UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

## Synchronizace robotů a další úlohy z pravděpodobnosti

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Vencálek Ondřej, Ph.D.**

Vypracovala: **Hana Krakovská**

Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika

Studijní obor: Matematika – ekonomie se zaměřením na bankovnictví

Forma studia: prezenční

Rok odevzdání: 2016

## BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

**Autor:** Hana Krakovská

**Název práce:** Synchronizace robotů a další úlohy z pravděpodobnosti

**Typ práce:** Bakalářská práce

**Pracoviště:** Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

**Vedoucí práce:** Mgr. Vencálek Ondřej, Ph.D.

**Rok obhajoby práce:** 2016

**Abstrakt:** Tato bakalářská práce se zabývá třemi problémy z oblasti kombinatoriky a teorie pravděpodobnosti. Prvním z nich je hod kostkou. Pokouší se zodpovědět otázky jako: ,,Kolik hodů kostkou je potřeba, aby na ní padla všechna čísla s pravděpodobností minimálně 0,9?“ apod. Další problém se týká hry pexesa. Práce poukazuje na výhody a nevýhody při hře způsobené tím, zda hráč hru začíná či nikoli. V poslední části práce rozebírá synchronizaci robotů, zaměřuje se na způsoby synchronizace, minimální i očekávaný počet kroků synchronizace a výpočty pravděpodobností, s jakými k jednotlivým krokům dochází. K výpočtům využívá také matic pravděpodobností přechodů. Hledá souvislosti mezi těmito třemi úlohami.

**Klíčová slova:** kombinatorika, pravděpodobnost, kostka, náhodná veličina, střední hodnota, modus, matice pravděpodobností přechodu, Markovův řetězec, Chapman - Kolmogorova rovnice, pexeso, průměr, synchronizace, roboti

**Počet stran:** 44

**Počet příloh:** 1 CD ROM

**Jazyk:** český

**BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION**

**Author:** Hana Krakovská

**Title:** Synchronisation of robots and some other probabilistic problems

**Type of thesis:** Bachelor's

**Department:** Department of Mathematical Analysis and Applications of Mathematics

**Supervisor:** Mgr. Vencálek Ondřej, Ph.D.

**The year of presentation:** 2016

**Abstract:** This bachelor thesis deals with 3 problems of combinatorics and probability theory. The first of them is the roll of a die. It attemps to answer questions like „How many throws are needed to get all numbers on a die, that the probability was at least 0,9?“ etc. Another problem relates to playing Pairs. Thesis points to advantages and disadvantages caused by the fact if the player starts the game or not. In the last part, it examines synchronization of robots, minimal and expected number of steps of synchronization and probability for these steps. It uses stochastic matrices for some calculations. It looks for connections between these three problems.

**Key words:** combinatorics, probability, die, random variable, expected value, mode, Stochastic matrix, Markov chain, Chapman – Kolmogorov equation, Pairs, mean, robots

**Number of pages**: 44

**Number of appendices:** 1 CD ROM

**Language:** Czech

**Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením pana Mgr. Ondřeje Vencálka, Ph.D., s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne …………………….. ……………………………….

podpis

## Poděkování

V první řadě bych ráda poděkovala svému vedoucímu bakalářské práce Mgr. Ondřeji Vencálkovi, Ph.D. a to jednak za svůj čas, který se mnou nad mou prací trávil a za jeho rady, které mi dával. Obrovské děkuji patří také mé rodině a přátelům, zejména pak mému příteli, který mě vždy uklidnil a dodal mi sílu práci dopsat.

# Obsah

# Úvod

S kombinatorikou a úvodem do pravděpodobnosti se mnozí z nás setkali již na základní škole formou jednoduchých slovních úloh. Mnohé z nich nevyžadovaly znalost žádných vzorců, pouze logickou úvahu. Na středních školách, zejména pak gymnáziích, jsme narazili na Pascalův trojúhelník a přes něj jsme se dostali k práci s kombinačními čísly a ke kombinatorickým pravidlům, pomocí nichž jsme pak byli schopni určit mimo jiné i pravděpodobnosti určitých jevů.

V této práci se budeme zabývat synchronizací robotů a dalšími úlohami z pravděpodobnosti.

Co se týče synchronizace robotů, budeme mít pět robotů s pěti různými časy 1, 2, 3, 4 a 5 a naším cílem bude provést jejich synchronizaci, tedy průměrovat jejich časy tak dlouho, dokud nebudou mít všichni roboti čas stejný, přičemž nebude záležet na tom, jaký čas to konkrétně bude. Robotům budeme sice časy průměrovat, ale nebude se jednat o klasický aritmetický průměr, jak ho známe z matematiky, nýbrž si zavedeme vlastní průměrování.

Asi každý z nás, ať už je to jakkoli dávno, hrál někdy pexeso. Mohlo se mu zdát, že je v nevýhodě kvůli tomu, že hru začínal nebo naopak proto, že hrál až jako druhý. Na tento problém se tedy podíváme blíže a zjistíme, který hráč má větší šanci na výhru, pokud hráči netaktizují.

Naším posledním problémem, přestože se jím práce bude zabývat hned na začátku, je hod kostkou. Budeme uvažovat klasickou kostku se šesti stěnami, s jedním až šesti puntíky (čísly 1 až 6), kde budou pravděpodobnosti dopadu na jednotlivé stěny stejné, tedy nebude se jednat o kostku falešnou. Budeme házet kostkou tak dlouho, dokud na ní nepadnou všechna čísla.

Náhodnou veličinou zde bude počet hodů, které budeme potřebovat k hození všech šesti čísel na kostce. Zkoumat budeme rozdělení této náhodné veličiny i její střední hodnotu. Střední hodnota je jakýmsi středem, kolem které budou realizace této náhodné veličiny kolísat.

Pokusíme se najít určitou spojitost mezi těmito třemi úlohami.

# 1 Hod kostkou

V této kapitole se budeme zabývat hodem kostkou. Naším cílem bude zjistit, kolik hodů budeme potřebovat pro hození všech šesti čísel na kostce. Využijeme zde výpočty pro modus a střední hodnotu, dále také základní kombinatorické vzorce, které posléze použijeme právě pro výpočet středních hodnot. Setkáme se zde také s Markovovými řetězci a maticemi pravděpodobností přechodu, díky nimž budeme schopni určit jednotlivé pravděpodobnosti přechodu z libovolného stavu do stavu toho samého nebo některého ze stavů následujících a to po n hodech. Pro lepší názornost nám poslouží grafy na konci kapitoly.

## 1.1 Zadání problému

Házíme kostkou. Kolikrát budeme muset kostkou hodit, abychom mohli s „jistotou“ říci, že už nám na ní padla všechna čísla?

Při hodně velkém štěstí nám může stačit 6 hodů. Pravděpodobnost takové situace vypočítáme jako podíl permutace a variací s opakováním, kdy tvoříme uspořádané šestice čísel od 1 do 6.

$$\boxed{\frac{P(6)}{V'(6,6)} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6^6} = \frac{20}{1296} = \frac{10}{648} \doteq 0{,}0154}$$

$P(6)$ ve výše zmíněném vzorci značí počet permutací šesti prvků bez opakování. Permutace je přitom chápána jako jedno ze všech možných uspořádání těchto šesti prvků, tzn., tvoříme uspořádané šestice ze šesti prvků, přičemž žádný z nich se zde nesmí opakovat, tedy, každý prvek použijeme právě jedenkrát. Počet permutací vypočítáme jako faktoriál čísla 6, tj. 6 - před prvním hodem máme celkem 6 možností čísel, které mohou na kostce padnout, po prvním hodu musí padnout už jen jedno ze zbylých pěti čísel, po druhém hodu ze zbylých čtyř atd. Celkový počet tedy určíme jako $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$.

$V'(6,6)$ je označení pro variace s opakováním, kdy tvoříme uspořádané šestice ze šesti prvků, přičemž se zde jednotlivé prvky mohou opakovat. Obecně, výpočet pro variace s opakováním, kdy tvoříme uspořádané $k$-tice z $n$ prvků vypadá takto: $V'(n,k) = n^k$, tedy, pro náš případ $V'(6,6) = 6^6$, protože po každém hodu kostkou máme stále 6 možností, které nám na kostce mohou padnout.

Pravděpodobnost, že při šesti hodech kostkou hodíme všech 6 čísel na kostce, je poměrně malá, budeme tedy nejspíše potřebovat 7 nebo více hodů. Zajímat nás bude zejména to, kolik hodů s největší pravděpodobností budeme potřebovat, což spočítáme pomocí vzorce pro *modus diskrétní náhodné veličiny*. Vyjdeme zde z definice převzaté z [1], přičemž se zde zaměříme pouze na část definice pro diskrétní náhodnou veličinu, která nám v tomto případě představuje počet hodů, které budeme potřebovat, tedy realizacemi této náhodné veličiny mohou být pouze celá čísla větší nebo rovna číslu 6.

**Definice 1.1:** *Modus diskrétní náhodné veličiny je taková hodnota $\hat{x}$, která pro všechny hodnoty $x_i$ náhodné veličiny X splňuje podmínku*

$$P[X = \hat{x}] \geq P[X = x_i]$$

## 1.2 Výpočet střední hodnoty

Nyní jsme tedy schopni určit nejpravděpodobnější počet hodů, zajímat nás ale také bude střední hodnota počtu hodů, která nám představuje jakýsi „střed“ celé skupiny těchto údajů, kolem kterého nám všechny hodnoty kolísají.

Střední hodnotu diskrétní náhodné veličiny definujeme v souladu se skripty [2] takto:

**Definice 1.2:** Nechť X je diskrétní náhodná veličina s rozdělením $\{x_n\}$, $\{p_n\}$.

Je-li

$$\sum_n |x_n| p_n = \sum_n |x_n| P(X = x_n) < \infty,$$

nazveme součet řady

$$\sum_n x_n\, p_n = \sum_n x_n\, P(X = x_n),$$

*střední hodnotou $E(X)$ náhodné veličiny $X$.* Pokud není uvedená podmínka splněna, řekneme, že náhodná veličina $X$ nemá střední hodnotu.

Náš výpočet tedy bude vypadat následovně:

$$\sum_{x=6}^{\infty} x \cdot P(X = x) = 6 \cdot \frac{P(6)}{V'(6,6)} + 7 \cdot \left( \frac{6 \cdot P(7)}{2 \cdot V'(7,6)} - \frac{P(6)}{V'(6,6)} \right) + \cdots$$

Je potřeba si ujasnit, jak jsme se k výpočtům pravděpodobností jednotlivých realizací náhodné veličiny dostali.

První sčítanec ze vzorce jsme si již vysvětlili výše a můžeme tedy přejít ke sčítanci druhému. Ovšem určit pravděpodobnost, že pro hození všech 6 čísel kostky budeme potřebovat právě 7 hodů už je o něco náročnější. Vyjdeme z pravděpodobnosti $P(X \leq 7)$ a od ní pak odečteme pravděpodobnost $P(X = 6)$. Nejdříve si tedy vysvětlíme, jak dospějeme ke vzorci pro pravděpodobnost $P(X \leq 7)$.

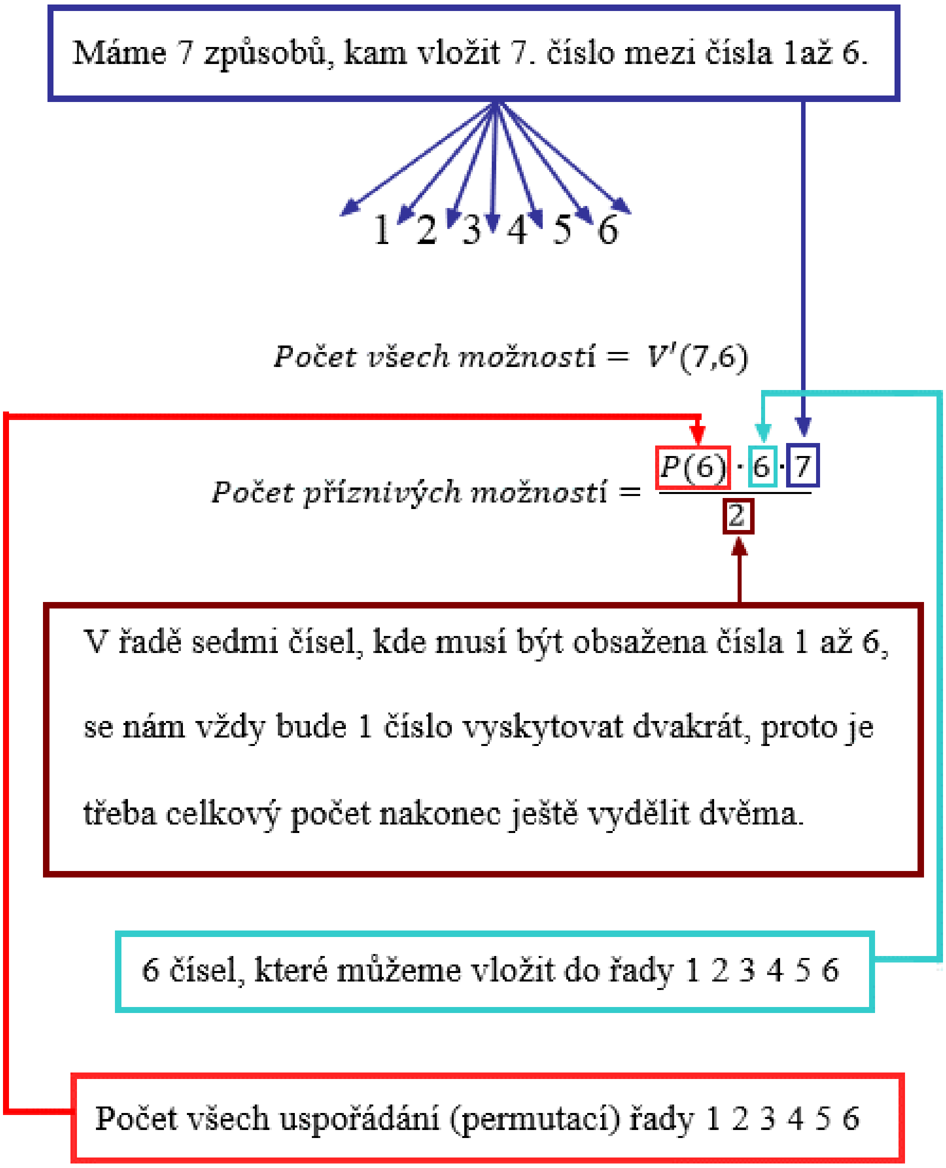
Budeme vytvářet řadu 7 číslic od 1 do 6, kde se jedna číslice objeví dvakrát. Lze to provést následujícím způsobem: Řada číslic od 1 do 6 lze napsat 6! způsoby. Do této řady budeme vkládat sedmou číslici, kterou můžeme vložit jednak do mezer mezi číslice anebo před, příp. za řadu těchto 6 číslic. Máme tedy celkem 7 způsobů, kde se může nacházet 7. číslice. Zároveň však můžeme vkládat do řady libovolné číslo od 1 do 6, proto je potřeba počet ještě vynásobit šesti. Jelikož se nám však budou v této řadě dvě číslice opakovat, je potřeba celkový součin podělit dvěma.

Vzorec potom vypadá takto: $\frac{6 \cdot P(7)}{2 \cdot V'(7,6)}$,

pričemž P (7) je permutace bez opakování

$V'(7,6)$ variace s opakováním, kdy tvoříme uspořádané sedmice z 6 čísel.

Obrázek 1 popisuje postup vcelku srozumitelně a neměl by tedy být problém mu zcela porozumět.



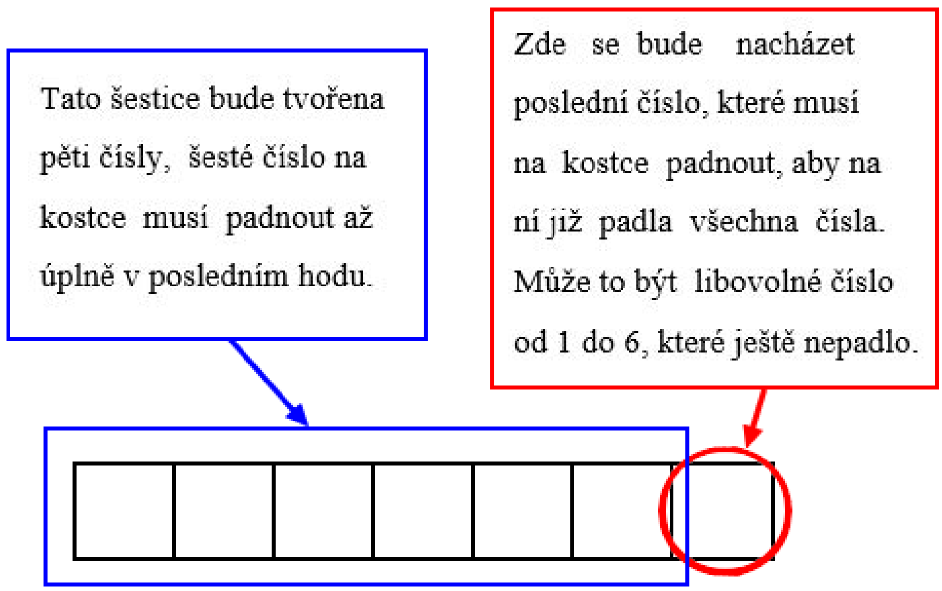

**Obrázek 1:** Postup výpočtu, že nám na kostce padne 6 čísel nejvýše po 7 hodech

Od našeho výpočtu teď ještě nesmíme zapomenout odečíst pravděpodobnost $P(X = 6)$, protože do vzorce pro střední hodnotu potřebujeme dosadit pravděpodobnost $P(X = 7)$.

Tato pravděpodobnost $P(X = 7)$ by šla spočítat i rovnou a to způsobem, který je také dále graficky znázorněn na Obrázku 2.

Máme v podstatě 7 pozic, kdy na každé pozici je číslo, které padlo na kostce. Poslední pozici si vyhradíme pro jedno číslo, které se jako jediné v řadě předchozích 6 číslic vyskytovat nebude, protože by to znamenalo ukončení házení kostkou po šesti hodech. Pro náš případ to tedy znamená, že budeme tvořit řadu šesti čísel tvořenou pěti čísly, kdy se v řadě bude jedno číslo opakovat dvakrát.

Počet takových řad určíme jako permutaci P (6), kterou vydělíme dvěma, protože se v řadě jedno číslo vyskytuje dvakrát a znamenalo by to tedy výskyt vždy dvou zcela totožných řad v celkovém počtu. Tento zlomek poté vynásobíme pěti, neboť máme 5 možností čísel, které se zde bude vyskytovat 2krát a následně ještě šesti kvůli číslu na poslední, tedy sedmé pozici, kterým je jedno ze 6 čísel kostky. Nás ale zajímá pravděpodobnost, proto součin vydělíme počtem všech možností, které mohou nastat, tedy $V'(7,6) = 6^7$. Výpočet tedy bude vypadat takto: $\frac{6 \cdot 5 \cdot P(6)}{2 \cdot V'(7,6)}$.




**Obrázek 2:** Postup výpočtu, že na kostce padne 6 čísel po 7 hodech

Můžeme ještě ověřit, že výsledek vyjde stejně jako výpočtem přes rozdíl, který jsme prováděli předtím.

$$\frac{6 \cdot P(7)}{2 \cdot V'(7,6)} - \frac{P(6)}{V'(6,6)} = \frac{6 \cdot 7!}{2 \cdot 6^7} - \frac{6!}{6^6} = \frac{7! - 2 \cdot 6!}{2 \cdot 6^6} = \frac{5 \cdot 6!}{2 \cdot 6^6}$$

Porovnáme s posledním naším výpočtem:

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot P(6)}{2 \cdot V'(7,6)} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 6!}{2 \cdot 6^7} = \frac{5 \cdot 6!}{2 \cdot 6^6}$$

Vzhledem k tomu, že má vzorec pro střední hodnotu uvedený výše nekonečně mnoho sčítanců, určíme si střední hodnotu počtu pokusů k hození 6 různých čísel, tj. $E(X_6)$, pomocí pomocných středních hodnot $E(X_1)$ až $E(X_5)$ a středních hodnot počtu pokusů nutných k 1. úspěšnému pokusu.

Např. střední hodnotu počtu pokusů k hození dvou různých čísel spočítáme takto:

$$\boxed{E(X_2) = E(X_1) + E(X_{\frac{5}{6}}) = 1 + \left(1 + \frac{1}{5}\right) = \frac{11}{5} = 2{,}2}$$

kde $E(X_{\frac{5}{6}})$ je střední hodnota počtu pokusů nutných k prvnímu úspěchu, kdy pravděpodobnost neúspěchu je rovna $\frac{1}{6}$.

Vyjdeme ze střední hodnoty náhodné veličiny, která bude představovat počet neúspěchů předcházejících prvnímu úspěchu, která má geometrické rozdělení, tedy její výpočet bude vypadat následovně:

$$X_{\frac{5}{6}} => \frac{1-p}{p} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{5}$$

Protože ale chceme střední hodnotu počtu pokusů nutných k prvnímu úspěchu, musíme ještě přičíst jedničku, která představuje právě ten první úspěch.

$$\boxed{\textit{střední počet pokusů nutných k } 1.\,\textit{úspěchu} = \textit{střední počet neúspěchů před } 1.\,\textit{úspěchem} + 1}$$

Postupně se tedy můžeme dopočítat až k $E(X_6)$:

$$E(X_3) = E(X_2) + E(X_{\frac{4}{6}}) = \frac{11}{5} + \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{37}{10} = 3{,}7$$

$$E(X_4) = E(X_3) + E(X_{\frac{3}{6}}) = 3{,}7 + (1 + 1) = 5{,}7$$

$$E(X_5) = E(X_4) + E(X_{\frac{2}{6}}) = 5{,}7 + (2 + 1) = 8{,}7$$

$$E(X_6) = E(X_5) + E(X_{\frac{1}{6}}) = 8{,}7 + (5 + 1) = 14{,}7$$

Střední počet pokusů, které potřebujeme k hození všech 6 čísel na kostce je 14,7.

Také nás ale budou zajímat pravděpodobnosti, že do určitého počtu hodů už na kostce padla všechna čísla. Jsou to tedy ty pravděpodobnosti, které bychom použili ve výpočtu pro střední hodnotu uvedeného výše. Nicméně, jak už jsme zjistili, výpočet nebyl snadný ani pro 7 hodů, natož tak pro více, proto je budeme počítat jiným způsobem a to přes matice pravděpodobností přechodu, díky nimž potom také budeme schopni z jednoho z grafů si ověřit námi již spočtenou střední hodnotu $E(X_6)$.

Stav hry popíšeme číslem, které vyjadřuje, kolik už padlo různých čísel na kostce, tj. 0, 1, 2, 3, 4, 5 nebo 6, což budou představovat jednotlivé řádky a sloupce matice, tzn., že se bude jednat o čtvercovou matici typu 7×7, která bude tvořena pravděpodobnostmi přechodu z nějakého stavu m do stavů stejných nebo některých následujících.

Využijeme tedy zde matice pravděpodobností přechodu po 1 až n hodech a naším cílem bude zjistit n, které bude představovat počet hodů kostkou, kdy pravděpodobnost, kdy se dostaneme ze stavu 0 do stavu 6 bude alespoň 0,9.

## 1.3 Matice pravděpodobností přechodu

Na obrázku 2 máme matici pravděpodobností přechodu po 1 hodu kostkou. Prázdná políčka v tabulce (matici) představují nulové hodnoty a v tomto případě jsou nenulové hodnoty soustředěny pouze na a vedle hlavní diagonály, jelikož se po jednom hodu kostkou nemůžeme dostat ze stavu m do jiného stavu než je ten samý nebo stav po něm následující, tj. m+1.

Např. přechod ze stavu 2 do stavu 2 znázorňuje situaci, kdy jsme již hodili na kostce 2 čísla a opět hodíme některé ze dvou již hozených. Takovou pravděpodobnost lehce určíme – hodili jsme již 2 čísla a zbývá hodit 4. Pravděpodobnost, že hodíme opět jedno ze 2 čísel je rovna $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Logicky potom bude platit, že pro přechod ze stavu 2 do stavu 3 bude pravděpodobnost rovna $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Pravděpodobnosti přechodu ze stavu 0 do stavu 1 a také ze stavu 6 do stavu 6 jsou rovny jedné, neboť pokud jsme ještě nehodili žádné číslo a hodíme jednou kostkou je jasné, že nějaké číslo padne a podobně, pokud jsme již hodili na kostce všechna čísla a hodíme opět kostkou, nemůže již padnout žádné nové číslo, protože kostka jich více nemá.

| | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | | 1 | | | | | |
| **1** | | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{6}$ | | | | |
| **2** | | | $\frac{2}{6}$ | $\frac{4}{6}$ | | | |
| **3** | | | | $\frac{3}{6}$ | $\frac{3}{6}$ | | |
| **4** | | | | | $\frac{4}{6}$ | $\frac{2}{6}$ | |
| **5** | | | | | | $\frac{5}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |
| **6** | | | | | | | 1 |

**Tabulka 1**: Matice pravděpodobností přechodu po 1 hodu

Pravděpodobnosti přechodu přitom můžeme definovat podle [3] takto:

**Definice 1.3** Je-li *m* libovolné celé nezáporné číslo, nazýváme podmíněnou pravděpodobnost $p_{ij}^{(n)} = P(X_{m+n} = j | X_m = i), i, j \in S$, *pravděpodobností přechodu Markovova řetězce ze stavu i do stavu j za n kroků* (tzv. pravděpodobnost přechodu *n*-tého řádu).

Pro libovolné přirozené číslo $n$ a libovolná $i, j \in S$ platí vztahy

$$0 \leq p_{ij}^{(n)} \leq 1, \qquad \sum_{j \in S} p_{ij}^{(n)} = 1.$$

V definici jsme se setkali s pojmem Markovův řetězec, který v podstatě popisuje jakýsi bezpaměťový systém, tzn., že pravděpodobnosti přechodu v matici nezávisí na předchozích stavech, pouze na stavu současném.

Podle [3] můžeme Markovův řetězec definovat takto:

**Definice 1.4:** Řekneme, že posloupnost diskrétních náhodných veličin $\{X_n, n \in N_0\}$, které nabývají hodnot v množině S, tvoří Markovův řetězec s diskrétním časem, jestliže platí
$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$,
pro každé $n \in \{0,1, \dots\}$ a každé $i_0, i_1, \dots\ i_{n-1}, i, j \in S$ pro které

$$P(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) > 0$$

Bylo by ovšem velmi zdlouhavé počítat každou matici pravděpodobností přechodu zvlášť a proto zde využijeme Chapman - Kolmogorových rovností, které umožňují pomocí matice na obrázku 2 výše spočítat prvky matice pravděpodobností přechodu po 2, 3, až n hodech. Opět, věta je převzatá z [3]:

**Věta 1.1:** Pro libovolná nezáporná celá čísla $n, k$ a libovolné $i, j \in S$ platí

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{r \in S} p_{ir}^{(n)} p_{rj}$$

$$p_{ij}^{(n+k)} = \sum_{r \in S} p_{ir}^{(n)} p_{rj}^{(k)}$$

V tabulce 2 jsou zaznamenány pravděpodobnosti, že na kostce padnou všechna čísla po 1, 2 až 72 hodech kostkou. Je jasné, že pro 1 až 5 hodů bude pravděpodobnost rovna nule, neboť na kostce nemůže padnout 6 čísel při méně než 6 hodech. Od 23 hodů přitom pravděpodobnost překročila 0,9 a je tedy velmi pravděpodobné, že už na kostce padnou všechna čísla. Samozřejmě by tabulka mohla pokračovat donekonečna, neboť nikdy nebudeme mít 100% jistotu.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 19 | 0,818923077 | 37 | 0,992950421 | 55 | 0,999735042 |
| 2 | 0 | 20 | 0,847987541 | 38 | 0,994124588 | 56 | 0,999779201 |
| 3 | 0 | 21 | 0,872577485 | 39 | 0,995103314 | 57 | 0,999816 |
| 4 | 0 | 22 | 0,893316534 | 40 | 0,99591909 | 58 | 0,999846667 |
| 5 | 0 | 23 | 0,910764558 | 41 | 0,996599015 | 59 | 0,999872222 |
| 6 | 0,015432099 | 24 | 0,925415165 | 42 | 0,997165695 | 60 | 0,999893518 |
| 7 | 0,054012346 | 25 | 0,93769786 | 43 | 0,997637979 | 61 | 0,999911265 |
| 8 | 0,114026063 | 26 | 0,947982743 | 44 | 0,998031582 | 62 | 0,999926054 |
| 9 | 0,18904321 | 27 | 0,956586382 | 45 | 0,998359607 | 63 | 0,999938379 |
| 10 | 0,271812128 | 28 | 0,963778032 | 46 | 0,998632976 | 64 | 0,999948649 |
| 11 | 0,356206419 | 29 | 0,969785717 | 47 | 0,998860794 | 65 | 0,999957207 |
| 12 | 0,437815681 | 30 | 0,974801886 | 48 | 0,999050648 | 66 | 0,999964339 |
| 13 | 0,513858194 | 31 | 0,97898854 | 49 | 0,999208865 | 67 | 0,999970283 |
| 14 | 0,582845349 | 32 | 0,982481762 | 50 | 0,999340715 | 68 | 0,999975236 |
| 15 | 0,644212739 | 33 | 0,985395675 | 51 | 0,999450592 | 69 | 0,999979363 |
| 16 | 0,698004398 | 34 | 0,987825867 | 52 | 0,999542157 | 70 | 0,999982803 |
| 17 | 0,744632452 | 35 | 0,989852314 | 53 | 0,999618462 | 71 | 0,999985669 |
| 18 | 0,784707116 | 36 | 0,991541878 | 54 | 0,999682051 | 72 | 0,999988057 |

**Tabulka 2:** Pravděpodobnosti, že na kostce padnou všechna čísla nejvýše při určitém počtu hodů kostkou

**Poznámka 1.1:** Je důležité si uvědomit, že se jedná o kumulované součty, tedy pro již zmíněných 23hodů, kdy pravděpodobnost přesáhla 0,9 je uvedená pravděpodobnost pravděpodobností toho, že maximálně při 23 hodech padne všech 6 čísel. Pravděpodobnost jen pro 23 hodů bychom spočítali jako rozdíl pravděpodobnosti pro maximálně 23 a maximálně 22 hodů.

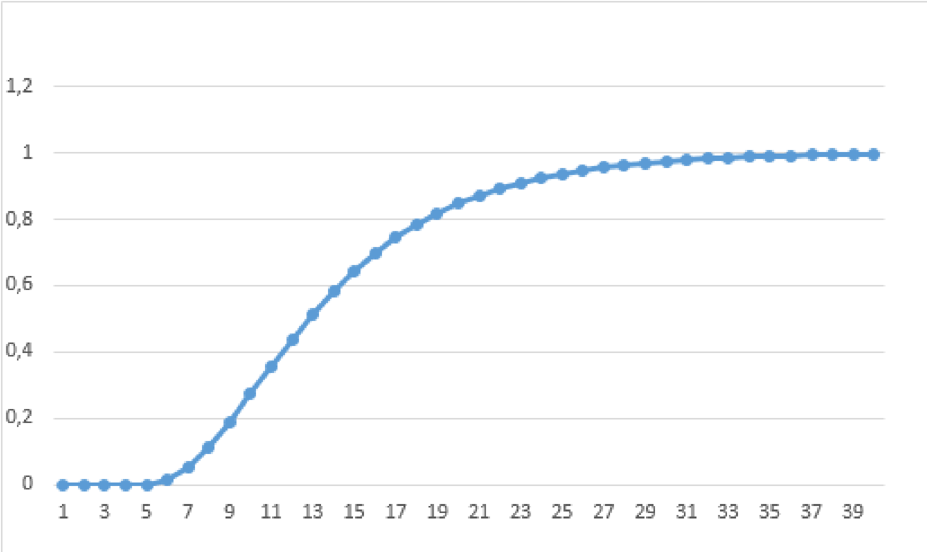
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 7,59753E-18 | 1,59332E-10 | 2,38355E-06 | 0,00132942 | 0,087904 | 0,910765 |
| 0 | 1,26626E-18 | 5,31106E-11 | 1,19188E-06 | 0,000887472 | 0,073696 | 0,925415 |
| 0 | 0 | 1,06221E-11 | 4,76795E-07 | 0,000533198 | 0,059312 | 0,940154 |
| 0 | 0 | 0 | 1,19209E-07 | 0,000266957 | 0,044751 | 0,954982 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 8,91048E-05 | 0,030012 | 0,969899 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,015095 | 0,984905 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

**Tabulka 3**: Matice pravděpodobností přechodu po 23 hodech kostkou

V Tabulce 3 vidíme ukázku jedné z matic, konkrétně matici pravděpodobností přechodu po 23 hodech kostkou, u které byla překročena pravděpodobnost 0,9.

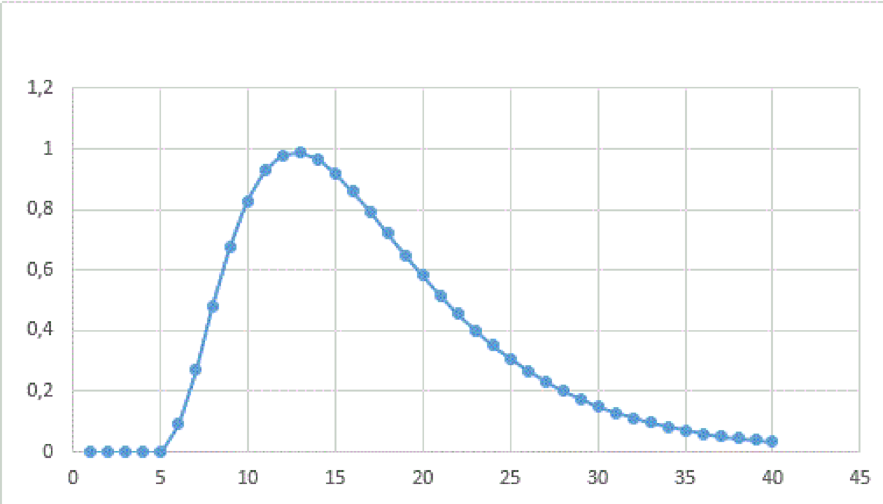
Nyní se vrátíme k Tabulce 2 a její jednotlivé pravděpodobnosti jsou vykresleny v následujícím spojnicovém grafu. Je jasné, že funkce musí být rostoucí a bude konvergovat k 1, kterou nepřekročí, tedy přímka y=1 bude asymptotou této funkce.

Graf na obrázku je spojnicový, nejedná se však o spojitou funkci, nýbrž o izolované body proložené křivkou. Uvažovaná náhodná veličina je tedy diskrétního typu.



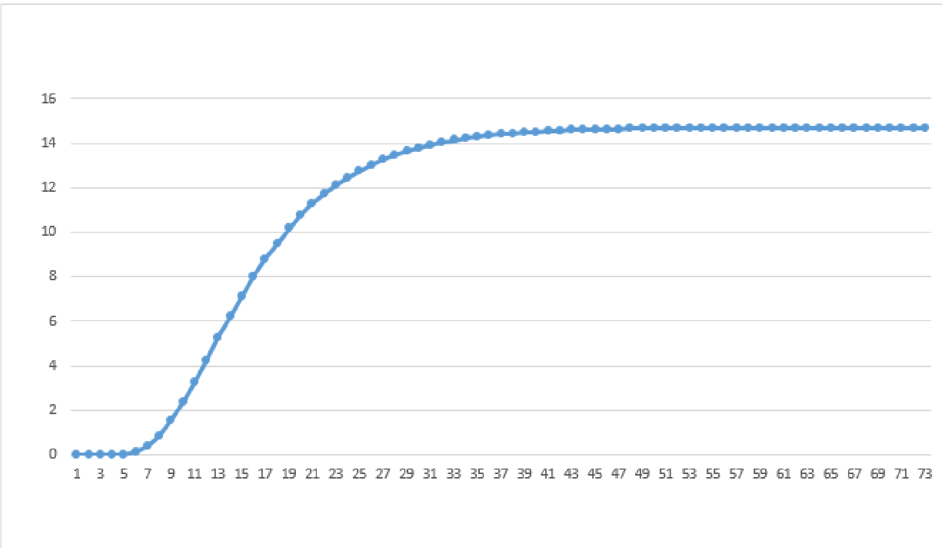

**Obrázek 4:** Spojnicový graf znázorňující pravděpodobnosti, že na kostce padnou všechna čísla maximálně po *n* hodech

V následujícím grafu máme vykresleny hodnoty pro součiny jednotlivých realizací náhodné veličiny a příslušných pravděpodobností, s nimiž k nim dojde. Jedná se tedy o jednotlivé sčítance ve vzorci pro střední hodnotu a z grafu lze vyčíst, jaký vliv budou mít na střední hodnotu. Svého maxima funkce nabývá kolem čísla 13 a od tohoto čísla hodnoty klesají. Přínos pro celkový součet je ovšem zatím poměrně velký, ale jak lze vidět z grafu, u čísla 40 už je hodnota rovna téměř nule a další hodnoty už nebudou mít téměř žádný přínos pro střední hodnotu, což si také můžeme všimnout potom na grafu střední hodnoty vykresleném níže.




**Obrázek 5:** Graf znázorňující jednotlivé sčítance střední hodnoty

Z dalšího grafu jsme schopni vyčíst, kolem které hodnoty se koncentrují realizace naší náhodné veličiny, tedy jaká je střední hodnota této náhodné veličiny. V podstatě by nám stačilo tvořit kumulované součty získávané z předchozího grafu (Obrázek 5). Hodnoty v grafu (Obrázek 6) jsou záměrně až po hodnotu 73, abychom viděli, že skutečně nám bude střední hodnota konvergovat k nějaké hodnotě, konkrétně k 14,7, což jsme mj. spočítali už výše pomocí středního počtu pokusů nutných k 1. úspěchu. Funkce y=14,7 je tedy asymptotou této funkce střední hodnoty.




**Obrázek 6** : Graf částečných součtů při výpočtu střední hodnoty

Dospěli jsme tedy k závěru, že abychom překročili pravděpodobnost 0,9, budeme muset házet kostkou alespoň 23krát, přičemž střední hodnota počtu hodů, které budeme nejspíše potřebovat je rovna 14,7. Budeme tedy nejpravděpodobněji házet kostkou 10 - 20krát, aby nám na kostce padlo všech 6 čísel.

# 2 Pexeso

Dostáváme se k druhému problému, který se bude týkat hry pexesa. Ačkoli se pexeso většinou hraje s 32 páry, my budeme mít páry jen 4 kvůli složitosti daného problému a také kvůli omezenému rozsahu této práce. Hru budou hrát 2 hráči a budeme předpokládat, že oba si budou pamatovat již otočené kartičky a nebudou je záměrně otáčet znovu, pokud k nim nenaleznou párovou kartičku, tzn., nebudou nijak taktizovat. Budeme chtít zjistit, zda se vyplatí začínat ve hře nebo hrát až jako druhý.

## 2.1 Značení

Pro úplné pochopení textu a také následujících tabulek bude ještě potřeba si vysvětlit veškeré značení:

- Hru začíná první hráč, který otočí kartičku 1A a k ní buď 1B nebo 2A. Kartička 1A je úplně první kartička, která byla při hře otočena – tzn., začátek hry rozhodne o tom, která kartička bude takto označena. Odtud vyvstávají 2 hlavní situace hry a to hra, která začíná otočením párové dvojice 1A1B a hra, kdy 1. hráč otočí nepárovou dvojici 1A2A.
- Pokud hráč č. 1 k ní otočí párovou kartičku, označíme tuto kartičku 1B. Pokud se však rozhodne pro jinou z ostatních kartiček, označíme ji 2A. Kartička z 2. otočeného páru v pořadí 2B vždy následuje až za 2A kvůli rozlišení kartiček v páru, tzn., nemůžeme nikdy otočit kartičku 2B, aniž bychom před ní otočili 2A a stejně tak nemůžeme otočit např. kartičku 3A, aniž by jejímu otočení předcházelo otočení kartiček z 1. a 2. páru.

Dále následuje barevná tabulka jednotlivých možností, které mohou při hře nastat. Jednotlivé barvy znázorňují, který hráč je momentálně na tahu. Hráč č. 1 – - tedy ten, který začínal, je označen žlutou barvou, hráč č. 2 oranžovou. Na konci jednotlivých řádků je potom spočítána pravděpodobnost, s jakou dojde právě k této možnosti hry, která je také zvýrazněna barvou hráče, který by při této konkrétní situaci hru vyhrál.

V některých případech není políčko tabulky zabarveno ani jednou barvou - v takovém případě se jednalo o remízu 2:2. Celkové pravděpodobnosti vítězství jednotlivých hráčů potom spočítáme jako součty jednotlivých políček zabarvených žlutou, resp. oranžovou barvou.

Dvojice, které jsou v tabulce zvýrazněny tučným písmem, značí párovou dvojici. V tabulce nejsou zapsány úplně všechny možnosti kvůli snaze o zjednodušení tabulek a výpočtů. Zjednodušení se týká třeba případů, kdy hráč, který hru dohrál, bral za sebou více párů. V takových případech je v tabulce zapsán jen jeden zástupce všech různých pořadí, v jakých kartičky hráč za sebou mohl brát.

Hru máme rozdělenou na 2 hlavní situace, které se odvíjí od toho, jestli 1.hráč otočil párovou anebo nepárovou dvojici. Ke každé z těchto dvou situací budeme mít 2 tabulky. V první tabulce jsou zapsány možnosti hry, v tabulce druhé potom pravděpodobnosti, s kterými tyto jednotlivé možnosti nastanou. Pravděpodobnost jedné z možností hry, tedy celého řádku tabulky spočítáme jako součin jednotlivých pravděpodobností.

Ne všechny řádky tabulky začínají od začátku, do té doby se řídíme řádky předchozími. Na příslušném řádku se podíváme, kterým sloupcům náleží prázdná políčka a řídíme se tou hodnotou, která je vždy v daném sloupci uvedena jako poslední před řádkem, na který se díváme.

## 2.2 Situace 1

Jako první se podíváme na tabulku pro hru, která začíná otočením párové dvojice. Jak vidíme v 1. řádku Tabulky 4, nejdříve uvažujeme možnost, kdy hráč č. 1 bere všechny 4 páry.

V Tabulce 5 na 1. řádku nalezneme pravděpodobnosti otočení těchto párových dvojic, za tabulkou poté na příslušném řádku pravděpodobnost celé této situace. Pravděpodobnost je zabarvena žlutě a znamená tedy výhru pro hráče č. 1.

Další možnosti průběhu hry potom vidíme na dalších řádcích a např. pro situaci na 2. řádku, která začíná v tabulce až 3. sloupcem se řídíme hodnotami 1. a 2. sloupce z 1. řádku. Pravděpodobnosti pro párové dvojice D2D1 a C2C1 jsou zde rovny 1, nebereme tu tedy v potaz pořadí, v jakém byly za sebou otočeny. Někde ovšem pořadí v potaz vzít musíme, proto tabulka nelze zjednodušit úplně. Zjednodušujeme jen ty řádky, ve kterých jsme pak schopni dopočítat příslušné pravděpodobnosti – jedná se většinou o páry otočené za sebou na konci hry, kdy už není riziko, že bude otočena nepárová dvojice.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A1A2 | B1B2 | C1C2 | D1D2 | | |
| | | C1D1 | D2D1 | C2C1 | |
| | B1C1 | B2B1 | C2C1 | D2D1 | |
| | | | D1C2 | C1C2 | D2D1 |
| | | C2C1 | B2B1 | D1D2 | |
| | | | D1B2 | D2D1 | B1B2 |
| | | D1B2 | B1B2 | C2C1 | D2D1 |
| | | D1C2 | C1C2 | B2B1 | D2D1 |
| | | D1D2 | B2B1 | C2C1 | |

**Tabulka 4:** Možnosti otočení dvojic pexesa při hře začínající otočením párové dvojice

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,142857143 | 0,2 | 0,333333333 | 1 | | | 0,009524 |
| | | 0,666666667 | 1 | 1 | | 0,019048 |
| | 0,8 | 0,25 | 0,666666667 | 1 | | 0,019048 |
| | | | 0,333333333 | 1 | 1 | 0,009524 |
| | | 0,25 | 0,666666667 | 1 | | 0,019048 |
| | | | 0,333333333 | 1 | 1 | 0,009524 |
| | | 0,166666667 | 1 | 1 | 1 | 0,019048 |
| | | 0,166666667 | 1 | 1 | 1 | 0,019048 |
| | | 0,166666667 | 1 | 1 | | 0,019048 |
| | | | | | ∑ = | 0,142857 |

**Tabulka 5 :** Pravděpodobnosti při otočení dvojic pexesa při hře začínající otočením párové dvojice

Tato situace nastane s pravděpodobností asi 0,1428, přičemž hráč č. 1 má zde výhodu, neboť pravděpodobnost jeho výhry je rovna 0,0667, pravděpodobnost druhého hráče jen 0,0571, remíza zde nastane s pravděpodobností 0,019.

Nyní se podíváme na druhou situaci hry, neboť je zřejmé, že její výsledky budou mít zřejmě větší podíl na celkovém verdiktu.

## 2.3 Situace 2

Druhá situace je taková, že hráč, který začíná, neotočí párovou dvojici a ke hře se tedy dostává druhý hráč. Celý průběh hry máme opět zaznamenán v tabulkách. Stejně jako u předchozí situace zde máme dvě tabulky, jedna je pro možnosti hry a druhá pro jejich pravděpodobnosti, v posledním sloupci pravděpodobnostní tabulky poté opět celkové pravděpodobnosti jednotlivých způsobů, kterými hráči mohou hru odehrát, které počítáme jako součiny jednotlivých pravděpodobností na příslušném řádku.

Můžeme si povšimnout, že se hodnoty těchto celkových pravděpodobností značně liší. Zatímco některé situace nastanou sotva s pravděpodobností jednoho procenta a poměrně často také s pravděpodobností 2%, můžeme si v posledním řádku pravděpodobnostní tabulky všimnout situace, která nastane s pravděpodobností téměř 23%, tedy, nastane průměrně v jednom ze 4 případů. Jedná se konkrétně o situaci, kdy hráč č. 2 poté, co hráč č. 1 nenalezl párovou dvojici, otočí opět některou z nepárových dvojic. Hráč č. 1 poté už bere všechny páry a stává se tak vítězem.

Za tabulkou pravděpodobností potom dole vidíme celkovou pravděpodobnost, že nastane tato možnost hry, která je rovna zhruba 0,857. Jednotlivé pravděpodobnosti výhry hráčů při hře, která začíná otočením nepárové dvojice, jsou rovny 0,533 pro 1. hráče a 0,229 pro 2. hráče, remíza nastane s pravděpodobností 0,095. Tedy i v tomto případě má výhodu 1. hráč.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A1B1 | A2A1 | B2B1 | C1C2 | D1D2 | | |
| | | | C1D1 | C2C1 | D2D1 | |
| | | C1B2 | B1B2 | C2C1 | D1D2 | |
| | | | | D1C2 | D2D1 | C1C2 |
| | | C1C2 | B2B1 | D1D2 | | |
| | | | D1B2 | B2B1 | D2D1 | |
| | | C1D1 | B2B1 | D2D1 | C2C1 | |
| | B2B1 | A2A1 | C1C2 | D1D2 | | |
| | | | C1D1 | C2C1 | D2D1 | |
| | | C1A2 | A1A2 | C2C1 | D1D2 | |
| | | | | D1C2 | D2D1 | C1C2 |
| | | C1C2 | D1D2 | A1A2 | | |
| | | | D1A2 | D2D1 | A1A2 | |
| | | C1D1 | A2A1 | C2C1 | D2D1 | |
| | C1A2 | A1A2 | B2B1 | D1C2 | D2D1 | C1C2 |
| | | | | C2C1 | D1D2 | |
| | | | C2C1 | B2B1 | D1D2 | |
| | | | | D1B2 | B1B2 | D1D2 |
| | | | D1B2 | B1B2 | C2C1 | D2D1 |
| | | | D1C2 | C1C2 | B2B1 | D2D1 |
| | | | D1D2 | B2B1 | C2C1 | |
| | C1B2 | B1B2 | C2C1 | A2A1 | D1D2 | |
| | | | | D1A2 | A1A2 | D1D2 |
| | | | A2A1 | C2C1 | D1D2 | |
| | | | | D1C2 | C1C2 | D1D2 |
| | | | D1D2 | A2A1 | C2C1 | |
| | | | D1C2 | C1C2 | A2A1 | D2D1 |
| | | | D1A2 | C1C2 | A1A2 | D2D1 |
| | C1C2 | B2B1 | D1D2 | A2A1 | | |
| | | D1A2 | A1A2 | B2B1 | D2D1 | |
| | | D1B2 | B1B2 | A1A2 | D2D1 | |
| | C1D1 | A2A1 | B2B1 | D2D1 | C2C1 | |

**Tabulka 6:** Možnosti otočení dvojic pexesa při hře začínající otočením nepárové dvojice

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,85714 | 0,16667 | 0,2 | 0,33333 | 1 | | | 0,00952 |
| | | | 0,66667 | 1 | 1 | | 0,01905 |
| | | 0,2 | 1 | 0,66667 | 1 | | 0,01905 |
| | | | | 0,33333 | 1 | 1 | 0,00952 |
| | | 0,2 | 0,66667 | 1 | | | 0,01905 |
| | | | 0,33333 | 1 | 1 | | 0,00952 |
| | | 0,4 | 1 | 1 | 1 | | 0,05714 |
| | 0,16667 | 0,2 | 0,33333 | 1 | | | 0,00952 |
| | | | 0,66667 | 1 | 1 | | 0,01905 |
| | | 0,2 | 1 | 0,66667 | 1 | | 0,01905 |
| | | | | 0,33333 | 1 | 1 | 0,00952 |
| | | 0,2 | 0,66667 | 1 | | | 0,01905 |
| | | | 0,33333 | 1 | 1 | | 0,00952 |
| | | 0,4 | 1 | 1 | 1 | | 0,05714 |
| | 0,13333 | 1 | 0,25 | 0,33333 | 1 | 1 | 0,00952 |
| | | | | 0,66667 | 1 | | 0,01905 |
| | | | 0,25 | 0,66667 | 1 | | 0,01905 |
| | | | | 0,33333 | 1 | 1 | 0,00952 |
| | | | 0,16667 | 1 | 1 | 1 | 0,01905 |
| | | | 0,16667 | 1 | 1 | 1 | 0,01905 |
| | | | 0,16667 | 1 | 1 | | 0,01905 |
| | 0,13333 | 1 | 0,25 | 0,66667 | 1 | | 0,01905 |
| | | | | 0,33333 | 1 | 1 | 0,00952 |
| | | | 0,25 | 0,66667 | 1 | | 0,01905 |
| | | | | 0,33333 | 1 | 1 | 0,00952 |
| | | | 0,16667 | 1 | 1 | | 0,01905 |
| | | | 0,16667 | 1 | 1 | 1 | 0,01905 |
| | | | 0,16667 | 1 | 1 | 1 | 0,01905 |
| | 0,13333 | 0,66667 | 1 | 1 | | | 0,07619 |
| | | 0,16667 | 1 | 1 | 1 | | 0,01905 |
| | | 0,16667 | 1 | 1 | 1 | | 0,01905 |
| | 0,26667 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 0,22857 |
| | | | | | | ∑ = | 0,85714 |

**Tabulka 4:** Pravděpodobnosti otočení dvojic pexesa při hře začínající otočením nepárové dvojice

Celková pravděpodobnost výhry začínajícího hráče v pexesu je rovna 0,6, zatímco hráče druhého jen 0,286. Pravděpodobnost, že hráči budou mít stejné skóre je rovna 0,114. Podařilo se nám tedy zjistit, že je více než 2krát pravděpodobnější, že vyhraje pexeso hráč, který začínal, pokud budou hráči hrát se 4 páry pexesa.

## 2.4 Situace 3 – Hra s pěti páry

Kvůli rozsahu práce a také obtížnosti tohoto problému jsme se sice rozhodli pro pexeso se 4 páry, nicméně se můžeme stručně podívat i na verzi s 5 páry, která je sice značně komplikovanější, nicméně, lze se postupem času dostat do situací nám již známých při hře se 4 páry.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | A1A2 | | | | |
| 2 | A1B1 | A2A1 (B2B1) | B2B1(A2A1) | | |
| 3 | | | B2C1(A2C1) | B2B1(A2A1) | |
| 4 | | | C1D1 | E1D2 | |
| 5 | | | | C2D2 | |
| 6 | | | | C2C1 | |
| 7 | | | | E1E2 | |
| 8 | | | C1C2 | | |
| 9 | | A2C1 | A1A2 | | |
| 10 | | C1D1 | C2C1 | E1B2 | |
| 11 | | | | D2D1 | E1C2 |
| 12 | | | E1E2 | | |
| 13 | | C1C2 | | | |

Popíšeme si jednotlivé řádky tabulky (situace ve hře):

1.) Pokud 1. hráč odhalí pár ihned, dostaneme se do již popsané situace s osmi kartičkami pexesa. Tedy celá hra bude vypadat úplně totožně jako se čtyřmi páry, pouze v případě, kdy pro 4 páry nastala remíza, vyhraje hráč č. 1 v poměru 3:2.

Nyní se dostáváme k situacím, kdy na začátku hry není otočena párová dvojice a ke hře se ihned dostává hráč č. 2:

2.) Hráč č. 2 najde párovou kartičku k některé z dříve otočených. Otočí tedy pár A1A2 nebo B1B2. Dostáváme se do situace 4 páry, 1 známá kartička, kterou ve hře se 4 páry sice neznáme, ale postupem času se dostaneme do některé již známé situace. Konkrétně v této situaci se hráči podaří najít i další pár, zůstanou nám 3 páry, 0 známých, což je pro nás již známá situace ze hry se 4 páry.

3.) Hra začíná stejně jako případ č. 2, nicméně hráč č. 2 najde pouze 1 pár a při druhém otáčení kartiček otočí nepárovou dvojici, přičemž od jedné kartičky už byla otočena její párová.  Hráč č. 1 ji tedy otočí- dostáváme se do situace 3 páry, 1 známá kartička, kterou již v modelu 4páry známe - je to situace, kdy hra začíná otočením nepárové dvojice A1B1 a dále následuje otočení A2A1, popř. B2B1.

4.) V tomto případě hráč č. 2 sice také otočí nepárovou dvojici, nicméně k žádné z kartiček nemůže hráč č. 1 s jistotou najít párovou. Hráč č. 1 otočí E1D2. Teď už známe od každé z páru alespoň 1 kartičku, takže hráč č. 2 bere všech 5 párů.

5.) Stejný začátek hry, průběh jako u řádku 4, ale jakmile se opět dostane ke hře hráč č. 1, otočí nepárovou dvojici, kde k oběma kartičkám jsme již párovou předtím otočili. Hráč č. 2 tedy bere 2 páry C1C2 a D1D2 a dostáváme se do již známé situace 3 páry, 1 známá.

6.) Opět vyjdeme z řádku 4, nicméně hráč č. 1 otočí párovou dvojici C1C2, dostáváme se tedy do situace 2 páry, 1 známá, kterou známe ze hry se 4 páry také.

7.) Průběh hry vypadá stejně jako u 6. řádku tabulky, nicméně hráč č. 1 otočí párovou dvojici, ze které předtím nebyla otočena ani jedna kartička. Dostáváme se tedy do situace 2 páry, 2 známé, kdy na tahu je stále hráč č. 1 a je jasné, že už bere i páry C1C2 a D1D2.

8.) Situace podobná jako u 2, hráč č. 2 ovšem otočí párovou dvojici, ze které ještě ani jedna kartička předtím nebyla otočena, situace tedy bude 3 páry, 2 známé, kterou už ale také známe ze hry se 4 páry.

9.) V řádku 9 tabulky vidíme, že když se hráč č. 1 dostane ke hře podruhé, ví, kde najde párovou dvojici A1A2, otočeny byly také kartičky B1,C1, tedy situace bude 4 páry, 2 známé, kterou zcela jistě známe ze hry se 4 páry a ta nastane hned po prvním tahu 1. hráče, který neotočí párovou dvojici.

10-12.) Řádky 10, 11, 12 nastiňují situace, které začínají otočením 2 nepárových dvojic, přičemž každá z nich je z jiného páru. Situaci 5 párů, 4 známé ze hry se čtyřmi páry zajisté znát nemůžeme, po otočení dvojice C2C1 na řádku 10 a 11 se dostaneme do situace 4 páry, 3 známé a po otočení dvojice E1B2 už hráč č. 2 bere vše.

13.) Poslední situace je taková, že hráč č. 1 otočí nepárovou dvojici A1A2 a druhý hráč sice párovou, ale není to ani dvojice A1A2, kdy hráč č. 1 již otočil v 1. tahu A1 a ani dvojice B1B2, ale dvojice C1C2. Dostaneme se do situace 4 páry, 2 známé, kterou známe ze samého začátku hry se 4 páry, kdy hráč č. 1 otočí dvojici A1B1.

U těchto 13 začátků hry si můžeme spočítat, stejně jako u hry se 4 páry, pravděpodobnosti jednotlivých situací a pokud bychom chtěli získat pravděpodobnosti pro hru s pěti páry, je třeba tyto pravděpodobnosti pronásobit pravděpodobnostmi ze hry se 4 páry, které na ně navazují.

# 3 Synchronizace robotů

V této kapitole se budeme zabývat synchronizací robotů. Ukážeme si, jakým způsobem se roboti budou synchronizovat, do jakých stavů se mohou časy robotů dostat, a pokusíme se dojít k závěru, jak dlouho jim synchronizace bude průměrně trvat. Využijeme zde opět matic pravděpodobností přechodu.

## 3.1 Zadání problému

Máme 5 robotů s časy 1, 2, …, 5, tedy každý robot má na začátku jiný čas. Roboti se postupně po dvou synchronizují. Naším úkolem bude zjistit, za jak dlouho dojde k synchronizaci robotů, to znamená, kdy budou mít všichni roboti stejný čas.

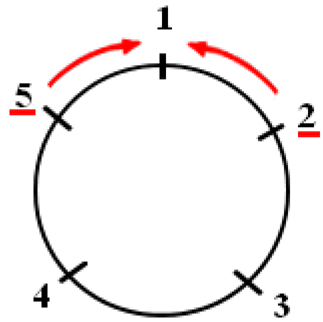
## 3.2 Značení

Stav systému bude zde představovat uspořádaná pětice, kdy se na i-té pozici bude nacházet x robotů s časem i. Vycházet tedy budeme ze stavu 11111, což symbolizuje stav počáteční, kdy má každý robot jiný čas a budeme se snažit dostat do stavu 00005, popř. do stavu 50000, 05000, 00500, 00050, ale tyto stavy považujeme za ekvivalentní. V každé skupině ekvivalentních stavů budeme mít jednoho zástupce a bude to ten stav, který bychom dostali úplně jako první při lexikografickém uspořádání (uspořádání „podle abecedy“). Navíc, pokud jsou před, příp. za číslem nějaké nuly, nepíšeme je. Tedy, místo stavu 00005 budeme psát 5, místo 02030 pouze 203 apod.

## 3.3 Způsob průměrování časů robotů

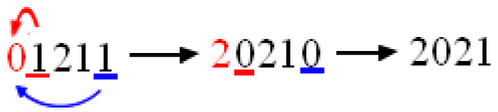
Synchronizace robotů probíhá následujícím způsobem - vybereme náhodně dva roboty a spočítáme jejich časový průměr, jednotlivé časy poté zaokrouhlíme v případě potřeby směrem nahoru. Průměrování časů robotů si vysvětlíme pomocí kružnice a ukážeme na následujících příkladech a obrázcích.

Časy průměrujeme vždy po kratším oblouku kružnice. Jak vidíme na obrázku 7, má dojít k synchronizaci robotů s časy 5 a 2. Kratší oblouk kružnice prochází bodem 1, nikoli body 3 a 4, proto se časy těchto robotů průměrují na 1.



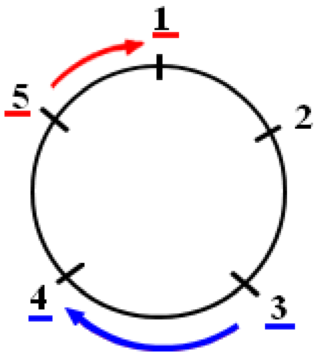

**Obrázek 7**: Způsob průměrování časů robotů po kratším oblouku kružnice

Ukážeme si tento způsob přímo na příkladu. Vezmeme si např. stav 1211 a podtržené roboty na Obrázku 8 budu chtít synchronizovat. Roboty si můžeme umístit na jakousi pomyslnou kružnici a synchronizovat tedy budeme po kratším oblouku této kružnice. Mezi roboty s časem 2 a 5 je na kružnici robot s časem 1. Robot s takovým časem se v našem stavu 1211 nenachází, neboť stav 1211 si můžeme napsat také jako 01211. Pokud se časy obou robotů synchronizují na čas 1, přecházíme do stavu 20210 (2021).




**Obrázek 8**: Způsob průměrování časů robotů po kratším oblouku kružnice

Druhý případ průměrování je pro časy robotů m a m+1, tedy platí pro synchronizaci robotů se sousedními časy. Takové průměrování probíhá po směru hodinových ručiček. Robot s nižším časem bude mít po synchronizaci stejný čas jako robot s vyšším časem, kterému jeho čas zůstane. V případě robotů s časy 5 a 1 to platí naopak, neboť robot s časem 5 má sice vyšší čas, ale synchronizovat se bude po směru hodinových ručiček, tedy na 1.



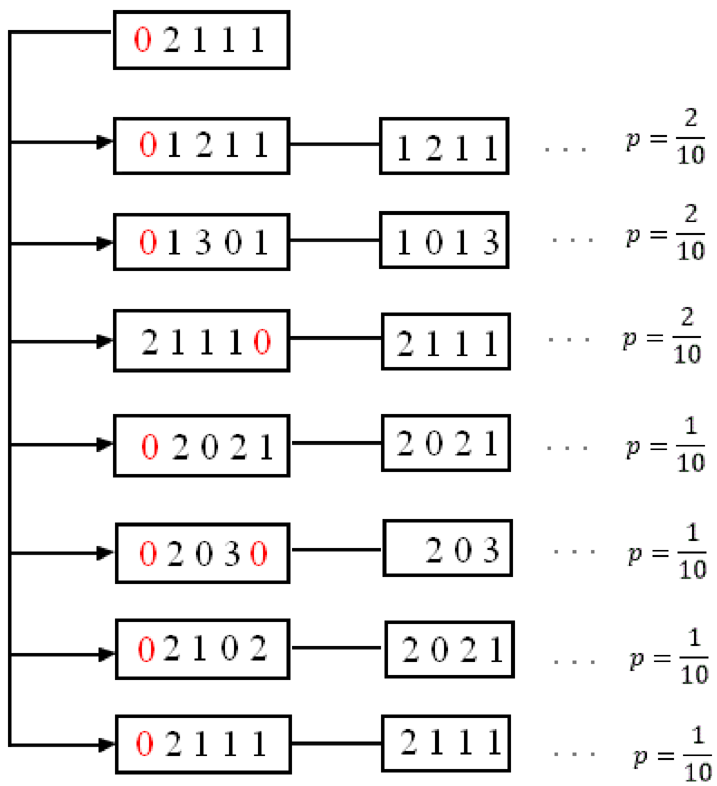

**Obrázek 9** : Synchronizace robotů se sousedními časy

Na konkrétním případu by situace vypadala např. takto: Vezmeme si např. stav 1211 a samotnou synchronizaci robota s časem 2 a robota s časem 3 vidíme na Obrázku 10.

01211 ⟶ 00311 ⟶ 311

**Obrázek 10:** Způsob průměrování časů robotů se sousedními časy

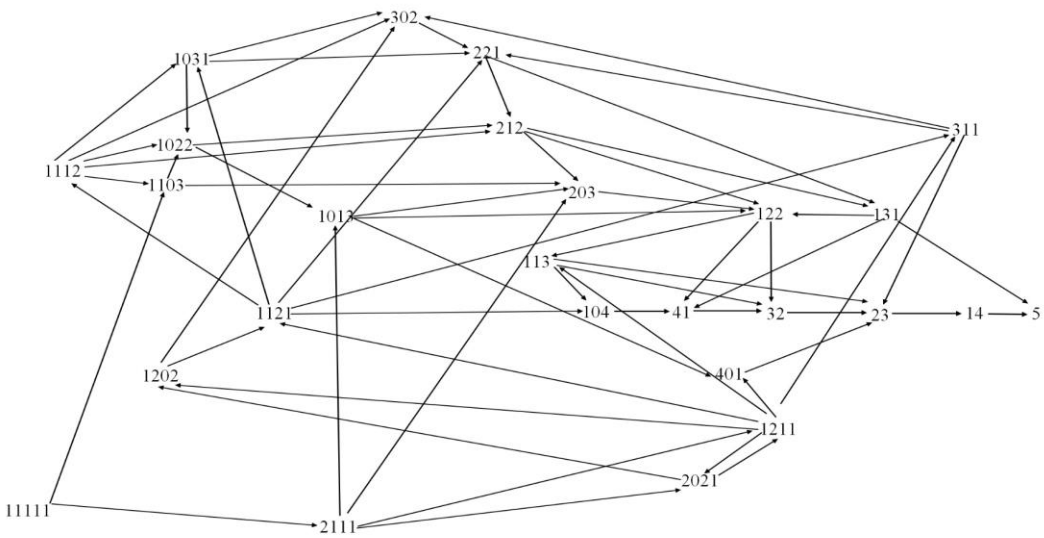
Nyní si ukážeme na jednom ze stavů, do jakých stavů se můžeme po synchronizaci 2 libovolných robotů dostat a také, s jakou pravděpodobností. Vybereme si např. stav 2111, což bude náš stav výchozí. Z tohoto stavu, jak uvidíme na následujícím obrázku, vede 7 šipek, tedy 7 způsobů, jak se mohou roboti synchronizovat. Můžeme si všimnout, že některé stavy, do kterých se ze stavu 2111 roboti dostanou, se opakují vícekrát. Celkově se tedy mohou dostat do pěti různých stavů, přičemž do nich počítáme i samotný stav 2111. Celkový počet možností, jak se roboti mohou synchronizovat je roven $\binom{5}{2} = 10$, neboť vždy vybíráme z pěti robotů 2, kteří se synchronizují, přičemž nám nezáleží na tom, kterého z robotů vybereme zde jako prvního. Využili jsme tedy vzorec pro kombinace bez opakování, pomocí něhož budeme schopni spočítat také pravděpodobnosti přechodu do jednotlivých stavů. Vybereme si nyní např. stav 1211, který vznikl ze stavu 2111 synchronizací robotů s časem 2 a 3. Všimněme si, že roboty s časem 2 máme ve stavu 2111 dva, proto jsou 2 možnosti, jak tuto synchronizaci provést- s prvním, resp. druhým robotem s časem 2 a robotem s časem 3. Jak už jsme si uvedli výše, je celkem 10 možností, jak utvořit dvojice z pěti robotů, tudíž pravděpodobnost takovéto situace bude rovna $\frac{2}{10}$.




**Obrázek 11:** Jedna ze synchronizací robotů vycházejících ze stavu 2111

## 3.4 Průběh synchronizace

Na Obrázku 12 už vidíme celý proces synchronizace robotů od počátečního stavu 11111 až po konečný 5. Synchronizace nevypadá jednoduše ani pro pět robotů. Stavy jsou různě vzájemně propojeny a v obrázku je mj. i několik cyklů, tzn., po několika stavech se můžeme vrátit do stavu, v kterém už jsme byli. V obrázku pro lepší přehlednost nejsou zakresleny smyčky, které by představovaly v podstatě přechod z jednoho stavu do stavu toho samého a našli bychom je kromě stavu 11111 u všech stavů, kde jsou vždy minimálně 2 roboti se stejným časem. Právě smyčky a cykly v grafu způsobují to, že k synchronizaci nemusí dojít prakticky nikdy, neboť se stále můžeme „motat v jednom kruhu“.




**Obrázek 12**: Proces synchronizace robotů od stavu 11111 po stav 5

Na další straně, v Tabulce 9, vidíme matici pravděpodobností přechodu pro synchronizaci robotů po 1 kroku. Bylo třeba si spočítat veškeré pravděpodobnosti stavů, do kterých se po jednom kroku z libovolného stavu můžeme dostat.

Pro další matice pravděpodobností přechodu opět využijeme Chapman-Kolmogorových rovností, kterých jsme využili i u hodu kostkou. Budeme v podstatě umocňovat matici a získávat tak matice pravděpodobností přechodu po více krocích. Např., ze stavu 11111 se do stavu 2111 dostaneme s pravděpodobností 0,5 a do stavu 203 ze stavu 2111 s pravděpodobností 0,1, celkově se tedy po 2 krocích ze stavu 11111 do stavu 203 dostaneme s pravděpodobností $0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}05$.

| | 11111 | 2111 | 1103 | 1022 | 1013 | 1211 | 2021 | 203 | 212 | 122 | 401 | 311 | 1121 | 113 | 1202 | 131 | 32 | 41 | 23 | 221 | 302 | 104 | 1031 | 14 | 1112 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11111 | 0 | 0,5 | 0,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2111 | 0 | 0,3 | 0 | 0 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1103 | 0 | 0 | 0,3 | 0,6 | 0 | 0 | 0 | 0,1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1022 | 0 | 0 | 0 | 0,2 | 0,4 | 0 | 0 | 0 | 0,4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1013 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,3 | 0 | 0 | 0,1 | 0 | 0,3 | 0,3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1211 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,1 | 0,1 | 0 | 0 | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2021 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,4 | 0,2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,2 | 0 | 0,2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 203 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,4 | 0 | 0,6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 212 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 122 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,2 | 0 | 0 | 0 | 0,4 | 0 | 0 | 0,2 | 0,2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 401 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 311 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,3 | 0,3 | 0,1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1121 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,2 | 0,1 | 0 | 0,1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,1 | 0,1 | 0 | 0,2 | 0 | 0,2 | 0 |
| 113 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,3 | 0 | 0 | 0,3 | 0 | 0,1 | 0 | 0 | 0,3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1202 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,4 | 0 | 0,4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 131 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,3 | 0 | 0,3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,1 |
| 32 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,4 | 0 | 0,6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 41 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,4 | 0,6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 23 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,6 | 0 | 0 |
| 221 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,4 | 0 | 0 | 0 | 0,2 | 0 | 0 | 0 | 0,2 | 0 | 0 |
| 302 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,6 | 0,4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 104 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,4 | 0 | 0 | 0,6 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1031 | 0 | 0 | 0 | 0,3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,3 | 0,1 | 0 | 0,3 | 0 | 0 | 0 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,6 | 0 | 0,4 |
| 1112 | 0 | 0 | 0,2 | 0,1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,1 | 0 | 0,2 | 0 | 0,3 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Tabulka 9: Matice pravděpodobností přechodu po 1 kroku synchronizace

Z obrázku 12 vidíme, že nejdříve se roboti synchronizují po pěti krocích a to je situace $11111 \to 2111 \to 203 \to 122 \to 131 \to 5$ , přes matici pravděpodobností přechodu (5. mocninu matice z Tabulky 9) potom zjistíme, že pravděpodobnost takové situace je rovna asi 0,0048. Tato pravděpodobnost se týká této konkrétní cesty, neboť není jiná, kterou bychom se dostali po 5 krocích z počátečního stavu do stavu konečného.

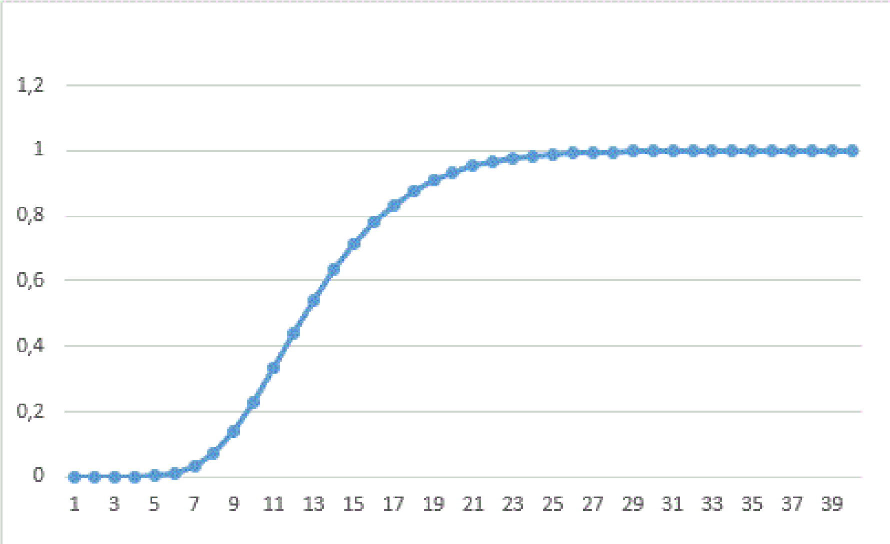
Taková pravděpodobnost je celkem malá a budou nás, stejně jako u kostky, zajímat i další pravděpodobnosti, příp. kdy dojde k překročení pravděpodobnosti 0,9.

## 3.5 Tabulky a grafy

V Tabulce 10 a k ní příslušícímu grafu, Obrázku 13, už vidíme, že po nejvýše 19 krocích už bude pravděpodobnost přes 0,9 a to konkrétně asi 0,9083.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 11 | 0,33250688 | 21 | 0,95220308 | 31 | 0,99901928 |
| 2 | 0 | 12 | 0,44066732 | 22 | 0,9661447 | 32 | 0,99936149 |
| 3 | 0 | 13 | 0,54352025 | 23 | 0,97629998 | 33 | 0,99958635 |
| 4 | 0 | 14 | 0,63563187 | 24 | 0,98359051 | 34 | 0,99973323 |
| 5 | 0,0048 | 15 | 0,71462563 | 25 | 0,9887538 | 35 | 0,99982866 |
| 6 | 0,01272 | 16 | 0,78022873 | 26 | 0,99236478 | 36 | 0,99989037 |
| 7 | 0,031264 | 17 | 0,83336074 | 27 | 0,99486104 | 37 | 0,99993009 |
| 8 | 0,0710576 | 18 | 0,8754959 | 28 | 0,99656849 | 38 | 0,99995556 |
| 9 | 0,13760288 | 19 | 0,90828567 | 29 | 0,99772516 | 39 | 0,99997183 |
| 10 | 0,22785906 | 20 | 0,93335588 | 30 | 0,99850186 | 40 | 0,99998219 |

**Tabulka 10:** Pravděpodobnosti, že k synchronizaci dojde nejvýše po n krocích

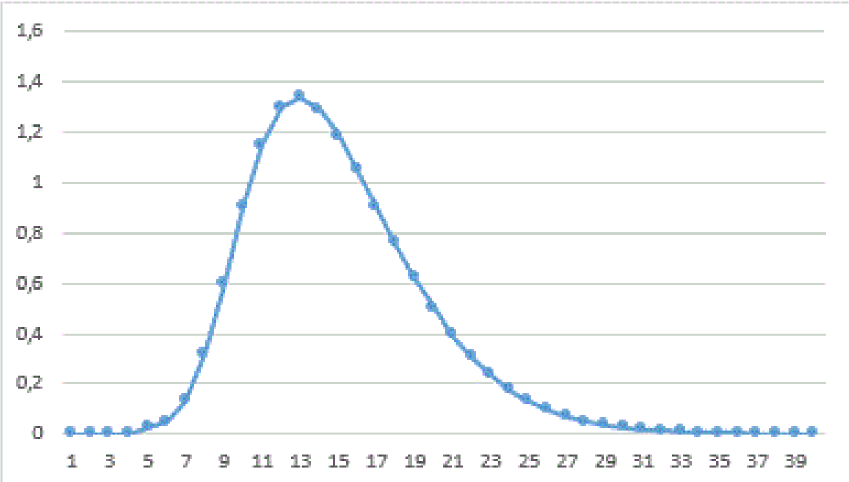



**Obrázek 13:** Graf k Tabulce 10, vykreslující pravděpodobnosti přechodu po nejvýše n krocích

V následujícím grafu a tabulce vidíme jednotlivé sčítance ze střední hodnoty jako u hodu kostkou. I graf vypadá velmi podobně, svého maxima dosahuje také ve 13, nicméně liší se samozřejmě jednotlivé hodnoty. Vidíme, že zhruba od čísla 30 už sčítance nemají téměř žádný přínos pro střední hodnotu.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 11 | 1,151125994 | 21 | 0,395791248 | 31 | 0,016039906 |
| 2 | 0 | 12 | 1,297925274 | 22 | 0,30671572 | 32 | 0,010950747 |
| 3 | 0 | 13 | 1,337088103 | 23 | 0,233571418 | 33 | 0,007420385 |
| 4 | 0 | 14 | 1,289562631 | 24 | 0,174972674 | 34 | 0,004993953 |
| 5 | 0,024 | 15 | 1,184906433 | 25 | 0,129082169 | 35 | 0,003340133 |
| 6 | 0,04752 | 16 | 1,049649538 | 26 | 0,093885443 | 36 | 0,002221383 |
| 7 | 0,129808 | 17 | 0,903244181 | 27 | 0,0673991 | 37 | 0,001469733 |
| 8 | 0,3183488 | 18 | 0,758432838 | 28 | 0,047808709 | 38 | 0,000967835 |
| 9 | 0,59890752 | 19 | 0,623005701 | 29 | 0,033543393 | 39 | 0,000634578 |
| 10 | 0,90256184 | 20 | 0,501404158 | 30 | 0,023301042 | 40 | 0,000414424 |

**Tabulka 11**: Jednotlivé sčítance ze střední hodnoty, jenž nám vyjadřují přínos pro střední hodnotu



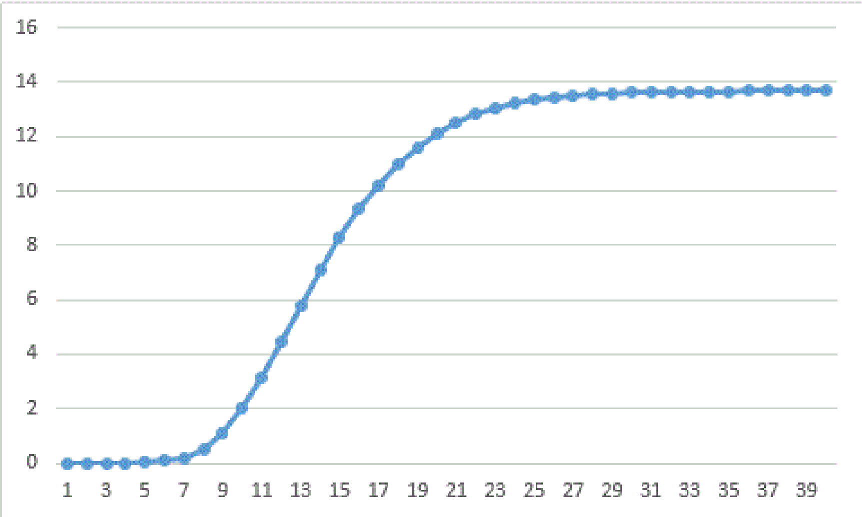

**Obrázek 14:** Graf k Tabulce 11 pro jednotlivé sčítance střední hodnoty

Poslední tabulka a graf jsou už pro střední hodnotu a jednotlivé hodnoty v tabulce dostaneme jako kumulované součty z předchozí tabulky vždy po tu hodnotu, kterou počítáme.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 11 | 3,172272154 | 21 | 12,51328226 | 31 | 13,63960183 |
| 2 | 0 | 12 | 4,470197428 | 22 | 12,81999798 | 32 | 13,65055258 |
| 3 | 0 | 13 | 5,807285531 | 23 | 13,0535694 | 33 | 13,65797296 |
| 4 | 0 | 14 | 7,096848162 | 24 | 13,22854207 | 34 | 13,66296692 |
| 5 | 0,024 | 15 | 8,281754595 | 25 | 13,35762424 | 35 | 13,66630705 |
| 6 | 0,07152 | 16 | 9,331404133 | 26 | 13,45150968 | 36 | 13,66852843 |
| 7 | 0,201328 | 17 | 10,23464831 | 27 | 13,51890878 | 37 | 13,66999817 |
| 8 | 0,5196768 | 18 | 10,99308115 | 28 | 13,56671749 | 38 | 13,670966 |
| 9 | 1,11858432 | 19 | 11,61608685 | 29 | 13,60026089 | 39 | 13,67160058 |
| 10 | 2,02114616 | 20 | 12,11749101 | 30 | 13,62356193 | 40 | 13,672015 |

**Tabulka 12:** Částečné součty při výpočtu střední hodnoty

V tabulce i grafu vidíme, že střední hodnota bude zhruba 13,7, funkce y = 13,7 bude tedy jednou z horizontálních asymptot.




**Obrázek 15:** Graf částečných součtů při výpočtu střední hodnoty

Dospěli jsme tedy k závěru, že roboti budou mít stejný čas s pravděpodobností vyšší než 0,9 už po devatenácti krocích, přitom střední hodnota počtu kroků potřebných k synchronizaci je asi 13,7. Dá se tedy očekávat, že proběhne méně než 20 kroků synchronizace.

# Závěr

V mojí práci jsem se snažila popsat a navrhnout řešení tří problémů, které se zprvu jevily jako celkem jednoduché, nicméně časem se ukázalo, že to není úplně tak pravda.

Přes nezdárné začátky spojené s ne zrovna vhodným značením se mi nakonec podařilo najít cestu, jak případy zjednodušit a zodpovědět si na všechny otázky, které mě zajímaly.

Hlavním problémem, kterým jsem se v mé práci zabývala, byla synchronizace robotů. Nicméně, tento problém byl hodně náročný a proto mu předchází ještě další dva, které jsou jakousi „přípravou" na něj, neboť se řeší podobným způsobem.

Nejdříve jsem se zaobírala problémem, týkajícím se hodu kostkou, kdy mě zajímalo, kolik hodů budu nejspíše potřebovat, než v sérii hodu kostkou zaznamenám všech šest čísel. Stanovila jsem si pravděpodobnost rovnu 0,9 a zkoumala, kolik minimálně hodů bude potřeba, aby bylo této pravděpodobnosti dosaženo nebo aby byla překročena. Zjistila jsem, že pravděpodobnost větší než 0,9 bude až pro 23 a více hodů, což mě celkem překvapilo, jelikož bych sama nejspíše tipovala méně.

Druhou problematikou, která mě zajímala, bylo pexeso. Obvykle se pexeso hraje s 32 páry, což bylo ale pro mě a moje zkoumání problémů a relací mezi nimi prakticky nemožné a proto jsem nakonec zvolila páry jen čtyři. I tak to nebylo snadné, protože jsem v mých tabulkách rozepisovala všechny možnosti, které mohou nastat. Nakonec jsem ještě nastínila situaci pro 5 párů, kdy např., pokud se podaří otočit ihned párovou dvojici, se dostáváme do situace se 4 páry.

Nakonec jsem se zaměřila na nejnáročnější problém a to synchronizaci robotů. Začátky byly velmi komplikované a bylo potřeba vymyslet vhodné značení a popis jednotlivých synchronizací. Také bylo třeba situaci zjednodušit jen na 5 robotů a i tak, jak lze potom vidět z obrázku, není situace vůbec jednoduchá. Máme dohromady 26 stavů, ve kterých se roboti mohou nacházet, včetně stavu výchozího 11111 a z jednoho stavu se lze většinou do více stavů, proto ani obrázek, týkající se procesu synchronizace, není zcela přehledný.

Mezi jednotlivými případy jsem se také snažila najít určité vztahy. V práci jsem využila nejen vzorců z kombinatoriky a pravděpodobnosti, ale také Markovových řetězců a matic pravděpodobností přechodu.

Práce prohloubila mé znalosti a to zejména právě v oblasti Markovových řetězců, se kterými jsem sice v rámci předmětu Pravděpodobnost a matematická statistika 4 byla seznámena již dříve, nicméně jsem ráda, že jsem si mohla vyzkoušet s nimi pracovat.

# Literatura

[1] Modus náhodné veličiny [online]. [cit. 7. 8. 2015] Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Modus

[2] Hron, K., Kunderová, P.: *Základy počtu pravděpodobnosti a metod matematické statistiky (1. vydání)*. Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2013.

[3] Hron, K., Kunderová, P.: *Markovovy řetězce a jejich aplikace (1. vydání).* Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2012.