

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV INTELIGENTNÍCH SYSTÉMŮ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF INTELLIGENT SYSTEMS

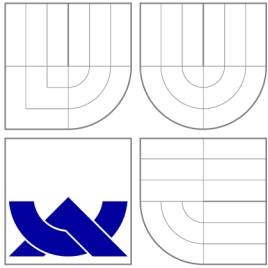
SIMULACE PROUDĚNÍ TEKUTIN POMOCÍ MODERNÍCH VÝPOČETNÍCH METOD

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

PETER PALČEK

BRNO 2010



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV INTELIGENTNÍCH SYSTÉMŮ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF INTELLIGENT SYSTEMS

SIMULACE PROUDĚNÍ TEKUTIN POMOCÍ MODERNÍCH VÝPOČETNÍCH METOD

SIMULATION OF FLUID CIRCULATION USING MODERN COMPUTATIONAL METHODS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

PETER PALČEK

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. PAVLA SEHNALOVÁ

BRNO 2010

Abstrakt

V této bakalářské práci je řešen modelový problém simulace proudění tekutin za pomoci systému TKSL. V práci jsou popsány rovnice definující proudění tekutin, jejich převod do tvaru vhodného pro řešení, jejich výpočet pomocí základních schém metody konečných diferencí v systému TKSL a porovnání tohoto řešení s řešením pomocí explicitní MacCormackovy metody.

Abstract

In this bachelor's thesis a model problem of a fluid flow simulation is solved using TKSL system. The thesis describes the equations defining the fluid flow, their transformation into the form suitable for solution, their calculation using the basic schemes of finite difference method in TKSL system and comparison of this solution with one using explicit MacCormack method.

Klíčová slova

simulace, proudění tekutin, parciální diferenciální rovnice, TKSL, metoda konečných diferencí, výpočetní dynamika tekutin, MacCormackova schéma

Keywords

simulation, fluid flow, partial differential equations, TKSL, finite difference method, computational fluid dynamics, MacCormack method

Citace

Peter Palček: Simulace proudění tekutin pomocí moderních výpočetních metod, bakalářská práce, Brno, FIT VUT v Brně, 2010

Simulace proudění tekutin pomocí moderních výpočetních metod

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením Ing. Pavly Sehnalové. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

.....

Peter Palček
17. mája 2010

Poděkování

Ďakujem svojej vedúcej Ing. Pavle Sehnalovej za prejavenu ochotu a odbornú pomoc počas riešenia mojej bakalárskej práce.

© Peter Palček, 2010.

Tato práce vznikla jako školní dílo na Vysokém učení technickém v Brně, Fakultě informačních technologií. Práce je chráněna autorským zákonem a její užití bez udělení oprávnění autorem je nezákonné, s výjimkou zákonem definovaných případů.

Obsah

1	Úvod	3
2	Fyzikálna definícia prúdenia tekutín	4
2.1	Tekutina	4
2.2	Prúdenie tekutín	4
2.3	Rovnice popisujúce prúdenie tekutiny	5
2.3.1	Rovnica kontinuity	5
2.3.2	Rovnica prenosu hybnosti	6
2.3.3	Rovnica prenosu energie	7
2.3.4	Navier-Stokesova sústava rovníc	7
2.4	Machovo číslo	8
3	Matematické vlastnosti parciálnych diferenciálnych rovníc	9
3.1	Hyperbolické prúdenie	10
3.2	Parabolické prúdenie	10
3.3	Eliptické prúdenie	11
4	Numerický výpočet	12
4.1	Rozdelenie do siete	12
4.1.1	Súradnicový systém	12
4.2	Okrajové podmienky	13
4.3	Používané numerické metódy výpočtu v dynamike tekutín	14
4.3.1	Metóda konečných diferencií	14
4.3.2	Metóda konečných prvkov	15
4.3.3	Metóda konečných objemov	15
4.4	Systém TKSL	16
5	Riešenie vybraného modelu	17
5.1	Model	17
5.1.1	Úprava rovníc	18
5.1.2	Počiatočné a okrajové podmienky	18
5.2	Riešenie v TKSL	20
5.2.1	Zápis rovníc	20
5.2.2	Riešenie pre nadzvukový prítok aj výtok	20
5.2.3	Riešenie pre nadzvukový prítok a podzvukový výtok	22
5.3	Explicitná MacCormackova schéma kráčania v čase	25
5.3.1	Riešenie pre nadzvukový prítok aj výtok	26
5.3.2	Riešenie pre nadzvukový prítok a podzvukový výtok	27

5.4 Zhrnutie dosiahnutých výsledkov	28
6 Záver	30
A Obsah CD	32

Kapitola 1

Úvod

Pre súčasnú vedu a techniku je veľmi dôležité, či už z hľadiska ekonomického, ekologického, alebo bezpečnostného, simulovať rôzne systémy a deje za použitia výpočtovej techniky. Dynamika tekutín je neoddeliteľnou súčasťou mnohých z týchto systémov, ktoré majú pestré využitie či už v priemysle alebo v každodennom použití.

Prúdenie tekutín popisujú integrálne alebo parciálne diferenciálne rovnice, ktorých analytické riešenie je zložité a možné len pri jednoduchých prípadoch. Preto bolo vyvinutých množstvo numerických postupov riešenia prúdenia tekutín, od najzákladnejších až po veľmi sofistikované, avšak ešte mnoho problémov zostáva ťažko riešiteľných (napr. turbulentné prúdenia).

Táto práca sa zaoberá riešením jednoduchého modelu popisujúceho prúdenie tekutiny pomocou systému TKSL. Fyzikálna podstata tekutín a rovnice popisujúce ich prúdenie sú popísané v 2. kapitole. Matematická podstata parciálnych diferenciálnych rovníc je popísaná v 3. kapitole, pričom je kladený dôraz na súvislosť s prúdením tekutín. Metódy numerického riešenia rovníc sú načrtnuté v 4. kapitole, pričom konkrétnejšie sa venujem metóde konečných diferencií, ktorá je pre použitie v systéme TKSL najintuitívnejšia. 5. kapitola je venovaná riešenému modelu, konkrétne jeho popisu, spôsobom riešenia v TKSL a porovnaním s riešením pomocou MacCormackovej metódy.

Kapitola 2

Fyzikálna definícia prúdenia tekutín

2.1 Tekutina

Je to súhrnné označenie pre kvapaliny a plyny a je definovaná ako hmotná sústava, ktorá za stavu termodynamickkej rovnováhy nie je schopná vzdorovať dotyčnicovým napätiam väčším než hraničná hodnota, tzv. počiatočným napätiam odpovedajúcim hranici tečenia. [3]

Dôležité vlastnosti tekutín zohrávajúce úlohu pri voľbe spôsobu výpočtu v CFD (definícia je uvedená v sekcii 2.3):

- viskozita - vnútorný odpor tekutiny proti šmykovej deformácii
- stlačiteľnosť (kompresibilita) - schopnosť látok zmenšovať svoj objem pri zvýšení vonkajšieho tlaku

Základným rozdielom medzi kvapalinami a plynmi je vtom, že kvapaliny sa považujú za nestlačiteľné, čiže zmeny tlaku nemajú na ich hustotu významný vplyv, kdežto plyny sú naopak stlačiteľné - hustota a tlak sú vzájomne previazané. [6]

2.2 Prúdenie tekutín

Prúdenie tekutiny je pohyb tekutiny v jednom smere. Prúdenie tekutín delíme podľa viacerých kritérií, pre schému výpočtu je dôležité delenie podľa závislosti na čase, kedy prúdenie delíme na:

- stacionárne - pole vektoru rýchlosti nezávisí na čase (veľkosť a smer rýchlosti sú v každom bode tekutiny konštantné)
- nestacionárne - rýchlostné pole závisí na čase

Prúdenie viskóznej tekutiny ďalej môže byť [6]:

- laminárne - pri laminárnom prúdení sa častice tekutiny pohybujú po hladkých, navzájom súbežných dráhach, a to vo vrstvách, ktoré po sebe plynule kľžu, pričom nedochádza k fluktuáciám rýchlostí (nepravidelným zmenám okamžitých bodových rýchlostí čo do veľkosti i smeru)

- turbulentné - pri turbulentnom prúdení sa rýchlosť tekutiny, tlak a i. nepravideľne menia, takže pohyb má náhodný, stochastický charakter - preto sa ťažko simuluje. Turbulenciou sa zväčšuje vnútorné trenie, difúzia a vodivosť tepla.

2.3 Rovnice popisujúce prúdenie tekutiny

Tekuté látky sa skladajú z molekúl a atómov, ktoré sú diskretnými objektami, avšak pri makroskopickom pohľade sa tekutiny chovajú ako spojité prostredia. Pri výpočtoch sa predpokladá pohľad makroskopický, čiže pohľad nazerajúci na tekutinu ako na kontinuum. Toto kontinuum je reprezentované ako kontrolný objem, i keď sa hovorí o nekonečne malých kontrolných objemoch.

Rovnice pre prúdenie tekutín sa odvodzujú pre model kontrolného objemu, pričom postupy odvodenia vznikajú kombináciou vlastností modelového kontrolného objemu [2]:

- podľa veľkosti:
 - konečný - má konečné nenulové rozmery, odvodené rovnice sa nazývajú *integrálne*
 - infinitezimálny - jeho veľkosť je výsledkom limitného prechodu (zmenšovania) konečných kontrolných objemov, odvodené rovnice sa nazývajú *parciálne diferenciálne*
- podľa pohyblivosti:
 - nepohyblivý - steny sú pevne definované a tekutina nimi preteká, odvodené rovnice sú v *konzervatívnej* forme (*Eulerovský prístup*)
 - pohyblivý - je unášaný prúdiacou tekutinou a jeho tvar sa deformuje tak, aby stále obsahoval tie isté častice, odvodené rovnice sú v *nekonzervatívnej* forme (*Lagrangeovský prístup*)

Rôzne formy rovníc sú na seba navzájom prevediteľné, aj tak však nie sú z matematického hľadiska ani z hľadiska numerických výpočtov plne ekvivalentné. Matematicky sa líšia v sile požiadavkov kladených na nezávislé premenné a ukazuje sa, že rôzne formy riadiacich rovníc sú rôzne vhodné pre numerické riešenie úloh s prúdením tekutín. [2]

Všetky fyzikálne aspekty prúdiacich tekutín sa riadia tromi základnými zákonmi: zákonom zachovania hmotnosti, druhým Newtonovým zákonom a zákonom zachovania energie. Vyjadrenie týchto zákonov sa dá obecné previesť pomocou integrálnych alebo parciálnych diferenciálnych rovníc.

Počítačová dynamika tekutín (po angl. Computational fluid dynamics - CFD) je potom "umenie toho, ako nahradiť integrály alebo parciálne derivácie v riadiacich rovniciach diskretizovanými algebraickými formami, ktoré sú následne vyriešené s cieľom nájsť hodnoty vlastností prúdových polí v diskretných bodoch" [2].

2.3.1 Rovnica kontinuity

Rovnica kontinuity vychádza zo zákona zachovania hmotnosti, aplikovaného na prúdiacu tekutinu.

Rovnica odvodená pre nepohyblivý (konzervatívna forma) infinitezimálny kontrolný objem je daná:

$$\frac{\delta\rho}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0 \quad (2.1)$$

kde ρ je hustota tekutiny a \mathbf{v} je vektor zložiek rýchlostí (u pre osu x , v pre y a w pre z). Zápis je skrátenej pomocou operátora "nabla": $\nabla = \left(\frac{\delta}{\delta x}, \frac{\delta}{\delta y}, \frac{\delta}{\delta z}\right)$.

2.3.2 Rovnica prenosu hybnosti

Vychádza z druhého Newtonovho zákona a vyjadruje rovnováhu síl v tekutine.

Na kontrolný objem môžu pôsobiť 2 druhy síl - objemové a povrchové. Medzi objemové patrí gravitácia, magnetické sily, zotrvačné sily, elektrostatické sily a podobne. Povrchové sily majú pôvod v tlaku a normálových a šmykových napätiach. Normálové a šmykové napätia majú pôvod vo viskozite tekutín, ale kvôli malej veľkosti vo väčšine tekutín sa normálové napätia niekedy zanedbávajú a miesto toho sa ako normálové napätie uvažuje tlak. Pre jednoznačné odlišenie všetkých druhov síl je tu však tlak uvažovaný ako samostatná veličina. [2]

Konzervatívna forma rovnice prenosu hybnosti je zapísaná nasledovne:

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\rho u)}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) &= -\frac{\delta p}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xx}}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{yx}}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{zx}}{\delta z} + \rho f_x \\ \frac{\delta(\rho v)}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho v \mathbf{v}) &= -\frac{\delta p}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{yy}}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{zy}}{\delta z} + \rho f_y \\ \frac{\delta(\rho w)}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho w \mathbf{v}) &= -\frac{\delta p}{\delta z} + \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{yz}}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{zz}}{\delta z} + \rho f_z \end{aligned} \quad (2.2)$$

kde p je tlak, τ_{ij} predstavuje napätie na rovine kolmé k osi i v smere osi j a f predstavuje objemové sily.

Viskozita

Neznáme τ_{ij} majú pôvod vo viskozite. Pre izotropné tekutiny platí $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$. Ďalej pre newtonovské tekutiny (tj. taká, v ktorej je rýchlosť deformácie a napätia priamo úmerná) existujú vzťahy

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu \frac{\delta u}{\delta x}, \quad \tau_{yy} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu \frac{\delta v}{\delta y}, \quad \tau_{zz} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu \frac{\delta w}{\delta z}, \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} \right), \quad \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\delta w}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta z} \right), \quad \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\delta w}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta z} \right) \end{aligned}$$

pričom μ je molekulárna (dynamická viskozita) a λ je druhý koeficient viskozity. Obe sú materiálové konštanty, pričom pre väčšinu tekutín (väčšinou plynov) je postačujúci vzťah

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

2.3.3 Rovnica prenosu energie

Reprezentuje zákon zachovania energie (prvý termodynamický zákon), ktorý vraví, že celková energia sa v uzavretej sústave zachová.

Rovnica prenosu energie (2.3) sa skladá z tepla privedeného do elementu tekutiny a z práce konanej na elemente tekutiny. Zápis v konzervatívnom tvare vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \rho e}{\delta t} + \nabla \rho e \mathbf{v} = -\nabla \cdot (k \nabla T) + \rho r - p \nabla \mathbf{v} \\ + \frac{\delta(u\tau_{xx})}{\delta x} + \frac{\delta(u\tau_{yx})}{\delta y} + \frac{\delta(u\tau_{zx})}{\delta z} + \frac{\delta(v\tau_{xy})}{\delta x} + \frac{\delta(v\tau_{yy})}{\delta y} \\ + \frac{\delta(v\tau_{zy})}{\delta z} + \frac{\delta(w\tau_{xz})}{\delta x} + \frac{\delta(w\tau_{yz})}{\delta y} + \frac{\delta(w\tau_{zz})}{\delta z} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \rho \end{aligned} \quad (2.3)$$

Kde e je vnútorná energia pre element tekutiny, k je tepelná vodivosť tekutiny, T je teplota, r je hustota tepelného toku, τ_{ij} sú povrchové sily a \mathbf{f} je hustota objemových síl.

2.3.4 Navier-Stokesova sústava rovníc

Sústava rovníc kontinuity (2.1), prenosu hybnosti (2.2) a prenosu energie (2.3) má nekonečne veľa riešení (5 rovníc a 7 neznámych). Preto je potrebné doplniť ďalšie dve rovnice definujúce vzťahy medzi premennými, napr. stavovú rovnicu pre ideálny plyn:

$$p = \rho RT / M_s$$

kde R je plynová konštanta a M_s je molárna hmotnosť príslušného plynu, a tiež vzťah vnútornej energie, teploty a tlaku $e = e(p, T)$:

$$e = c_p T - \frac{p}{\rho}$$

kde c_p je merné teplo pri konštantnom tlaku. V špeciálnych prípadoch (hlavne pri nestlačiteľných tekutinách) môže mať vzťah vnútornej energie a tlaku tvar $e = c_v T$, kde c_v merné teplo pri konštantnom objeme.

Rovnice je však potrebné uviesť v jednotnej forme. Pre počítačové výpočty je najvhodnejšia konzervatívna forma, pretože divergencia pôsobí na tok príslušnej veličiny, pričom pri nekonzervatívnej forme pôsobí divergencia na primitívne veličiny (zložky rýchlosti a energie). Tento rozdiel je badateľný hlavne pri veľkých gradientoch premenných (napr. pri rázových vlnách). [2]

Zápis Navier-Stokesovej sústavy rovníc v konzervatívnom tvare je uvedený v rovnici (2.4). \mathbf{U} sú konzervatívne závislé premenné, \mathbf{F}_i sú premenné konvektívneho toku, \mathbf{G}_i sú premenné difúzneho toku a \mathbf{B} sú zdrojové členy. Ak zanedbáme premenné difúzneho toku \mathbf{G}_i , systém rovníc sa zjednoduší na Eulerov systém rovníc.

$$\frac{\delta \mathbf{U}}{\delta t} + \frac{\delta \mathbf{F}_i}{\delta x_i} + \frac{\delta \mathbf{G}_i}{\delta x_i} = \mathbf{B} \quad (2.4)$$

pričom

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_j \\ \rho E \end{bmatrix}, \mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} \rho v_i \\ \rho v_i v_j + p \delta_{ij} \\ \rho E v_i + p v_i \end{bmatrix}, \mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{ij} \\ -\tau_{ij} v_j + q_i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho F_j \\ \rho r + \rho F_j v_j \end{bmatrix}$$

kde δ_{ij} značí Kroneckerovu deltu s hodnotou $\delta_{ij} = 1$ pre $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ pre $i \neq j$. E predstavuje celkovú energiu danú vzťahom

$$E = e + \frac{1}{2} v_j v_j$$

ktorá má s tlakom a teplotou nasledujúce vzťahy:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{c_v} \left(E - \frac{1}{2} v_j v_j \right) \\ p &= (\kappa - 1) \rho \left(E - \frac{1}{2} v_j v_j \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

kde κ je Poissonova konštanta.

2.4 Machovo číslo

Machovo číslo je určené vzťahom

$$M^2 = \frac{\text{zotrvačné sily}}{\text{tlakové sily}} = \frac{\rho u^2 l^2}{\frac{\rho a^2}{\kappa} l^2} = \kappa \frac{u^2}{a^2} \approx \frac{u^2}{a^2}$$

kde l je charakteristický rozmer, u je rýchlosť tekutiny a a je rýchlosť zvuku. Pri odvodení sa však vylúčila Poissonova konštanta κ , čo treba mať na zreteli pri posudzovaní podobnosti. [6]

Význam Machovho čísla spočíva v určení stlačiteľnosti tekutiny - v nestlačiteľných tekutinách je Machovo číslo veľmi malé. Tiež sa podľa neho delí prúdenie na *podzvukové* ($M < 1$), *zvukové* ($M = 1$) a *nadzvukové* ($M > 1$). Toto delenie však nie je rovnaké. Napríklad prúdenie vzduchu je možné považovať za stlačiteľné a neviskózne, ak ($0.3 \leq M \leq 5$). Tento rozsah sa ďalej rozdeľuje na ($0.3 < M < 0.8$), kedy je prúdenie zvuku *podzvukové*, pre ($0.8 \leq M \leq 1.2$) je prúdenie vzduchu *zvukové* a pre ($1.2 < M \leq 5$) *nadzvukové*. Pre veľkosti $M > 5$ sa prúdenie stáva *hypersonické*.

Kapitola 3

Matematické vlastnosti parciálnych diferenciálnych rovníc

Väčšina typických rovníc prúdenia sa dá vyjadriť modelovou rovnicou druhého rádu o dvoch neznámych (3.1). Koeficienty A až G môžu byť konštanty - rovnica je lineárna - alebo funkcie, kedy je rovnica nelineárna.

$$A \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + B \frac{\delta^2 f}{\delta xy} + C \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} + D \frac{\delta f}{\delta x} + E \frac{\delta f}{\delta y} + Ff + G = 0 \quad (3.1)$$

Existujú tri základné kategórie lineárnych rovníc, ktoré je možné stanoviť na základe koeficientov pri derivácii vyššieho rádu [4]:

- hyperbolické - $B^2 - 4AC < 0$
- parabolické - $B^2 - 4AC = 0$
- eliptické - $B^2 - 4AC > 0$

Klasifikácia rovnice je možná aj inými matematickými prostriedkami, napríklad (aj pre klasifikáciu nelineárnych rovníc) je možné použiť charakteristiky. V prípade PDR druhého rádu je klasifikácia nasledovná [6]:

- hyperbolická - existujú dve reálne charakteristiky
- parabolická - existuje jedna reálna charakteristika
- eliptická - obe dve charakteristiky sú imaginárne

V aplikáciách CFD závisia od typu rovnice výpočetné schémy a tiež špecifikácia okrajových podmienok. Mnoho rovníc popisujúcich prúdenie je zmiešaného typu, preto je dôležité zvoliť vhodnú metódu a spôsob aplikácie okrajových podmienok. [1]

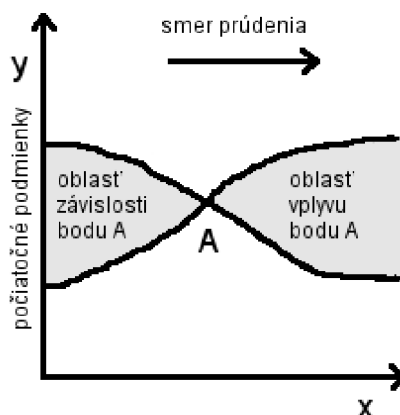
Na základe typu rovníc, ktoré popisujú prúdenie, môžeme definovať tiež prúdenie ako hyperbolické, parabolické a eliptické. Prehľad klasifikácie fyzikálneho správania niektorých najdôležitejších prúdení je uvedený v tabuľke 3.1.

fyzikálny model	stacionárne prúdenie	nestacionárne prúdenie
viskózne prúdenie	eliptické	parabolické
neviskózne prúdenie	M < 1 - eliptické	hyperbolické
	M > 1 - hyperbolické	
tenká vrstva tekutiny	parabolické	parabolické

Tabuľka 3.1: Matematická klasifikácia rovníc prúdenia podľa fyzikálneho modelu [6]

3.1 Hyperbolické prúdenie

Oblasť pôsobenia bodu je určená dvoma charakteristickými krivkami, ktoré ním prechádzajú (pri trojrozmernom priestore sú to dve kuželové plochy s vrcholom v danom bode). Tieto krivky vymedzujú oblasť pôsobenia bodu. Stav bodu závisí iba od diania v oblasti proti prúdu, ktorá je obmedzená danými charakteristickými krivkami. Hyperbolické prúdenie je zobrazené na obrázku 3.1. Hyperbolické rovnice neobsahujú vyhladzovacie mechanizmy.



Obrázok 3.1: Hyperbolické prúdenie v 2D

Z toho vyplýva, že ak sú počiatočné, alebo okrajové podmienky nespojité, nespojitosť sa preniesť do vnútra oblasti. [6]

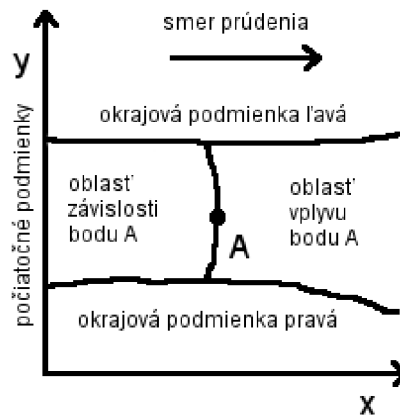
Príklad hyperbolickej rovnice:

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} - \alpha^2 \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = 0$$

3.2 Parabolické prúdenie

Každým bodom prechádza len jedna charakteristická krivka (pri trojrozmernom priestore plocha). Táto krivka oddeľuje oblasť závislosti od oblasti pôsobenia, pričom je ohraničená okrajovými podmienkami. Tak ako pri hyperbolickom prúdení, stav bodu závisí iba od stavu tekutiny proti prúdu. Parabolické prúdenie je zobrazené na obrázku 3.2.

Parabolické diferenciálne rovnice sa často chápu ako limitný prípad hyperbolickej rovnice, ale disipatívny mechanizmus obsiahnutý v parabolickej rovnici spôsobuje, že i keď sú počiatočné podmienky nespojité, riešenie vo vnútri oblasti riešenia bude spojité. [6]



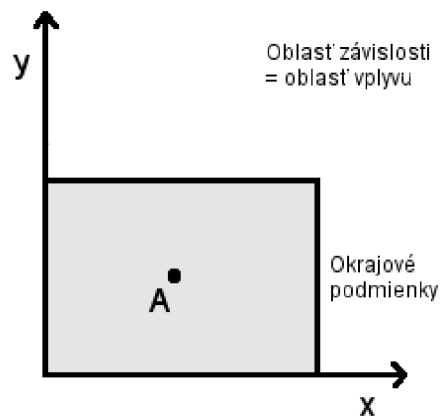
Obrázok 3.2: Parabolické prúdenie v 2D

Príklad parabolickej rovnice:

$$\frac{\delta u}{\delta t} - \alpha \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = 0 \quad (\alpha > 0)$$

3.3 Eliptické prúdenie

Pri eliptickom prúdení (zobrazené na obrázku 3.3) neexistujú žiadne charakteristické krivky, to znamená, že stav bodu je ovplyvnený celou oblasťou prúdenia. Je to spôsobené viskozitou a podzvukovou rýchlosťou prúdenia. Eliptické prúdenie je vždy podzvukové a neobsahuje závislosť na čase. Na rozdiel od parabolického a hyperbolického prúdenia sa v ňom často vyskytujú cirkulácie.



Obrázok 3.3: Eliptické prúdenie v 2D

Príklad eliptickej rovnice:

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 0$$

Kapitola 4

Numerický výpočet

Priestor pri výpočte prúdenia je potrebné diskretizovať, čiže je potrebné pokryť ho uzlovými bodmi - vytvoriť sieť. Tiež je potrebné určiť okrajové a počiatočné podmienky. Následne je potrebné vypočítať hodnoty veličín vybranou metódou výpočtu.

4.1 Rozdelenie do siete

Dôležitou súčasťou riešenia je rozdelenie výpočtovej oblasti do siete. Sieť môže byť [6]:

- štruktúrovaná - rozloženie bodov v sieti má určitú pravidelnú štruktúru
- neštruktúrovaná - bez viditeľnej štruktúry
- hybridná - obsahuje zmiešané prvky (napr. trojuholníky a štvoruholníky)
- zonálna - má časti (zóny) štruktúrované alebo neštruktúrované

4.1.1 Súradnicový systém

Rovnice pre prúdenie sú odvodené v kartézskom súradnicovom systéme, kde majú najjednoduchší tvar. Pre diskretizáciu je však tiež vhodné použiť sieť bodov umiestnených na súradnicových krivkách krivočiareho súradnicového systému. Je to z dôvodu jednoduchšej formulácie okrajových podmienok.

Bežné prístupy diskretizácie a riešenia sú [6]:

- riešenie vo **fyzikálnom priestore v kartézskom súradnicovom systéme** - Priame riešenie diferenciálnych rovníc prúdenia vo fyzikálnom priestore v kartézskom súradnicovom systéme má výhodu, že diferenciálne rovnice prúdenia majú najjednoduchšiu formuláciu, ale okrajové podmienky sa obecnne veľmi zložito formulujú na obtekaných stenách.
- riešenie v **transformovanom priestore v kartézskom súradnicovom systéme** - Riešenie diferenciálnych rovníc prúdenia v transformovanom priestore je založené na transformácii krivočiareho súradnicového systému konformného s hranicami vo fyzikálnom priestore na kartézsky súradnicový systém v transformovanom priestore. Súčasne sa musia transformovať aj diferenciálne rovnice prúdenia. Tie majú zložitejší tvar, ale riešia sa v pravouhlom súradnicovom systéme s jednoduchými okrajovými podmienkami. Výsledok sa inverznou transformáciou prepočíta späť do fyzikálneho priestoru.

- riešenie vo **fyzikálnom priestore v krivočiariom súradnicovom systéme** - Priame riešenie rovníc prúdenia vo fyzikálnom priestore s krivočiarymi súradnicami vyžaduje, aby sa diferenciálne rovnice prúdenia prepísali z kartézskeho do krivočiareho súradnicového systému. Rovnice sú zložitejšie, ale okrajové podmienky na stenách sú obyčajne jednoduché, lebo hranice sú konformné so súradnicovými čiarami. V zložitom krivočiariom súradnicovom systéme je najvýhodnejšie riešenie rovníc prúdenia v integrálnom tvare, lebo rovnice nie je potrebné prepisovať. Predpokladom riešenia je generovanie siete uzlových bodov v krivočiariom súradnicovom systéme, ktorý je konformný s hranicami oblasti. Zložitejšie oblasti sa rozdelia na podoblasti, aby táto podmienka bola splnená.

4.2 Okrajové podmienky

Okrajové podmienky sú pri riešení diferenciálnych rovníc prúdenia pomocné funkcie. Správnosť ich voľby určuje fyzikálnu adekvátnosť riešenia rovníc. Teória týkajúca sa rozsahu okrajových podmienok pre stlačiteľné prúdenia nie je zatiaľ postačujúca. Praktické výpočty CFD sú v oblasti okrajových podmienok odkázané na fyzikálne predstavy a správnosť výsledkov simulácie. [6]

Rozlišujeme úlohy interného prúdenia, kedy tekutina preteká oblasťou R ohraničenou hranicou δR a úlohy externého prúdenia, kedy tekutina ohraničenú oblasť obteká.

Keďže model riešený v tejto práci je interného prúdenia, ďalej sa budem zaoberať len interným prúdením. Pri internom prúdení sú hranice, kde tekutina vstupuje a vystupuje otvorené, pričom iné časti sú definované ako tuhé (tekutina nemôže cez tieto časti pretekať).

Okrajové podmienky sa najčastejšie rozdeľujú na [6]:

- Dirichletove podmienky, kedy $f = f_0$ na hranici δR
- Neumanove podmienky, kedy $\frac{\delta f}{\delta n} = f_0$ alebo $\frac{\delta f}{\delta s} = f_0$ na hranici δR
- zmiešané podmienky

V Neumanovej a zmiešanej podmienke sa rozumie derivácia podľa normály smerom von z oblasti R .

Dôležitým hľadiskom určenia okrajových podmienok je ich delenie na *fyzikálne*, ktoré sú určené priamo, a *numerické*, ktoré je potrebné extrapolovať. Ich počet závisí od smeru charakteristík, ktorý je určený rýchlosťou prúdenia v závislosti od rýchlosti zvuku. V tabuľke 4.1 je zobrazený vzťah počtu fyzikálnych a numerických podmienok od rýchlosti prúdenia na vstupe a výstupe pre jednorozmerné prúdenie.

		Podzvukový	Nadzvukový
Vstup	Fyzikálna	2	3
	Numerická	1	0
Výstup	Fyzikálna	1	0
	Numerická	2	3

Tabuľka 4.1: Fyzikálne a numerické okrajové podmienky

4.3 Používané numerické metódy výpočtu v dynamike tekutín

4.3.1 Metóda konečných diferencií

(po angl. finite difference method - FDM) Algoritmus výpočtu pozostáva z nahradenia parciálnych diferenciálnych rovníc diferenčnými rovnicami, ktorých hodnoty sú odvodené z najbližších susedných uzlov predmetnej oblasti (siete). Vyžaduje ortogonálne delenie výpočtovej oblasti.

Schémy metódy konečných diferencií

Existuje množstvo schém pre výpočet rovníc, ktorých použiteľnosť závisí od typu rovnice a požadovanej presnosti. Základom každej schémy sú diferencie, ktoré delíme na centrálné (4.1), s krokom "dopredu" (4.3) a s krokom "dozadu" (4.5).

Všeobecný zápis centrálnej diferencie (central difference) je nasledovný:

$$\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)_i = \frac{1}{\Delta x} \left(\bar{\delta} - \frac{\bar{\delta}^3}{3!} + \frac{3^2 \bar{\delta}^5}{5!} + \dots \right) u_i \quad (4.1)$$

kde $\bar{\delta}u_i = \frac{1}{2}(u_{i+1} - u_{i-1})$. Tento zápis je alternatívny ku klasickému, v ktorom sa vyskytujú polosieťové body (napr. $u_{i+\frac{1}{2}}$).

Príklad centrálnej diferencie:

$$\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (4.2)$$

Všeobecný zápis diferencie s krokom dopredu (forward difference):

$$\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)_i = \frac{1}{\Delta x} \left((E - 1) - \frac{(E - 1)^2}{2} + \frac{(E - 1)^3}{3} - \frac{(E - 1)^4}{4} + \dots \right) u_i \quad (4.3)$$

kde $E^n u_i = u_{i+n}$.

Príklad diferencie s krokom dopredu:

$$\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4.4)$$

Všeobecný zápis diferencie s krokom dozadu (backward difference):

$$\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)_i = \frac{1}{\Delta x} \left((1 - E^{-1}) + \frac{(1 - E^{-1})^2}{2} + \frac{(1 - E^{-1})^3}{3} + \frac{(1 - E^{-1})^4}{4} + \dots \right) u_i \quad (4.5)$$

kde $E^{-n} u_i = u_{i-n}$.

Príklad diferencie s krokom dozadu:

$$\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4.6)$$

Príklady (4.2), (4.4) a (4.6) sú uvedené pre derivácie prvého rádu. Diferencie sú odvodené z Taylorovho rozvoja, pričom $O(\Delta x)$ znamená, že chyba sa blíži k nule ako prvá mocnina Δx - jedná sa o presnosť prvého rádu, $O(\Delta x^2)$ je presnosť druhého rádu, atď. [1]

Riešenie rovníc prúdenia je možné viacerými spôsobmi [6]:

- Iteračné metódy - predpokladá sa, že rovnice sú matematicky eliptické a odhad riešenia sa v iteračných cykloch upresňuje.
- Priame metódy - predpokladá sa, že rovnice sú matematicky eliptické a riešenie sa získa ako riešenie systému algebraických rovníc.
- Kráčanie v priestore - predpokladá sa, že rovnice majú matematicky parabolický charakter vzhľadom na jednu súradnicu a riešenie kráča pozdĺž tejto súradnice (nadzvukové prúdenie napr. v smere osi x).
- Kráčanie v čase - časová súradnica dodáva rovniciam hyperbolický charakter

Kráčanie v čase je riešenie s časovou deriváciou, čo znamená, že riešenie je vo všeobecnosti závislé na čase (nestacionárne prúdenie). Keďže časová premenná dodáva rovnici hyperbolický charakter, využíva sa koncept kráčania v čase aj pre riešenie stacionárneho prúdenia, a to tak, že sa v počiatočných podmienkach zadá odhad riešenia a po určitom počte krokov sa dosiahne stacionárny stav prúdenia. Kráčanie v čase môže byť:

- explicitné - neznáme veličiny v čase $n+1$ sa vypočítajú z hodnôt v čase n . Riešenie býva podmiennečne stabilné, to znamená, že s rastúcim časom konverguje k exaktnému riešeniu, iba ak časový krok nepresiahne určitú hodnotu stanovenú kritériom stability. Zvyčajne je potrebné viac časových krokov ako pri implicitnej schéme.
- implicitné - hodnoty v čase $n+1$ sa vypočítajú z hodnôt v čase n a $n+1$, kedy sa rovnica schémy napíše pre každý bod siete, čo vedie k tridiagonálnemu systému, ktorý sa následne rieši. Riešenie je väčšinou bezpodmienečne stabilné, čiže veľkosť časového kroku a hustota siete sú limitované iba presnosťou výpočtu. Nevýhodou však je, že program je zložitejší a počet matematických operácií je v každom časovom kroku vyšší.

4.3.2 Metóda konečných prvkov

(po angl. finite element method - FEM) Pôvodne metóda pre výpočet napätia a posunutia v pevných štruktúrach. Pre výpočet používa prvky zložené z bodov siete, pričom na každý prvok sa aplikujú zákony bilancovania, aby sa určili veličiny prúdového poľa v uzlových bodoch prvku. Uzlové body sú na typických miestach prvku ako stred prvku, stred hrany prvku a podobne. Pre každý prvok sú utvorené rovnice (lokálna aproximácia riešenia), ktoré sú potom zostavené do systému a následne počítané pre získanie riešenia. [6]

4.3.3 Metóda konečných objemov

(po angl. finite volume method - FVM) Uzlové body siete tvoria bunky, ktoré sa interpretujú ako kontrolné objemy. Na kontrolný objem sa aplikujú určujúce rovnice prúdenia v integrálnom tvare - t.j. počíta sa tok hmotnosti, hybnosti a energie cez steny objemu. Táto metóda je najpoužívanejšia v oblasti výpočtovej dynamiky tekutín. Je možné ju počítať pomocou schém metódy konečných diferencií (FVM via FDM) alebo konečných prvkov (FVM via FEM). [1]

4.4 Systém TKSL

TKSL (Taylor-Kunovský Simulation Language) je určený k simulácii dynamických systémov, systémov s nespojitostami a systémov popísaných parciálnymi diferenciálnymi rovnicami. Všetky výpočty sú založené na diferenciálnych rovniciach. Systém vykonáva numerické riešenie pomocou Taylorovho rozvoja. Požadovaná presnosť je udržiavaná dynamickým nastavovaním rádu Taylorovho polynómu. [5]

Pre riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc systémom TKSL je možné použiť metódu priamok, t.j. metódu, kedy sa ponechá jedna nezávislá premenná (napr. čas) spojitá a ostatné sa zdiskretizujú pomocou diferencií. Tak vznikne systém obyčajných diferenciálnych rovníc, ktorý je vstupom do programu TKSL.

Existujú dve verzie programu TKSL, a to staršia verzia TKSL/386 vytvorená v prostredí TurboVision a novšia verzia TKSL/C, ktorá bola napísaná v jazyku C++ a od predchádzajúcej verzie boli pridané vylepšenia [7]:

- odstránený závažný problém počtu rovníc
- TKSL/C je narozdiel od TKSL/386 prenositeľné
- zjednodušená syntax vstupu
- možnosť použitia viacslovnej aritmetiky
- možnosť začlenenia do iných projektov

Kapitola 5

Riešenie vybraného modelu

Riešenie Eulerových rovníc stlačiteľnej, neviskózne tekutiny je predvedené v kvázi-jednorozmernom priestore.

5.1 Model

Je daná tryska s premenným prierezom (obrázok 5.1), cez ktorú preteká stlačiteľná a neviskózna tekutina, ktorá tečie len v smere osi x . Uvažujeme len tlakové sily a predpokladom je, že sa neuskutočňuje prívod a odvod tepla. Model popisujú rovnice (5.2). Jedná sa o nelineárny hyperbolický systém.

Geometria trysky je zadaná rovnicou:

$$S(x) = 1.398 + 0.347 \tanh(0.8x - 4) ft^2 \quad (5.1)$$

pričom dĺžka trysky $x_{max} = 10$. Ďalej sú zadané konštanty:

$$\begin{aligned} \kappa &= 1.4 \\ R &= 1716 \frac{ft^2}{sec^2 R} \end{aligned}$$

Rovnice popisujúce model:

$$\frac{\delta S \mathbf{U}}{\delta t} + \frac{\delta S \mathbf{F}}{\delta x} = \frac{dS}{dx} \mathbf{B}, \quad (5.2)$$

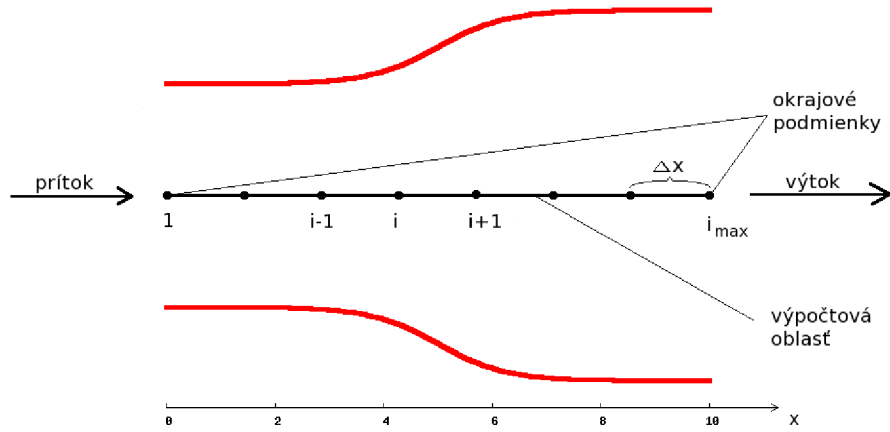
kde

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho(\rho E + p)u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix}$$

Model je riešený pre dva prípady odlišujúce sa v rýchlosti prúdenia na výstupe z trysky:

- nadzvukový prítok a nadzvukový výtok
- nadzvukový prítok a podzvukový výtok.

Vzhľadom na to, že je pri riešení použitý systém TKSL a vzhľadom na fakt, že sa jedná o relatívne jednoduchý problém z oblasti prúdenia tekutín, je pre riešenie použitá metóda konečných diferencií. Priestor je najskôr potrebné diskretizovať, v tomto prípade rozdeliť na $i_{max} - 1$ úsekov rovnakej dĺžky Δx (sieť je štruktúrovaná), čiže i_{max} bodov. Prierezy trysky v jednotlivých bodoch sú dané rovnicou (5.1).



Obrázok 5.1: Modelová tryska (9-bodové delenie výpočtovej oblasti)

5.1.1 Úprava rovníc

Pre zjednodušenie sú premenné \mathbf{U} a \mathbf{F} zapisované priamo s prierezom S (napr. $U_{S1} = \rho S$), pričom člen $p \frac{dS}{dx}$ sa môže vyjadriť ako $pS \frac{d \ln S}{dx}$.

Ďalej je pre lepšie výsledky výpočtu vhodné vyjadriť rovnicu (5.2) za pomoci vzťahu (2.5) vo formálne ekvivalentnom tvare, v ktorom sa vyskytujú len konzervatívne premenné \mathbf{U}_S , takže vzniknú rovnice:

$$\frac{\delta \mathbf{U}_S}{\delta t} + \frac{\delta \mathbf{F}_S(U_S)}{\delta x} = \mathbf{B}_S \frac{d \ln S}{dx}, \quad (5.3)$$

kde

$$\mathbf{U}_S = \begin{bmatrix} \rho S \\ \rho u S \\ \rho E S \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_S = \begin{bmatrix} \rho u S \\ (u^2 + p) S \\ (\rho E + p) u S \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ p S \\ 0 \end{bmatrix}$$

a členy vyjadrené len pomocou konzervatívnych premenných \mathbf{U}_S sú nasledovné:

$$\mathbf{U}_S = \begin{bmatrix} U_{S1} \\ U_{S2} \\ U_{S3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_S(\mathbf{U}_S) = \begin{bmatrix} U_{S2} \\ \frac{U_{S2}^2}{U_{S1}} + (\kappa - 1)(U_{S3} - \frac{1}{2} \frac{U_{S2}^2}{U_{S1}}) \\ \frac{U_{S2} U_{S3}}{U_{S1}} + (\kappa - 1)(U_{S3} - \frac{1}{2} \frac{U_{S2}^2}{U_{S1}}) \frac{U_{S2}}{U_{S1}} \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

$$\mathbf{B}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ (\kappa - 1)(U_{S3} - \frac{1}{2} \frac{U_{S2}^2}{U_{S1}}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jedná sa o prúdenie hyperbolického charakteru, takže pre výpočet rovníc sú použité schémy využívajúce kráčanie v čase.

5.1.2 Počiatočné a okrajové podmienky

Nadzvukový prítok a nadzvukový výtok

Okrajové podmienky:

Vstupná hranica prúdu - keďže je prítok nadzvukový, okrajové podmienky na vstupnej

hranici sú zadané priamo:

$$\begin{aligned} M &= 1.5 \\ p &= 1000 \text{ psf} \\ \rho &= 0.00237 \text{ slugs/ft}^3 \\ \rho u &= 2.7323 \text{ slugs/ft}^3 \text{ sec} \\ \rho E &= 4075 \text{ slugs/ftsec}^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Výstupná hranica prúdu - keďže je výtok nadzvukový, okrajové podmienky na výstupnej hranici sú numerické, čiže je potrebné ich extrapolovať, najvhodnejšie lineárnou extrapoláciou:

$$\mathbf{U}_{S_{i_{max}}} = 2\mathbf{U}_{S_{i_{max}-1}} - \mathbf{U}_{S_{i_{max}-2}} \quad (5.6)$$

Počiatkové podmienky sú pre všetky body rovnaké a rovné okrajovým podmienkam na vstupnej hranici prúdu (5.5).

Nadzvukový prítok a podzvukový výtok

Pri nadzvukovom výtoku má tlak určitú hodnotu, pretože je počítaný numericky z predošlých bodov. Ak sa však na výstupe z trysky zvýši statický tlak (v porovnaní s vypočítanou hodnotou), klesne rýchlosť výtoku pod rýchlosť zvuku a v dôsledku vyrovnania tlaku vstupu a výstupu vznikne v tryske rázová vlna.

Okrajové podmienky:

Vstupná hranica prúdu - zhodné s riešením pre nadzvukový prítok a nadzvukový výtok (5.5).

Výstupná hranica prúdu - pri podzvukovom výtoku je nutné priamo určiť jednu fyzikálnu podmienku, v tomto prípade je daná rýchlosť na výstupe $u_{ex} = 390.75 \text{ ft/sec}$, ktorá je zakomponovaná do výpočtu nasledovne:

$$U_{S2 \ i_{max}} = U_{S1 \ i_{max}} \cdot u_{ex} \quad (5.7)$$

V dôsledku veľkých rozdielov hodnôt závislých premenných \mathbf{U} pri výpočte s predchádzajúcimi počiatkovými podmienkami môže dôjsť k chybe vo výpočte. Táto chyba sa dá odstrániť nasledovnými spôsobmi [6]:

- zadajú sa vhodnejšie počiatkové podmienky
- zväčší sa hustota siete výpočtových bodov
- umelo sa zmenší časový krok
- do výpočtu sa zavedie umelá viskozita
- zdokonalí sa celá schéma výpočtu (algoritmus), aby bola vhodnejšia pre fyzikálny model s rázovou vlnou

Počiatkové podmienky sú teda zmenené oproti predchádzajúcemu prípadu:

$$\text{pre } x \leq 2.8 \quad \begin{cases} \rho = 0.00237 \\ \rho u = 2.7323 \\ \rho E = 4075 \end{cases}, \quad \text{pre } x > 2.8 \quad \begin{cases} \rho = 0.00237 \\ \rho u = 0.92608 \\ \rho E = 2680.93 \end{cases} \quad (5.8)$$

5.2 Riešenie v TKSL

Pre riešenie modelu v systéme TKSL je potrebné prepísať rovnice ako sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc metódou priamok. Ako spojitú nezávislú premennú si zvolíme čas, čiže priestor je diskretizovaný jednou z diferencií. Na prvý pohľad sa najlepšie javí metóda s najväčším rádom presnosti - centrálna diferenciacia predpísaná vzťahom (4.1).

5.2.1 Zápís rovníc

Priestorové derivácie každého vnútorného bodu (t.j. taký bod, na ktorom nie sú určené okrajové podmienky) sú teda zapísané centrálnou diferenciou presnosti druhého rádu, ktorej zápis je daný (4.2). Po úprave rovníc tak, aby na ľavej strane boli len derivácie premenných podľa času (vektor \mathbf{U}_S) vzniknú rovnice:

$$\begin{aligned}\frac{dU_{S1_i}}{dt} &= -\frac{F_{1S_{i+1}} - F_{1S_{i-1}}}{2\Delta x} \\ \frac{dU_{S2_i}}{dt} &= B_{2S_i} \frac{\ln(S_{i+1}) - \ln(S_{i-1}))}{2\Delta x} - \frac{F_{2S_{i+1}} - F_{2S_{i-1}}}{2\Delta x} \\ \frac{dU_{S3_i}}{dt} &= -\frac{F_{3S_{i+1}} - F_{3S_{i-1}}}{2\Delta x}\end{aligned}\quad (5.9)$$

ktoré sa prepíšu vo vyjadrení pomocou konzervatívnych premenných (5.4) do TKSL nasledovne:

$$\frac{dU_{S1_2}}{dt} = -\frac{U_{S2_3} - U_{S2_1}}{2\Delta x} \rightarrow \text{US1}_2' = -(U_{S2_3} - U_{S2_1}) / (2 * DX) \&po1;$$

...

kde členy US_{i_j} značia $U_{S_{ij}}$, po1 je počiatočná podmienka v danom bode a DX je Δx .

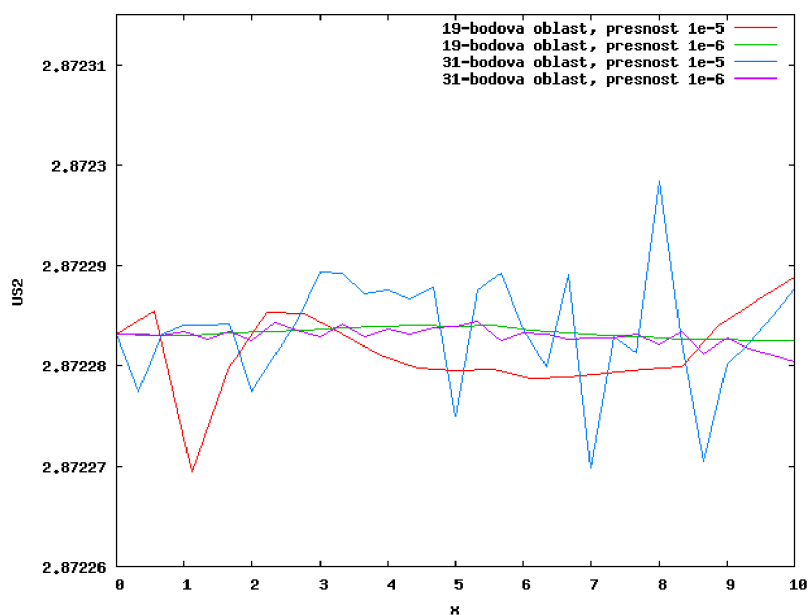
5.2.2 Riešenie pre nadzvukový prítok aj výtok

Rovnice (5.9) sú prepísané do zápisu TKSL, pričom sú použité počiatočné podmienky (5.5). Výpočet je prevádzaný pomocou verzie programu TKSL/C pre rôzne počty bodov výpočtovej oblasti. Pre výpočet majú vplyv voliteľné parametre programu, a to konkrétne presnosť eps , na ktorej záleží veľkosť odchýlky hodnôt počítaných premenných, čo je najlepšie vidieť na obrázku 5.2 zobrazujúcom hodnoty premennej U_{S2} vo výpočtovej oblasti, kde U_{S2} by mala byť rovnaká v každom bode. Z obrázku je vidieť, že presnosť zodpovedá maximálnej odchýlke hodnôt a že táto odchýlka nezávisí od počtu bodov oblasti.

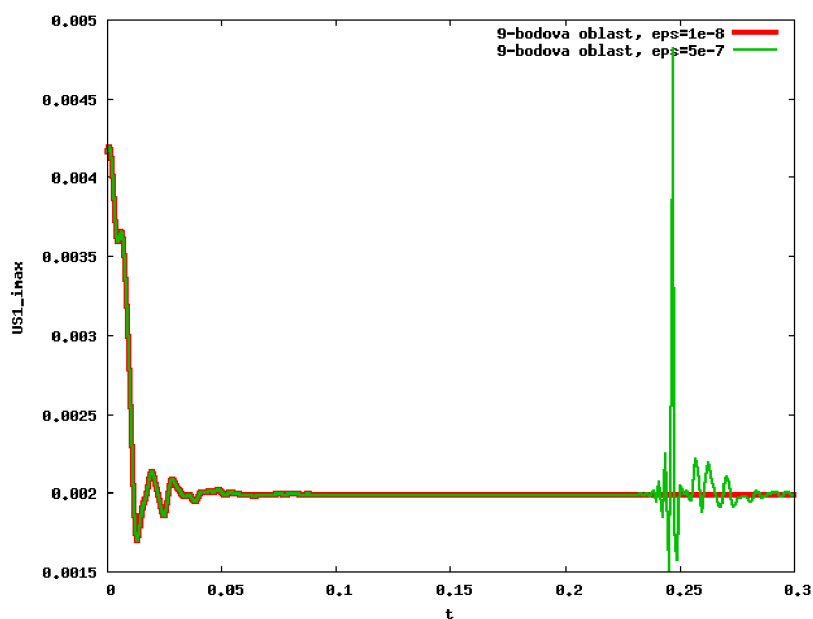
Od presnosti eps tiež závisí stabilizácia výpočtu, čo je vidieť na vývine hodnôt premennej U_{S1} v čase zobrazenej na obrázku 5.3. Pri vysokej hodnote eps (nízkej presnosti) metóda založená na centrálnych diferenciách nie je stabilná a s klesajúcim počtom bodov výpočtovej oblasti je potrebné pre stabilizáciu presnosť zvyšovať. Pre stabilitu sietí o veľkosti 9–61 bodov postačuje presnosť $\text{eps} = 1 \cdot 10^{-8}$.

Ďalej pre "rozbeh" výpočtu je potrebné stanoviť počiatočný krok, ktorého veľkosť závisí od presnosti, kedy pri veľkej presnosti postačuje väčší počiatočný krok a pri nižšej presnosti je potrebné ho znížiť. Veľkosť počiatočného kroku má tiež veľmi malý vplyv na rýchlosť konvergenzie riešenia, pričom čím väčší je krok, tým rýchlejšie sa výpočet ustáli. Pri všetkých behoch programu je počiatočný krok nastavený na $dt = 1 \cdot 10^{-5}$, čo postačuje aj pri presnosti $\text{eps} = 1 \cdot 10^{-5}$.

Nakoniec je potrebné stanoviť čas t_{max} , kedy sa má výpočet zastaviť.



Obrázok 5.2: Priebeh premennej U_{S2} vo výpočtovej oblasti (mal by byť konštantný)



Obrázok 5.3: Priebeh premennej $U_{S1_{imax}}$ v čase

Diferencie s krokom "dozadu"

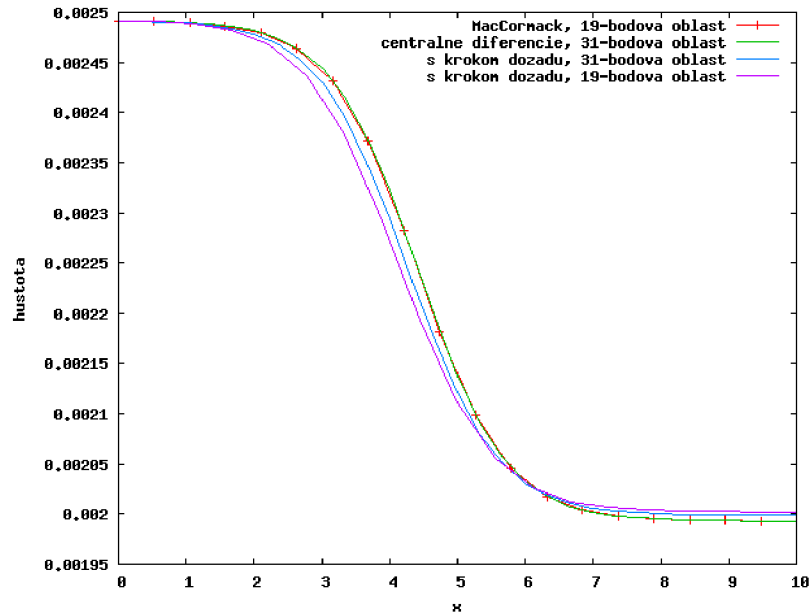
Pri riešení je tiež možné použiť diferencie s krokom dozadu (zvané "upwind"), ktorých zápis je uvedený v (4.5). Aj keď presnosť schémy používajúcej diferencie s krokom dozadu je menšia ako s centrálnou diferenciou, výhodou je to, že je do úvahy vziať smer prúdenia tekutiny, a keďže v riešenom modeli je ešte navyše prúdenie nadzvukovej rýchlosti, táto

schéma je z fyzikálneho hľadiska presnejšia a numericke vyhovujúca.

Pre prepis do TKSL teda zapíšeme Eulerovu sústavu rovníc 5.3 nasledovne:

$$\begin{aligned} \frac{dU_{S1_i}}{dt} &= -\frac{F_{S1_i} - F_{S1_{i-1}}}{\Delta x} \\ \frac{dU_{S2_i}}{dt} &= B_{S2_i} \frac{\ln(S_{i+1}) - \ln(S_{i-1})}{2\Delta x} - \frac{F_{S2_i} - F_{S2_{i-1}}}{\Delta x} \\ \frac{dU_{S3_i}}{dt} &= -\frac{F_{S3_i} - F_{S3_{i-1}}}{\Delta x} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Pre diskretizáciu člena s prierezom je však naďalej použitá centrálna diferencia. Zápis pre program je analogický ako pri centrálnych diferenciách. Na obrázku 5.4 je zobrazený priebeh hustoty tekutiny oblasťou. Z daného priebehu je vidieť, že presnosť schémy používajúcej diferencie s krokom dozadu je horšia ako presnosť schémy používajúcej centrálnu diferenciu, a že väčší počet bodov výpočtovej oblasti prináša presnejšie výsledky.



Obrázok 5.4: Priebeh hustoty pre nadzvukový prítok aj výtok

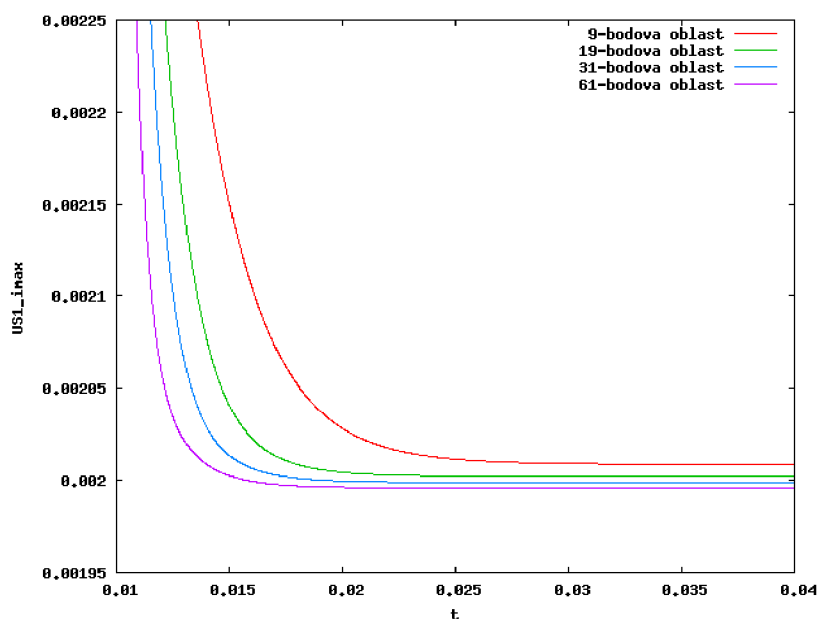
V tabuľke 5.1 sú porovnané časy výpočtu a približného času konvergencie centrálnej schémy a schémy využívajúcej diferencie s krokom dozadu pre rôzne počty bodov výpočtovej oblasti. Z tabuľky je na prvý pohľad jasné, že pri využití diferencií s krokom dozadu je celý výpočet dokončený zhruba 10-krát skôr, i keď s rastúcim počtom bodov oblasti toto číslo klesá. Konvergencia diferencií s krokom dozadu nastáva tiež niekoľko násobne rýchlejšie ako pri centrálnych diferenciách, dokonca s rastúcim počtom bodov v oblasti klesá, viď obrázok 5.5.

5.2.3 Riešenie pre nadzvukový prítok a podzvukový výtok

Pri použití počiatkových podmienok (5.8) a numerickej okrajovej podmienky na výstupe (5.7) je model prepísaný do TKSL analogicky ako v predchádzajúcich prípadoch. Avšak výpočet pri použití centrálnych diferencií diverguje a pri použití diferencií s krokom dozadu

Počet bodov oblasti	Diferencie	Čas výpočtu		Približný čas konverencie $U_{S1_{imax}}$
		user	system	
9	centrálne s krokom dozadu	17s26 μ s	0s21 μ s	0.11s
		1s66 μ s	0s53 μ s	0.038s
19	centrálne s krokom dozadu	39s12 μ s	0s42 μ s	0.16s
		4s30 μ s	0s76 μ s	0.032s
31	centrálne s krokom dozadu	80s55 μ s	0s76 μ s	0.25s
		9s39 μ s	0s11 μ s	0.026s
61	centrálne s krokom dozadu	202s57 μ s	2s66 μ s	> 0.3s
		26s76 μ s	0s33 μ s	0.022s

Tabuľka 5.1: Porovnanie riešení v TKSL pre $t_{max} = 0.3$ a $eps = 1 \cdot 10^{-8}$



Obrázok 5.5: Detail priebehu premennej $U_{S1_{imax}}$ v čase za použitia diferencií s krokom dozadu

je problém vyriešený ako prúdenie s nadzvukovým vstupom aj výstupom, len fyzikálna okrajová podmienka na výstupe je nezmenená, takže riešenie je nepoužiteľné.

Presnosť diskretizácie priestoru (pomocou centrálnych diferencií) je možné zvýšiť na štvrtý rád (podľa vzťahu (5.11)), avšak toto zvýšenie rádu presnosti neprineslo badateľné zlepšenie. Aj ostatné pokusy zmenšenia kroku, zvýšenia presnosti eps a zvýšenia rádu presnosti derivácie času zlyhaly.

$$\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)_i = \frac{-u_{i+2} + 8u_{i+1} - 8u_{i-1} + u_{i-2}}{12\Delta x} + O(\Delta x^4) \quad (5.11)$$

Umelá viskozita

Pre stabilizáciu výpočtu pri rázovej vlně je tiež možné použiť umelú viskozitu \mathbf{D}_i . Je to miera nelineárnosti závislých premenných, ktorú približne vyjadruje rozdiel strednej hodnoty vypočítanej zo susedných hodnôt a skutočnej hodnoty v bode i v konkrétnom časovom kroku n :

$$\mathbf{D}_i(U)\Delta t = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_{i-1}^n - 2\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_{i+1}^n) \approx DFX(\mathbf{U}_{i-1}^n - 2\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_{i+1}^n) \quad (5.12)$$

alebo analogicky

$$\mathbf{D}_i(U) = DFX \frac{(\mathbf{U}_{i-1}^n - 2\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_{i+1}^n)}{\Delta t} \quad (5.13)$$

Tento výraz tiež modeluje druhú deriváciu, ktorá súvisí s fyzikálnou viskozitou alebo vedením tepla, teda difúziou. [6] Za DFX sa môže dosadiť malé číslo, napríklad $DFX \approx 0.001$, alebo to môže byť funkcia, ktorá kontroluje lokálne dávkovanie umelej viskozity v schéme:

$$DFX(U) = CX \frac{|p_{i-1}^n - p_i^n + p_{i+1}^n|}{p_{i-1}^n + p_i^n + p_{i+1}^n}$$

kde CX je miera viskozity ako konštanta, ktorej hodnota závisí od spôsobu aplikovania umelej viskozity do schémy výpočtu.

Vzťah (5.13) je tiež možné zapísať ako

$$\mathbf{D}_i(U) = DFX \frac{[\mathbf{U}_{i-2}^n - 4\mathbf{U}_{i-1}^n + 6\mathbf{U}_i^n - 4\mathbf{U}_{i+1}^n + \mathbf{U}_{i+2}^n]}{\Delta t} \quad (5.14)$$

Aplikácia umelej viskozity je prevedená prirátaním $\mathbf{D}_i(U)$ k pravej strane rovníc.

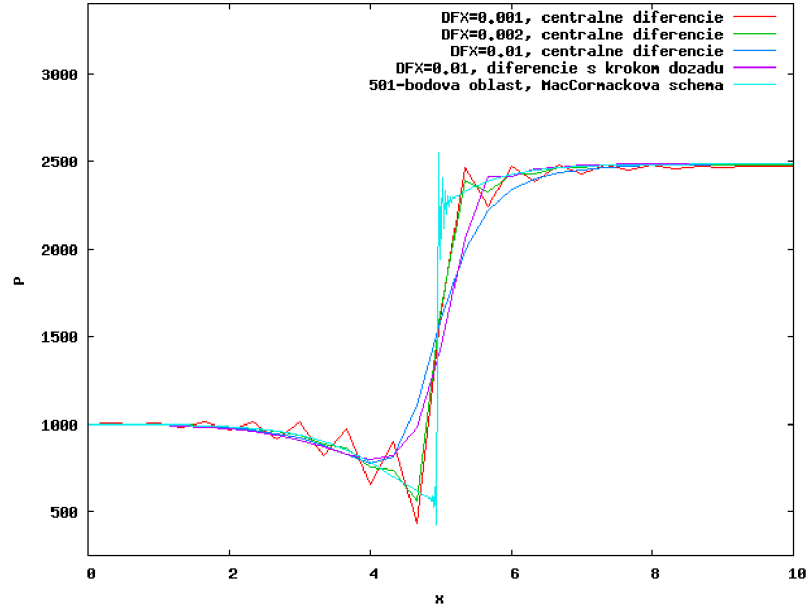
V TKSL je k rovniciam pridaná umelá viskozita (5.13) s konštantným členom DFX a pri centrálnych diferenciách presnosti druhého rádu aj diferenciách s krokom dozadu je výpočet už stabilný. Je však potrebné podotknúť, že vzťah (5.13) obsahuje časový krok (Δt), ktorý je pri prepise pre TKSL nastavený priamo (s hodnotou počiatočného kroku), takže pri veľkých zmenách časového kroku, ktoré program robí automaticky, by mohlo dôjsť k chybe (pri nastavení pevného kroku riešenie nedospeje k stabilite).

Zápis v TKSL môže vyzeráť nasledovne (W reprezentuje konštantu DFX):

```
W=0.001;
US1_2'=- (US2_3-US2_1)/(2*DX)+W*(US1_1-2*US1_2+US1_3)/1e-5 &po1;
...
```

Veľkosť konštanty DFX ovplyvňuje mieru viskozity, takže pri väčších hodnotách bude rázová vlna hladšia. Pri diferenciách s krokom dozadu musí byť táto konštanta približne 0.009 aby metóda konvergovala, pričom pri centrálnej diferencii môže byť miera umelej viskozity aj menšia, ale to sa odrazí na numerickej disperzii vo veľkom okolí rázovej vlny, ako je to znázornené na obrázku 5.6 pre $DFX = 0.001$. Na tomto obrázku je tiež vidieť, že veľká umelá viskozita spôsobuje odklon od reálneho riešenia, takže pre riešenie s podzvukovým výstupom je schéma používajúca diferencie s krokom dozadu nepostačujúca.

Tiež je vhodné upozorniť na rýchlosť stability a rýchlosť výpočtu, ktoré sú obe väčšie pri použití centrálnych diferencií, čo je v porovnaní s prípadom nadzvukového vstupu aj výstupu naopak.



Obrázok 5.6: Vplyv umelej viskozity na výpočet pri 31-bodovom delení oblasti (MacCormackova metóda predstavuje riešenie najviac sa blížiace skutočnosti)

5.3 Explicitná MacCormackova schéma kráčania v čase

Pre porovnanie riešenia v TKSL je použitá explicitná MacCormackova dvojkroková schéma implementovaná v jazyku C++. Jedná sa o centralizovanú schému výpočtu s prediktorom a korektorom. Pre výpočet premennej v bode i v čase $n + 1$ je postup nasledovný: Vypočítame prediktor ($\mathbf{U}_{S_i}^*$) pomocou hodnôt z času n , pričom derivácia podľa polohy je vyjadrená diferenciou s krokom dopredu:

$$\mathbf{U}_{S_i}^* = \mathbf{U}_{S_i}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{S_{i+1}}^n - \mathbf{F}_{S_i}^n) + \Delta t \left(\frac{\ln S_{i+1} - \ln S_i}{\Delta x} \right) \mathbf{B}_{S_i}^n \quad (5.15)$$

Hodnoty získané prediktorom použijeme na výpočet matíc $\mathbf{F}_{S_i}^*$ a $\mathbf{B}_{S_i}^*$. Pomocou hodnôt $\mathbf{F}_{S_i}^*$ a $\mathbf{B}_{S_i}^*$ sa vypočítajú korigované hodnoty konzervatívnych premenných $\mathbf{U}_{S_i}^{**}$. Derivácia polohy sa vyjadří s krokom dozadu:

$$\mathbf{U}_{S_i}^{**} = \mathbf{U}_{S_i}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{S_i}^* - \mathbf{F}_{S_{i-1}}^*) + \Delta t \left(\frac{\ln S_i - \ln S_{i-1}}{\Delta x} \right) \mathbf{B}_{S_i}^* \quad (5.16)$$

Výsledná hodnota v bode i a čase $n + 1$ sa vyjadří ako stredná hodnota z prediktora a korektora:

$$\mathbf{U}_{S_i}^{n+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{S_i}^* + \mathbf{U}_{S_i}^{**}) \quad (5.17)$$

Výpočet časového kroku

Keďže explicitné schémy sú podmienene stabilné, je potrebné časový krok počítať tak, aby riešenie bolo stabilné. Pre nelineárne rovnice určuje podmienku stability najlepšie Courant-Friedrichs-Levy kritérium [6]:

$$CFL = (a + u) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (5.18)$$

V danom bode a v danom čase je veľkosť možného časového kroku pri rovnomernom delení siete daná rovnicou:

$$(\Delta t_i)^m = CFL \frac{\Delta x}{a_i + u_i} \quad (5.19)$$

Časový krok sa potom vypočíta ako minimum časových krokov v celej výpočtovej oblasti.

Hodnota CFL je dôležitá pre stabilitu výpočtu. Pre dobre určené počiatočné podmienky by hodnota CFL mohla byť okolo 1.0.

5.3.1 Riešenie pre nadzvukový prítok aj výtok

Algoritmus pre výpočet (implementovaný v jazyku C++) potom vyzerá nasledovne:

1. Vygeneruje sa sieť bodov, pričom každému sa priradí prierez podľa vzťahu (5.1)
2. Inicializácia počiatočných podmienok na hodnoty uvedené v (5.5)
3. Výpočet hodnôt $\mathbf{F}_{\mathbf{S}_i}^n$ podľa vzťahu (5.4)
4. Výpočet časového kroku podľa vzťahu (5.19) - hodnota CFL je 1
5. Výpočet hodnôt $\mathbf{U}_{\mathbf{S}_i}^*$ podľa vzťahu (5.15) vo všetkých vnútorných bodoch siete
6. Výpočet hodnôt $\mathbf{F}_{\mathbf{S}_i}^*$ podľa vzťahu (5.4) vo všetkých bodoch siete
7. Výpočet korigovaných hodnôt $\mathbf{U}_{\mathbf{S}_i}^{**}$ podľa vzťahu (5.16)
8. Výpočet $\mathbf{U}_{\mathbf{S}_i}^{n+1}$ podľa vzťahu (5.17) vo vnútorných bodoch siete
9. Vypočítajú sa okrajové podmienky na vstupe (5.5) a výstupe (5.6)
10. Ďalší časový krok (bod 3)

Riešenie (konkrétne priebeh hustoty) je znázornené na obrázku 5.4. Z obrázku je viditeľné, že MacCormackova schéma má podobnú presnosť ako schéma používajúca centrálnu diferenciu pri implementácii v TKSL.

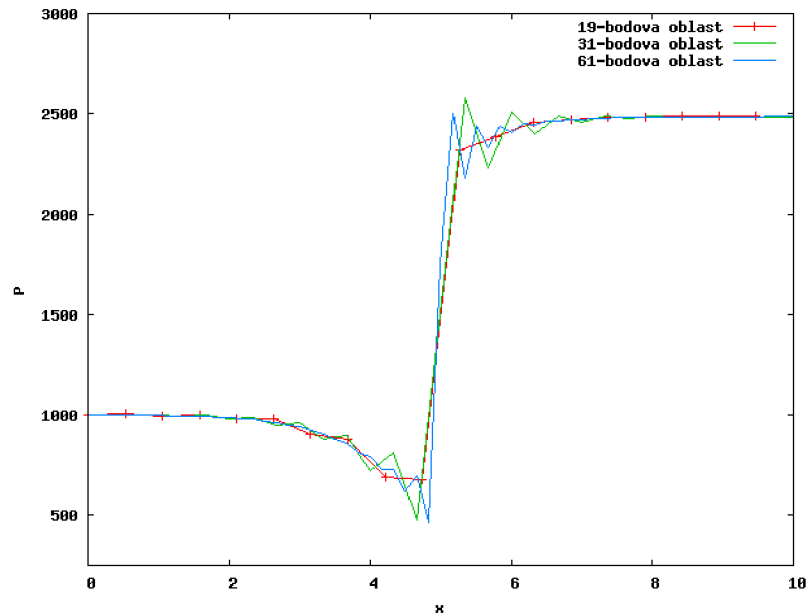
Tabuľka 5.2 zobrazuje časy výpočtu, stabilizácie a tiež počet iterácií MacCormackovej schémy pre rôzny počet bodov oblasti pre výpočet do času $t_{max} = 0.5s$. Z tabuľky je vidieť, že časy konvergencie mierne klesajú s rastúcim počtom bodov výpočtovej oblasti, ako tomu bolo aj pri schéme používajúcej diferenciu s krokom dozadu pri implementácii v TKSL (viď tabuľka 5.1), takže dôsledok môže byť práve vlastnosť diferencie s krokom dozadu (MacCormackova schéma ju využíva v korektore).

Väčší počet iterácií pri väčšom počte bodov výpočtovej oblasti je pravdepodobne spôsobený výpočtom časového kroku podľa (5.19), ktorý priamo závisí od Δx .

Pri porovnaní výsledkov programu TKSL uvedených v tabuľke 5.1 je zrejmé, že MacCormackova schéma je rýchlejšia ako obe metódy a konverguje značne rýchlejšie ako schéma používajúca centrálnu diferenciu, ale pritom si zachováva rovnakú presnosť.

Počet bodov oblasti	Riešený prípad (rýchlosť na výstupe)	Čas výpočtu ($t_{max}=0.5s$)		Približný čas konvergenencie $US_{3,max}$	Počet iterácií
		user	system		
9	nadzvukový	0.077s	0.019s	0.06s	947
	podzvukový	0.076s	0.014s	n/a	931
19	nadzvukový	0.308s	0.040s	0.04s	2000
	podzvukový	0.303s	0.03s	0.1s	1927
31	nadzvukový	0.822s	0.051s	0.03s	3157
	podzvukový	0.812s	0.044s	0.15s	3190
61	nadzvukový	3.167s	0.137s	0.03s	6314
	podzvukový	3.165s	0.124s	0.17s	6370

Tabuľka 5.2: Porovnanie riešení MacCormackovej metódy



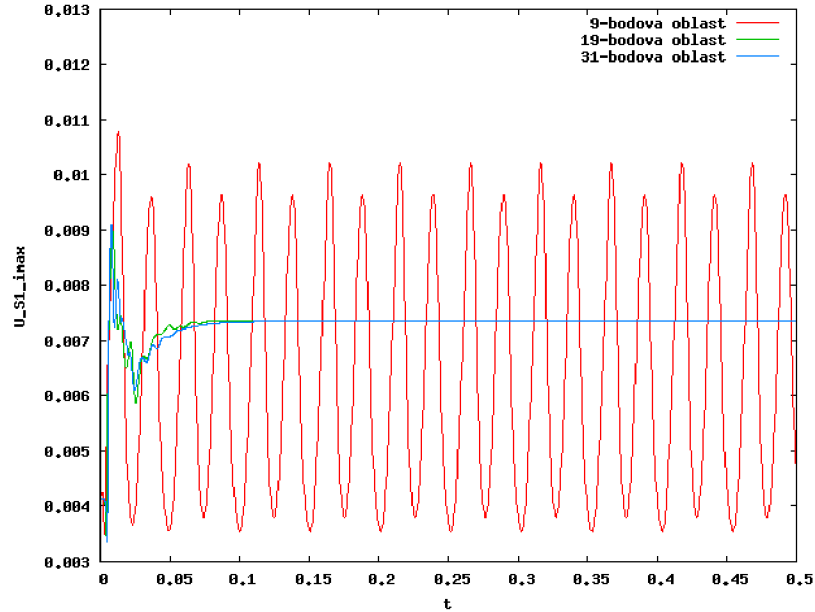
Obrázok 5.7: Tlak pri nadzvukovom prítoku a podzvukovom výtoku, bez použitia umelej viskozity

5.3.2 Riešenie pre nadzvukový prítok a podzvukový výtok

Pre prípad trysky s podzvukovým výtokom je použitý rovnaký algoritmus ako pri nadzvukovom výtoku, avšak so zmenenými počiatočnými podmienkami (5.8) a so zmenenou výstupnou okrajovou podmienkou danou vzťahom (5.7). Priebeh tlaku pre rôzny počet bodov výpočtovej oblasti je zobrazený na obrázku 5.7. Z obrázku je viditeľné, že pri hustejšom delení siete je výpočet presnejší.

Z tabuľky 5.2 je zrejmé, že konvergencia nastáva pomalšie ako pri predchádzajúcom prípade, dokonca pri malom počte bodov ani nenastane, hodnoty budú oscilovať, ako je to zobrazené na obrázku 5.8 (zníženie alebo zvýšenie CFL spôsobilo divergenciu, ale použitie umelej viskozity výpočet stabilizovalo). Na rozdiel od predchádzajúceho prípadu platí, že

keď je počet bodov väčší, tak stabilizácia nastane pomalšie.



Obrázok 5.8: Priebeh premennej $U_{S1_{max}}$ v čase pri rázovej vlně

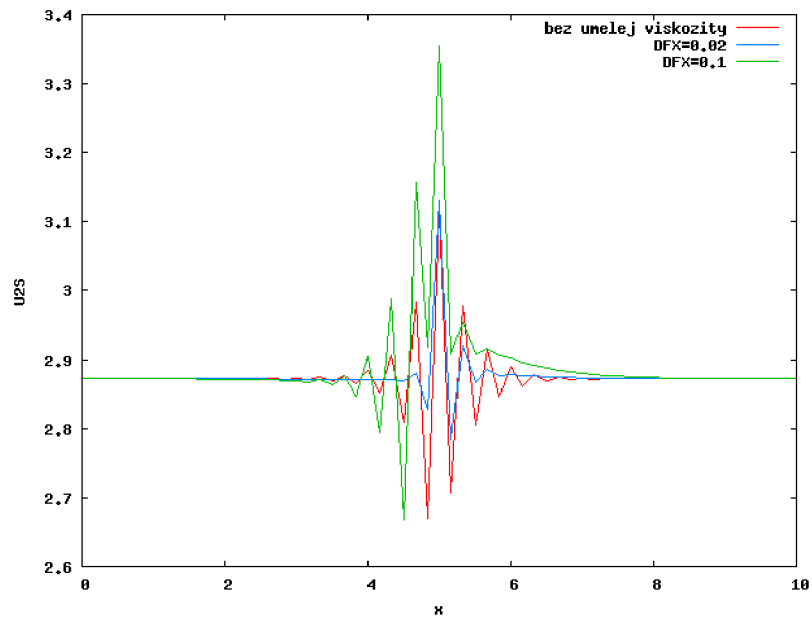
Umelá viskozita

Pri riešení rázovej vlny v TKSL bola použitá umelá viskozita kvôli konvergencii výpočtu. Napriek tomu, že výpočet pomocou MacCormackovej schémy je stabilný, je možné použiť umelú viskozitu pre potlačenie numerickej disperzie. Je použitý zápis umelej viskozity (5.14), ktorý je pridaný - bez časovej diferencie, pretože čas už je diskretizovaný - do prediktoru aj korektor. Na obrázku 5.9 sú znázornené hodnoty U_{S2} pre 61-bodovú oblasť výpočtu, pričom je ukázaný efekt umelej viskozity na spresnenie výpočtu - pri malých hodnotách DXF je riešenie presnejšie, avšak pri veľkých je to naopak.

5.4 Zhrnutie dosiahnutých výsledkov

Pri použití všeobecných schém v TKSL je pri nadzvukovom vstupe aj výstupe použitie diferencií s krokom dozadu výhodnejšie oproti centrálnym diferenciám z hľadiska času výpočtu, ale horšia presnosť núti použitie veľmi jemnej výpočtovej oblasti. Naopak pri nadzvukovom vstupe a podzvukovom výstupe čas výpočtu a tiež potreba veľkej umelej viskozity použitie diferencií s krokom dozadu veľmi znevýhodňuje. Pri zanedbaní nutnosti zvyšovania presnosti výpočtu a rýchlosti konverencie v prvom prípade a pri lepších výsledkoch v druhom prípade sa centrálna diferenciá javia ako lepšia možnosť výberu. Lenže nevyhnutnosť pridať umelú viskozitu (i keď nepatrnej) pri centrálnych diferenciách pôsobí negatívne na celkovú použiteľnosť riešenia problému v TKSL.

Explicitná MacCormackova schéma pôsobila oproti schémam implementovaným v TKSL vo všetkých hľadáiskách výhodnejšie, avšak pri rázovej vlně sa tiež ukázali jej nedostatky



Obrázok 5.9: Potlačenie numerickej disperzie pri rázovej vlně pomocou umelej viskozity

súvisiace s numerickej disperziou (i keď menšou ako v TKSL) a s nestabilitou pri malom počte bodov.

Kapitola 6

Záver

V práci som implementoval model kvázi-jednorozmerného prúdenia stlačiteľnej neviskózne tekutiny tryskou v systéme TKSL, pričom model obsahoval dve varianty - pre nadzvukový prítok aj výtok a pre nadzvukový prítok a podzvukový výtok, kedy sa v systéme objavila rázová vlna a na stabilizáciu výpočtu bolo potrebné použiť umelú viskozitu. Porovnával som základné schémy metódy konečných diferencií, a to konkrétne centrálné diferencie a diferencie s krokom dozadu. Z môjho pozorovania vyšlo, že aj keď sú diferencie s krokom dozadu pri probléme bez rázovej vlny rýchlejšie, sú tiež nepresnejšie a s rázovou vlnou si poradia ťažšie ako centrálné diferencie, ktoré sú však pri prvom prípade veľmi pomalé. Uprednostňujúc presnosť pred časovou náročnosťou sú teda za lepšiu variantu považované centrálné diferencie.

Riešenie v TKSL som porovnával s riešením pomocou explicitnej MacCormackovej schémy, ktorá je tiež schémou konečných diferencií, ale k výpočtu využíva prediktor a korektor. Ukázalo sa, že riešenie pomocou tejto metódy je pre oba prípady rýchlejšie a zároveň je zachovaná presnosť rovnaká ako pri riešení v TKSL s centrálnymi diferenciami, z čoho vyplýva, že riešenie MacCormackovou schémou je vo všetkých ohľadoch efektívnejšie ako riešenie v TKSL.

Vzhľadom na rozsiahlosť problematiky dynamiky tekutín sa naskytujú mnohé varianty budúceho vývoja. Mohlo by ísť napríklad o simuláciu iného druhu tekutiny (napr. nestlačiteľnej, alebo viskózne), zvýšenie počtu rozmerov výpočetnej oblasti na dvoj- alebo trojrozmernú, ale tiež o implementáciu grafického rozhrania nad simulačnou aplikáciou. Ak sa však jedná o rozšírenia zahrnujúce nevyhnutnosť zložitejšej schémy, je použitie TKSL nepostačujúce. Je to z dôvodu definície zložitejších metód, ktoré nie je možné zapísať len v rovnícovom zápise (potrebujú napr. podmienky). V tom prípade je jednoduchšie a efektívnejšie implementovať metódy priamo v programovacom jazyku. Pre jednoduché problémy však riešenie pomocou TKSL postačuje.

Literatúra

- [1] Chung, T. J.: *Computational Fluid Dynamics*. New York: Cambridge University Press, 2008, 1012 s., iSBN 978-0-521-59416-5.
- [2] Hájek, J.: *Modelování s využitím CFD - I*. Študijný materiál, FSI VUT v Brně, Brno, 2007.
- [3] Kolář, V.; Patočka, C.; Bém, J.: *Hydraulika*. Praha: SNTL/ALFA, 1983, 460 s.
- [4] Kubíček, M.; Dubcová, M.; Janovská, D.: *Numerické metody a algoritmy*. Praha: Vydavatelství VŠCHT, druhé opravné vydanie, 2005, 188 s., iSBN 80-7080-558-7.
- [5] Kunovský, J.: *Modern Taylor series method*. Habilitačná práca, VUT v Brně, Brno, 1994.
- [6] Molnár, V.: *Počítačová dynamika tekutín [online]*. Bratislava: Ústav tepelnej energetiky STU, druhé prepracované vydanie, 2009-9-14 [cit. 2010-5-3], Dostupné z WWW: <<http://www.cfd.sk/cfd-book>>.
- [7] WWW stránky: High performance computing. Dostupné z WWW: <<http://www.fit.vutbr.cz/~kunovsky/TKSL/index.html>>.

Dodatok A

Obsah CD

Obsahom CD sú:

- písomná správa vo formáte pdf
- zdrojový text práce vo formáte \LaTeX
- skripty pre generovanie a výpočet rovníc programom TKSL
- implementácia MacCormackovej metódy v jazyku C++