřovací a motivující prostředí, které poskytuje intuitivní pochopení složitých procesů.

Vizualizace hraje důležitou roli při výuce matematických důkazů. Zapojení studentů do tvorby vizualizace vede k lepšímu pochopení samotného důkazu. Jak praví čínský filozof a státník Konfucius: „*Pověz mi a zapomenu; ukaž mi a já si vzpomenu; ale dovol mi se zúčastnit a já pochopím.* [Citáty slavných osobností] "

8 Použitá literatura

ABDELFATAH, H. (2011). *A story-based dynamic geometry approach to improve attitudes toward geometry and geometric proof*. ZDM - International Journal on Mathematics Education. 43. 441-450. 10.1007/s11858-011-0341-6.

ADAMS, R. D. - VICTOR, M. (1993). *Principles of neurology*. Fifth edition. New York, NY: McGraw-Hill.

ALMAŠIOVÁ, A. - KOHÚTOVÁ, K. (2016). *Štatstické spracovanie dát sociálneho výskumu v programe SPSS*. Ružomberok: Verbum, 2016. 173 s. ISBN 978-80-561-0407-1.

ALSINA, C., - NELSEN, R. B. (2006). *Math made visual: Creating images for understanding mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

ALSINA, C. - NELSEN, R. B. (2010). *An invitation to proofs without words*. Eur. J. Pure Appl. Math.3: 118–127.

AMTHAUER, R. - BOCKE, B. - LIEPMANN, D. - BEAUDUCEL, A. (2005). *Test struktury intelligence I-S-T 2000 R – příručka*. První české vydání upravila Alena Plháková, ©Hogrefe – Verlag GmbH & CO. kg, Gottingen 2001, Vydalo TESTCENTRUM PRAHA s.r.o. Dostupné z https://docplayer.cz/24067455-Test-struktury-inteligence-i-s-t-2000-r-pfiiruaka.html

ARCAVI, A. (2003). *The role of visual representations in the learning of mathematics*. Educational Studies in Mathematics, 52(3), 215-241. Educational Studies in Mathematics. 52. 215-241. 10.1023/A:1024312321077.

ARGUEL, A. - JAMET, É. (2009). *Using video and static pictures to improve learning of procedural contents*. Computers in Human Behavior. 25. 354-359. 10.1016/j.chb.2008.12.014.

BACCAGLINI-FRANK, A. - MARIOTTI, M. A. (2010). *Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model*. International Journal of Computers for Mathematical Learning. 15. 225-253. 10.1007/s10758-010-9169-3.

BITTINGER, M. L. (1968). *The effect of a unit in mathematical proof on the performance of college mathematics majors in future mathematics courses*. Dissertation Abstracts, 29, 3906A.

BIZA, I. - NARDI, E. - ZACHARIADES, T. (2009). *Teacher Beliefs and the Didactic Contract on Visualization*. For the Learning of Mathematics. 29(3), pp.31-36.

BRENNAN, C. M. (1976). *Toward a theory of sequencing: Study 4-3: the development and investigation of a canonical teaching procedure for aspects of mathematical proof*. Dissertation Abstracts International, 37, 7093A.

CADWALLADEROLSKER, T. (2011): *What Do We Mean by Mathematical Proof?* The Journal of Humanistic Mathematics. 1. 10.5642/jhummath.201101.04.

CARLSON, P. R. (1971). *An investigation of the effects of instruction in logic on pupils' success in proving theorems in mathematics*. Dissertation Abstracts. Athens, GA: University of Georgia. 35,7765A.

CATTELL, R.B. (1971). *Abilities: Their structure, growth and action*, Boston: Houghton-Mifflin Company, New York Atlanta Geneva. ISBN: 0-395-04275-5.

ČERVENKA, S. (1992). *Angažované učení*. Praha: Tomáš Houška. 95 s. ISBN 80-900704-8-5.

CHRÁSKA, M. (2007). *Metody pedagogického výzkumu: základy kvantitativního výzkumu*. Praha: Grada Publishing, 2007. Pedagogika. ISBN 978-80-247-1369-4.

CITÁTY SLAVNÝCH OSOBNOSTÍ. Dostupné z: https://citaty.net/citaty/20427-konfucius-povez-mi-a-zapomenu-ukaz-mi-a-ja-si-vzpomenu-ale/.

DAVIS, P. J. (1993). *Visual theorems. Educational Studies in Mathematics*. 24(4), 333-344.

DAWSON, J. (2006). *Why Do Mathematicians Re-prove Theorems?*. Philosophia Mathematica. 14. 10.1093/philmat/nkl009.

DOMIK G. O. (1994). *Visualization education*. Computers & Graphics. Volume 18, Issue 3, Pages 277 -280. https://doi.org/10.1016/0097-8493(94)90026-4.

DUNN, R. - DUNN, K. (1978). *Teaching Students Through Their Individual Learning Styles: A Practical Approach*. Virginia: Reston Publishing.

EL-KHOUSSY, A. A. H. (1935). *The visual perception of space*. British Journal of Psychology Monograph Supplement No. 20.

ERBAS, A. - AYDOGAN-YENMEZ, A. (2011): *The effect of inquiry-based explorations in a dynamic geometry environment on sixth grade students' achievements in polygons*. Computers & Education. 57. 2462-2475. 10.1016/j.compedu.2011.07.002.

FELDER, R. M. - SILVERMAN, L. K. (1988). *Learning and teaching styles in engineering education*. Engineering Education 78(7): s. 674–681. Cit. 10. 8. 2018. Dostupné na: http://www4.ncsu.edu/unity/lockers/users/f/felder/public/Papers/LS-1988.pdf.

FELDER, R. M. - SPURLIN, J. (2005). *Applications, reliability and validity of the index of learning styles.* International journal of engineering education 21(1), s.103-112. ISSN

1741-5055. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/279894244_Applications_ reliability _and_validity_of_the_Index_of_Learning_Styles.

FISCHER, S. - LOWE, R. K. - SCHWAN, S. (2008). *Effects of Presentation Speed of a Dynamic Visualization on the Understanding of a Mechanical System*. Applied Cognitive Psychology, 22(8), 1126-1141. https://doi.org/10.1002/acp.1426.

GARDNER, H. (1983). *Frames of Mind: The theory of multiple intelligences*. New York: Basic Books.

GARDNER, H. (1993). *Multiple Intelligences: the theory in practice*. New York: Basic Books.

GARDNER, H. (1999). *Dimenze myšlení*. Praha: Portál, 1999. ISBN 80-7178-279-3.

GARNIER, R. - TAYLOR, J. (1996): *100% Mathematical Proof*. Wiley, Chichester, UK, 1996, vii+317pp. ISBN 0-471-96199-X.

GAWLICK, T. (2002). *On Dynamic Geometry Software in the regular classroom*. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. 34. 85-92. 10.1007/BF02655711.

GUILFORD, J. P. (1967). *Creativity: Yesterday, today, and tomorrow*. The Journal of Creative Behavior, 1(1), 3–14. https://doi.org/10.1002/j.2162-6057.1967.tb00002.x.

GUTTMAN, R. - EPSTEIN, E.E. - AMIR, M. - GUTTMAN, L. (1990). *A Structural Theory of Spatial Abilities*. Hebrew University of Jerusalem, Applied Psychological Measurement. 14(3), 217-236.

GUZMAN, M. (2002*). The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis*. Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate Level) Hersonissos, Crete, Greece (ERIC doc SE 066 909).

HANNA, G. - BARBEAU, E. (2006). Proof in Mathematics. [online]. Dostumné z: http://www.math.toronto.ca/barbeau/hannajoint.pdf.

HANNA, G. - DE VILLIERS, M. (2012). eds. Proof and proving in mathematics education: *Aspects of Proof in Mathematics Education*. The 19th ICMI Study. New York: Springer, 2012, ISBN 978-94-007-2128-9.

HANNA, G. - SIDOLI, N. (2007). *Visualisation and proof: A brief survey of philosophical perspectives*. ZDM. 39. 73-78. 10.1007/s11858-006-0005-0.

HEGARTY, M. (2004). *Dynamic visualizations and learning: getting to the difficult questions*. *Learning and Instruction*, *14*(3), 343–351. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.007.

HLÁVÁČEK, L. (2012). *Statická a dynamická vizualizace ve výuce fyziologie*. [online]. Disertační práce. Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta. Dostupné z: https://theses.cz/id/rcfydk/.

HERSHKOWITZ, R. – ARCAVI, A. - BRUCKHEIMER, M. (2001). *"Reflections on the status and nature of visual reasoning - The case of the matches"*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 32(2), 255-265.

HLINĚNÝ, P. (2010). *Úvod do Informatiky 2010*. Výukový text pro předmět Úvod do Informatiky na FI MU Brno. Dostupné z: https://is.muni.cz/do/1499/el/estud/fi/js10/uinf/web/UInf-text10.pdf

HUDECOVÁ, D. (2004). *Revize Bloomovy taxonomie edukačních cílů*. Pedagogika, roč. LIV, č. 3. S. 277–278.

HULL, A. N., - BROVEY, A. J. (2004).*The impact of the use of dynamic geometry software on student achievement and attitudes towards mathematics*. Action Research Exchange, 3(1), 24-37.

IBM (2019). Dostupné z: https://www.ibm.com/cz-en/analytics/spss-statistics-software.

ISIKSAL, M. - AŞKAR, P. (2005). *The effect of spreadsheet and dynamic geometry software on the achievement and self-efficacy of 7th-grade students*. Educational Research - EDUC RES. 47. 333-350. 10.1080/00131880500287815.

JONES, A. (2011). *Ancient Coinage*. [online]. Historic mysteries. 2011. Dostupné z: http://historicmysteries.com/ancient-coinage.

KELLEY, T. L. (1928). *Crossroads in the mind of man: A study of differentiable mental abilities*. Stanford University Press. https://doi.org/10.1037/11206-000.

KILIC, H. (2013): *The effects of dynamic geometry software on learning geometry*. Proceedings from CERME 8: The 8th European Society for Research in Mathematics Education Conference. Antalya, Turkey.

KNILL, O. - SLAVKOVSKY, E. (2013). *Illustrating Mathematics using 3D Printers*. [online]. Dostupné z: http://arxiv.org/abs/1306.5599.

KOPKA, J. (2013). *Umění řešit matematické problémy*. 1. vyd. Praha: HAV, 2013. 212 s. ISBN 978-80-903625-5-0 (brož.) il.

KOSSLYN, S. M. (1980). *Image and Mind*. Harvard University Press, 1980. Cambridge (MA).

KOSTROMINA, S. - GNEDYKH, D. (2015). *Type of visualization and quality of digest ion of educational information by students*. Procedia – Soc. Behav. Sci. 171, 340–349.

KULIČ, V. (1971). *Chyba a učení: funkce chybného výkonu v učení a v jeho řízení*. Praha: SPN, 244s. ISBN 14-299-71.

KUŘINA, F. (1990). *Umění vidět v matematice*. Praha: SPN. Odborná literatura pro učitele. ISBN 80-04-23753-3. Dostupné z: http://www.digitalniknihovna.cz/mzk/uuid/uuid:57250590-b2f2-11e2-8b87-005056827e51.

KUŘINA, F. (2016). *Matematika jako pedagogický problem: mé didaktické krédo*. Hradec Králové: Gaudeamus. ISBN: 978-80-7435-644-5.

KUŘINA, F. (2017). *Chyby, omyly a matematika*. MATEMATIKA–FYZIKA–INFORMATIKA. 26.3: 174–184.

KÜHL, T. - SCHEITER, K. - GERJETS, P. - GEMBALLA, S. (2011). *Can differences in learning strategies explain the benefits of learning from static and dynamic visualizations?*. Computers & Education, 56(1), 176–187. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2010.08.008.

KÜHL, T. - SCHEITER, K. - GERGETS, P. - EDELMANN, J. (2011). *The Influence of Text Modality on Learning with Static and Dynamic Visualizations*. Computers in Human Behaviour, Vol. 27, pp. 27-35. ISSN 0747-5632.

LAJČIAKOVÁ, P. - TABAČKOVÁ, K. (2010). *Ako spracovať výskum: Manuál pre študentov psychológie*. Vydanie prvé. Ružomberok: Verbum. ISBN 978-80-8084-537-7.

LEE, J. K. (2002). *Philosophical perspectives on proof in mathematics education*. Philosophy of Mathematics Education Journal 16.

LIN, C-Y. (2008). *Beliefs about Using Technology in the Mathematics Classroom: Interviews with Pre Service Elementary Teachers*. Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 4 (2), 135-142.

LITZINGER, T. A. - LEE, S. H. - WISE, J.C. - FELDER, R.M. (2007). *A Psychometric Study of the Index of Learning Styles©*. Journal of Engineering Education. 96(4), s.309-319. https://doi.org/10.1002/j.2168-9830.2007.tb00941.x.

MACKINTOSH, J. (2000). *IQ a inteligence*. Přeložil Petr HURTÍK. Praha: Grada Publishing, ISBN 80-7169-948-9.

MAŇÁK, J. - ŠVEC, Š. - ŠVEC, V. (2005). *Slovník pedagogické metodologie*. Brno 2005. ISBN 80-210-3802-2.

MAREŠ, J. (1994). *Diagnostika stylu učení na počátku vysokoškolského studia*. Školský psycholog 1994 (3–4): s. 2–10. ISSN 1212-0529.

MAREŠ, M. - VALLA, T. (2007): *Průvodce labyrintem algoritmů*. První vydání, Praha 2007, EDICE: CZ.NIC, ISBN 978-80-88168-22-5. Dostupné z: https://knihy.nic.cz/files/edice/pruvodce_labyrintem_algoritmu.pdf.

MAREŠ, P. - RABUŠIC, L. - SOUKUP, P. (2015). *Analýza sociálněvědních dat (nejen) v SPSS.* 1. Vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2015. ISBN 978-80-210-6362-4.

MARRADES, R. - GUTIERREZ, A. (2000): *Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment*. Educational Studies in Mathematics. 44. 87-125. 10.1023/A:1012785106627.

MATOUSEK, J. - NEŠETŘIL, J. (2009). *Invitation to Discrete Mathematics.* (2. ed.). Oxford University Press 2009, ISBN 978-0-19-857042-4, pp. I-XVII, 1-443.

MAYER, R. E. - CHANDLER, P. (2001). *When Learning is just a Click Away: does Simple User Interaction foster Deeper Understanding of Multimedia Messages?*. Journal of Educational Psychology. *93*(2), 390–397. https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.2.390.

MAYER, J.D. - SALOVEY, P. - CARUSO, D.R. - SITARENIOS, G. (2003). *Measuring emotional intelligence with the MSCEIT V 2.0.* Emotion. 3(1), 97–105. https://doi.org/10.1037/1528-3542.3.1.97.

MILKOVÁ, E. (2013). *Teorie grafů a grafové algoritmy*. Gaudeamus. Hradec Králové. ISBN 978-80-7435-267-6.

MILKOVÁ E. - ŠEVČÍKOVÁ A. (2016). *Deeper insight into graph theory using multimedia applications.* International journal of circuits, systems and signal processing. 10(2016), s. 448 - 454. ISSN 1998-4464.

MILKOVÁ E. - ŠEVČÍKOVÁ A. (2017). *Algorithmic thinking and mathematical competences supported via entertaining problems*. International journal of education and information technologies. 2017, 11(2017), s. 80-86. ISSN 2074-1316.

MOHLER, J., (2008). *A review of spatial ability research*. Engineering Design Graphics Journal. 72. 19-30.

MYSLÍN, J. (1999). *"Matematický důkaz je věčná jistota."* Věda.[online] Dostupné z: http: //vtm.e15.cz/matematicky-dukaz-je-vecna-jistota.

NELSEN, R. B. (1993). *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*. The Mathematical Association of America, 1993. ISBN 0-88385-700-6.

NELSEN, R. B. (2001). *Proofs without Words II: More Exercises in Visual Thinking*. The Mathematical Association of America, 2001. ISBN 0-88385-721-9.

ODCHÁZELOVÁ, T. (2014). *Role multimédií ve výuce přírodních věd*. Scientia in education, 2014, 5.2: 2-12.

OFFICE (2019). Dostupné z: https://products.office.com/cs-cz/excel.

PANDISCIO, E. A. (2002). *Exploring the Link Between Preservice Teachers' Conception of Proof and the Use of Dynamic Geometry Software*. School Science and Mathematics. 2002, vol. 201, no. 5.https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2002.tb18144.x.

PISA 2009: *Mezinárodní šetření PISA 2009*. Národní zpráva, Česká školní inspekce. Dostupné z: https://www.csicr.cz/.

PISA 2013: *Mezinárodní šetření PISA 2013*. Národní zpráva, Česká školní inspekce. Dostupné z: https://www.csicr.cz/.

PISA 2015: *Mezinárodní šetření PISA 2015*. Národní zpráva, Česká školní inspekce. Dostupné z: https://www.csicr.cz/.

PRESMEG, N. (2006). *Research on visualization in learning and teaching mathematics*. Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future. (pp. 205-236).

RIMANČÍK, M. (2007). *Štatistika pre prax*. 200 s. ISBN 978-80-969813-1-1.

ROBOVÁ, J. (2013). *Role programů dynamické geometrie při objevování a dokazování hypotéz*. Sborník příspěvků 6. konference Užití počítačů ve výuce matematiky. Katedra matematiky, Pedagogická fakulta Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. 2013.

ROTA, G. (1997): *The Phenomenology of Mathematical Proof*. Synthese, 111(2), 183-196. Retrieved February 4, 2020, from www.jstor.org/stable/20117627.

RVP (2007). *Rámcový vzdělávácí program pro gymnázia*. [online] Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 100 s. ISBN 978-80-87000-11-3. Dostupné z: http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPG-2007-07_final.pdf.

SARRACCO, L. (2005): *The Effects of Using Dynamic Geometry Software in the Middle School Classroom*. EDT 896 Research Report, Iona College, NY.

SBÍRKA ZÁKONU ČR (1961): Dostupné z: https://www.zakonyprolidi.cz/cs/1961-141.

SEIDLEROVÁ, L. (2006). *Kolbův učební cyklus*. Semestrální práce. Ostravská univerzita, Pedagogická fakulta. Cit. 18. 6. 2006.

SENK, S. L. (1985). *How well do students write geometry proofs?*. Mathematics teacher, 78, 448-456.

SHEPARD R.N. - COOPER L.A. (1982). *Mental Images and Their Transformations*. MIT Press 1982, Cambridge (MA).

SKALKOVÁ, J. (1999). *Obecná didaktika*. Praha: ISV, 1999. Pedagogika. ISBN 80-85866-33-1. s. 162.

SKOŘEPA, T. (2018). *Vizuální podpora výuky předmětu zabývajících se teorií grafů a grafovými algoritmy*. Hradec Králové, 2018. Diplomová práce. Univerzita Hradec Králové.

SMARTICK (2020). *Different Methods of Multiplication*. © 2020 Smartick Intl. Dostupné z: https://www.smartickmethod.com/blog/math/operations-and-algebraic-thinking/mutiplication/different-methods-multiplication/.

SOKOL, J. (2010). *Malá filosofie člověka*. Slovník filosofických pojmů. 6. vyd. Vyšehrad, Praha 2010. 364 str. ISBN 978-80-7429-056-5.

SPEARMAN, C. (1925). *Some Issues in the Theory of "g" (including the Law of Diminishing Returns). Nature* 116, 436–439. https://doi.org/10.1038/116436a0.

STERNBERG, R. (2002). *Kognitivní psychologie*. Praha: Portál, 2002. ISBN 80-7178-376-5.

SVOBODA, M. (1999). *Psychologická diagnostika dospělých*. Praha: Portál, 1999. ISBN 80-7367-050-X.

SVOBODA, M. - KREJČÍŘOVÁ, D. - VÁGNEROVÁ, M. (2009). *Psychodiagnostika dětí a dospívajících.* Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-566-0.

SUMMA, D. J. (1981). *The effect of proof format, problem structure, and the type of given information on achievement and efficiency in geometric proof*. Dissertation Abstracts International, 42, 3084A.

ŠEVČÍKOVÁ, A. (2017). *Vliv vizuální reprezentace důkazů matematických vět na jejich srozumitelnost.* In: Information and Communication Technology in Education, PhD Section (ICTE 2017). Ostrava, Czech Republic, s. 41 – 55. ISBN: 978-80-7464-939-4.

ŠEVČÍKOVÁ, A. - MILKOVÁ, E. (2016). *Multimedia Applications: Graph Algorithms visualization*. In: PROCEEDINGS. Budapešť: IEEE, 345 E 47TH ST, NEW YORK, NY 10017 USA, s. 231-236. ISBN 978-1-5090-3909-8.

ŠEVČÍKOVÁ A. - MILKOVÁ E. (2018). *Visual representation of proofs in graph theory*. International journal of education and information technologies. 2018, 12 (Winter), s. 99-104. ISSN 2074-1316.

ŠEVČÍKOVÁ, A. - MILKOVÁ, E. - PEKÁRKOVÁ, S. (2017). *Visualization as a convenient tool to support the teaching of mathematical proofs*. In: International conference on Education and educational psychology (ICEEPSY 2017). London: Future science, s. 599-608.

ŠTRAUSOVÁ, I. (2012). *Vizuální důkazy ve výuce matematiky*. South Bohemia Mathematical Letters, Volume 20, No. 1, 48–56.

ŠŤASTNÁ, M. (2017). *Vizuální podpora výuky předmětu zabývajících se teorií grafů a grafovými algoritmy*. Hradec Králové, 2017. Diplomová práce. Univerzita Hradec Králové.

THE NEW MEDIA CONSORTIUM (2014): *THE NMC HORIZONT REPORT: 2014*. [online]. Dostupné z: http://www.nmc.org/nmc-horizont/.

THURSTONE, L. L. (1950). *Some Primary Mental Abilities in Visual Thinking*. Psychometric Laboratory Report No. 59. Chicago : The University of Chicago.

UGUREL, I. - MORALI, H. S. - KARAHAN, O. - BOZ, B. (2016): *Mathematically gifted high school students' approaches to developing visual proofs (VP) and preliminary ideas about VP*. International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology, 4(3), 174-197. doi:10.18404/ijemst.61686.

ZIMMERMANN, W. – CUNNINGHAM, S. (1991). Visualization in teaching and learning mathematics. Mathematical Association of America, USA.

WILLIAMS, E. R. (1979). *An investigation of senior high school students' understanding of the nature of mathematical proof*. Unpublished doctoral dissertation, University of Alberta, Edmonton, AB.

9 Seznam obrázků

10 Seznam grafů

11 Seznam tabulek

12 Přílohy

Příloha A Pre-test

Jméno a příjmení:……………………….

Instrukce: Pre-test obsahuje různé typy úloh: v úloze 1-7 označte vybrané možnosti křížkem. Správných řešení může být víc. V úloze 8 sestavte negace k daným výrokům. U úloh 9 a 10 napište důkaz tvrzení.

1. Za ***výrok*** lze považovat větu:
   - ☐ Hradcem Králové protéká řeka Labe.
   - ☐ V kolik hodin odjíždí autobus z Pardubic do Prahy?
   - ☐ Posaďte se prosím!
2. Za ***výrok*** lze považovat zápis:
   - ☐ 8 + 5 = 15
   - ☐ x + 4 = 4
   - ☐ 10 + 5 = 15
3. Uvažujme výrok: „Vitana je českým výrobcem potravinářských výrobků.“
   Jeho ***negací*** je výrok:
   - ☐ Vitana není českým výrobcem potravinářských doplňků.
   - ☐ Není pravda, že Vitana je českým výrobcem potravinářských výrobků.
   - ☐ Vitana je německým výrobcem potravinářských výrobků.
4. Mějme dva výroky:
   „ V Berouně prší.“
   „Hladina Berounky v Berouně stoupá.“

   Za spojení výše uvedených výroků pomocí ***implikace*** lze považovat výrok:
   - ☐ Jestliže v Berouně prší, pak hladina Berounky v Berouně stoupá.
   - ☐ V Berouně prší a hladina Berounky v Berouně stoupá.
   - ☐ V Berouně prší, z toho plyne, že hladina Berounky v Berouně stoupá.
   - ☐ V Berouně prší právě tehdy, když hladina Berounky v Berouně stoupá.
5. Mějme dva výroky:
   „ Do Prahy pojede Alena.“
   „Do Prahy pojede Jana.“

   Za spojení výše uvedených výroků pomocí ***ekvivalence*** lze považovat výrok:
   - ☐ Do Prahy pojede Alena a současně Jana.
   - ☐ Do Prahy pojede Alena nebo Jana.
   - ☐ Do Prahy pojede Alena právě tehdy, když do Prahy pojede Jana.
   - ☐ Jestliže do Prahy pojede Alena, pak do Prahy pojede Jana.

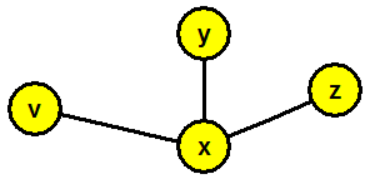
6. Uvažujme výrok: „Číslo x je sudé a číslo y je dělitelné šesti." Jeho ***negací*** je výrok:
   - ☐ Číslo x je sudé a číslo y není dělitelné šesti.
   - ☐ Číslo x není sudé a číslo y není dělitelné šesti.
   - ☐ Číslo x není sudé nebo číslo y je dělitelné šesti.
   - ☐ Číslo x není sudé nebo číslo y není dělitelné šesti.
7. Uvažujme výrok: „Jestliže číslo x je dělitelné šesti, pak číslo x je sudé."
   Určete ***ekvivalentní*** výrok:
   - ☐ Jestliže číslo x není dělitelné šesti, pak číslo x není sudé.
   - ☐ Jestliže číslo x není sudé, pak číslo x není dělitelné šesti.
   - ☐ Jestliže číslo x je sudé, pak číslo x je dělitelné šesti.
8. **Negujte** výroky:
   a. Žádný maturant nepropadl.
   b. Každý student je pilný.
   c. Alespoň dva studenti dostali vyznamenání.
   d. Nejvýše dva studenti propadli.
   e. Daná rovnice má právě dva reálné kořeny.
   f. Daná rovnice nemá žádný nulový a žádný záporný kořen.
   g. Petr přijde právě tehdy, když přijde Zdeněk.
9. Dokažte, že sečteme-li dvě lichá čísla a, b, získáme jako součet s, číslo sudé.
10. Dokažte, že platí: $x+\frac{1}{x}\geq 2$ pro každé kladné x.

Příloha B **Post-test**

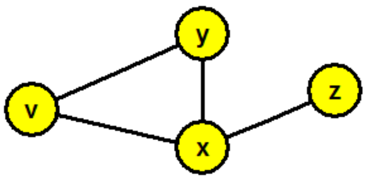
Jméno a příjmení:……………………………….

Instrukce: Post-test obsahuje různé typy úloh: v úloze 1-7 označte vybrané možnosti křížkem. Správných řešení může být víc. V úloze 8 sestavte negace k daným výrokům. U úloh 9 a 10 napište důkaz tvrzení.

G:



H:



1. Za *výrok* lze považovat větu:
   - ☐ Stupeň vrcholu *x* v grafu *G* je 3.
   - ☐ Je graf eulerovský?
   - ☐ Nakreslete eulerovský graf.

2. Za *výrok* lze považovat zápis:
   - ☐ $G = (V, E)$
   - ☐ $G(V,E) \cong H\,(V',E')$
   - ☐ $\deg_G y = 3$

3. Uvažujme výrok: „Graf *G* je souvislý.“ Jeho *negací* je výrok:
   - ☐ Graf *G* není souvislý.
   - ☐ Není pravda, že graf *G* je souvislý.
   - ☐ Graf *G* má dvě komponenty souvislosti.

4. Mějme dva výroky:

   „Graf *G* je souvislý.“

   „Graf *G* obsahuje kostru grafu.“

   Za spojení výše uvedených výroků pomocí *implikace* lze považovat výrok:
   - ☐ Jestliže graf G je souvislý, pak graf *G* obsahuje kostru.
   - ☐ Graf *G* je souvislý a graf *G* obsahuje kostru grafu.
   - ☐ Graf *G* je souvislý, z toho plyne, graf *G* obsahuje kostru grafu.
   - ☐ Graf *G* je souvislý právě tehdy, když graf *G* obsahuje kostru grafu.

5. Mějme dva výroky:

   „Graf je bipartitní.“

   „Graf *G* neobsahuje kružnici liché délky.“

   Za spojení výše uvedených výroků pomocí *ekvivalence* lze považovat výrok:
   - ☐ Graf *G* je bipartitní a současně graf *G* neobsahuje kružnici liché délky.
   - ☐ Graf *G* je bipartitní nebo graf *G* neobsahuje kružnici liché délky.
   - ☐ Graf *G* je bipartitní právě tehdy, když graf *G* neobsahuje kružnici liché délky.
   - ☐ Jestliže graf *G* je bipartitní, pak graf *G* neobsahuje kružnici liché délky.

6. Uvažujme výrok: „$\forall$ *T* = (*V*,*E*): Jestliže *T* je strom, pak *T* je souvislý a každá jeho hrana je most. „ Jeho *negací* je výrok:
   - ☐ $\forall$ *T* = (*V*,*E*): *T* je strom a zároveň *T* není souvislý a existuje alespoň jedna hrana, která není most.
   - ☐ $\exists$ *T* = (*V*,*E*): *T* je strom a zároveň *T* není souvislý nebo každá hrana není most.
   - ☐ $\exists$ *T* = (*V*,*E*): *T* je strom a zároveň *T* není souvislý nebo existuje alespoň jedna hrana, která není most.
   - ☐ $\forall$ *T* = (*V*,*E*): *T* je strom a zároveň *T* není souvislý nebo existuje alespoň jedna hrana, která není most.

7. Uvažujme výrok: „$\forall$ *G* = (*V*,*E*): Jestliže *e* není most v *G*, pak v *G* existuje kružnice obsahující hranu *e*.“
   Určete *ekvivalentní výrok*:
   - ☐ $\forall$ *G* = (*V*,*E*): Jestliže *e* je most v *G*, pak v *G* neexistuje kružnice obsahující hranu *e*.
   - ☐ $\forall$ *G* = (*V*,*E*): Jestliže v *G* neexistuje kružnice obsahující hranu *e*, pak *e* je most v *G*.
   - ☐ $\exists$ *G* = (*V*,*E*): Jestliže v *G* neexistuje kružnice obsahující hranu *e*, pak *e* je most v *G*.

8. Negujte výroky:
   a. Žádná hrana není most.

   b. Každý vrchol je sudý.

   c. Alespoň dva vrcholy jsou sudé.

   d. Nejvýše dva vrcholy jsou izolované.

   e. Daný graf má právě dva vrcholy.

   f. Daný graf nemá žádný izolovaný vrchol a žádný lichý vrchol.

   g. V grafu G existuje cesta z vrcholu v do vrcholu w právě tehdy, když v grafu G existuje sled z vrcholu v do vrcholu w.

9. Vyvraťte tvrzení: $\forall G=(V,E)$: G je eulerovský $\Rightarrow$ každý vrchol grafu G leží na kružnici.

10. Dokažte následující větu:
    $\forall$G=(V,E): Jestliže graf má všechny vrcholy sudého stupně, pak v něm neexistuje most.

Index of Learning Styles Questionnaire

Richard M. Felder
Barbara A. Soloman

North Carolina State University

The location of this application has been changed. Please update your bookmark or link.

Privacy Policy:

Your response data and learning style profile are not stored or sent to anyone other than you. They cannot be recovered once you have submitted the completed form and received the results.

Vaše odpovědi a váš styl učení se nikde neukládají ani nikomu jinému než vám neposílají. Jakmile odešlete vyplněný formulář a obdržíte výsledky, nelze odpovědi obnovit.

Directions:

Please provide us with your first and last name, which will be printed on the report of results that will be returned to you. (Note the Privacy Policy above if you are concerned about confidentiality.) You may only choose one answer for each question, and you must answer all questions before you can submit the form. If both answers to a question seem to apply to you, choose the one that applies more frequently throughout all your courses. When you have selected answers to all 44 questions, click on the "Submit" button at the end of the form.

Uveďte prosím vaše celé jméno. Vaše jméno bude vytištěno na zpětné vazbě, která se Vám vrátí. Pro každou otázku můžete vybrat pouze jednu odpověď a před odesláním formuláře musíte odpovědět na všechny otázky. Pokud se vám zá, že se na vás vztahují obě odpovědi, vyberte tu, která platná častěji ve vašich kurzech. Pokud jste vybrali odpovědi na všech 44 otázek, klikněte na tlačítko „Odeslat“ na konci formuláře.

Full Name

1. I understand something better after I
   - try it out.
   - think it through.

   Chápu něco lépe poté co

   - *si to prakticky vyzkouším.*

- *si to nejprve promyslím.*

2. I would rather be considered
   - realistic.
   - innovative.

   Já bych se spíše považoval/la za

   - *realistu.*
   - *inovativní osobu.*

3. When I think about what I did yesterday, I am most likely to get
   - a picture.
   - words.

   Když jsem přemýšlel/la o tom, co jsem to udělal včera, pravděpodobně se mi vybaví

   - *obraz.*
   - *slova.*

4. I tend to
   - understand details of a subject but may be fuzzy about its overall structure.
   - understand the overall structure but may be fuzzy about details.

   Mám tendenci

   - *pochopit podrobnosti o předmětu, ale celková struktura může být rozmazaná.*
   - *pochopit celkovou strukturu, podrobnosti mohou být rozmazané.*

5. When I am learning something new, it helps me to
   - talk about it.
   - think about it.

   Když se učím něco nového, pomáhá mi

   - *o tom mluvit.*
   - *o tom přemýšlet.*

6. If I were a teacher, I would rather teach a course

- that deals with facts and real life situations.
- that deals with ideas and theories.

Kdybych byl učitelem, raději bych učil/la kurz,

- *který se zabývá fakty a reálnými životními situacemi.*
- *který se zabývá myšlenkami a teorií.*

7. I prefer to get new information in
   - pictures, diagrams, graphs, or maps.
   - written directions or verbal information.

Raději získávám nové informace z

- *fotografie, diagramu, grafu nebo mapy.*
- *písemných pokynů nebo ústní informace.*

8. Once I understand
   - all the parts, I understand the whole thing.
   - the whole thing, I see how the parts fit.

Když pochopím danou látku, pak

- *všechny části, chápu jak celek.*
- *celek vidím jako části, které do sebe zapadají.*

9. In a study group working on difficult material, I am more likely to
   - jump in and contribute ideas.
   - sit back and listen.

Ve studijní skupině pracují na náročnějším materiálu, jsem spíše

- *iniciátor a přispívám nápady.*
- *sedící a poslouchající.*

10. I find it easier
    - to learn facts.
    - to learn concepts.

Připadá mi to jednodušší

- *učit se fakta.*
- *učit se pojmy.*

11. In a book with lots of pictures and charts, I am likely to
    - look over the pictures and charts carefully.
    - focus on the written text.

V knize se spoustu obrázku a grafů si přednostně

- *prohlédnu obrázky a grafy pečlivě.*
- *prostuduji psaný text.*

12. When I solve math problems
    - I usually work my way to the solutions one step at a time.
    - I often just see the solutions but then have to struggle to figure out the steps to get to them.

Když řeším matematické problémy

- *obvykle pracují svým způsobem, krok za krokem.*
- *vidím konečné řešení, ale mám problém vidět jednotlivé kroky, které k němu vedou.*

13. In classes I have taken
    - I have usually gotten to know many of the students.
    - I have rarely gotten to know many of the students.

V hodinách, na které jsem zapsaný/ná

- *obvykle znám mnoho studentů.*
- *jen zřídka znám mnoho studentů.*

14. In reading nonfiction, I prefer
    - something that teaches me new facts or tells me how to do something.
    - something that gives me new ideas to think about.

Při čtení literatury faktů, dávám přednost

- *něčemu, co mě učí nové skutečnosti nebo mi říká, jak něco udělat.*
- *něčemu, co mi dává nové podněty k přemýšlení.*

15. I like teachers

- who put a lot of diagrams on the board.
- who spend a lot of time explaining.

Líbí se mi učitel,

- *který dává hodně diagramů na tabuli.*
- *který tráví mnoho času vysvětlováním.*

16. When I'm analyzing a story or a novel

- I think of the incidents and try to put them together to figure out the themes.
- I just know what the themes are when I finish reading and then I have to go back and find the incidents that demonstrate them.

Když analyzuji příběh nebo román

- *přemýšlím o událostech a snažím se předvídat témata.*
- *pochopím, o co jde, až když dokončím čtení, a pak se vracím k jednotlivým událostem.*

17. When I start a homework problem, I am more likely to

- start working on the solution immediately.
- try to fully understand the problem first.

Když mám domácí úkol, který je těžký, pravděpodobně

- *okamžitě začnu pracovat na řešení.*
- *nejprve se pokusím plně porozumět problému.*

18. I prefer the idea of

- certainty.
- theory.

Upřednostňuji myšlenku na

- *realitu.*
- *teorii.*

19. I remember best

- what I see.

- what I hear.

Pamatuji si nejlépe,

- *co vidím.*
- *co slyším.*

20. It is more important to me that an instructor
    - lay out the material in clear sequential steps.
    - give me an overall picture and relate the material to other subjects.

Je pro mě důležitější, když vyučující

- *vyloží látku v jasných postupných krocích.*
- *poskytne celkový obraz a další látky či subjekty, které se němu vztahují.*

21. I prefer to study
    - in a study group.
    - alone.

Raději studuji

- *ve studijní skupině.*
- *samostatně.*

22. I am more likely to be considered
    - careful about the details of my work.
    - creative about how to do my work.

Je pravděpodobnější, že budu považován za

- *studenta, který se soustředí na detaily své práce.*
- *studenta s kreativním přístupem k práci.*

23. When I get directions to a new place, I prefer
    - a map.
    - written directions.

Když dostanu instrukce, jak se dostat na neznáme místo, dávám přednost

- *mapě.*
- *písemným pokynům.*

24. I learn

- at a fairly regular pace. If I study hard, I'll "get it."
- in fits and starts. I'll be totally confused and then suddenly it all "clicks."

Učím se

- *poměrně pravidelným tempem. Pokud budu pilně studovat, pochopím látku.*
- *nárazově. Jsem naprosto zmatený, a pak mi to najednou všechno dojde.*

25. I would rather first

- try things out.
- think about how I'm going to do it.

Raději bych si nejprve

- *vše vyzkoušel.*
- *vše promyslel.*

26. When I am reading for enjoyment, I like writers to

- clearly say what they mean.
- say things in creative, interesting ways.

Když čtu pro zábavu, mám rád spisovatelé, kteří

- *jasně říkají, co si myslí.*
- *prezentují události kreativně, zajímavým způsobem.*

27. When I see a diagram or sketch in class, I am most likely to remember

- the picture.
- what the instructor said about it.

Když vidím schéma nebo nákres ve třídě, pravděpodobně si budu pamatovat

- *obraz.*
- *co o něm učitel řekl.*

28. When considering a body of information, I am more likely to

- ○ focus on details and miss the big picture.
- ○ try to understand the big picture before getting into the details.

Při zvažování podstaty informací, se spíše

- *soustředím na detaily a chybí mi celkový obraz.*
- *pokouším se pochopit celkový obraz, dříve než se dostanu k detailům.*

29. I more easily remember
    - ○ something I have done.
    - ○ something I have thought a lot about.

Já si snadněji zapamatuji

- *něco, co jsem udělal/la.*
- *něco, na co jsem usilovně myslel/la.*

30. When I have to perform a task, I prefer to
    - ○ master one way of doing it.
    - ○ come up with new ways of doing it.

Když mám prezentovat úkol, dávám přednost

- *jednomu způsobu, jak to udělat.*
- *novým způsobům, jak to dělat.*

31. When someone is showing me data, I prefer
    - ○ charts or graphs.
    - ○ text summarizing the results.

Když mi někdo ukazuje data, dávám přednost

- *tabulkám nebo grafům.*
- *textu shrnujícímu výsledky.*

32. When writing a paper, I am more likely to
    - ○ work on (think about or write) the beginning of the paper and progress forward.
    - ○ work on (think about or write) different parts of the paper and then order them.

Při psaní testu, spíše

- *pracuji na začátku testu a postupně pokračuji v logickém sledu.*
- *pracuje na různých částech testu a potom je logicky seřadím.*

33. When I have to work on a group project, I first want to

- have "group brainstorming" where everyone contributes ideas.
- brainstorm individually and then come together as a group to compare ideas.

Když pracuji na skupinovém projektu, nejprve chci

- *mít „skupinový brainstorming“, kde každý přispívá svými nápady.*
- *diskutovat individuálně, a pak společně jako skupina porovnat nápady.*

34. I consider it higher praise to call someone

- sensible.
- imaginative.

Domnívám se, že vyšší hodnotu má ten, kdo je

- *rozumný.*
- *nápaditý.*

35. When I meet people at a party, I am more likely to remember

- what they looked like.
- what they said about themselves.

Když potkám nové lidi na večírku, spíše si pamatuji

- *jak kdo vypadal.*
- *to, co o sobě řekli.*

36. When I am learning a new subject, I prefer to

- stay focused on that subject, learning as much about it as I can.
- try to make connections between that subject and related subjects.

Když se učím nové téma, dávám přednost

- *soustředěnému studiu, abych získal/la maximum informací o daném tématu.*
- *hledání propojení nové látky s příbuznými tématy.*

37. I am more likely to be considered
    - outgoing.
    - reserved.

Jsem spíše považován za

- *extroverta.*
- *introverta.*

38. I prefer courses that emphasize
    - concrete material (facts, data).
    - abstract material (concepts, theories).

Dávám přednost kurzům, které zdůrazňují

- *konkrétní údaje (skutečnosti, data).*
- *abstraktní údaje (koncepty, teorie).*

39. For entertainment, I would rather
    - watch television.
    - read a book.

Pro zábavu bych se raději

- *díval/la na televizi.*
- *četl/la knihu.*

40. Some teachers start their lectures with an outline of what they will cover. Such outlines are
    - somewhat helpful to me.
    - very helpful to me.

Někteří učitelé začínají své přednášky přehledem toho, čeho se bude hodina týkat. Tyto přehledy jsou pro mě

- *částečně užitečné.*
- *velmi užitečné.*

41. The idea of doing homework in groups, with one grade for the entire group,
    - appeals to me.

- does not appeal to me.

Myšlenka, že dělám domácí úkoly ve skupině s jednou známkou pro celou skupinu

- *mě odpuzuje.*
- *mi nevadí.*

42. When I am doing long calculations,
    - I tend to repeat all my steps and check my work carefully.
    - I find checking my work tiresome and have to force myself to do it.

Když dělám dlouhé výpočty,

- *mám tendenci opakovat a kontrolovat, zda svou práci dělám pečlivě.*
- *považuji kontrolu své práce za únavnou a musím se nutit, abych ji provedl.*

43. I tend to picture places I have been
    - easily and fairly accurately.
    - with difficulty and without much detail.

Mám sklon si vybavit si místa, kde jsem byl

- *snadno a poměrně přesně.*
- *s obtížemi a bez větších detailů.*

44. When solving problems in a group, I would be more likely to
    - think of the steps in the solutions process.
    - think of possible consequences or applications of the solution in a wide range of areas.

Při řešení problému ve skupině, se přikláním spíše k tomu, že

- *přemýšlím o jednotlivých krocích v procesu řešení.*
- *přemýšlím o možných důsledcích a způsobech využití tohoto řešení v širším měřítku.*

Univerzita Hradec Králové, FIM

Dotazník porozumění důkazům v předmětu DIMA

A. Ševčíková, 2015

Milí studenti, v rámci výzkumu *Vliv vizuální reprezentace důkazů matematických vět na jejich srozumitelnost* bych vás ráda požádala o vyplnění následujícího dotazníku. Vás postoj je velice důležitý, proto vás prosím o upřímné a pravdivé odpovědi. Dotazník je anonymní a všechny získané informace jsou důvěrné a budou sloužit jenom na vědecké účely. Předem Vám děkuji za váš čas a spolupráci.

Instrukce: Dotazník obsahuje různé typy otázek. Při většině z nich odpovězte označením vybrané možnosti křížkem. Když není uvedeno jinak, vyberte jenom jednu možnost. Při otevřených položkách máte možnost vyjádřit svůj vlastní názor.

1. **Vaše pohlaví:**

muž	
žena	

2. **Vaše nejvyšší dosažené vzdělání:**

Úplné střední všeobecné (gymnázium)	
Úplné střední odborné (průmyslovky a jiné)	
Vyšší odborné (nadstavba)	
Vysokoškolské bakalářské st.	
Vysokoškolské magisterské/inženýrské st.	
Jiné – napsat jaké	

3. **Kolik času jste věnovali zápočtovému projektu?**

0h (udělal ho zbytek skupiny)	
< 1 h	
1-2 h	
3-5 h	
6-10 h	
víc než jeden den (kolik?)	

4. **Co si myslíte o důležitosti důkazů?**

Důkazy nejsou důležité	
Důkazy jsou důležité, ale nezajímají mě (nebaví mě)	
Důkazy jsou důležité, ale nerozumím jim. Pro lepší pochopení nic nedělám.	
Důkazy jsou důležité, nerozumím jim. Snažím se je chápat, dělám pro to něco.	
Důkazy jsou důležité, často je chápu.	
Jiné (popsat)	

5. **Probírali jste důkazy i v jiných kurzech? Když ano, napište, v kterých konkrétně.**

ne	
ano + konkrétní předměty	

6. **Rozuměli jste výkladu důkazů na přednáškách?**

Vůbec nerozuměl/la	
Rozuměl/la jsem 1/4	
Rozuměl/la jsem ¼ až ½	
Rozuměl/la jsem víc než ½	
Rozuměl/la jsem všem	
Jiné	

7. **Zabýváte se dokazováním i v rámci jiných předmětů na FIM UHK?**

Důkazy se zabývám jenom v rámci kurzu DIMA	
Důkazy se zabývám i v rámci jiných předmětů na FIM UHK	
Jiné	

8. **Označte možnost, týkající se vašeho učení se důkazů při přípravě na zkoušku:**

Stačil mi výklad na přednášce	
Stačil mi učební text, který jsem sám nastudoval	
Potřeboval jsem učební text i výklad na přednášce	
Jiné (popište v 9)	

9. **Popište jiné věci, o kterých si myslíte, že by vám pomohly lépe pochopit důkazy nebo byly nápomocné k přípravě na zkoušku:**

……

……

……

Za čas, který jste věnoval/la dotazníku a za vaše úpřimné odpevědi vám ještě jednou děkuji.

Tady je prostor pro váš případný komentář:

……

……

……

 Ukázka zápočtového testu

ZÁPOČTOVÝ TEST - DIMA, VERZE 01

pro vyučujícího

POČET BODŮ (15b MAXIMUM, 9b STAČÍ):

pro studenty

PŘÍJMENÍ A JMÉNO: .... POČET LISTŮ:

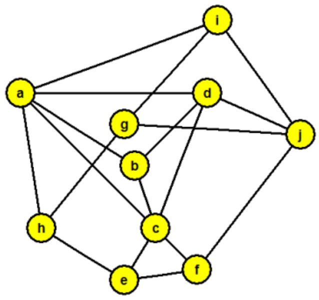
1. Znegujte následující výrok: (2b)
   $\forall_{T=(V,E)}$ Jestliže *T* je strom, pak *T* je souvislý a každá jeho hrana je most.

2. Vyvraťte následující výrok: (2b)
   $\forall_{G=(V,E)}$ *G* neobsahuje most $\Rightarrow$ *G* je hamiltonovský

3. Kolik hran má úplný bipartitní graf $K_{11,22}$? (2b)

4. Kolik je celkem indukovaných podgrafů s devíti vrcholy v K_{100}? (2b)

5. V *G* určete počet koster indukovaného podgrafu určeného vrcholy a, b, c, d, e, f . (2b)
   G:

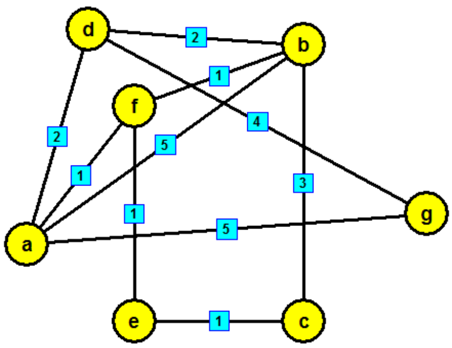


6. Nechť graf má *n* vrcholů, 5 vrcholů stupně 4, 4 vrcholy stupně 6 a ostatní vrcholy stupně 5, počet hran se rovná 42. **Kolik má graf vrcholů** (tj. čemu je rovno *n*)? (2b)

7. Turista si chce naplánovat trasu túry. Vybral si oblast s přírodními zajímavostmi, které se nachází na turistických chodnících. Pomozte naplánovat trasu pro turistu, když je to možné, aby viděl všechny přírodní zajímavosti (tj. prošel všechny chodníky) a prošel co nejméně kilometrů. Kolik km projde? (3b)

Úloha patří do oblasti: ....

Řešení:



Příloha F **Ukázka zkouškového testu**

DIMA - ZKOUŠKOVÝ TEST - teorie a aplikace, VERZE 01

pro vyučujícího

POČET BODŮ (18b MAXIMUM):

pro studenty

K úspěšnému napsání testu je zapotřebí získat minimálně 4,5 bodů z každé části.

PŘÍJMENÍ A JMÉNO: .... POČET LISTŮ:

Část A

1. Definujte následující pojmy

   a) Rovinný graf (1b)

   b) Hamiltonovská kružnice grafu (1b)

2. Doplňte následující definici: (1b)

   .... budeme nazývat graf $G' = (V', E')$, pro který $V' \subseteq V, E' \subseteq E$, přičemž $e' = (v, w) \in E'$ jenom když $v, w \in V'$; označujeme $G' \subseteq G$.

3. Rozhodněte, zda platí následující výrok: (2b)

   $\forall_{G=(V,E)}$: Jestliže graf obsahuje všechny vrcholy sudého stupně, pak je graf eulerovský

4. Znegujte následující výrok: (2b)

   $\forall_{G=(V,E)}$: Jestliže graf má všechny vrcholy sudého stupně, pak v něm neexistuje most

5. Dokažte následující větu nepřímo: (3b)

   $\forall_{G=(V,E)}$: Jestliže graf G = (V, E) je strom, pak pro každé dva vrcholy $x, y \in V$ existuje právě jedna cesta z vrcholu x do vrcholu y.

Část B

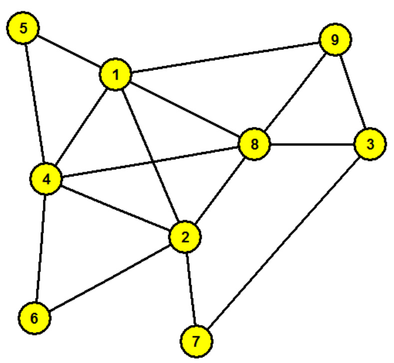
6. Kolik podgrafů na 8 vrcholech existuje v K_8? (2b)

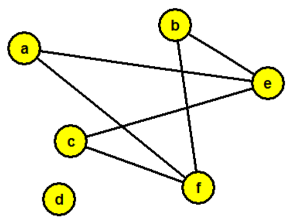
7. Nakreslete graf, který je hamiltonovský a není rovinný. (1b)

8. Určete, zda posloupnost (2,2,2,2,3,3,3,3,4) je skóre grafu. Když ano, nakreslete dva neizomorfní grafy. (2b)

9. V grafu *G* vyznačte podgraf izomorfní s **doplňkem** grafu *G′*. Doplněk nakreslete. (2b)

G: *G´:*





10. Ve fotbalovém turnaji hra 10 mužstev. Může nastat následovní situace? V určitém okamžiku má 6 mužstev po 4 odehraných zápasech, 2 mužstva má 3 odehrané zápasy a 2 mužstva mají 2 odehrané zápasy? (2b)
    a) Rozhodněte, do které oblasti teorie grafu patří úloha:
    b) Napište reprezentaci úlohy pomocí grafu (co reprezentuje vrchol, co hrana) a vyřešte ji: