

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁRSKA PRÁCA

Určitý integrál funkcie jednej premennej a jeho aplikácia



Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedúci bakalárskej práce: **Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.**

Vypracovala: **Radoslava Švihrová**

Študijný program: B1103 Aplikovaná matematika

Študijný odbor: Matematika–ekonomie se zaměřením na bankovníctví/pojišťovnictví

Forma štúdia: prezenčná

Rok odovzdania: 2017

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Radoslava Švihrová

Názov práce: Určitý integrál funkcie jednej premennej a jeho aplikácia

Typ práce: Bakalárska práca

Pracovisko: Katedra matematické analýzy a aplikáci matematiky

Vedúci práce: Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2017

Abstrakt: Cieľom tejto práce je za pomoci znalosti určitého integrálu funkcie jednej premennej odvodiť vzorce pre niektoré jeho aplikácie, demonštrovať ich na príkladoch a motivovať čitateľa k záujmu o túto problematiku. Práca je zameraná na odvodenie vzorcov pre výpočet objemu rotačného telesa vzniknutého rotáciou rovinatej plochy okolo osí x a y a výpočet dĺžky rovinatej krivky. Na základe týchto znalostí je ukázané aj ako odvodiť vzorec pre výpočet obsahu plochy vzniknutej rotáciou krivky okolo osí x a y . V závere práce je stručne spomenuté využitie skúmanej oblasti matematiky v iných odboroch.

Kľúčové slová: určitý integrál, integrál, aplikácia určitého integrálu

Počet strán: 57

Počet príloh: 0

Jazyk: slovenský

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Radoslava Švihrová

Title: Definite integral of single variable function and its applications

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.

The year of presentation: 2017

Abstract: The purpose of this thesis is to deduce formulas for some of applications of a definite integral of a function of one variable with understanding, to demonstrate them on examples and to motivate reader's interest in the issue. The thesis is focused on deduction of formulas for the calculation of the volume of the solid of revolution made by rotating the planar surface around x and y axis and calculation of arc length. Based on these knowledge it is shown how to deduce the formula for the calculation of surface area made by rotating the curve around x and y axis. In the conclusion of this thesis there is briefly mentioned usage of the examined field of mathematics in other fields.

Key words: definite integral, integral, application of definite integral

Number of pages: 57

Number of appendices: 0

Language: Slovak

Prehlásenie

Prehlasujem, že som bakalársku prácu spracovala samostatne pod vedením pani Mgr. Ivety Bebčákovej, Ph.D. a všetky použité zdroje som uviedla v zozname literatúry.

V Olomouci dňa

.....

podpis

Obsah

Úvod	7
1 Riemmanov určitý integrál a výpočet obsahu rovinnej plochy	9
1.1 Výpočet obsahu rovinnej plochy	15
1.1.1 Výpočet obsahu kruhu	22
2 Výpočet objemu rotačných telies	25
2.1 Metóda diskov	26
2.1.1 Rotácia plochy okolo osi x	26
2.1.2 Rotácia plochy okolo osi y	28
2.1.3 Rotácia plochy ohraničenej dvomi grafmi funkcií	29
2.2 Metóda valčekov	32
2.3 Posun osi rotácie	36
2.3.1 Posun rotačnej osi v metóde diskov	37
2.3.2 Posun rotačnej osi v metóde valčekov	40
2.3.3 Naklonená os rotácie	41
3 Výpočet dĺžky rovinnej krivky	44
3.1 Vzorec pre výpočet dĺžky krivky v rovine	46
3.1.1 Výpočet dĺžky rovinnej kružnice	48
4 Výpočet plošného obsahu rotačnej plochy	51
5 Využitie v praxi	55
Záver	57
Literatúra	57

Pod'akovanie

Na tomto mieste by som chcela pod'akovať predovšetkým pani Mgr. Ivete Bebčákovej, Ph.D. za všetku pomoc, ústretovosť a dostatok trpezlivosti pri vedení tejto bakalárskej práce. Tiež by som chcela pod'akovať mojim rodičom, ktorí ma po celú dobu štúdia podporovali. Ďakujem.

Úvod

Témou mojej bakalárskej práce je *Určitý integrál funkcie jednej premennej a jeho aplikácia*. Budem sa teda snažiť vysvetliť čo je určitý integrál funkcie jednej premennej a hľadať jeho možné aplikácie. Predpokladom k pochopeniu sú znalosti diferenciálneho a integrálneho počtu funkcie jednej premennej.

Práca je rozdelená na 5 kapitôl. V prvej kapitole sa budeme venovať pojmu určitý Riemmanov integrál. Na jednoduchom príklade si ukážeme jeho matematické odvodenie a následne si pojem určitý Riemmanov integrál správne matematicky nadefinujeme. V tejto kapitole si uvedieme aj konkrétne príklady aplikácie určitého integrálu na výpočet obsahu rôzne zadanej rovinnej plochy.

V druhej kapitole sa budeme venovať odvodeniu všeobecného vzorca pre výpočet objemu telesa vzniknutého rotáciou rovinnej plochy okolo osi x a následne aj okolo osi y . V závere druhej kapitoly si uvedieme aj postup výpočtu objemu rotačného telesa, keď os rotácie posunieme. Ku niektorým zmieným aplikáciám určitého integrálu si uvedieme aj konkrétny príklad a jeho riešenie s obrázkom.

V tretej kapitole sa budeme venovať odvodeniu vzorca pre výpočet dĺžky krivky v rovine, ktorá bude zadaná ako časť grafu funkcie. Tento vzorec si odvodíme na jednoduchom príklade a následne si ukážeme, ako využiť určitý integrál na výpočet dĺžky krivky v rovine.

V štvrtej kapitole skombinujeme znalosti z predchádzajúcich dvoch kapitôl a ukážeme si postupné odvodenie vzorca pre výpočet plošného obsahu plášt'a rotačného telesa. Následne si uvedieme konkrétny príklad.

Na záver práce, v piatej kapitole, si motivačne uvedieme zopár možných aplikácií určitého Riemmanovho integrálu v praxi.

Niektoré obrázky použité v práci sú získané pomocou voľne dostupného internetového softvéru na stránke www.wolframalpha.com, ostatné sú vygenerované a upravené pomocou matematického softvéru Matlab. V poznámkach si za niektorými príkladmi uvedieme aj ako zadať príkaz do softvéru wolframalpha a záujemci o problematiku si môžu sami vykresliť a dopočítať vlastné príklady.

Kapitola 1

Riemmanov určitý integrál a výpočet obsahu rovinatej plochy

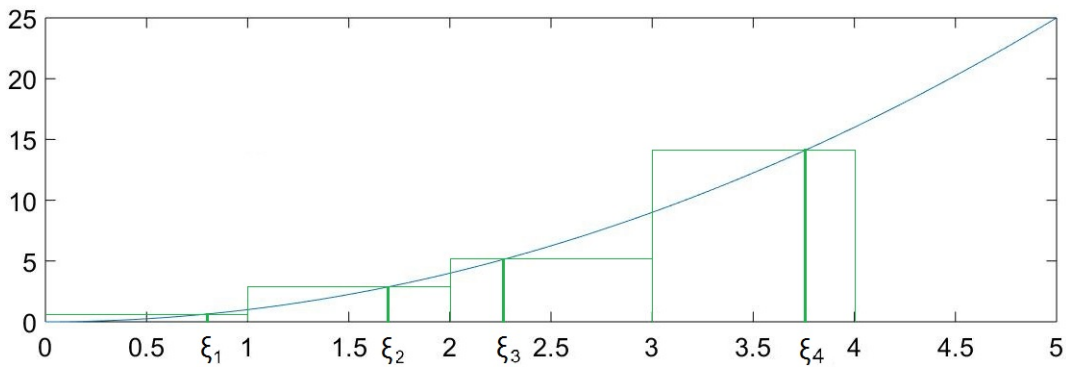
Ako vypočítať plošný obsah jednoduchých geometrických útvarov ako napríklad štvorca, obdĺžnika či lichobežníka, vieme už zo strednej školy. Čo by sa však stalo, keby sme chceli vypočítať obsah zložitejšej plochy vymedzenej grafom funkcie obmedzenej na určitom intervale? Na túto otázku nám dá odpoveď určitý Riemmanov integrál.

Konstrukciu Riemmanovho integrálu si najskôr ukážeme na nasledujúcom jednoduchom príklade. Predpokladajme, že máme reálnu nezápornú obmedzenú funkciu $f(x)$ definovanú na uzatvorenom intervale $\langle a; b \rangle$. Budeme teda hľadať obsah plochy ohraničenej zhora grafom funkcie na intervale $\langle a; b \rangle$, zdola osou x a kolmicami ku osi x v hraničných bodoch intervalu $\langle a; b \rangle$, teda priamkami $x = a$ a $x = b$. Príkladom takejto funkcie môže byť funkcia $f(x) = x^2$ na intervale $\langle 0; 4 \rangle$. Poďme sa teda pozrieť, ako môžeme obsah takejto plochy vypočítať.

Príklad 1 Vypočítajme si obsah plochy ohraničenej zhora grafom funkcie $f(x) = x^2$ na intervale $\langle 0; 4 \rangle$, zdola osou x a priamkami $x = 0$ a $x = 4$.

Myšlienka 1 Vypočítať obsah plochy ohraničenej grafom funkcie ešte nevieme. Môžeme si však plochu rozložiť na časti, ktorých obsahy už vieme vypočítať, a následne ich obsahy sčítať. Plochu sa pokúsime čo najlepšie pokryť neprekrývajúcimi sa obdĺžnikmi. Súčet obsahov všetkých takýchto obdĺžnikov potom bude približne rovný obsahu skúmanej plochy.

Zadanú plochu môžeme pokryť napríklad nasledujúcim spôsobom: najskôr si rozdelíme interval napríklad na 4 rovnako široké subintervaly: $\langle 0; 1 \rangle$; $\langle 1; 2 \rangle$; $\langle 2; 3 \rangle$ a $\langle 3; 4 \rangle$. Šírku každého i -tého subintervalu $\langle x_{i-1}; x_i \rangle$ označíme všeobecne ako $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $i = 1, 2, 3, 4$, v tomto prípade bude rovná jednej jednotke. Každé x_i , $i = 0, 1, 2, 3, 4$ predstavuje vždy hraničný bod subintervalu, tj. $x_0 = 0$, $x_1 = 1, \dots, x_4 = 4$. Z každého subintervalu vyberieme ľubovoľný bod $\xi_i \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle$ a nájdeme k nemu funkčnú hodnotu $f(\xi_i)$, ktorá bude predstavovať vždy výšku obdĺžnika konštruovaného nad daným subintervalom $\langle x_{i-1}; x_i \rangle$. Grafické znázornenie takto skonštruovaných obdĺžnikov máme vykreslené na nasledujúcom obrázku 1.1.



Obrázek 1.1: Požadovaná plocha pod grafom funkcie $f(x) = x^2$ vykresleným modrou farbou pokrytá obdĺžnikami podľa postupu z príkladu 1.

Na obrázku 1.1 skutočne vidíme, že z každého subintervalu $\langle x_{i-1}; x_i \rangle$ sme vybrali bod $\xi_i \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle$ a skonštruovali sme obdĺžnik s výškou rovnou hodnote $f(\xi_i)$ a šírkou rovnou vždy hodnote Δx_i . Ako už bolo spomenuté, body ξ_i môžeme voliť ľubovoľne, štvorica čísel $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ na obrázku 1.1 bola vybraná náhodne.

Podme sa pozrieť na prípad, kedy za každé ξ_i , $i = 1, \dots, 4$ dosadíme napríklad spodné medze subintervalov a dopočítame im príslušné funkčné hodnoty $f(\xi_i)$. Súčet obsahov takto skonštruovaných obdĺžnikov si označíme $\sigma_1(D_4)$. Hodnotu $\sigma_1(D_4)$ vypočítame nasledovne:

$$\sigma_1(D_4) = (1 \cdot f(0)) + (1 \cdot f(1)) + (1 \cdot f(2)) + (1 \cdot f(3)) = 0 + 1 + 4 + 9 = 14$$

Poznámka 1 Nezabúdajme na to, že výsledok sme dostali v plošných jednotkách (jednotky štvorcové). To platí aj v nasledujúcich príkladoch výpočtu plochy. V praxi sa uvádzajú jednotky k výsledku až keď zo zadania vieme, o aké jednotky sa jedná.

Čo by sa však stalo keby sme za ξ_i zvolili iné body zo subintervalov? Skúsme si rovnakým postupom vypočítať súčet obsahov obdĺžnikov, no tento krát za každé ξ_i dosadíme vždy horné medze subintervalov a dopočítame im príslušné funkčné hodnoty $f(\xi_i)$. Takýto súčet si označme $\sigma_2(D_4)$:

$$\sigma_2(D_4) = (1 \cdot f(1)) + (1 \cdot f(2)) + (1 \cdot f(3)) + (1 \cdot f(4)) = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

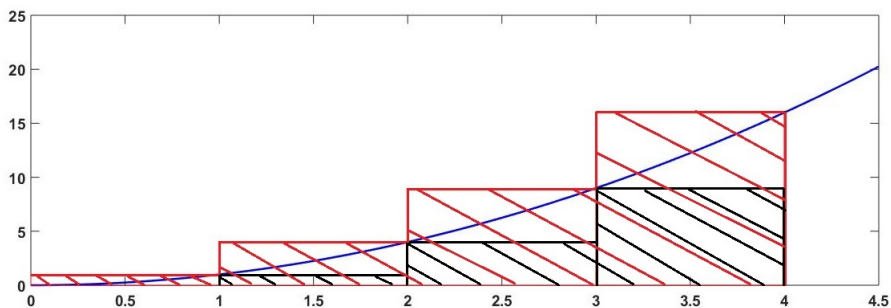
Dvomi rôznymi voľbami bodov $\xi_i, i = 1, \dots, 4$ sme dostali dva veľmi rozdielne výsledky obsahov. Musíme si však uvedomiť, že oba súčty $\sigma_1(D_4)$ aj $\sigma_2(D_4)$ sú aproximáciou obsahu plochy, ktorej skutočný obsah nás zaujíma. Snažíme sa čo najviac priblížiť tejto skutočnej hodnote obsahu plochy zadanej v príklade 1. Pozrime sa preto, čo by sa stalo keby sme počiatočný interval $\langle 0; 4 \rangle$ rozdelili tentokrát napríklad na 8 rovnako širokých subintervalov (šírka každého subintervalu bude $\Delta x_i = \frac{1}{2}$) a tým zjemnili delenie pôvodného intervalu. Následne si rovnakým spôsobom, ako pri predchádzajúcom delení, spočítame súčty $\sigma_1(D_8)$ a $\sigma_2(D_8)$. Pre súčet $\sigma_1(D_8)$ budeme pre názornosť opäť voliť za body ξ_i spodné hranice subintervalov a v pre súčet $\sigma_2(D_8)$ budeme za ξ_i voliť deliace body predstavujúce horné hranice subintervalov. Takéto súčty si opäť vyčíslime a dostaneme hodnoty:

$$\sigma_1(D_8) = \frac{1}{2} \cdot (0 + 0,25 + 1 + 2,25 + 4 + 6,25 + 9 + 12,25) = 17,5$$

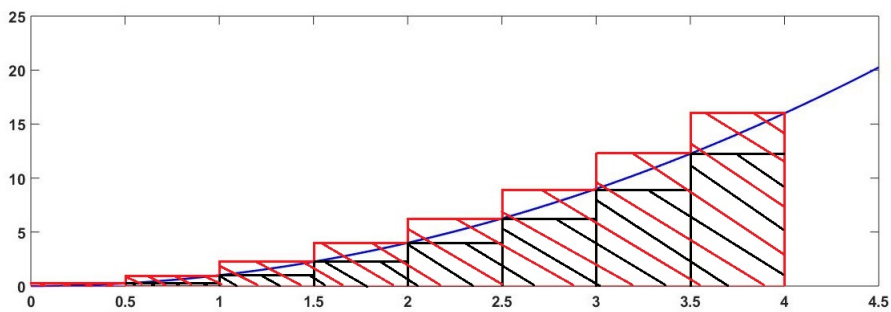
$$\sigma_2(D_8) = \frac{1}{2} \cdot (0,25 + 1 + 2,25 + 4 + 6,25 + 9 + 12,25 + 16) = 25,5$$

Rozdiel hodnôt súčtov $\sigma_1(D_8)$ a $\sigma_2(D_8)$ pri jemnejšom delení na 8 subintervalov je menší ako rozdiel hodnôt súčtov $\sigma_1(D_4)$ a $\sigma_2(D_4)$ pri delení na 4 subintervalov. Môžeme tak predpokladať, že ak by sa *šírka nami zvolených rovnako širokých deliacich intervalov o šírke Δx_i zmenšovala*, súčet obsahov takto skonštruovaných obdĺžnikov sa bude blížiť požadovanému skutočnému obsahu nami skúmanej plochy, ktorú sme neprekrývajúcimi sa obdĺžnikmi pokryli. Na nasledujúcich dvoch

obrázkoch 1.2 a 1.3 sú znázornené obdĺžniky, ktorých postup konštrukcie sme si už popísali v myšlienke z príkladu 1.



Obrázek 1.2: Súčty $\sigma_1(D_4)$ a $\sigma_2(D_4)$ obsahov obdĺžnikov pokrývajúcej plochu pod grafom funkcie $f(x) = x^2$ pri delení na 4 subintervaly.



Obrázek 1.3: Súčty $\sigma_1(D_8)$ a $\sigma_2(D_8)$ obsahov obdĺžnikov pokrývajúcej plochu pod grafom funkcie $f(x) = x^2$ pri delení na 8 subintervalov.

Na obrázkoch 1.2 a 1.3 vidíme súčty $\sigma_1(D_n)$ a súčty $\sigma_2(D_n)$, $n \in \{4, 8\}$ obdĺžnikov s výškou rovnou funkčnej hodnote $f(\xi_i)$, pričom za ξ_i volíme v prípade súčtu $\sigma_1(D_n)$ vždy dolné medze subintervalov (vyšrafovaný čiernou farbou) v prípade súčtu $\sigma_2(D_n)$ vždy horné medze subintervalov (vyšrafovaný červenou farbou). Graf zadanej funkcie $f(x) = x^2$ z hora vymedzujúci nami skúmanú plochu je na oboch obrázkoch znázornený modrou farbou. Na prvý pohľad vidíme, že pri jemnejšom delení, tj. na 8 subintervalov, obdĺžniky naozaj lepšie pokrývajú požadovaný obsah plochy.

Podme si pomocou tejto úvahy odvodiť určitý Riemmanov integrál. Najskôr si uvedieme niekoľko najdôležitejších definícií a viet k zavedeniu určitého Riemmanovho intergálu a následne si pomocou nich dopočítame rozpracovaný príklad 1.

Definícia 1 [1] [5] *Delením* uzatvoreného intervalu $\langle a; b \rangle$ nazývame akúkoľvek konečnú množinu bodov $D_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ležiacich v intervale $\langle a; b \rangle$ takú, že $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Body x_0, x_1, \dots, x_n sa nazývajú *deliace body* intervalu $\langle a; b \rangle$; interval $\langle x_{i-1}; x_i \rangle$ sa nazýva *i-ty deliaci interval* a číslo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$ sa nazýva *šírka i-teho deliaceho intervalu*. Platí

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i = b - a.$$

Najväčšie z čísel $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ nazveme *normou delenia* D_n a označíme $\gamma(D_n)$.

Definícia 2 [1][6] Nech f je reálna funkcia obmedzená na intervale $\langle a; b \rangle$ a nech $\xi^{(n)} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ je taká n -tica reálnych čísel, že

$$\xi_1 \in \langle x_0, x_1 \rangle, \xi_2 \in \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \xi_n \in \langle x_{n-1}, x_n \rangle.$$

Potom číslo

$$\sigma(D_n, f, \xi^{(n)}) = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

nazývame *Riemmanovým integrálnym súčtom funkcie f príslušným deleniu D_n intervalu $\langle a; b \rangle$* a danej voľbe n -tice čísel $\xi^{(n)} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

Poznámka 2 [1] Ak pre každé prirodzené číslo n je dané jedno delenie D_n intervalu $\langle a; b \rangle$, hovoríme o *postupnosti $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení intervalu $\langle a; b \rangle$* . Takúto postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení intervalu $\langle a; b \rangle$ nazývame *normálna* alebo o nej hovoríme, že sa *zjemňuje*, ak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(D_n) = 0. \tag{1.1}$$

Príkladom normálnej postupnosti delenia intervalu $\langle a; b \rangle$ je postupnosť, v ktorej za n -té delenie D_n vezmeme delenie intervalu $\langle a; b \rangle$ na n rovnako širokých deliacich intervalov. Potom

$$\gamma(D_n) = \frac{b-a}{n},$$

a teda zrejme platí vzťah 1.1.

Definícia 3 [1][5][6] Nech $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je normálna postupnosť delení intervalu $\langle a; b \rangle$ a nech $\sigma(D_n, f, \xi^{(n)})$ je Riemmanov integrálny súčet funkcie f príslušný deleniu D_n intervalu $\langle a; b \rangle$ pri danej voľbe n -tice čísel $\xi^{(n)} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Hovoríme, že reálne číslo A je určitým Riemmanovým integrálom funkcie f na intervale $\langle a; b \rangle$, ak pre každú normálnu postupnosť delení $\{D_n\}$ a každú postupnosť $\{\xi^{(n)}\}$ existuje vlastná limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(D_n, f, \xi^{(n)}) = A$$

a značíme ju

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Ak existuje Riemmanov integrál funkcie f na intervale $\langle a; b \rangle$ tak hovoríme, že funkcia f je Riemmanovsky integrovateľná na $\langle a; b \rangle$. Tento fakt značíme skrátene $f \in \mathcal{R}(\langle a; b \rangle)$.

Definícia 4 [5] Číslo a v určitom integrále nazývame *dolná medza*, číslo b *horná medza* a $\langle a; b \rangle$ *integračný obor*.

Poznámka 3 Označenie integrálu znakom \int nápadne pripomína písmeno S , teda počiatočné písmeno slova *súčet* (angl. sum). Z definície 3 je jasné, že určitý Riemmanov integrál je skutočne súčtom obsahov nekonečne úzkych obdĺžnikov skonštruovaných podľa postupu opísaného vyššie.

1.1. Výpočet obsahu rovinnej plochy

Už sme si ukázali hlavnú myšlienku vzniku určitého integrálu. Teraz sa pozrieme na to, ako môžeme túto znalosť aplikovať pri výpočte obsahu plochy. Predpokladáme povedomie čitateľa o základných pravidlách výpočtu určitého aj neurčitého integrálu. Najdôležitejšie definície a vzorce, ktoré nás budú sprevádzať celou prácou, si vypíšeme.

Veta 1 [5] (Newton-Leibnizov vzorec) Nech $f \in \mathcal{R}(\langle a; b \rangle)$ a nech existuje primitívna funkcia F k funkcii f na $\langle a; b \rangle$. Potom platí:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (1.2)$$

Poznámka 4 [5] Rozdiel $F(b) - F(a)$ zapisujeme v tvare

$$[F(x)]_a^b. \quad (1.3)$$

Veta 2 [6] Ak je f Riemmanovsky integrovateľná na $\langle a; b \rangle$, potom aj funkcia $|f|$ je Riemmanovsky integrovateľná na $\langle a; b \rangle$ a platí

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Definícia 5 [1] Integrál $\int_a^b f(x)dx$ pre $a > b$ je definovaný vzťahom

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx \quad (1.4)$$

a integrál $\int_a^a f(x)dx$ je definovaný vzťahom

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \quad (1.5)$$

Veta 3 [1] (Substitučná metóda) Nech má funkcia $t = \varphi(x)$ spojitú deriváciu na $\langle a; b \rangle$ a nech f je spojitá na obore hodnôt H_φ funkcie φ . Potom

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt. \quad (1.6)$$

Poznámka 5 Pravidlá pre počítanie určitého integrálu (súčet, rozdiel, súčin, podiel a všetky integračné vzorce) sú rovnaké ako pravidlá pre počítanie neurčitého integrálu.

Riešenie 1 Podme si dopočítať príklad 1: našou úlohou bolo vypočítať obsah plochy ohraničenej osou x , grafom funkcie $f(x) = x^2$ a priamkami $x = 0$ a $x = 4$. Na výpočet takéhoto obsahu využijeme znalosť určitého Riemmanovho integrálu a vetu 1:

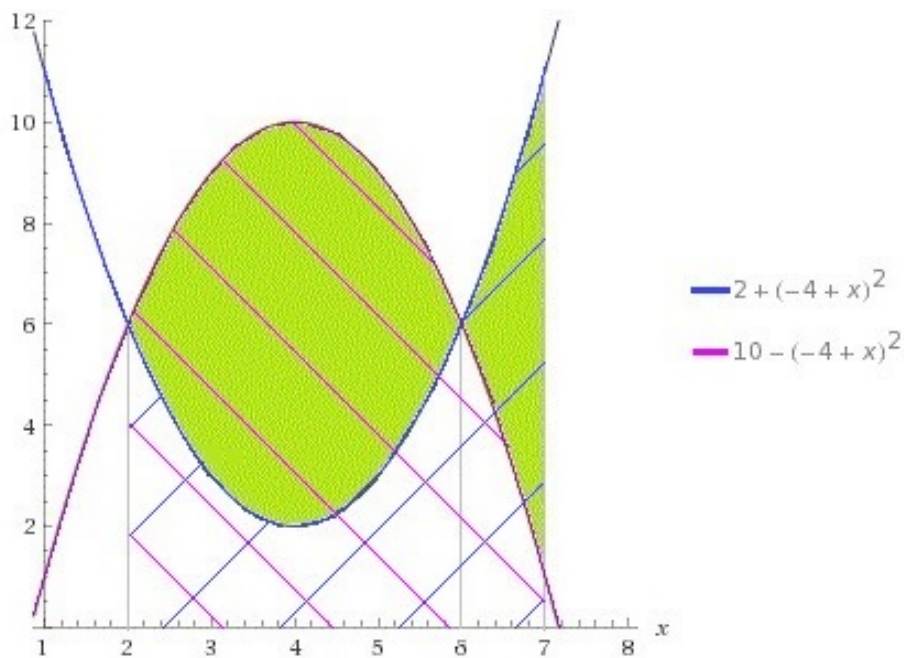
$$\int_0^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \left[\frac{4^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right] = \frac{64}{3}.$$

Dostali sme výsledok $\frac{64}{3}$, ktorý zodpovedá hodnote obsahu plochy opísanej zadanou funkciou $f(x) = x^2$, osou x a priamkami $x = 0$ a $x = 4$.

Už sme si ukázali, ako vypočítať obsah plochy zhora ohraničenej grafom nezápornej funkcie na intervale $\langle a; b \rangle$, zdola osou x a priamkami $x = a$ a $x = b$ pomocou určitého Riemmanovho integrálu. V praxi sa však môžeme stretnúť napríklad aj s prípadom, v ktorom sa bude požadovaná plocha nachádzať medzi dvomi grafmi dvoch rôznych nezáporných funkcií na intervale $\langle a; b \rangle$ a našou úlohou teda bude vypočítať obsah nimi vymedzenej plochy. Podme si vzorec pre výpočet obsahu takejto plochy znovu odvodiť na príklade.

Príklad 2 Vypočítajte obsah plochy vymedzenej funkciami $f(x) = 2 + (-4 + x)^2$ a $h(x) = 10 - (-4 + x)^2$ a priamkami $x = 2$ a $x = 7$.

Myšlienka 2 Na príklade 1 sme si ukázali využitie Riemmanovho integrálu na výpočet obsahu plochy medzi grafom nezápornej funkcie a osou x . Graf funkcie nám vtedy ohraničoval plochu zhora, teda sme počítali obsah plochy *pod* grafom nezápornej funkcie, pričom plocha bola ohraničená zdola osou x . Tentokrát sa nám situácia skomplikovala a plochu, ktorej obsah chceme vypočítať, máme zdola ohraničenú grafom ďalšej funkcie, namiesto osi x . Poďme sa najskôr pozrieť na grafické znázornenie takejto plochy na obrázok 1.4.



Obrázek 1.4: Grafické zobrazenie plochy zo zadania príkladu 2, ktorej obsah chceme vypočítať.

Na obrázku 1.4 vidíme vyobrazený graf funkcie $f(x) = 2 + (x - 4)^2$ modrou farbou a graf funkcie $h(x) = 10 - (x - 4)^2$ vyobrazený fialovou farbou. Vyšrafované plochy pod grafmi týchto funkcií na zadanom intervale $\langle 2; 7 \rangle$ farebne korešpondujú s príslušnými grafmi funkcií, ktoré ich zhora ohraničujú. Zelelou farbou je zvýraznená nami požadovaná plocha, ktorej obsah chceme zistiť. Ten vypočítame ako rozdiel plochy pod grafom funkcie, ktorá nám plochu ohraničuje zhora a plochy pod grafom funkcie, ktorá nám plochu ohraničuje zdola.

Interval, na ktorom plochu počítame, si ale najskôr rozdelíme na dve časti. Deliacim bodom bude bod $x = 6$, pretože sa v ňom grafy funkcií pretli a teda na intervale $\langle 2; 6 \rangle$ je graf fialovej funkcie $h(x)$ vyššie a graf modrej funkcie $f(x)$ nižšie v zmysle funkčných hodnôt. Na intervale $\langle 6; 7 \rangle$ je situácia opačná.

Na intervale $\langle 2; 6 \rangle$ si teda vypočítame obsah plochy vymedzený grafom funkcie $h(x)$ a osou x , od ktorého následne odpočítame obsah plochy vymedzenej grafom funkcie $f(x)$ a osou x . Na intervale $\langle 6; 7 \rangle$ budeme postupovať podobne, ale od obsahu plochy pod grafom funkcie $f(x)$ odpočítame obsah plochy pod grafom funkcie $h(x)$.

Využijeme vlastnosť integrálu, ktorá platí aj pri výpočte neurčitého integrálu a hovorí nám, že rozdiel dvoch intergálov je rovný integrálu z rozdielu dvoch funkcií:

$$\int_a^b h(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b h(x) - f(x)dx.$$

Nakoniec oba obsahy sčítame, tj. požadovaný obsah S spočítame ako

$$S = \left(\int_2^6 h(x)dx - \int_2^6 f(x)dx \right) + \left(\int_6^7 f(x)dx - \int_6^7 h(x)dx \right).$$

Túto rovnicu môžeme zjednodušiť na tvar

$$S = \int_2^6 h(x) - f(x)dx + \int_6^7 f(x) - h(x)dx.$$

Riešenie 2 Príklad 2 by sme samozrejme mohli vypočítať aj s ceruzkou na papieri, no využijeme voľne dostupný softvér wolframalpha, do ktorého si zadáme príkaz `area between curves`. Po spustení príkazu si jednoducho do prednastavených políček v softvéri zadáme predpisy funkcií a interval zo zadania príkladu. Vizualizáciu rozhrania softvéru wolframalpha pre výpočet obsahu plochy medzi grafmi dvoch funkcií zobrazuje obrázok 1.5.

area between curves ☆ ☰

📄 📺 📄 📄
📄 Web Apps 📄 Examples 📄 Random

Assuming "area between curves" refers to a computation | Use as a general topic or referring to a course app instead

■ curve 1:
■ curve 2:
■ variable:
■ lower limit:
■ upper limit:

Input interpretation:

area between	$2 + (-4 + x)^2$ $10 - (-4 + x)^2$	domain	$2 \leq x \leq 7$
--------------	------------------------------------	--------	-------------------

Result:

$$\int_2^6 (8 - 2(-4 + x)^2) dx + \int_6^7 (-8 + 2(-4 + x)^2) dx = 26$$

Obrázek 1.5: [9] Vizualizácia zadania príkladu 2 v softvéri wolframalpha.

Softvér nám odpovedá nasledovné:

$$\int_2^6 ((10 - (x - 4)^2) - (2 + (x - 4)^2)) dx + \int_6^7 ((2 + (x - 4)^2) - (10 - (x - 4)^2)) dx = 26.$$

Číslo 26 nám kvantifikuje plochu medzi grafmi dvoch funkcií $f(x) = 2 + (x - 4)^2$ a $h(x) = 10 - (x - 4)^2$ na intervale $\langle 2; 7 \rangle$. O ploche na obrázku 1.4 vyznačenej zelenou farbou vieme teda povedať, že hodnota jej obsahu je rovná 26 jednotkám štvorcovým a že má tvar ryby :).

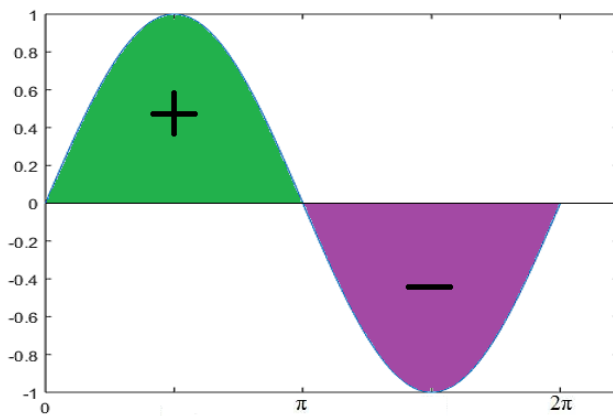
Na príklade 1 sme si ukázali, ako vypočítať obsah plochy pod grafom funkcie. Na ďalšom príklade 2 sme si ukázali, ako vypočítať obsah plochy vymedzenej dvomi grafmi dvoch rôznych funkcií. V obidvoch prípadoch sme mali zadané také funkcie, ktoré boli na celom intervale, cez ktorý sme integrovali nezáporné. Tento predpoklad však v praxi často neplatí. Poďme sa pozrieť na ďalší príklad číslo 3, na ktorom si ukážeme ako postupovať pri výpočte obsahu plochy, keď bude zadaná plocha (aspoň z časti) ležať pod osou x.

Príklad 3 Vypočítajme si obsah plochy vymedzený grafom funkcie $f(x) = \sin(x)$ a osou x na intervale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

Myšlienka 3 Podobne ako v príklade 1 je plocha ohraničená grafom funkcie a osou x. Pre názornosť si skúsme vypočítať obsah zadanej plochy rovnakým spôsobom:

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(0)) = -1 + 1 = 0.$$

Takýmto postupom sme dostali výsledok rovný nule. Tento výsledok samozrejme nie je správny, nakoľko plocha medzi grafom funkcie $f(x) = \sin(x)$ a osou x v medziach $\langle 0; 2\pi \rangle$ nie je nulová. Poďme sa pozrieť, kde nastala chyba.



Obrázek 1.6: Funkcia $f(x) = \sin(x); x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

Na obrázku 1.6 je farebne znázornená plocha vymedzená grafom funkcie $f(x) = \sin(x)$ a osou x , ktorej obsah chceme pomocou určitého Riemmanovho integrálu zistiť. Už na prvý pohľad je jasné, že plocha vyznačená zelenou farbou na intervale $\langle 0; \pi \rangle$ má rovnaký plošný obsah ako plocha vyznačená fialovou farbou na intervale $\langle \pi; 2\pi \rangle$.

Plocha vyznačená fialovou farbou sa ale nachádza *pod* osou x . Ak je teda funkcia na aspoň časti integračného intervalu záporná, musíme si integračný interval rozdeliť na viac intervalov v bodoch, kde graf funkcie pretína os x , a integrovať po častiach. Využijeme pri tom poznatok z predchádzajúceho príkladu, v ktorom sme si ukázali, že obsah plochy ohraničenej dvomi grafmi funkcií je možné vypočítať ako rozdiel dvoch plôch pod dvomi grafmi funkcií, t.j. ako integrál z rozdielu dvoch funkcií.

Na intervale $\langle 0; \pi \rangle$ nám plochu zhora ohraničuje graf funkcie zo zadania $f(x) = \sin x$ a zdola priamka $y = 0$ a na intervale $\langle \pi; 2\pi \rangle$ nám plochu zhora ohraňuje priamka $y = 0$ a zdola graf funkcie $f(x) = \sin x$. Poďme si príklad 3 správne dopočítať.

Riešenie 3 Integračný interval $\langle 0; 2\pi \rangle$ zo zadania sme si rozdelili v bode $x = \pi$ na dva podintervaly $\langle 0; \pi \rangle$ a $\langle \pi; 2\pi \rangle$. Budeme teda počítat' dva integrály, ktorých výsledné hodnoty na záver sčítame:

$$\int_0^{\pi} (\sin(x) - 0) dx = [-\cos(x) - 0]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 1 + 1 = 2$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} (0 - \sin(x)) dx = [0 + \cos(x)]_{\pi}^{2\pi} = \cos(2\pi) - (\cos(\pi)) = 1 + 1 = 2.$$

Nakoniec teda už len sčítame hodnoty výsledkov, ktoré sme dostali postupným integrovaním vyššie, a dostaneme obsah plochy medzi grafom funkcie $f(x) = \sin(x)$ a osou x : $S = 2 + 2 = 4$.

Keď sme funkciu na začiatku integrovali, bez premyslenia si tvaru jej grafu, na celom intervale $\langle 0; 2\pi \rangle$, hodnoty plôch nad a pod osou x sa od seba navzájom odčítali. Preto je potrebné si vždy dopredu rozmyslieť, aký tvar má graf integrovanej funkcie na zadanom intervale.

1.1.1. Výpočet obsahu kruhu

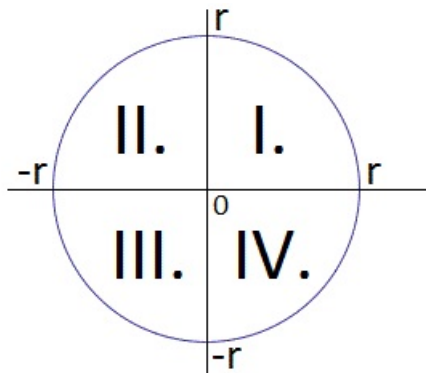
So vzorcom pre výpočet obsahu rovinného kruhu sa už určite stretol každý z nás na základnej škole. Poďme si skúsiť tento známy vzorec odvodiť pomocou znalosti určitého Riemmanovho integrálu za použitia známej rovnice kruhu o polomeri r so stredom v bode $[x_0; y_0]$.

Príklad 4 Odvodme si všeobecný vzorec pre výpočet plošného obsahu kruhu s polomerom r pomocou určitého integrálu jednej premennej.

Myšlienka 4 Na príklade 3 sme si ukázali, že niekedy je potrebné si tvar integrovanej funkcie dopredu premyslieť, aby sme sa vyhli nezmyselným výsledkom. Vieme, že rovnica kružnice so stredom v bode $[x_0, y_0]$ má tvar

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2,$$

kde r predstavuje polomer kružnice, x a y sú premenné. Chceme však počítať iba obsah kruhu, teda nám nezáleží na polohe kruhu, v rovine si ho môžeme nakresliť kamkoľvek a obsah bude rovnaký. Hodnota plošného obsahu však bude logicky závisieť na hodnote polomeru r . To znamená, že môžeme pracovať s najjednoduchšou variantou, a to s kruhom, ktorý má stred v počiatku súradnicovej sústavy, tj. $x_0 = 0$ a $y_0 = 0$. Poďme sa pozrieť na obrázok 1.7 a následne si určíme stratégiu odvodenia vzorca pre výpočet plošného obsahu kruhu.



Obrázok 1.7: Graf kružnice zadanej rovnicou $r^2 = x^2 + y^2$.

Na prvý pohľad je jasné, že celková požadovaná plocha je rovnomerne rozdelená do všetkých 4 kvadrantov, teda nám bude stačiť vypočítať obsah v jednom z nich a následne ho vynásobiť číslom 4, prípadne ako uvidíme o chvíľu, bude stačiť rozdelenie na dve časti. V rovnici $r^2 = x^2 + y^2$ máme dve premenné x a y a preto si v prvom rade zo spomenutej rovnice kružnice vyjadríme jednu premennú (napríklad y), aby sme mohli následne použiť určitý integrál jednej premennej:

$$y^2 = r^2 - x^2.$$

Po odmocnení oboch strán rovnice dostaneme

$$|y| = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

V praxi to zamená, že ak si z rovnice kružnice vyjadríme premennú y , tak funkcia závislej premennej y na nezávislej premennej x v tvare $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ nám vykreslí hornú polkružnicu, tj. časť kružnice ohraničujúcej požadovanú plochu ležiacu v I. a II. kvadrante. Funkcia $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ nám vykreslí spodnú časť grafu kružnice ležiacu v III. a IV. kvadrante. Tieto dve časti sú zrkadlovo rovnaké po osi x . Nezabúdajme pri tom, že polomer r je konštanta, s ktorou tak pri výpočte určitého integrálu aj musíme zaobchádzať.

Riešenie 4 Teraz už len jednoducho spočítame určitý integrál z vyššie vyjadrenej funkcie $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, ktorej graf nám spolu s osou x ohraničuje požadovanú plochu v I. a II. kvadrante. Výsledok následne vynásobíme číslom 2 (obsah plochy kruhu v III. a IV. kvadrante má rovnakú hodnotu). Za medze určitého integrálu volíme body, v ktorých má funkcia $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ nulové funkčné hodnoty. Z obrázku je jasné, že tieto body sú $a = -r$ je dolná medza a $b = r$ je horná medza určitého integrálu. Počítame príklad:

$$\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Nezabúdajme na fakt, že číslo r je v tejto rovnici konštanta a integrujeme podľa premennej x . Takto skonštruovaný integrál by sme samozrejme vedeli vypočítať aj

ručne, ale aby sme sa naučili používať softvér, tak si ho zadáme do softvéru wolframalpha príkazom `integrate (r^2-x^2)^(1/2) dx from -r to r`. Po zadaní tohto príkazu nám softvér odpovedá nasledovné:

$$\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{\pi r^2}{2}.$$

Nakoniec už len zdvojnásobíme túto hodnotu a tak dostaneme všeobecne známy vzorec pre výpočet plošného obsahu kruhu v tvare:

$$S = \pi r^2. \tag{1.7}$$

Poznámka 6 Ak si chceme vypočítať vlastné určité integrály funkcie jednej premennej $f(x)$ v medziach od a do b pomocou softvéru wolframalpha, tak si premyslený tvar integrálu zadáme na stránke www.wolframalpha.com nasledujúcim spôsobom: `integrate f(x) from a to b`.

Už vieme, čo je Riemmanov integrál, ako vznikol aj ako sa počíta. Existujú však rôzne spôsoby ako definovať Riemmanov integrál, my sme si ho definovali pomocou limity. Jedným z významných spôsobov definovania je aj definícia pomocou horných a dolných riemmanovych súčtov, jej presné znenie môžeme nájsť napríklad v publikácii "Základy matematické analýzy a jejich aplikácie v ekonomii" [5]. Zvolila som definíciu pomocou limitne sa k nule blížiacim dĺžkam subintervalov, ktorá nám posluží v nasledujúcich kapitolách na ukážku ďalších spôsobov aplikácie určitého integrálu. Využijeme tiež už odvodenú rovnicu pre výpočet obsahu kruhu (1.7) z príkladu 4 na ďalšie odvodenie vzorcov v nasledujúcej kapitole.

Kapitola 2

Výpočet objemu rotačných telies

V predzadzajúcej kapitole sme si po zavedení určitého Riemmanovho integrálu ukázali aj jednu z jeho možných aplikácií, ktorou bol výpočet plošného obsahu. V tejto časti sa budeme venovať jeho využitiu k výpočtu objemu telesa vzniknutého rotáciou vyššie zmienenej plochy okolo predom zadanej osi, takzvaného rotačného telesa (angl. solid of revolution). Podobne ako v predchádzajúcej kapitole, aj tentokrát si požadované 3-dimenzionálne teleso rozložíme na jednoduchšie časti, ktorých objemy budeme vedieť vypočítať jednoduchými vzorcami. Výsledný skutočný objem celého telesa získame súčtom objemov jednotlivých útvarov, ktorých hrúbka sa bude limitne blížiť k nule, rovnako ako sa blížila šírka obdĺžnikov pri výpočte plošného obsahu. Princíp teda vychádza z definície Riemmanovho integrálu (definícia 3). Najskôr si ukážeme, ako vypočítať objem rotačného telesa pomocou metódy diskov a budeme pokračovať rotáciou plochy pomocou metódy valčekov. Na záver kapitoly budeme os rotácie posúvať.

Výsledné vzorce pre výpočty objemov rotačných telies si odvodíme za pomoci už známych vzorcov, ktoré vhodne skombinujeme. V každej podkapitole si vypočítame ukážkový príklad. Na výpočet aj vykreslenie obrázkov použijeme voľne dostupný softvér wolframalpha. Niektoré obrázky sú vykreslené v programe matlab.

Poznámka 7 Znovu nezabúdajme na fakt, že výsledky všetkých príkladov, nakoľko je táto kapitola venovaná výpočtu *objemu* rotačných telies, budú vždy v

jednotkách kubických. V príkladoch to už nebude osobitne zdôraznené, keďže v praxi by sme jednotky za výslednú hodnotu vyjadrenú číselne písali až vtedy, keď bude zo zadania jasné, o aké jednotky sa jedná.

2.1. Metóda diskov

Ako prvú metódu na výpočet objemu rotačného telesa si ukážeme metódu diskov. Najskôr si odvodíme vzorec pre výpočet objemu rotačného telesa vzniknutého rotáciou rovinatej plochy okolo osi x . Pomocou odvodeného vzorca si spočítame príklad a následne si ukážeme, že vhodnými algebraickými úpravami vieme upraviť odvodený vzorec na vzorec výpočtu objemu rotačného telesa vzniknutého rotáciou rovinatej plochy medzi grafom funkcie $f(x)$ a osou y , okolo osi y . Na záver tejto kapitoly si ukážeme výpočet objemu rotačného telesa vzniknutého rotáciou rovinatej plochy vymedzenej grafmi dvoch funkcií pomocou metódy diskov a ukážeme si aj postup výpočtu objemu takého rotačného telesa na ukázkovom príklade.

2.1.1. Rotácia plochy okolo osi x

Vypočítajme si objem rotačného telesa vzniknutého rotáciou rovinatej plochy, ktorá je zhora vymedzená grafom nezápornej funkcie $f(x)$, zdola osou x a priamkami $x = a$ a $x = b$, okolo osi x .

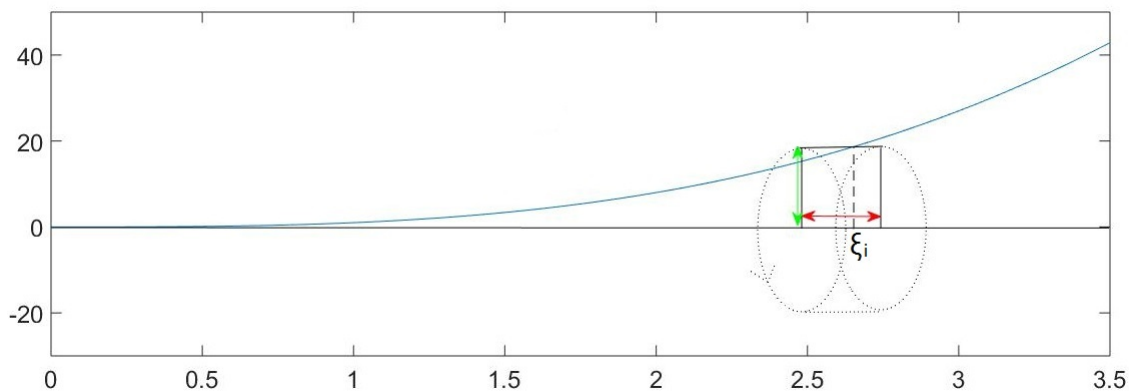
Podobne ako v prvej kapitole, rozdelíme si počiatočný interval $\langle a; b \rangle$ na n subintervalov o šírke $\Delta x_i, i = 1, \dots, n$ podľa delenia z definície 1. Nad každým subintervalom si skonštruujeme rovinný obdĺžnik s výškou $f(\xi_i), \xi_i \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle, i = 1, 2, \dots, n$. Každý obdĺžnik budeme rotovať okolo osi x . Získame tak disk o polomere $f(\xi_i)$ a hrúbke Δx_i . Objem takéhoto disku spočítame podľa známeho vzorca pre výpočet objemu valca, teda ako obsah podstavy (obsah kruhu) vynásobený výškou valce (hrúbkou disku).

Plošný obsah obdĺžniku $S_i = f(\xi_i)\Delta(x_i)$ prenásobíme rovnicou 1.7 pre výpočet obsahu kruhu v tvare $S = \pi r^2$, pričom za polomer r dosadíme výšku obdĺžnika, teda hodnotu $f(\xi_i)$. Tým nám vznikne priestorový útvar nazývaný *disk*. Objem

jedného disku získame dosadením konkrétnych hodnôt do funkcie

$$g_i(\xi_i) = \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i, i = 1, \dots, n.$$

Grafické znázornenie takéhoto disku vidíme na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Konštrukcia disku nad i -tým deliacim intervalom.

Na obrázku 2.1 vidíme graficky znázornený disk, ktorého konštrukciu sme si popísali vyššie. Jeho šírka Δx_i je vyznačená červenou farbou a polomer $f(\xi_i)$ zelenou farbou. Modrou farbou je vyznačený graf nezápornej funkcie $f(x)$.

V ďalšom kroku budeme zjemňovať delenie intervalu $\langle a; b \rangle$, tzn. pridávať deliace body a znižovať šírky diskov tak, že sa limitne budú blížiť k nule. Zároveň sčítame objemy všetkých zužujúcich sa diskov, ktorých bude stále viac:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g_i(\xi_i).$$

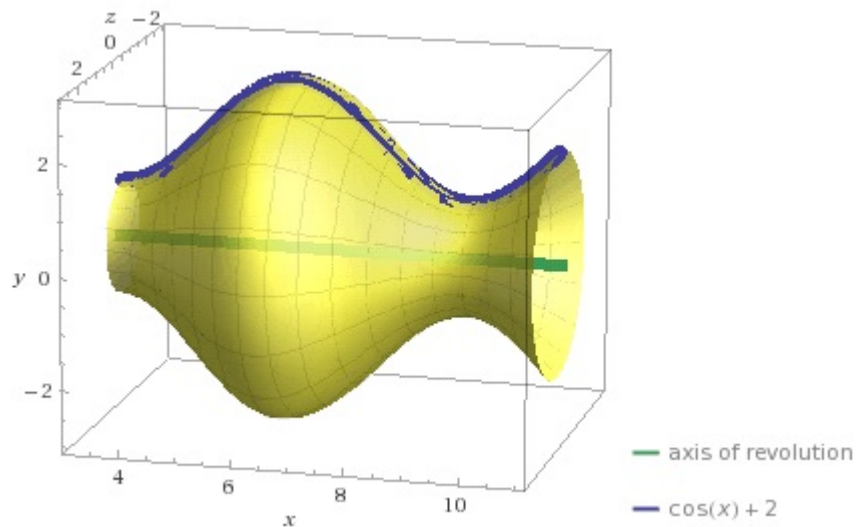
Pripomeňme si tvar funkcie $g_i(\xi_i) = \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i, i = 1, \dots, n$. Limitu nekonečného súčtu v podobnom tvare sme už videli v definícii 3 a nazvali sme ju určitý Riemmanov intergál. Limitu môžeme teda podľa definície 3 prepísať do tvaru

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx. \quad (2.1)$$

Príklad 5 Aký objem má váza, ktorej vnútro vieme popísať rotáciou plochy medzi grafom funkcie $f(x) = 2 + \cos x$ a osou x na intervale $\langle \pi; \frac{7}{2}\pi \rangle$?

Riešenie 5 Keďže už poznáme vzorec pre výpočet objemu rotačného telesa (2.1), jednoducho si doň predpis funkcie zo zadania dosadíme. Následne pre výpočet použijeme voľne dostupný softvér wolframalpha a dostaneme výsledok:

$$\int_{\pi}^{\frac{7}{2}\pi} \pi(2 + \cos x)^2 dx = \pi \left(-4 + \frac{45\pi}{4} \right).$$



Obrázek 2.2: [9] Grafické znázornenie tvaru rotačného telesa popísaného funkciou $f(x) = 2 + \cos x$ na intervale $\langle \pi; \frac{7}{2}\pi \rangle$ z príkladu 5.

Poznámka 8 V prípade záujmu o výpočet vlastných príkladov pomocou softvéru wolframalpha si zadanie príkladu zadáme buď explicitne pomocou vzorca (2.1) a príkazom `integrate pi f(x)^2 from a to b`, alebo priamo pomocou príkazu na výpočet objemu rotačného telesa takto: `volume rotate f(x) from a to b around x`.

2.1.2. Rotácia plochy okolo osi y

Už sme si ukázali, ako pomocou metódy diskov vypočítať objem rotačného telesa vzniknutého rotáciou rovinatej plochy, ohraničenej grafom funkcie $f(x)$ a

osou x , okolo osi x . Pomocou metódy diskov vieme rovnako rotovať aj rovinnú plochu, ohraničenú grafom funkcie $f(x)$, osou y a priamkami $y = f(a)$ a $y = f(b)$, okolo osi y .

Nutnou podmienkou je, že funkcia $f(x)$ je na intervale $\langle a; b \rangle$ prostá. Následne z funkcie $f(x) = y$ vyjadríme premennú x a dostaneme novú funkciu $g(y) = x$. Teraz už môžeme rotovať rovinnú plochu ohraničenú grafom funkcie $g(y)$, osou y a dvomi priamkami $y = f(a)$ a $y = f(b)$, okolo osi y . Využijeme pri tom už odvodený vzorec (2.1), kde namiesto predpisu funkcie $f(x)$ dosadíme predpis jej inverznej funkcie, teda vyššie zmienenej funkcie $g(y)$ a za intergačné medze budeme voliť hodnotu $f(a)$ ako dolnú medzu a hodnotu $f(b)$ ako hornú medzu. Keďže budeme integrovať funkciu premennej y , nekonečne úzku šírku disku označenú dx zmeníme na nekonečne úzku šírku disku označenú dy . Vzorec má tvar:

$$V = \int_{f(a)}^{f(b)} \pi(g(y))^2 dy. \quad (2.2)$$

2.1.3. Rotácia plochy ohraničenej dvomi grafmi funkcií

V predchádzajúcej kapitole sme si ukázali, ako vypočítať obsah plochy ohraničenej dvomi grafmi dvoch rôznych funkcií. V nasledujúcich riadkoch si ukážeme, ako skonštruovať rotačné teleso vzniknuté z rotácie takejto plochy a odvodíme si vzorec pre výpočet jeho objemu. Ukážeme si postupne rotáciu plochy okolo osi x a následne okolo osi y . Predpokladáme, že plocha, ktorú budeme rotovať, na celom intervale $\langle a; b \rangle$ nepretne os rotácie.

Rotácia okolo osi x

Využijeme vzorec pre výpočet obsahu plochy ohraničenej dvomi grafmi dvoch funkcií $f(x)$ a $h(x)$ na intervale $\langle a; b \rangle$, v tvare $S = \int_a^b (f(x) - h(x)) dx$. Tvar tohto vzorca sme si odvodili v prvej kapitole. Predpokladali sme nezápornosť oboch funkcií na celom intervale $\langle a; b \rangle$. Za $f(x)$ sme zvolili tú funkciu, pre ktorú na celom intervale $\langle a; b \rangle$ platí $f(x) \geq h(x)$. Oba grafy oboch funkcií sa na celom intervale $\langle a; b \rangle$ nachádzajú nad osou x . Následne sme si vypočítali obsahy plôch

ohraničených zhora grafmi funkcií a zdola osou x a tie sme od seba odčítali.

Pri výpočte objemu rotačného telesa budeme postupovať rovnakým spôsobom. Vypočítame si teda objemy dvoch rotačných telies pomocou už známeho vzorca (2.1) v tvare $V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx$, ktoré od seba navzájom odpočítame:

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx - \int_a^b \pi(h(x))^2 dx.$$

Využijeme vlastnosť intergálu, že rozdiel integrálov funkcií je rovný integrálu z rozdielu funkcií. Všeobecný vzorec prevzatý zo zdroja [2] pre výpočet objemu rotačného telesa skonštruovaného rotáciou rovinatej plochy vymedzenej dvomi grafmi dvoch funkcií $f(x)$ a $h(x)$ a priamkami $x = a$ a $x = b$ okolo osi x má tvar:

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - h^2(x)) dx. \quad (2.3)$$

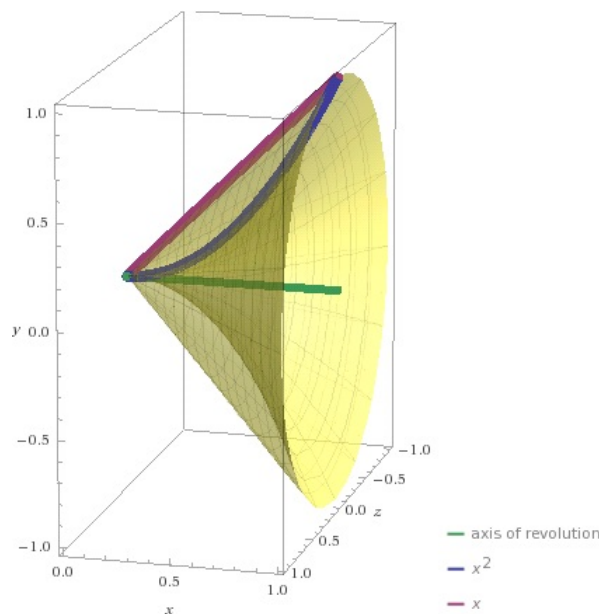
Príklad 6 Vypočítajme si objem V rotačného telesa vzniknutého rotáciou rovinatej plochy okolo osi x , ktorá je ohraničená grafmi dvoch funkcií $f(x) = x$ a $h(x) = x^2$, na intervale $\langle 0; 1 \rangle$.

Riešenie 6 Zadanie príkladu si dosadíme do odvodeného vzorca 2.3 pre výpočet objemu rotačného telesa okolo osi x :

$$V = \pi \int_0^1 ((x)^2 - (x^2)^2) dx.$$

Príklad by sme samozrejme vedeli dopočítať ručne, pomôžeme si však voľne dostupným softvérom wolframalpha. Zadáme si vyššie zmienený integrál a dostaneme výsledok $V = \frac{2\pi}{15}$. Softvér nám zároveň ukázal grafické znázornenie takéhoto telesa, ktoré môžeme vidieť na obrázku 2.3.

Na obrázku 2.3 môžeme vidieť grafy funkcií $f(x) = x$ fialovou farbou a $h(x) = x^2$ modrou farbou. Rotáciou rovinatej plochy medzi nimi okolo osi x vzniklo teleso, na obrázku 2.3 žltou farbou, s objemom $V = \frac{2\pi}{15}$.



Obrázek 2.3: [9] Rotácia plochy medzi grafmi funkcií $f(x) = x$ a $h(x) = x^2$ okolo osi x v medziach $\langle 0; 1 \rangle$

Rotácia okolo osi y

Majme ďalej rovinnú plochu ohraničenú dvomi grafmi dvoch funkcií $f(x)$ a $h(x)$, pričom platí $f(a) = h(a)$ a $f(b) = h(b)$, tj. grafy oboch funkcií sa v koncových bodoch intervalu $\langle a; b \rangle$ pretnú. Predpokladáme tiež, že celá takáto plocha sa nachádza v prvom kvadrante súradnicovej sústavy. Výpočet objemu rotačného telesa vzniknutého rotáciou plochy medzi grafmi funkcií $f(x)$ a $h(x)$ okolo osi y má analogický postup ako v prípade rotácie okolo osi x . Predpokladáme, že zadané funkcie sú na celom intervale $\langle a; b \rangle$ prosté. Funkcie, ktorých nezávislou premennou je premenná x , si následne prevedieme na také funkcie, aby nezávislou premennou bola premenná y . Potom už len dosadíme rozdiel kvadrátov vonkajšieho a vnútorného polomeru rotačného telesa prednásobený konštantou π do určitého integrálu s medzami $f(a)$ a $f(b)$ a dostaneme vzorec:

$$V = \pi \cdot \int_{f(a)}^{f(b)} ((h^{-1}(y))^2 - (f^{-1}(y))^2) dy, \quad (2.4)$$

kde $f^{-1}(y) = x$ je inverzná funkcia k funkcii $f(x)$, $h^{-1}(y) = x$ je inverzná funkcia k funkcii $h(x)$.

2.2. Metóda valčekov

V predchádzajúcej časti sme na výpočet objemu rotačného telesa využili metódu diskov. Rovinnú plochu sme mali ohraničenú grafom funkcie a osou, okolo ktorej sme chceli plochu rotovať. Ak by sme však chceli rotovať napríklad rovinnú plochu ohraničenú grafom funkcie $f(x)$ a osou x okolo osi y , metóda diskov by nám výpočet komplikovala. Preto si ukážeme inú metódu výpočtu, metódu valčekov, ktorá je principiálne podobná metóde diskov.

Podme si odvodiť vzorec pre výpočet objemu rotačného telesa vzniknutého rotáciou rovinnnej plochy, ktorá je zhora vymedzená grafom nezápornej funkcie $f(x)$, zdola osou x a priamkami $x = a$ a $x = b$, okolo osi y .

Podobne ako v predchádzajúcich prípadoch, aj tentokrát si najskôr rozdelíme počiatočný interval $\langle a; b \rangle$ podľa definície 1 na n subintervalov, ktorých šírka bude $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, \dots, n$. Majme tiež n -ticu $\xi^{(n)} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, kde $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$.

Budeme vytvárať n valčekov o polomere x_i s výškou $f(\xi_i), i = 1, 2, \dots, n$ a n valčekov o polomere x_{i-1} s výškou $f(\xi_i), i = 1, 2, \dots, n$. Obsahy podstáv valcov vypočítame pomocou už odvodeného vzorca pre výpočet obsahu kruhu (1.7) v tvare $S = \pi r^2$, pričom za polomer r budeme voliť deliace body. Ako výšku valcov budeme voliť jednu hodnotu prislúchajúcu i -tému subintervalu, a to $f(\xi_i)$, napríklad budeme voliť vždy hodnotu v koncovom bode i -tého subintervalu $\xi_i = x_i$. Objemy valcov skonštruovaných v koncovom bode i -tého subintervalu budeme počítat pomocou známeho vzorca

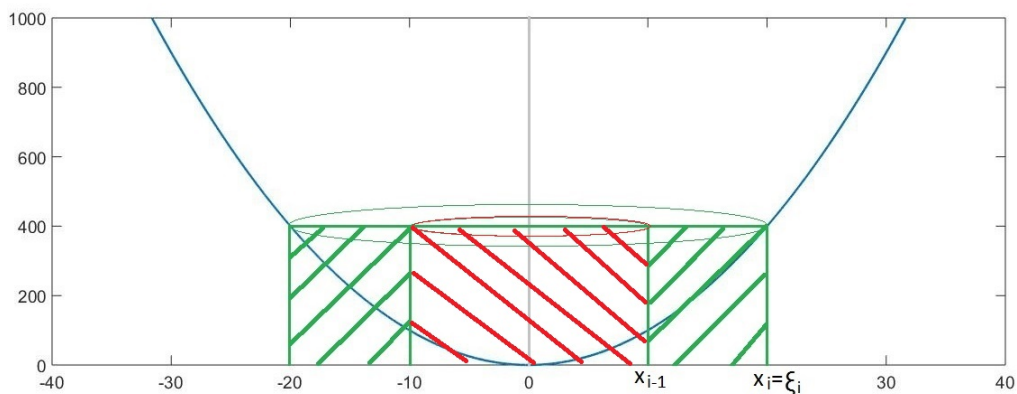
$$V_{x_i, \xi_i} = \pi(x_i)^2 f(\xi_i), i = 1, \dots, n,$$

a objemy valcov skonštruovaných v počiatočnom bode i -tého subintervalu budeme počítat podobne, zmení sa iba polomer:

$$V_{x_{i-1}, \xi_i} = \pi(x_{i-1})^2 f(\xi_i), i = 1, \dots, n.$$

Označme ΔV_i elementárny objem dutého valca (na obr. 2.4 zelenou farbou) prislúchajúci i -tému subintervalu, vzniknutý z rozdielu objemov V_{x_i, ξ_i} a V_{x_{i-1}, ξ_i} , v tvare:

$$\Delta V_i = \pi x_i^2 f(\xi_i) - \pi x_{i-1}^2 f(\xi_i), i = 1, \dots, n.$$



Obrázek 2.4: Elementárny objem dutého valca $\Delta V_i = \pi x_i^2 f(\xi_i) - \pi x_{i-1}^2 f(\xi_i)$ vyznačený zelenou farbou, ktorý vznikol rozdielom objemov valčeka s vonkajším polomerom x_i a valčeka s polomerom x_{i-1} (červenou farbou), pričom oba majú výšku $f(\xi_i)$, $\xi_i = x_i$.

Ďalej budeme upravovať už zmienený vzorec pre výpočet elementárneho objemu dutého valca. Môžeme vytknúť spoločný člen $\pi f(\xi_i)$

$$\Delta V_i = \pi f(\xi_i)(x_i^2 - x_{i-1}^2), i = 1, \dots, n,$$

a následne roznásobíme zátvorku podľa vzorca $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$

$$\Delta V_i = \pi f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1}), i = 1, \dots, n.$$

Z definície 1 vieme, že platí $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, takže platí

$$\Delta V_i = \pi f(\xi_i)(x_i + x_{i-1})\Delta x_i, i = 1, \dots, n.$$

Dostali sme vzorec pre výpočet objemu jedného i -tého dutého valca. Ďalej sčítame všetky objemy všetkých n dutých valcov na celom intervale $\langle a; b \rangle$. Zároveň budeme limitne zjemňovať delenie intervalu $\langle a; b \rangle$ tak, že počet deliacich bodov podľa delenia z vety 1 bude narastať do nekonečna

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi f(\xi_i)(x_i + x_{i-1})\Delta x_i.$$

Na začiatku sme si zvolili, že $x_i = \xi_i$. Zjemňovaním delenia intervalu $\langle a; b \rangle$ sa nám

šírka deliaceho intervalu $\Delta x_i, i = 1, \dots, n$ blíži nule, z čoho plynie, že $x_{i-1} \doteq x_i$ a teda že platí $x_{i-1} \doteq \xi_i$. Výraz $(x_i + x_{i-1})$ môžeme teda prepísať do tvaru $2\xi_i$ a platí

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi f(\xi_i) 2\xi_i \Delta x_i.$$

Limita v tejto rovnici nám už nápadne pripomína limitu z definície 3. Využijeme teda znalosť určitého Riemmanovho integrálu a dostávame výsledný vzorec pre výpočet objemu rotačného telesa vzniknutého rotáciou rovinatej plochy, medzi grafom funkcie $f(x)$, osou x a priamkami $x = a$ a $x = b$, okolo osi y , v tvare:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx \quad (2.5)$$

Myšlienku pre matematické odvodenie vzorca (2.5) som prevzala zo zdroja [2].

Príklad 7 Pomocou odvodeného vzorca (2.5) si vypočítajme objem rotačného telesa vzniknutého rotáciou rovinatej plochy, vymedzenej grafom funkcie $f(x) = (x - 4)^2(x - 1)$, osou x a priamkami $x = 1$ a $x = 4$, okolo osi y .

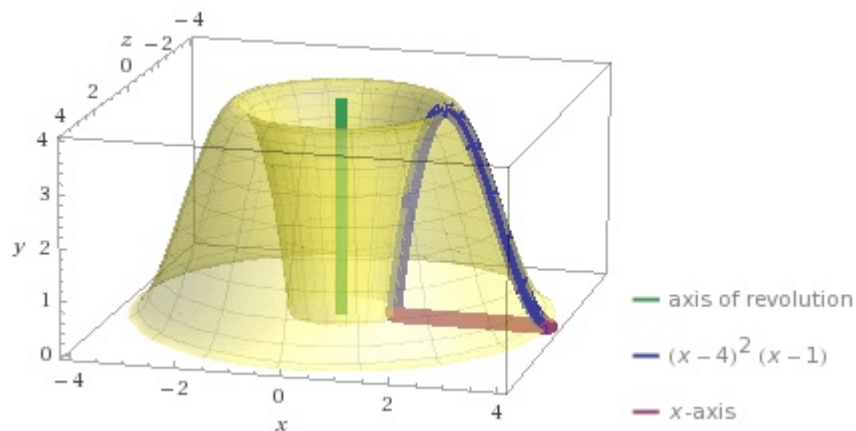
Riešenie 7 Zadaný vyššie zmienený predpis funkcie si dosadíme do už odvodeného vzorca (2.5), tj. počítame integrál

$$V = 2\pi \int_1^4 x(x - 4)^2(x - 1) dx.$$

Opäť využijeme voľne dostupný softvér wolframalpha, do ktorého si zadáme príkaz `integrate 2pi x (x-4)^2(x-1) from 1 to 4` a dostaneme výslednú požadovanú hodnotu objemu rotačného telesa

$$V = \frac{297}{10}\pi.$$

Príkazom `rotate (x-4)^2(x-1) from 1 to 4 around y` nám softvér wolframalpha navyše vykreslí tvar takto vzniknutého rotačného telesa, môžeme ho vidieť na obrázku 2.5.



Obrázek 2.5: [9] Rotačné teleso vzniknuté rotáciou plochy medzi grafom funkcie $f(x) = (x-4)^2(x-1)$ modrou farbou, osou x fialovou farbou, okolo osi y zelenou farbou.

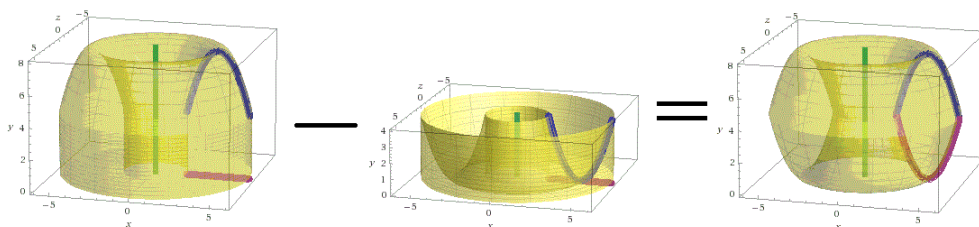
Poznámka 9 V prípade záujmu o výpočet objemu vlastných rotačných telies, ktorých konštrukciu sme si už opísali vyššie, pomocou softvéru wolframalpha, si príklad zadáme buď explicitne pomocou vzorca (2.5), alebo nasledujúcim príkazom: `volume rotate f(x) from a to b around y.`

Podobne ako v prípade metódy diskov, aj tentokrát vieme vypočítať objem rotačného telesa vzniknutého rotáciou plochy okolo osi y ohraničenej dvomi grafmi dvoch funkcií $f(x)$ a $h(x)$, pričom platí $f(x) > h(x)$ na celom intervale $\langle a; b \rangle$, pomocou metódy valčekov. Predpokladom je, že sa celá naša rovinná plocha, ktorú chceme okolo osi y rotovať, nachádza v prvom kvadrante.

Budeme postupovať podobne ako v predchádzajúcich prípadoch, v ktorých sme pracovali s plochou ohraničenou dvomi grafmi dvoch funkcií. Najskôr si vypočítame objem rotačného telesa, vzniknutého rotáciou plochy ohraničenej zhora grafom funkcie $f(x)$, zdola osou x a priamkami $x = a$ a $x = b$, okolo osi y. Následne od hodnoty objemu takéhoto telesa odpočítame hodnotu objemu rotačného telesa, ktoré vzniklo rotáciou plochy, ohraničenej zhora grafom funkcie $h(x)$, zdola osou x a priamkami $x = a$ a $x = b$, okolo osi y. Tak dostaneme objem nami požadovaného rotačného telesa. Grafické vyobrazenie takto skonštruovaného telesa môžeme vidieť na obrázku 2.6.

Odvodenie vzorca pre výpočet takéhoto rotačného telesa je principiálne rovnaké ako v predchádzajúcej podkapitole. Jeho tvar som prevzala z publikácie [7] a vyzerá nasledovne:

$$V = 2\pi \int_a^b x(f(x) - h(x))dx. \quad (2.6)$$



Obrázek 2.6: [9] Výsledné rotačné teleso vzniknuté rotáciou plochy medzi grafmi funkcií $f(x) = -(x - 4)^2 + 8$ fialovou farbou a $h(x) = (x - 4)^2$ modrou farbou, okolo osi y zelenou farbou.

Pre výpočet objemu rotačného telesa vzniknutého rotáciou plochy ohraničenej prostou funkciou $g(y)$, osou y a priamkami $y = a$ a $y = b$, okolo osi x pomocou metódy valčekov, si vzorec (2.5) algebraickými úpravami prevedieme na požadovaný tvar, podobne ako sme si ukázali v sekcii o metóde diskov.

2.3. Posun osi rotácie

V predchádzajúcich častiach sme si ukázali, ako vypočítať objem rotačného telesa, ktoré vzniklo rotáciou rovinatej plochy okolo osi x alebo okolo osi y . Za rotačnú os však môžeme voliť aj inú priamku. V tejto časti si ukážeme, ako sa nám zmenia už odvodené vzorce pre výpočet objemov rotačných telies, keď rotačnú os posunieme tak, aby bola rovnobežná s pôvodnou. Zmienime si aj vzorec pre prípad, v ktorom posunutá os rotácie nebude rovnobežná ani s osou x ani s osou y , ale bude naklonená. Vzorec pre posledný prípad si však nebudeme odvodzovať, ukážeme si iba jeho finálny tvar.

2.3.1. Posun rotačnej osi v metóde diskov

Vzorec pre výpočet objemu rotačného telesa pomocou metódy diskov nám umožňuje vypočítať objem takého rotačného telesa, ktoré vzniklo rotáciou rovinatej plochy vymedzenej grafom funkcie a tou istou osou, okolo ktorej plochu rotujeme.

Pripomeňme si tvar vzorca na výpočet objemu rotačného telesa rotujúceho okolo osi x , ktorý sme si odvodili v predchádzajúcej časti tejto kapitoly:

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx.$$

Podme sa pozrieť, ako sa nám zmení vyššie zmienený vzorec, keď os rotácie x posunieme smerom hore alebo dole o reálne číslo t . Rotačná os teraz bude priamka popísaná rovnicou $y = t$. Predpis funkcie, ktorej graf zhora ohraničuje plochu, sa nezmení. Vznikne nám nová plocha, ktorá bude medzi grafom pôvodnej funkcie $f(x)$ a priamkou $y = t$.

Vráťme sa k postupu konštrukcie diskov, ktoré sme využili pre odvodenie vyššie zmieneného vzorca. Objem každého i -tého disku, $i = 1, \dots, n$, sme vypočítali ako súčin obsahu kruhu o polomere $r = f(\xi_i)$ a nekonečne úzkej šírky deliaceho intervalu Δx_i . Takto zvolený polomer diskov nám udáva vzdialenosť grafu funkcie, t.j. vonkajšej steny rotačného telesa, od osi rotácie. Ak chceme os rotácie posunúť smerom hore do kladných hodnôt a zadaná funkcia, ktorej graf nám ohraničuje rotačnú plochu je na celom intervale $\langle a; b \rangle$ nezáporná, stačí polomer diskov zmenšiť o hodnotu posunu rotačnej osi. Takýto polomer teda bude v tvare $r = |f(x) - t|$. Vzorec pre výpočet objemu rotačného telesa s posunutou osou rotácie x smerom hore bude v tvare

$$V = \int_a^b \pi(f(x) - t)^2 dx. \quad (2.7)$$

V prípade posunutia pôvodnej osi rotácie $y = 0$ smerom dole o hodnotu t , teda do záporných hodnôt, sa nám obsah rotovanej rovinatej plochy zväčší o hodnotu

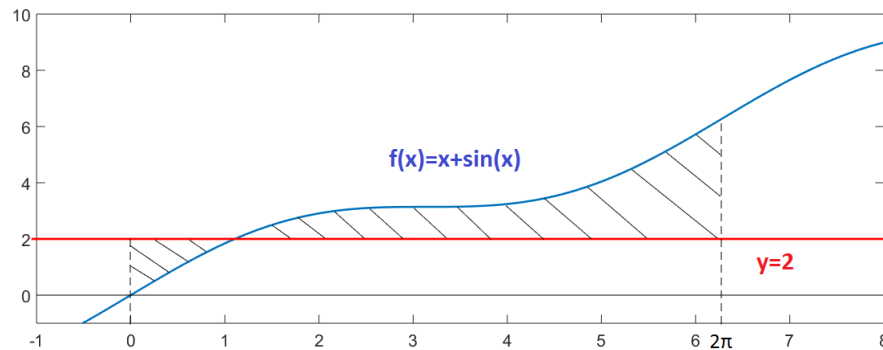
posunu pre násobenú šírkou intervalu $\langle a; b \rangle$. Znamená to teda, že vo vzorci sa hodnota t k predpisu funkcie pričíta, teda polomer rotačného telesa sa zväčší.

Rovnakým postupom by sme odvodili aj vzorec pre výpočet objemu telesa vzniknutého rotáciou plochy medzi grafom funkcie $g(y)$, osou y a priamkami $y = a$ a $y = b$ keď by sme os rotácie y posúvali smerom doprava alebo doľava, pričom predpis funkcie zostane nezmenený. Opäť len upravíme rádius rotačného telesa v pôvodnom vzorci do požadovaného tvaru a dopočítame objem novovzniknutého rotačného telesa.

V prípade, že by nám nová rotačná os $y = t$ pretla graf funkcie $f(x)$ ohraničujúci rotačnú plochu, tj. $f(x) = t$, jednoducho si plochu rozdelíme na dve časti. Prvá časť bude tá časť plochy, ktorá sa nachádza nad rotačnou osou, zvyšok plochy bude tvoriť druhú časť. Každú z nich necháme rotovať okolo priamky $y = t$. Budeme teda počítat dva objemy rotačných telies, ktoré následne sčítame. Táto situácia nám nastane v nasledujúcom príklade 8, v ktorom máme aj graficky znázornené takto vzniknuté rotačné teleso.

Príklad 8 Vypočítajme si objem rotačného telesa vzniknutého rotáciou rovinnnej plochy vymedzenej grafom funkcie $f(x) = x + \sin x$, priamkami $x = 0$, $x = 2\pi$ a rotačnou osou, ktorú popisuje graf priamky zadanej funkciou $y = 2$.

Na obrázku 2.7 môžeme vidieť grafické znázornenie plochy zo zadania príkladu 8, ktorú následne necháme rotovať okolo posunutej osi $y = 2$.



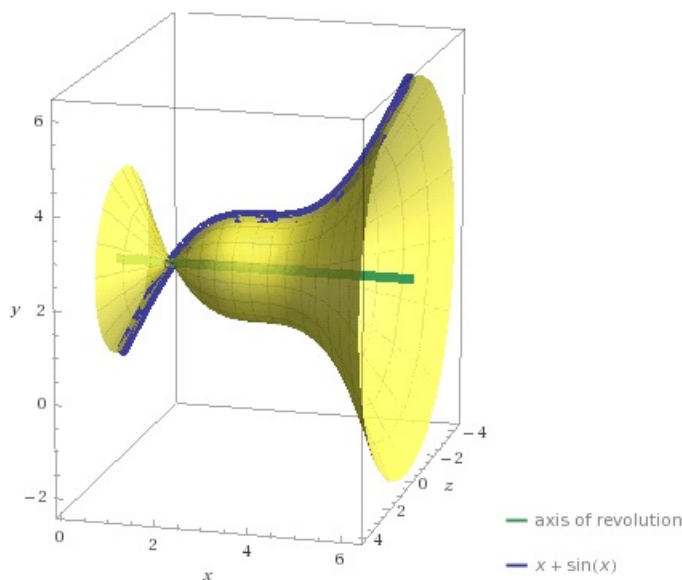
Obrázek 2.7: Rovinná plocha medzi grafom funkcie $f(x) = x + \sin x$ modrou farbou a osou rotácie $y = 2$ červenou farbou, na intervale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

Na obrázku 2.7 vidíme, že nám nová rotačná os pretla graf zadanej funkcie. Budeme teda rotovať dve plochy, jednu ohraničenú zdola grafom funkcie $f(x) = x + \sin x$, zhora osou $y = 2$ a z ľava priamkou $x = 0$, a druhú plochu ohraničenú zhora grafom zadanej funkcie $f(x)$, zdola osou $y = 2$ a z prava priamkou $x = 2\pi$, okolo osi $y = 2$. Dosadením zadaného predpisu funkcie a posunu rotačnej osi do vzorca (2.7) však môžeme vypočítať objem celého takto skonštruovaného telesa a nemusíme ho deliť.

Riešenie 8 Príklad zadaný vyššie by sme samozrejme vedeli vypočítať ručne pomocou vzorca (2.7). Použijeme však voľne dostupný softvér wolframalpha, do ktorého si zadáme: `volume rotate x+sinx around y=2 from 0 to 2pi`. Softvér nám odpovedá, že objem takéhoto telesa je rovný hodnote

$$V = \frac{1}{3}\pi^2 (15 + 8(\pi - 3)\pi).$$

Grafické znázornenie takto vzniknutého rotačného telesa môžeme vidieť na obrázku 2.8.

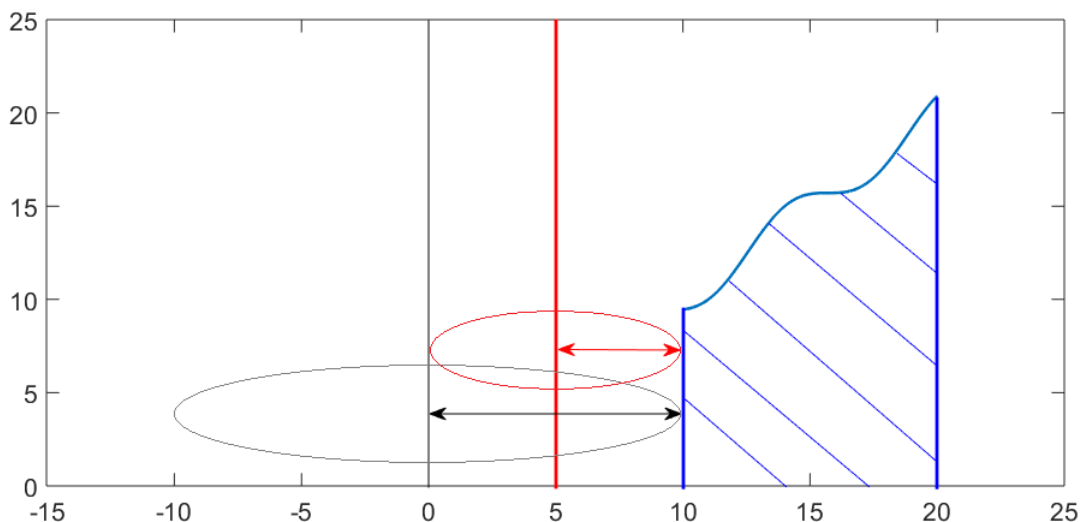


Obrázek 2.8: [9] Rotačné teleso vzniknuté rotáciou dvoch plôch medzi grafom funkcie $f(x) = x + \sin x$ modrou farbou a osou rotácie $y = 2$ zelenou farbou, okolo ktorej plochy nechávame rotovať.

Poznámka 10 V prípade záujmu o výpočet vlastných príkladov na výpočet objemu rotačného telesa napríklad okolo osi x rovnobežne posunutej o hodnotu t pomocou softwéru wolframalpha si príklad zadáme takto: `rotate f(x) from a to b around y=t`.

2.3.2. Posun rotačnej osi v metóde valčekov

Princíp posunutia rotačnej osi v metóde valčekov je podobný, ako sme si už ukázali pri posune rotačnej osi v metóde diskov. Opäť budeme rotačnú os posúvať rovnobežne s pôvodnou osou rotácie. Rovinná plocha, ktorú chceme rotovať sa nám nezmení za predpokladu, že hodnota posunu $t \notin (a; b)$. Zmení sa nám iba polomer rotácie. V prípade, že sa celá naša plocha nachádza v prvom alebo štvrtom kvadrante a posunieme pôvodnú rotačnú os y smerom do prava, polomer sa nám o hodnotu posunu zmenší. Túto situáciu máme znázornenú na obrázku 2.9. Ak pre rovnakú rovinnú plochu posunieme rotačnú os smerom do ľava, polomer rotácie sa nám o túto hodnotu zväčší.



Obrázek 2.9: Rotáciou modrej vyšrafovej plochy okolo osi y (čiernou farbou), t.j. priamkou $x = 0$, nám vznikne rotačné teleso s polomerom vyznačeným čiernou šípkou popísané v predchádzajúcej časti kapitoly. Rotáciou tej istej plochy posunutej rotačnej osi $x = 5$ (červenou farbou) nám vznikne nové rotačné teleso s polomerom vyznačeným červenou šípkou.

Na obrázku 2.9 vidíme, že po posunutí rotačnej osi sa nám plocha nijak nezmenila, zmení sa iba polomer takto vzniknutého rotačného telesa, ktorého objem chceme zistiť. Ukážeme si odvodenie vzorca pre výpočet objemu už zmieneneho rotačného telesa.

Pripomeňme si tvar už odvodeného vzorca pre výpočet objemu rotačného telesa vzniknutého rotáciou rovinnnej plochy vymezenej grafom funkcie $f(x)$, osou x a priamkami $x = a$ a $x = b$ okolo osi y :

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Pre rovnobežný posun pôvodnej rotačnej osi o hodnotu t si musíme najskôr uvedomiť, ktorá časť v pôvodnom vzorci nám určuje vzdialenosť okraja rotačného telesa od osi rotácie, teda už zmieneny polomer rotačného telesa. Vráťme sa k obrázku 2.4, ktorý nám popisuje postup konštrukcie valčekov s polomerom x_i . Znamená to teda, že vo vyššie zmienenom vzorci musíme od takéhoto polomeru odčítať hodnotu t , o ktorú posunieme os rotácie do prava. Výsledný vzorec pre výpočet objemu rotačného telesa vzniknutého metódou valčekov okolo priamky $x = t, t \in \langle 0; a \rangle$ má tvar

$$V = 2\pi \int_a^b (x - t) f(x) dx. \quad (2.8)$$

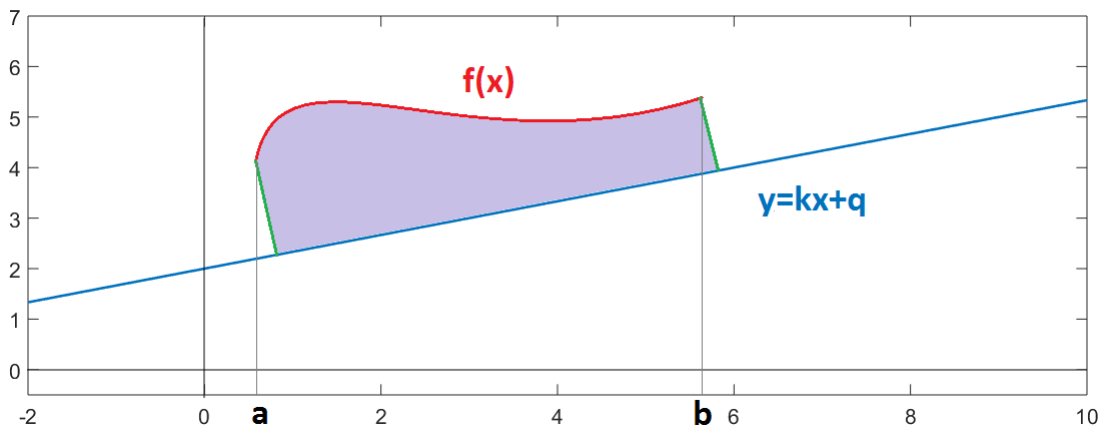
Pri posune osi rotácie do záporných hodnôt sa nám vo vzorci pre výpočet objemu rotačného telesa vzniknutého metódou valčekov okolo priamky $x = t, t \in \langle -\infty; 0 \rangle$ hodnota $|t|$ k pôvodnému polomeru pričíta.

2.3.3. Naklonená os rotácie

V predchádzajúcich dvoch prípadoch posunu rotačnej osi sme si ukázali, ako sa nám zmenia pôvodné vzorce pri posune rotačnej osi rovnobežne s pôvodnou osou rotácie, keď nezmeníme predpis pôvodnej funkcie, ktorej graf predstavuje jednu z hraníc rotujúcej rovinnnej plochy. Tentokrát si os rotácie nakloníme a môžeme ju popísať rovnicou priamky v tvare

$$y = kx + q.$$

Rovinnú plochu znázornenú na obrázku 2.10, ktorú budeme okolo novej naklonenej osi rotovať, nám bude ohraničovať graf funkcie $f(x)$, nová os rotácie $y = kx + q$, ktorej graf leží celý pod grafom funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a; b \rangle$, a dve kolmice k tejto osi, prechádzajúcimi bodmi $[a; f(a)]$, resp. $[b; f(b)]$.



Obrázek 2.10: Farebné znázornenie hrán plochy, ktorá je ohraničená grafom funkcie $f(x)$ (červenou farbou), priamkou $y = kx + q$ (modrou farbou), a dvomi kolmicami k tejto priamke prechádzajúcimi bodmi $[a; f(a)]$ a $[b; f(b)]$ (zelenou farbou).

Plochu vykreslenú na obrázku 2.10 budeme rotovať okolo osi $y = kx + q$ opäť metódou diskov. Vzorec pre výpočet objemu takto vzniknutého rotačného telesa má tvar:

$$V = \frac{\pi}{(k^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \int_a^b (f(x) - kx - q)^2 (1 + kf'(x)) dx. \quad (2.9)$$

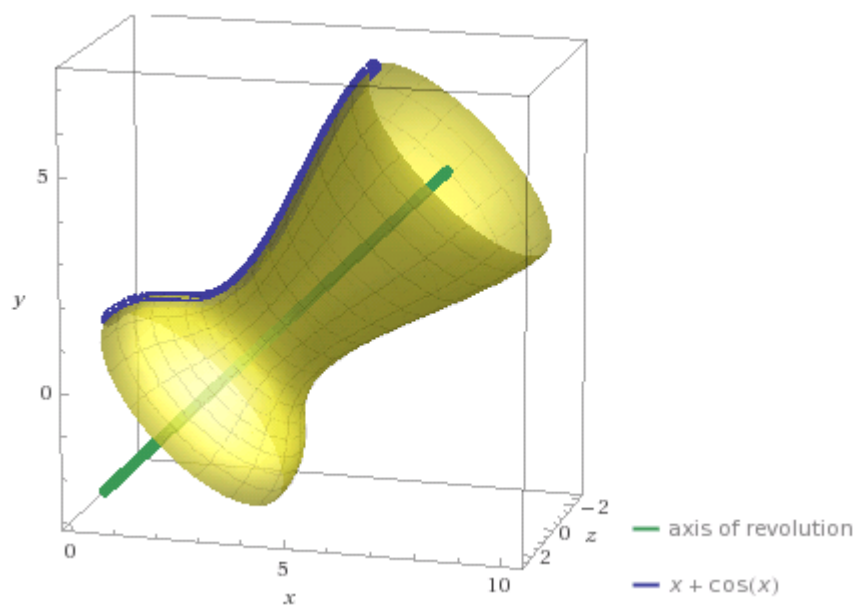
Odvodenie tohto vzorca máme detailne popísané v zdroji [10], odkiaľ som prevzala aj jeho výsledný tvar.

Príklad 9 Vypočítajme si objem rotačného telesa vzniknutého rotáciou rovinnnej plochy ohraničenej grafom funkcie $f(x) = x + \cos x$, grafom priamky $y = x - 3$ a dvomi kolmicami k priamke v bodoch $[0; f(0)]$ a $[2\pi; f(2\pi)]$, rotujúcej okolo zmienenej priamky.

Riešenie 9 Zadaný príklad si vypočítame pomocou voľne dostupného softvéru wolframalpha tak, že si do softvéru zadáme buď konkrétny určitý integrál, alebo pomocou príkazu `rotate f(x) around y from a to b`. Softvér nám odpovedá nasledovné:

$$V = \frac{19\pi^2}{\sqrt{2}}.$$

Výsledný tvar tohto rotačného telesa môžeme vidieť na obrázku 2.11.



Obrázek 2.11: [9] Výsledný tvar rotačného telesa zadaného v príklade 9.

Kapitola 3

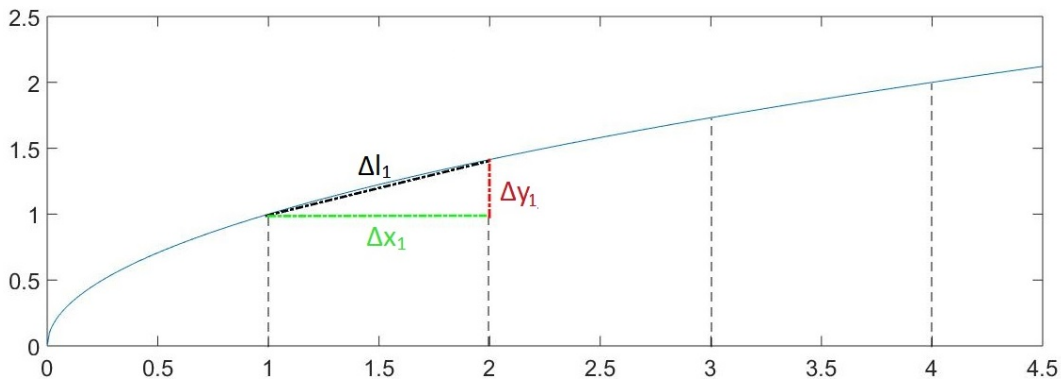
Výpočet dĺžky rovinnej krivky

V tejto kapitole si ukážeme, ako aplikovať určitý Riemmanov integrál na výpočet dĺžky krivky v rovine, ktorá je časťou grafu funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a; b \rangle$. Vzorce, ktoré si postupne odvodíme, majú svoje uplatnenie v mnohých odboroch. Napríklad vo fyzike si môžeme krivku, ktorej dĺžka by nás zaujímala, predstaviť ako trajektóriu pohybujúceho sa bodu. Inak povedané ako množinu všetkých polôh, ktoré bod počas svojho pohybu v čase zaujal a zaujíma nás, akú vzdialenosť za daný čas prešiel. K odvodeniu vzorca pre výpočet dĺžky krivky v rovine použijeme známu Pytagorovu vetu. Zmienené odvodenie si ukážeme na postupe výpočtu konkrétneho príkladu.

Príklad 10 Vypočítajme si dĺžku l krivky, ktorá je časťou grafu funkcie $f(x) = \sqrt{x}$ na intervale $\langle 1; 4 \rangle$.

Myšlienka 10 Z predchádzajúcich kapitôl už vieme, že súčet nekonečne úzkych častí, na ktoré sme si na začiatku rozdelili plochu či priestor, môžeme písať ako určitý Riemmanov integrál. V prípade výpočtu obsahu plochy sme zužovali obdĺžniky a pri výpočte objemu telesa vzniknutého rotáciou rovinnej plochy sme si teleso rozdelili napríklad na disky so šírkou blížiacou sa k nule. Pri výpočte dĺžky krivky budeme postupovať podobne.

Najskôr si rozdelíme zadaný interval podľa definície 1 na 3 subintervaly a nájdeme funkčné hodnoty vo všetkých deliacich bodoch. Každú dvojicu bodov $[x_{i-1}, f(x_{i-1})]$ a $[x_i, f(x_i)]$, $i = 1, 2, 3$ spojíme úsečkou, ktorej dĺžku Δl_i spočítame pomocou Pytagorovej vety. Táto úvaha je zobrazená na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Výpočet dĺžky krivky zadanej funkciou $f(x) = \sqrt{x}$ pre $x \in \langle 1; 4 \rangle$

Z obrázku 3.1 je jasné, že graf funkcie budeme aproximovať úsečkami vyznačenými čiernou farbou, ktoré si označíme $\Delta l_i, i = 1, 2, 3$. Pomocou Pythagorovej vety vypočítame každú hodnotu Δl_i nasledujúcim spôsobom: $(\Delta l_i)^2 = (\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2$, kde Δx_i vyjadruje šírku deliacich intervalov podľa definície 1 a $\Delta y_i = f(x_{i-1}) - f(x_i)$. Zmena šírky Δy_i je závislá na zmene šírky deliaceho intervalu Δx_i .

Pre názornosť si ukážeme postup výpočtu dĺžky úsečky Δl_1 z obrázku 3.1, ktorá nám spája body $[1; \sqrt{1}]$ a $[2; \sqrt{2}]$: $\Delta l_1 = \sqrt{(2-1)^2 + (\sqrt{2}-\sqrt{1})^2}$, kde výraz $\sqrt{2}-\sqrt{1}$ predstavuje hodnotu Δy_1 , pri zvolenej hodnote $\Delta x_1 = 2-1$.

Obdobne si vypočítame aj dĺžku úsečky Δl_2 od bodu $[2; \sqrt{2}]$ po bod $[3; \sqrt{3}]$ a tiež dĺžku úsečky Δl_3 od bodu $[3; \sqrt{3}]$ po bod $[4; \sqrt{4}]$. Súčet výsledných hodnôt týchto troch úsečiek $\Delta l_i, i = 1, 2, 3$, je približne rovný hodnote 3,46 jednotiek.

Ukázali sme si, ako vypočítať približnú dĺžku krivky, ktorá je časťou grafu funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a; b \rangle$. Pôvodný interval $\langle a; b \rangle$ sme si rozdelili na 3 subintervaly a krivku sme aproximovali grafom po častiach lineárnou funkciou. Vypočítané približné dĺžky z každého subintervalu sme na záver sčítali. Poďme sa pozrieť, ako vypočítať požadovanú skutočnú dĺžku krivky. Ako už aj v predchádzajúcich kapitolách, najskôr budeme zjemňovať delenie pôvodného intervalu na nekonečne úzke subintervaly. Následne si ukážeme, ako v problematike výpočtu dĺžky krivky aplikovať už známy určitý Riemmanov integrál.

3.1. Vzorec pre výpočet dĺžky krivky v rovine

S použitím už získaných znalostí Riemmanovho integrálu z definície 3 si odvodíme všeobecný vzorec pre *výpočet dĺžky krivky* zadanej funkciou na predom určenom intervale $\langle a; b \rangle$. Tak, ako v predchádzajúcich kapitolách, aj tentokrát budeme postupovať zjemňovaním delenia intervalu $\langle a; b \rangle$ až na infinitezimálnu dĺžku $\Delta x_i, i = 1, \dots, n$. Zmenšovaním úsečky Δx_i pochopiteľne znižujeme aj úsečky Δy_i a Δl_i , pretože dĺžky týchto úsečiek sú závislé na Δx_i . Spolu tvoria pravouhlý trojuholník a teda majú po dvoch spoločné hraničné body, viz obrázok 3.1.

V nasledujúcej úvahe nadviažeme na myšlienku z príkladu 10 a zovšeobecníme ju. Pre každú úsečku $\Delta l_i, i = 1, \dots, n$ platí:

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}, i = 1, \dots, n$$

Súčtom všetkých úsečiek $\Delta l_i, i = 1, \dots, n$ a následnými úpravami sa budeme približovať požadovanej dĺžke l krivky, teda môžeme písať

$$\sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2},$$

člen $(\Delta x_i)^2$ vytkneme pred zátvorku

$$\sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 \left(1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2\right)}$$

a následne člen $(\Delta x_i)^2$ odmocníme a vytkneme pred odmocninu

$$\sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}.$$

Keďže interval $\langle a; b \rangle$ sme si na začiatku rozdelili na n subintervalov šírky $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ a $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}), i = 1, \dots, n$, môžeme písať

$$\sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}.$$

Pokračujeme zjemňovaním delenia intervalu $\langle a; b \rangle$ tak, že pridávame deliace body. S narastajúcim počtom deliacich bodov sa zvyšuje počet deliacich intervalov a ich dĺžka sa znižuje. Ak sa budeme s počtom deliacich intervalov blížiť nekonečnu, bude se ich dĺžka blížiť nule a nami vypočítaná približná dĺžka krivky sa bude približovať tej skutočnej. Tj.

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right)^2}.$$

Podme si teraz limitu trochu upraviť. Využijeme vzťah pre výpočet derivácie funkcie f v bode x_0 : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Potom

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \sqrt{1 + (f'(x_{i-1}))^2}.$$

Limita v takomto tvare nám náadne pripomína limitu z definície 3. Vzhľadom na limitne sa k nule znižujúcu šírku subintervalov Δx_i platí $x_i \doteq x_{i-1} \doteq \xi_i$. Môžeme teda využiť definíciu 3 Riemmanovho integrálu a dostávame výsledný vzorec pre výpočet dĺžky l rovinatej krivky na intervale $\langle a; b \rangle$ v tvare:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (3.1)$$

Pri výpočte pomocou tohto vzorca však musíme vždy dať pozor na to, či je zadaná funkcia na zadanom intervale diferencovateľná, teda či má na zadanom intervale deriváciu v každom bode.

Myšlienku pre matematické odvodenie vzorca 3.1 ako aj jeho výsledný tvar som prevzala zo zdroja [2].

Riešenie 10 Podme si dopočítať príklad 10 pomocou vzorca 3.1, pričom vieme, že derivácia funkcie $f(x) = \sqrt{x}$ má tvar $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$:

$$l = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2} dx \approx 3,17$$

jednotiek. Výsledok je zaokrúhlený, pre naše účely však dostatočný. Bol vypočítaný pomocou voľne dostupného softvéru wolframalpha, nakoľko počítať ho ručne na papieri by bolo zbytočne zložité.

Poznámka 11 V prípade záujmu o výpočet vlastných príkladov na túto problematiku pomocou softvéru wolframalpha si príkaz na výpočet dĺžky krivky v rovine zadanej funkciou $f(x)$ na intervale $\langle a; b \rangle$ zadáme takto: `arc length f(x) from a to b`.

3.1.1. Výpočet dĺžky rovinnej kružnice

Vypočítajme si nasledujúci príklad na odvodenie všeobecne známeho vzorca dĺžky kružnice. Vzorec na výpočet dĺžky kružnice v rovine využijeme v nasledujúcej kapitole. Toto odvodenie som prevzala zo zdroja [2].

Príklad 11 S využitím určitého integrálu jednej premennej si odvodíme všeobecný vzorec pre výpočet obvodu kružnice.

Myšlienka 11 Najskôr si odvodíme všeobecný vzorec pre výpočet dĺžky oblúka l_1 ležiaceho v prvom kvadrante, ktorý je časťou grafu kružnice danej rovnicou $x^2 + y^2 = r^2$, kde r značí polomer kružnice.

Pre obidve premenné x aj y platí, že sú v tomto kvadrante nezáporné. Vďaka tomuto faktoru si môžeme z rovnice kružnice vyjadriť premennú y . Obdržíme tak predpis funkcie jednej premennej $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, pričom v I. kvadrante platí $x \in \langle 0; r \rangle$. Po zderivovaní tejto funkcie podľa premennej x dostaneme: $f'(x) = \frac{-x}{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$. Túto deriváciu dosadíme do vzorca 3.1 pre výpočet dĺžky krivky:

$$l_1 = \int_0^r \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right)^2} dx.$$

Dostali sme nevlastný intergál vo vlastnom bode r , nakoľko v tomto bode, ktorý je hornou integračnou medzou, neexistuje naša derivácia $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$. Ako však uvidíme vzápätí, vhodnými úpravami problémového zlomku vieme tento

problém vyriešiť. Stačí nám, aby sme sa do bodu r blížili iba limitne. Dĺžka krivky v jednom bode je totiž rovná nule, teda pripočítaním jej hodnoty k výslednej dĺžke krivky sa nič nezmení. Po umocnení zátvorky pod odmocninou dostávame

$$l_1 = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx.$$

V ďalšom kroku roznásobíme výraz pod odmocninou do tvaru

$$l_1 = \int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} dx,$$

výraz $x^2 - x^2$ v čitateli sa nám vynuluje. Následne spod odmocniny vytkneme člen r^2 , odmocníme ho a vytkneme pred integrál (r nie je premenná, rovnako ako v príklade 4 s ním budeme pracovať ako s konštantou)

$$l_1 = r \int_0^r \sqrt{\frac{1}{r^2 - x^2}} dx.$$

Z výrazu v menovateli vytkneme člen r^2 a odmocníme ho

$$l_1 = r \int_0^r \frac{1}{r \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} dx.$$

Pokračujeme substitučnou metódou (podľa vety 3): $t = \frac{x}{r}$, $dt = \frac{1}{r} dx$ a zmeníme medze pre t : $x = 0 \rightarrow t = \frac{0}{r} = 0$ a $x = r \rightarrow t = \frac{r}{r} = 1$:

$$l_1 = r \int_0^1 \frac{r}{r \sqrt{(1 - t^2)}} dt.$$

Výraz $\frac{r}{r}$ sa nám skrúti na jednotku. Následne už vidíme známy integračný vzorec

$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsin(t) + c, c \in \mathbb{R}$. Úpravou a využitím Newton-Leibnizovej vety 1 dostaneme:

$$l_1 = r \cdot [\arcsin(t)]_0^1 = r \cdot [\arcsin(1) - \arcsin(0)] = \pi \frac{r}{2}.$$

Dostali sme vzorec pre výpočet dĺžky jednej štvrtiny kružnice. Poďme si teda dopočítať výsledný vzorec pre výpočet obvodu kružnice.

Riešenie 11 Aby sme dostali dĺžku celej kružnice, jednoducho vynásobíme dĺžku oblúka v prvom kvadrante $l_1 = \pi \frac{r}{2}$ počtom kvadrantov. Pre výpočet obvodu celej kružnice dostávame všeobecne známy vzorec

$$l = 2\pi r. \tag{3.2}$$

Poznámka 12 Keby sme si kružnicu z príkladu 4, ktorej dĺžku sme chceli spočítať pomocou určitého Riemmanovho integrálu, rozdelili na napríklad 8 častí a počítali by sme dĺžku kružnice na intervale $\langle 0; r \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$, vyhli by sme sa problému s neurčitým integrálom.

Kapitola 4

Výpočet plošného obsahu rotačnej plochy

V predchádzajúcich kapitolách sme si zaviedli pojem určitý Riemmanov integrál a ukázali sme si, ako vypočítať objem telesa vzniknutého rotáciou rovinatej plochy okolo zadanej osi. Tiež sme si ukázali, ako vypočítať dĺžku krivky v rovine, ktorá je časťou grafu funkcie $f(x)$. Znalosti z predchádzajúcich kapitôl spojíme a ukážeme si ďalšiu možnosť aplikácie určitého Riemmanovho integrálu. V tejto kapitole sa budeme zaoberať výpočtom plošného obsahu rotačnej plochy (angl. *surface of revolution*) vzniknutého rotáciou krivky, ktorá je časťou grafu funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a; b \rangle$, okolo určitej osi. Vzorec pre výpočet plošného obsahu rotačnej plochy si odvodíme pomocou vzorcov, ktoré už poznáme z predchádzajúcich kapitôl. Následne si na ukážku vypočítame konkrétny príklad.

Odvoďme si všeobecný vzorec pre výpočet obsahu plochy S vzniknutej rotáciou krivky, ktorá je časťou grafu funkcie $f(x)$, okolo osi x , na intervale $\langle a; b \rangle$.

Budeme postupovať podobne ako v prípade metódy diskov pri výpočte objemu rotačného telesa, no tentokrát nás bude zaujímať iba rotačná plocha, ktorá obklopuje rotačné teleso. Pritom využijeme známe alebo v predchádzajúcich kapitolách odvodené vzorce.

Majme krivku, ktorá je časťou grafu nezápornej spojitej funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a; b \rangle$. Predpokladáme, že funkcia $f(x)$ má na intervale $\langle a; b \rangle$ spojitú deriváciu. Rotáciou tejto krivky okolo osi x nám vznikne rotačná plocha, ktorej plošný obsah chceme vypočítať. Rozdeľme si najskôr interval $\langle a; b \rangle$ podľa delenia z definície 1 na n subintervalov. V každom deliacom bode $x_i, i = 0, 1, \dots, n$

nájdeme jemu príslušnú funkčnú hodnotu $f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$. Následne každú dvojicu bodov $[x_{i-1}; f(x_{i-1})]$ a $[x_i; f(x_i)]$ spojíme úsečkou dĺžky $\Delta l_i, i = 1, \dots, n$. Na obrázku 3.1 z predchádzajúcej kapitoly máme graficky znázornenú takúto úsečku. Rotácia jednej takejto úsečky okolo osi x nám opíše plášť zrezaného kužeľa, ktorého plošný obsah vieme vypočítať pomocou známeho vzorca

$$\Delta S_i = \pi (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \Delta l_i, i = 1, \dots, n.$$

Z predchádzajúcej kapitoly už vieme, že rovnica pre výpočet Δl_i má tvar

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

Plošný obsah i -teho zrezaného kužeľa vypočítame pomocou rovnice

$$\Delta S_i = \pi (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}, i = 1, \dots, n.$$

Približný obsah plochy rotačného telesa vypočítame ako súčet obsahov plášťov všetkých zrezaných kuželov. Ak budeme delenie intervalu zjemňovať, šírka Δx_i sa bude blížiť nule a vďaka spojitosti funkcie bude pre každú n -ticu bodov $\xi_i, i = 1, \dots, n$ platiť, že $f(x_{i-1}) \doteq f(\xi_i) \doteq f(x_i)$. Keď pošleme počet deliacich bodov do nekonečna, tj. keď spočítame limitu

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i,$$

potom hodnota tejto limity bude predstavovať skutočný obsah nami skúmanej rotačnej plochy. Tvar limity nám opäť pripomína limitu v definícii určitého Riemmanovho integrálu 3, teda môžeme písať, že

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (4.1)$$

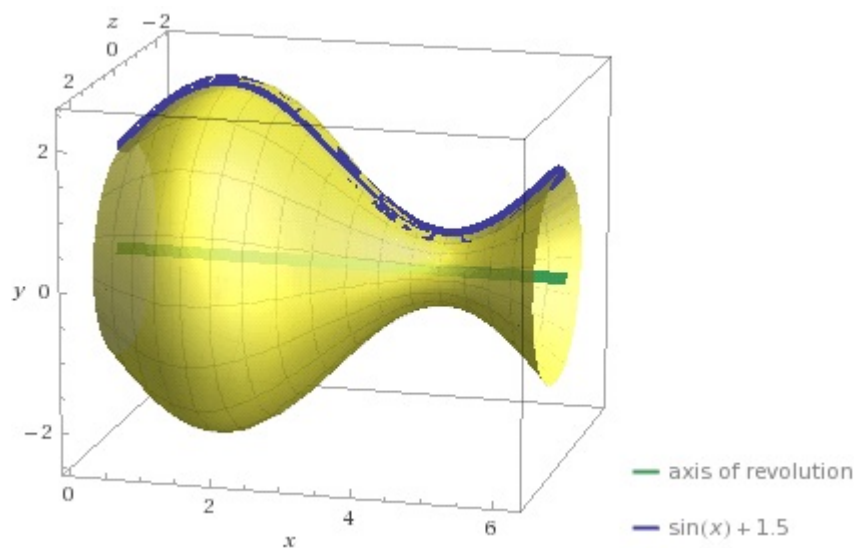
Myšlienku pre matematické odvodenie vzorca (4.1), ako aj jeho výsledný tvar, som prevzala zo zdroja [2].

Príklad 12 Vypočítajme si, koľko farby potrebujeme na natretie malej vázy z vonkajšej strany, ktorej tvar môžeme popísať rotáciou krivky, ktorá je časťou grafu funkcie $f(x) = \sin x + 1,5$, okolo osi x , na intervale $\langle 0; 2\pi \rangle$, pričom 1 dielik na osi x zodpovedá dĺžke 1 cm. Na 1 cm^2 potrebujeme 0,2 ml farby. Spodok vázy budeme natierať 2 krát.

Riešenie 12 Krivku, ktorá nám rotáciou okolo osi x vytvorí vonkajší povrch požadovanej vázy, si aj so zadanými medzami na osi rotácie, dosadíme do už známej rovnice (4.1) pre výpočet obsahu rotačnej plochy. Nesmieme zabudnúť prirátavať podstavu vázy, ktorú budeme natierať 2 krát. Na výpočet obsahu podstavy použijeme vzorec (1.7) pre výpočet obsahu kruhu, pričom jej polomer je rovný hodnote $r = \sin(0) + 1,5$. Budeme teda počítať príklad

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} (\sin x + 1,5) \sqrt{1 + (\cos x)^2} dx + 2 (\pi (\sin(0) + 1,5)^2).$$

Na obrázku 4.1 môžeme vidieť znázornenú vázu zo zadania príkladu 12, aby sme si vedeli predstaviť plochu, ktorej obsah chceme zistiť.



Obrázek 4.1: [9] Váza vzniknutá rotáciou krivky, ktorá je časťou grafu funkcie $f(x) = \sin x + 1,5$, okolo osi x , na intervale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

Premyslenú rovnicu si opäť zadáme do softvéru wolframalpha príkazom `(integrate 2pi(sin x+1.5)(sqrt(1+cos^2 x)) from 0 to 2pi)+2pi(sin 0+1.5)^2` a ihneď dostaneme výslednú hodnotu $S = 86,1462 \text{ cm}^2$. Obsah plochy, ktorú chceme natierať, už len jednoducho prenásobíme výdatnosťou farby a dostaneme množstvo farby V_F , ktoré na natretie vázičky potrebujeme:

$$V_F = S \cdot 0,2 \text{ ml} = 86,1462 \text{ cm}^2 \cdot 0,2 \text{ ml} = 17,23 \text{ ml}.$$

Na natretie vonkajšej steny vázičky a dva krát jej podstavy, pričom tvar vázičky je opísaný rotáciou časti grafu funkcie $f(x) = \sin x + 1,5$ na intervale $\langle 0; 2\pi \rangle$ okolo osi x , budeme pri výdatnosti farby $0,2 \text{ ml/cm}^2$ potrebovať približne 18ml takejto farby.

Poznámka 13 V prípade záujmu o výpočet vlastných príkladov na výpočet obsahu rotačnej plochy pomocou softvéru wolframalpha si predpis funkcie v medziach $\langle a; b \rangle$ zadáme pomocou príkazu: `surface area f(x) from a to b`.

Kapitola 5

Využitie v praxi

Ako vypočítať Riemmanov integrál sme sa už naučili a ukázali sme si aj niektoré jeho možné aplikácie. Kde však nájsť uplatnenie jeho aplikácií v praxi? Uvedieme si niekoľko publikácií, kde sú uvedené príklady z praxe. Každý si tak môže v prípade záujmu vyhľadať čo ho najviac zaujme, všetky uvedené publikácie sú dostupné v knižnici na prírodovedeckej fakulte UPOL.

S určitým integrálom sa stretávame v *ekonómii* napríklad pri výpočte prebytku spotrebiteľa či prebytku výrobcu, ktoré počítame určitým integrálom z krivky dopytu a krivky ponuky. Tiež môžeme vypočítať tvorbu kapitálu a toky investícií, či integráciou Lorenzovej krivky zistiť Giniho koeficient pre meranie miery nerovnosti v dôchodkoch v spoločnosti, ako aj celkové náklady. Viac o tejto problematike sa môžeme dozvedieť zo zdroja [5].

Určitý integrál má svoje uplatnenie aj vo *fyzike*, kde rieši problematiku ako napríklad výpočet práce vykonanej spotrebičom so striedavým prúdom, výpočet veľkosti magnetickej indukcie, výpočet prejdetej dráhy za čas pri známej rýchlosti, výpočet ťažiska tyče, momentu zotrvačnosti aj identity v kvantovej teórii poľa. Príklady na precvičenie s výsledkami je možné dohľadať v zdrojoch [7], [8] a [3].

V neposlednom rade má správne pochopenie a schopnosť počítať určitý integrál veľký význam aj v *štatistike*. V tejto oblasti nám určitý integrál slúži napríklad k výpočtu strednej hodnoty a rozptylu spojitej náhodnej veličiny. Tak tiež napríklad k výpočtu pravdepodobnosti realizácie nejakého javu spojitej náhodnej veličiny zadanej hustotou. Publikáciu k tejto problematike je možné nájsť napríklad v knižnici na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Palackého v Olomouci, pod názvom "Základy počtu pravdepodobnosti a metod matematické statistiky".

Záver

Cieľom mojej bakalárskej práce bolo oboznámiť čitateľa s pojmom určitý Riemmanov integrál a jeho možnými aplikáciami, a zároveň motivovať k prehĺbeniu znalostí o danej téme, nakoľko je to podľa mňa dôležitý aspekt matematiky.

V prvej kapitole sme si zaviedli určitý Riemmanov integrál a ukázali sme si jeho aplikáciu pri výpočte obsahu rovinatej plochy. V ďalších troch kapitolách sme si ukázali ďalšie jeho možné aplikácie, odvodili sme si vzorec pre výpočet objemu a plošného obsahu telies vzniknutých rotáciou okolo osi x aj okolo osi y , neskôr sme osi rotácie aj posunuli rovnobežne s pôvodnou osou. Ukázali sme si tiež ako pomocou určitého integrálu vypočítať dĺžku krivky v rovine.

V poslednej kapitole sme sa pozreli na možné využitia určitého integrálu a jeho aplikácií v praxi. Táto kapitola by mala slúžiť ako motivácia k pochopeniu významu a dôležitosti tejto témy. Ku každej spomenutej oblasti sú spomenuté aj zdroje, kde je možné nájsť v prípade záujmu viac informácií.

Túto tému bakalárskej práce som si vybrala preto, že ma na prednáškach z predmetu KMA/M2N zaujala téma určitého integrálu a chcela som preskúmať jeho aplikácie a možnosti využitia. V závere môžem konštatovať, že v priebehu písania som si prehĺbila znalosti o určitom integrále a tiež znalosti práce s matematickým softwérom wolframalpha.

Literatura

- [1] Jirásek F., Kriegelstein E., Tichý Z.: *Sbírka řešených příkladů z matematiky* STNL Nakladatelství technické literatury, Praha, 1979
- [2] Feřková J., Olach R., Špániková E., Wisztová E.: *Integrální počet a jeho aplikace* Žilinská Univerzita, Žilina, 2010
- [3] Rektorys K. a spolupracovníci: *Přehled užití matematiky* STNL Nakladatelství technické literatury, Praha, 1988
- [4] Rektorys K.: *Co je a k čemu je vyšší matematika* ACADEMIA, Praha, 2001
- [5] Kouřilová P., Pavlačková M.: *Základy matematické analýzy a jejich aplikace v ekonomii* Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2013
- [6] Kopáček J.: *Matematická analýza nejen pro fyziky* MATFYZPRESS, Praha, 2004
- [7] Kopáček J. a kolektiv: *Příklady z matematiky nejen pro fyziky [I]* MATFYZPRESS, Praha, 2005
- [8] Kopáček J. a kolektiv: *Příklady z matematiky pro fyziky [III]* MATFYZPRESS, Praha, 2002.
- [9] www.wolframalpha.com
- [10] *VOLUME OF SOLID OF REVOLUTION ABOUT SLANT LINE*
In: www.emathhelp.net [online], cit. [2017-04-01]. Dostupné z: [https : //www.emathhelp.net/notes/calculus – 2/applications – of – integrals/volume – of – solid – of – revolution – about – slant – line/](https://www.emathhelp.net/notes/calculus-2/applications-of-integrals/volume-of-solid-of-revolution-about-slant-line/)