



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

POPIS NAPJATOSTI A DEFORMACE NA ČELE TRHLIN ZATÍŽENÝCH VE SMYKOVÝCH ZÁTĚŽNÝCH MÓDECH

DESCRIPTION OF STRESS AND STRAIN STATES AT THE FRONT OF CRACKS LOADED BY
SHEAR MODES

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. STANISLAV ŽÁK

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. JANA HORNÍKOVÁ, Ph.D.

BRNO 2014

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2013/2014

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

student(ka): Bc. Stanislav Žák

který/která studuje v **magisterském navazujícím studijním programu**

obor: **Inženýrská mechanika a biomechanika (3901T041)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Popis napjatosti a deformace na čele trhlin zatížených ve smykových zátěžných módech

v anglickém jazyce:

Description of Stress and Strain States at the Front of Cracks Loaded by Shear Modes

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Sestavení modelu vzorku s trhlinou v programovém prostředí ANSYS zatíženého ve smykových módech. Analýza výsledků elasto-plastického řešení pole napětí a deformací v okolí čela trhliny pro případy, které nebyly podle dostupných literárních pramenů řešeny.

Cíle diplomové práce:

Posouzení použitelnosti lineární lomové mechaniky u trhlin namáhaných ve smykových zátěžných módech pro různé úrovně plastické deformace na čele těchto trhlin.

Seznam odborné literatury:

1. Anderson Ph. D.: Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications. CRC Press. Texas, 1995.
2. ANSYS verze 14.0. Users Manual. Houston, USA, 2012.
3. Pokluda J., Trattnig G., Martinschitz C. a Pippan R.: Straightforward Comparison of Fatigue Crack Growth under Modes II and III. International Journal of Fatigue 30, (2008) 1498 - 1506.

Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Jana Horníková, Ph.D.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2013/2014.

V Brně, dne 22.11.2013

L.S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan fakulty

Abstrakt

Cílem této práce je porovnání velikosti plastické zóny na čele trhliny, určené analytickým lineárním a elasto-plastickým řešením za využití metody konečných prvků (program ANSYS). Výpočty jsou prováděny pro trhlinu zatíženou pouze ve smykových módech, protože tento typ zatížení není podle dostupných literárních pramenů dostatečně popsán.

První část práce je zaměřena na teoretický úvod do problematiky určování velikosti plastické zóny na základě lineárních a nelineárních parametrů lomové mechaniky. Druhá část je věnována konstrukci výpočtového modelu v programovém prostředí ANSYS. Geometrie vzorků a úrovně zatížení byly voleny na základě projektu, jehož cílem bylo experimentálně ověřit vliv smykových módů na chování trhliny. V třetí části práce jsou detailně porovnány velikosti plastické zóny (její charakteristický rozměr) na čele trhliny pro smykové módy II a III, zjištěné různými metodami. V poslední části textu je pak stejný postup aplikován na smíšený mód II+III.

Výstupem diplomové práce je zhodnocení vhodnosti a mezí použitelnosti lineárního řešení pro velikost plastické zóny na čele trhliny pro konkrétní geometrii a model materiálu.

Klíčová slova

ANSYS, elasto-plastická lomová mechanika, J -integrál, lineární elastická lomová mechanika, metoda konečných prvků, plastická zóna na čele trhliny, smykové zátěžné módy

Abstract

The main goal of this work is the comparison of the size of the plastic zone at the crack tip for two analysis methods: an analytical linear method and an elastic-plastic analysis employing the Finite Element method (ANSYS software). All calculations were made for a crack loaded under pure shear modes. These types of loading are not sufficiently described in the literature.

The first part of this work introduces the problem with the crack tip plastic zone using both linear and nonlinear fracture parameters. The second part is dedicated to the construction of the Finite Element model in the ANSYS software. The geometry of the samples and the loading levels were chosen to match an existing experimental test of the impact of shear modes on the crack behavior. In the third part of this thesis, the plastic zone radii for pure shear modes II and III are estimated using several methods and the results are compared. In the last part of this work, the same procedure as in the previous part is applied on a mixed-mode II+III loading.

A result of this thesis is the assessment of the application limits of the linear analysis method used to estimate the size of the plastic zone at the crack tip for a specific geometry and material model.

Keywords

ANSYS, crack tip plasticity, elastic-plastic fracture mechanics, Finite Element method, *J*-integral, linear elastic fracture mechanics, shear loading

Bibliografická citace

ŽÁK, S. *Popis napjatosti a deformace na čele trhlin zatížených ve smykových zátěžných módech*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2014. 67 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Jana Horníková, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že předložená diplomová práce je mojí původní prací, kterou jsem vypracoval samostatně pod vedením paní doc. Ing. Jany Horníkové, Ph.D. a s použitím uvedené literatury.

datum

Bc. Stanislav Žák

Poděkování

Děkuji paní doc. Ing. Janě Horníkové, Ph.D. (vedoucí mé diplomové práce), panu prof. RNDr. Pavlu Šanderovi, CSc. a panu prof. RNDr. Jaroslavu Pokludovi, CSc. za cenné rady, připomínky a všestrannou pomoc při vypracování mé diplomové práce.

Obsah

Úvod	1
1 Rozdělení a popis trhlin.....	2
2 Teorie elasto-plastické lomové mechaniky	4
2.1 Koncepce J -integrálu	4
2.1.1 Určení J -integrálu pomocí MKP.....	8
2.1.2 Posouzení ekvivalence integračních cest.....	10
2.2 Velikost plastické zóny r_p	13
2.2.1 Analytické určení r_p	13
2.2.2 Určení r_p pomocí MKP	16
3 Výpočet.....	19
3.1 Model materiálu	19
3.2 Použitá geometrie a zatížení	20
3.3 Síť konečných prvků pro výpočet.....	23
4 Zpracování výsledků pro čisté módy.....	25
4.1 Múd II	26
4.2 Múd III.....	29
4.2.1 Vliv vrubu na r_p	31
4.2.2 Vliv rotačně symetrické geometrie na r_p	31
4.2.3 Vliv parametrů modelu materiálu na r_p	35
4.3 Doplnění o jiné úrovně zatížení.....	39
4.3.1 Múd II.....	39
4.3.2 Múd III.....	42
5 Zpracování výsledků pro smíšený mód II+III.....	45
5.1 Poměry složek J -integrálu.....	45
5.2 Analytické určení r_p pro smíšený mód II+III.....	48
5.3 Smíšený mód II+III - výsledky pro $\vartheta = 45$	49
Závěr.....	53
Seznam použitých zdrojů	55
Seznam použitých zkratk a symbolů	57

Úvod

Lomová mechanika je vědní obor, který se zabývá porušováním těles vlivem trhlin za statických podmínek zatěžování (např. porušení křehkým lomem) i při proměnném zatěžování (např. cyklické namáhání). Lomovou mechaniku dělíme na lineárně elastickou lomovou mechaniku, která předpokládá lineární závislost mezi napětím a deformací, a elasto-plastickou lomovou mechaniku, kde se uplatní i nelineární závislost. Jeden z parametrů, který je používán pro určení meze platnosti lineárního přístupu, je velikost plastické zóny na čele trhliny. V případě, že dojde k vytvoření velké plastické zóny na čele trhliny, není již možné aplikovat lineární výpočetní postupy - pole napětí a deformací okolo trhliny je významně ovlivněno plastizací materiálu.

Pro výpočty v této diplomové práci byl jako předloha použit experiment, který byl zaměřen na posouzení nových teorií vlivu módu III na růst trhlin a jehož součástí bylo i určování prahových hodnot součinitelů intenzity napětí při cyklickém namáhání smykovými módy II a III. Pro tento experiment bylo nutné zajistit splnění podmínek lineárně elastické lomové mechaniky, a proto bylo potřeba provést výpočtové řešení velikosti plastické zóny pro odpovídající typ a úroveň zatěžování zkušebního tělesa při experimentu.

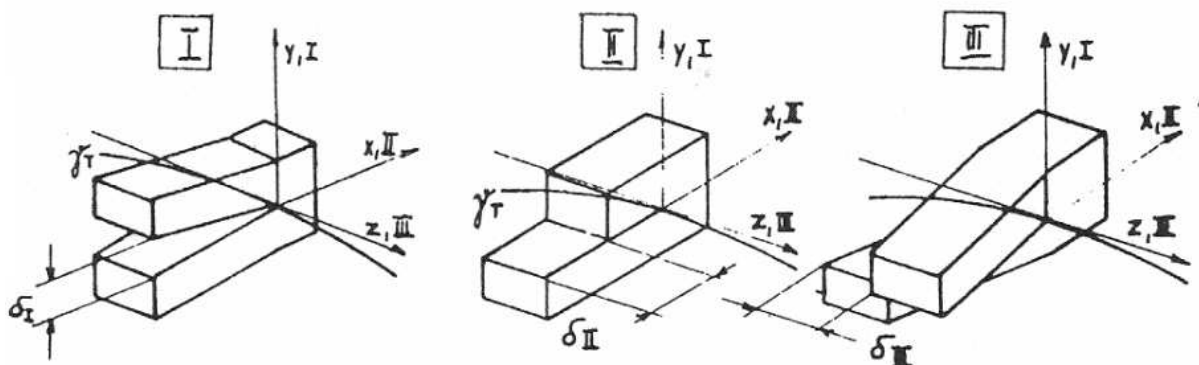
Detailní porovnání výsledků lineárního a nelineárního přístupu k výpočtu pole napětí a deformací na čele trhliny umožňuje dokázat, do jaké míry je pro daný typ nespojitosti v tělese možné používat lineární přístup. Ve chvíli, kdy se výsledky nelineárního výpočtu začnou významně odlišovat od výsledků získaných lineárním přístupem, dochází k porušení předpokladů lineární lomové mechaniky a ta se stává nepoužitelnou.

Výpočty v této práci jsou zaměřeny na smykové módy, které v současnosti nejsou tak dobře prozkoumány, jako například normálové namáhání trhlin. Výsledky pro zatěžování pouze ve smykových módech tedy pomohou rozšířit znalosti lomové mechaniky.

1 Rozdělení a popis trhlin

Řešení napjatosti a deformace na čele obecně tvarované a zatěžované trhliny v tělese tak, jak může v praxi existovat, je velmi složité. Proto bylo obecné zatížení trhliny rozděleno do tří základních typů (obr. 1), tzv. módů zatížení:

- 1) mód I - normálový mód
- 2) mód II - rovinný smykový mód
- 3) mód III - antirovinný smykový mód



Obr. 1^[1]: Zatěžovací módy trhliny

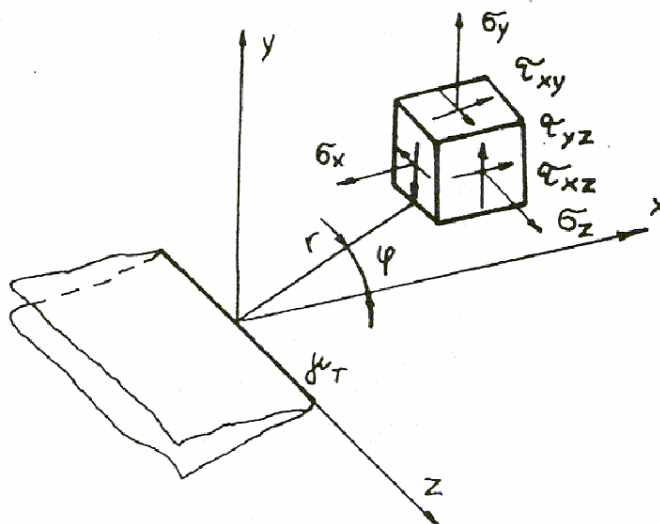
Superpozicí těchto tří módů je pak možné nahradit libovolné zatížení tělesa s trhlinou^[1]. Z názvů jednotlivých módů je patrné, že u módu I dochází pouze k normálovému namáhání, zatímco u módů II a III pouze ke smykovému namáhání. V praxi je pak dokázáno, že trhlina se v tělese šíří primárně v módu I, kde je nejvíce rozevírána a u smykových trhlin dochází k odklání do módu I^[2]. Z tohoto důvodu jsou teorie i experimenty spojené s normálovým zatížením rozpracovány mnohem lépe než pro smykové módy.

Pro práci a výpočty spojené s trhlínami je nutné znát průběhy napětí v těsné blízkosti čela trhliny, které jsou díky charakteru trhliny jako ostrého vrubu singulární a byly obecně odvozeny^[1] za podmínek lineárně elastické lomové mechaniky (LELM):

$$\sigma_{ij}(K, r, \varphi) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cdot f_{ij}(\varphi), \quad (1)$$

kde σ_{ij} jsou složky tenzoru napětí, r je vzdálenost od čela trhliny, funkce f_{ij} udávají závislost daného napětí na typu nespojitosti a jsou vyjádřeny pomocí úhlu φ okolo čela trhliny (obr. 2). K je součinitel intenzity napětí, který je používán jako základní charakteristika trhliny v LELM a obecně je vyjádřen vztahem^[1]:

$$K_{I,II,III}(\sigma, a, L_1) = \sigma\sqrt{\pi a} \cdot k(a, L_1). \quad (2)$$



Obr. 2^[1]: Napětí a souřadnice okolo čela trhliny

Součinitel intenzity napětí je tedy závislý na napětí σ v tělese s trhlinou, na délce trhliny a a na tzv. tvarové funkci k , která zohledňuje různou geometrii tělesa s trhlinou podle délky trhliny a a charakteristického geometrického rozměru L_i daného tělesa.

Funkce $f_{ij}^{[1,3]}$ jsou pro napětí v souřadnicích x, y, z (obr. 2) s rozlišením na rovinnou deformaci (RD) a rovinnou napjatost (RN) vypsány v následující tabulce (tab. 1):

Funkce	Mód I	Mód II	Mód III
f_x	$\cos(\varphi/2)[1-\sin(\varphi/2)\sin(3\varphi/2)]$	$-\sin(\varphi/2)[2+\cos(\varphi/2)\cos(3\varphi/2)]$	0
f_y	$\cos(\varphi/2)[1+\sin(\varphi/2)\sin(3\varphi/2)]$	$\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2)\cos(3\varphi/2)$	0
f_z (RD)	$-2\mu \cdot \cos(\varphi/2)$	$-2\mu \cdot \sin(\varphi/2)$	0
f_z (RN)	0	0	0
f_{xy}	$\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2)\cos(3\varphi/2)$	$\cos(\varphi/2)[1-\sin(\varphi/2)\sin(3\varphi/2)]$	0
f_{xz}	0	0	$-\sin(\varphi/2)$
f_{yz}	0	0	$\cos(\varphi/2)$

Tab. 1: Funkce f_{ij} pro jednotlivá napětí a módy

Tyto vztahy jsou však použitelné pouze za předpokladů LELM. Součinitel intenzity napětí K je již v obecnějším přístupu k řešení trhlin, v elasto-plastické lomové mechanice (EPLM), neplatný. Pro popis chování trhliny pomocí elasto-plastických výpočtů v podmínkách LELM (kde jsou také platné) je proto nutné použít jiný přístup, jako například koncepci J -integrálu, vztahy pro napětí σ_{ij} vyjadřovat v závislosti na parametru EPLM (např. J -integrálu) a dbát na to, že budou platné jen pro malý rozsah zplastizované oblasti.

2 Teorie elasto-plastické lomové mechaniky

Jak již bylo řečeno v kapitole 1, trhlinu v tělese je možné posuzovat dvěma způsoby. Buď za podmínek LELM nebo za podmínek EPLM. Pro použití LELM musí být splněny specifické podmínky použitelnosti lineárních výpočtů^[1], ale samotné určování charakteristik trhliny (např. součinitele intenzity napětí K) je jednodušší. Naproti tomu EPLM umožňuje obecnější pojetí trhliny. Je však zapotřebí použít komplikovanější výpočetní postupy, které jsou schopné zahrnout do výpočtů i nezanedbatelný vliv zplastizovaného materiálu kolem čela trhliny (koncepte J -integrálu)^[4]. Obecně jsou ale výpočty v EPLM platné i když je trhlina ve stavu podle podmínek LELM.

Základní určující veličinou toho, kdy je již nutné použít komplikovanější přístup EPLM, je velikost plastické zóny r_p . Obecně je definováno, že pokud je plastická zóna velká, je nutné použít přístup EPLM^[1], přičemž tato hranice je obecně pro plastickou zónu o velikosti 5%^[5, 6] až 10%^[1, 7] celkové délky trhliny:

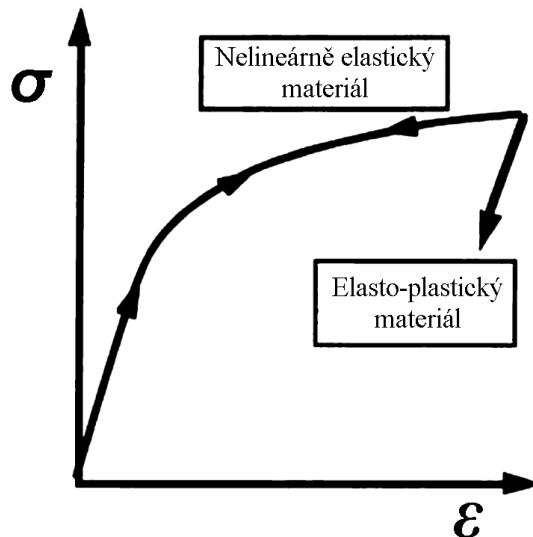
$$r_p \geq \frac{1}{20} \cdot a_t, \quad r_p \geq \frac{1}{10} \cdot a_t. \quad (3)$$

Tato hranice velké plastické zóny je tedy určena pouze pomocí celkové délky trhliny a_t a říká, že plastická zóna je velká, pokud její charakteristický rozměr r_p přesáhne 5%, respektive 10% celkové délky trhliny a_t .

2.1 Koncepte J -integrálu

Při teoretickém posuzování plastické zóny u čela trhliny není předem zaručené, zda jsou splněny podmínky LELM nebo EPLM. Proto je v takovém případě vhodné použít koncepci J -integrálu, která je platná jak v LELM, tak v EPLM a umožňuje i výpočty se zahrnutím vlivu plasticity. V praxi se pak plasticita více projevuje především u materiálů s nízkou nebo střední pevností a mezí kluzu^[2].

Elasto-plastická deformace materiálu může být idealizována jako nelineárně elastická deformace. Na základě tohoto zjednodušení Rice^[8] získal možnost rozšířit lomovou mechaniku i mimo omezení spojené s LELM. Při zatěžování se totiž elasto-plastický materiál chová stejně jako nelineárně elastický materiál. Rozdíl nastává až při odlehčování, kdy u elasto-plastického materiálu zůstává trvalá deformace, zatímco u nelineárně elastického ne. Tato podobnost dvou modelů materiálu je dobře vidět na průběhu křivek napětí-deformace při zatěžování (obr. 3).



Obr. 3^[4]: Nelineárně elastický vs. elasto-plastický model materiálu

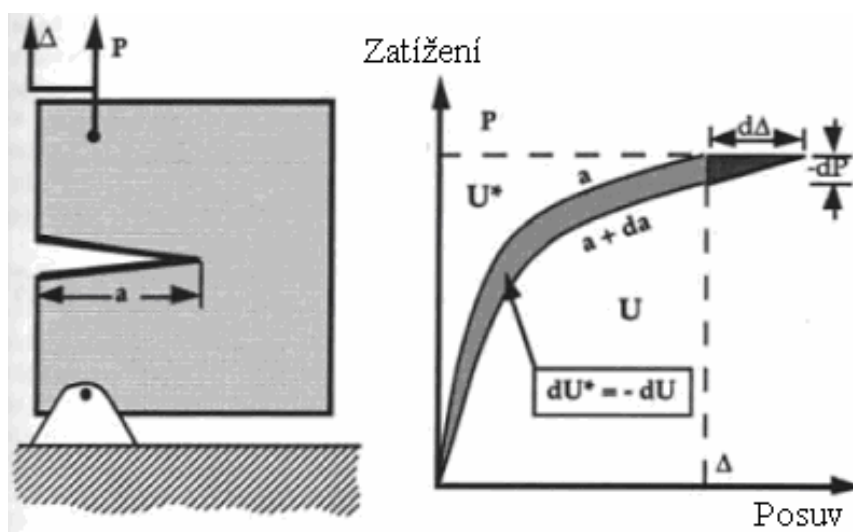
Deformační teorie plasticity, která pracuje se vztahem deformace-napětí, je tedy na základě tohoto zjednodušení shodná s nelineární elasticitou^[4].

Pro tuto idealizaci parametrů materiálu Rice navrhnul integrál^[8], který vyjadřuje uvolňování elastické energie v tělese s trhlinou z nelineárně elastického materiálu^[4] a nazval ho *J*-integrál:

$$J = -\frac{d\Pi}{dA}, \quad (4)$$

kde Π je potenciální energie tělesa s trhlinou a A je plocha trhliny. Energie Π je určena jako rozdíl deformační energie tělesa U a práce vnějších sil F . Pro desku z nelineárně elastického materiálu zatěžovanou v módu I (obr. 4) je pak možné potenciální energii Π vyjádřit jako^[4]:

$$\Pi = U - P\Delta = -U^*. \quad (5)$$



Obr. 4^[4]: Těleso s trhlinou z nelineárně elastického materiálu

Energie U^* je doplňková deformační energie a je pro daný případ vyjádřena vztahem^[4]:

$$U^* = - \int_0^P \Delta dP, \quad (6)$$

kde P je síla působící na těleso s trhlinou a Δ je deformační zatížení tělesa s trhlinou. J -integrál je pak vyjádřený jako:

$$J = \left(\frac{dU^*}{da} \right)_P = \left(\frac{\partial}{\partial a} \int_0^P \Delta dP \right)_P = \int_0^P \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a} \right)_P dP, \quad (7)$$

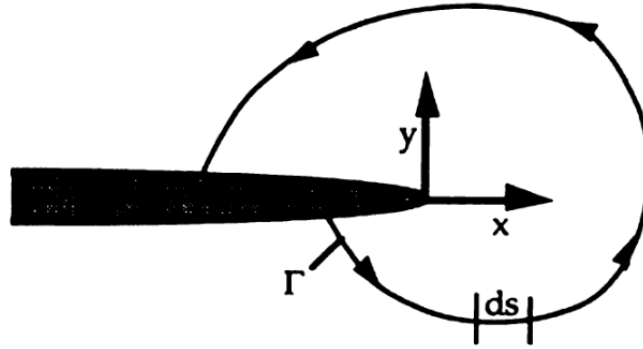
nebo:

$$J = \left(\frac{dU}{da} \right)_\Delta = - \left(\frac{\partial}{\partial a} \int_0^\Delta P d\Delta \right)_\Delta = - \int_0^\Delta \left(\frac{\partial P}{\partial a} \right)_\Delta d\Delta, \quad (8)$$

přičemž vztah (7) je vyjádření pro silové zatěžování desky s trhlinou a vztah (8) je vyjádření pro deformační zatěžování desky s trhlinou. Je dokázáno, že obě možnosti nabývají stejné hodnoty^[4].

Pro 2D případ (obr. 5) je možné J -integrál vyjádřit jako křivkový integrál^[2]:

$$J = \int_\Gamma \left(w dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right), \quad (9)$$



Obr. 5^[4]: Integrační křivka Γ kolem čela trhliny

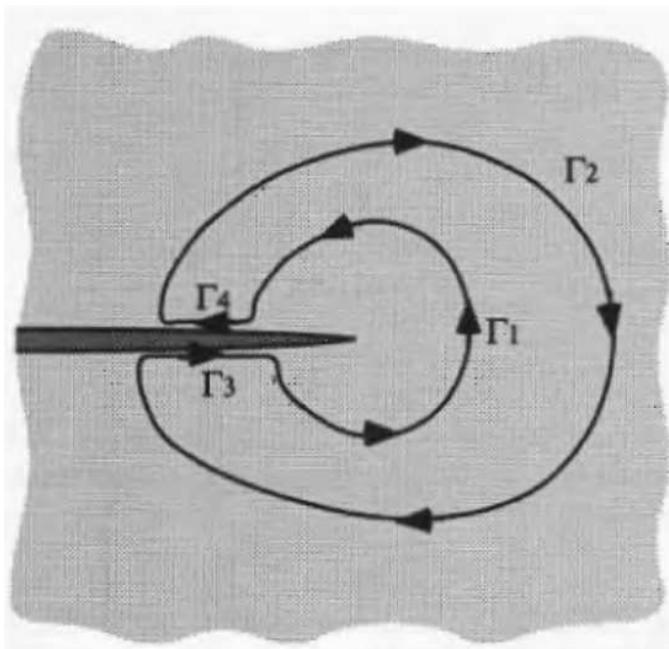
kde T_i je vektor povrchových sil v normálovém směru k integrační křivce Γ , u_i je vektor posuvů, s je délka integrační křivky a w je hustota deformační energie, která je definovaná vztahem^[4]:

$$w = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (10)$$

kde σ_{ij} a ε_{ij} jsou složky tenzoru napětí respektive deformace.

Rice dále dokázal^[8], že hodnota J -integrálu je nezávislá na integrační křivce Γ . Pro uzavřenou křivku Γ (obr. 6) je velikost J -integrálu rovna nule, platí tedy^[2, 4]:

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 0. \quad (11)$$



Obr. 6^[4]: Uzavřená integrační křivka Γ

Protože na lomových plochách jsou nulové povrchové síly T_i a souřadnice y jsou konstantní^[4], jsou hodnoty J_3 a J_4 nulové^[4]. Platí tedy:

$$J_3 = J_4 = 0 \rightarrow J = J_1 + J_2 = 0 \rightarrow J_1 = -J_2. \quad (12)$$

Ze vztahu (12) tedy jasně vyplývá, že hodnota J -integrálu pro integraci po křivce Γ_1 je shodná s hodnotou pro integraci po křivce Γ_2 , přičemž záporné znaménko pouze vyjadřuje opačný směr integrace.

J -integrál je také možné v oblasti LELM vyjádřit pomocí elastických materiálových charakteristik E a μ a součinitelů intenzity napětí^[2] vztahem:

$$J = \frac{1+\mu}{E} \left((1-\mu)(K_I^2 + K_{II}^2) + K_{III}^2 \right), \quad (13)$$

respektive vztahem:

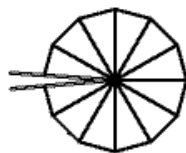
$$J = \frac{1}{E} \left(K_I^2 + K_{II}^2 + (1+\mu)K_{III}^2 \right), \quad (14)$$

kde vztah (13) platí pro případ rovinné deformace a vztah (14) pro případ rovinné napjatosti. Toto vyjádření však není možné uvažovat za podmínek EPLM a při použití je nutné dbát na platnost pouze za podmínek LELM kvůli definici součinitelů intenzity napětí.

2.1.1 Určení J -integrálu pomocí MKP

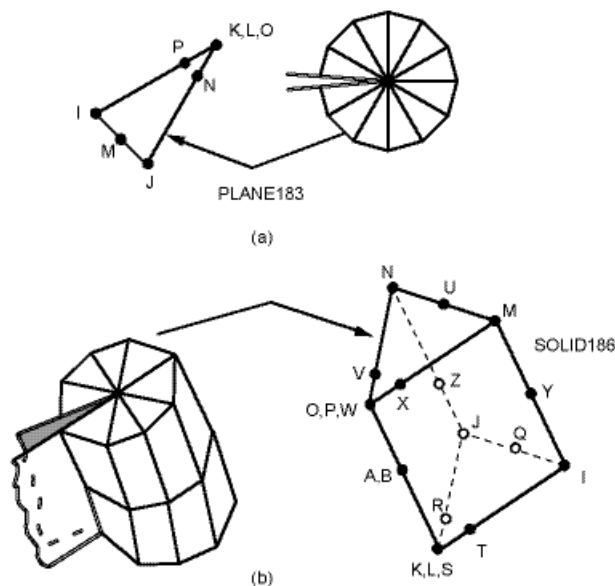
Výpočty hodnoty J -integrálu pro obecnou trhlinu analytickými metodami jsou velmi obtížné. Z tohoto důvodu byly vytvořeny postupy výpočtu J -integrálu v rámci metody konečných prvků (MKP). Za využití výpočetní techniky a specializovaných simulačních programů je tak mnohem jednodušší získání hodnoty J -integrálu pro danou trhlinu v rámci přesnosti výpočtů MKP. Jedním z existujících simulačních programů je program ANSYS.

Výpočty parametrů trhliny pomocí MKP jsou vždy úzce spjaty s přesností výpočtu napěťové, respektive deformační singularity na čele trhliny. Obecně pro metodu MKP platí, že přesnost výpočtu roste s větší hustotou sítě konečných prvků použitých při výpočtu. To však v mnoha případech vede k velmi složitým modelům a obzvláště u 3D objektů náročnost výpočtu extrémně roste. Tento problém s příliš složitými modely je možné řešit díky znalosti charakteru singularity u čela trhliny. V praxi se využívá přístup vytvářející trojúhelníkové elementy sítě konečných prvků, které jsou rozmístěné vějířovitě kolem čela trhliny (obr. 7). Je tak lépe vystihnout velký gradient napětí a deformací směrem k čelu trhliny.



Obr. 7^[9]: Uspořádání konečných prvků kolem čela trhliny

Nadstavbou k této metodě je využití jedné konkrétní vlastnosti kvadratického typu konečných prvků v MKP. Kvadratické prvky mají deformace po hraně aproximované kvadratickými funkcemi a pokud nejsou výpočetní uzly v rámci jednoho elementu umístěny rovnoměrně po délce hrany elementu, dochází k degeneraci prvku a ke vzniku umělých singularit v určitých místech elementu. Posunutí středního uzlu na hraně elementu směrem k čelu trhliny do vzdálenosti 1/4 délky elementu (obr. 8) vytváří v uzlu na čele trhliny singularitu téměř shodnou s teoreticky odvozenými průběhy napětí a deformací^[9].



Obr. 8^[9]: Konečné prvky v programu ANSYS s upravenými středními uzly

Díky těmto úpravám sítě konečných prvků jsou deformace a napětí v okolí čela trhliny dobře určeny i za použití menšího počtu prvků, což umožňuje rychlejší a přesné výpočty.

Samotné určení hodnoty J -integrálu v programovém prostředí ANSYS vychází z teorie popsané v kapitole 2.1, k výpočtům jsou však použity numerické metody. Konkrétně je výpočet založen na integrační metodě, kterou odvodil Shih^[10]. Pro 2D úlohy je zavedena plošná integrace přes rovinné prvky v těsném okolí čela trhliny, zatímco ve 3D úlohách je zavedena objemová integrace přes objemové prvky v okolí čela trhliny^[9]. Tento postup je pro numerické výpočty výhodnější než křivková integrace pro 2D, resp. plošná integrace pro 3D úlohu^[9].

Převedení analytického postupu od Shiha^[10] (který je shodný s postupy uvedenými v kapitole 2.1) na numerický výpočet (pro nejjednodušší 2D případ) je dáno vztahem^[9]:

$$J = \sum_{ie=1}^{ne} \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - w \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} w_{iw} A_{ie} , \quad (15)$$

kde σ_{ij} jsou složky tenzoru napětí, u_j jsou složky vektoru posuvů, w je hustota deformační energie, δ_{ij} je Kroneckerovo delta, q je vektor směru trhliny, ne je počet prvků po integrační cestě původního J -integrálu, w_{iw} jsou váhové funkce a A_{ie} je plocha prvku číslo ie .

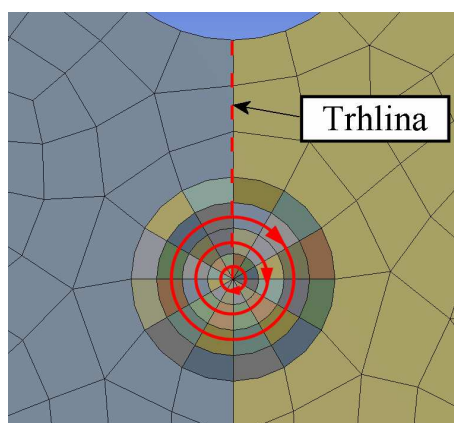
Pro složitější 2D případ zahrnující např. i tření na lomových plochách je řešený integrál definovaný vztahem^[9]:

$$J = \int_A \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - w \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} dA - \int_C t_j u_{j1} q_1 dS , \quad (16)$$

kde t_j vyjadřuje tření na lomové ploše a C je lomová plocha, na kterou je tření aplikováno. Převod na numerickou integraci je obdobný jako u vztahu (15).

Postupy pro 3D úlohy jsou oproti 2D složitější, ale princip odvození, výpočtu a numerické realizace je shodný s postupy pro 2D výpočet^[9].

Integrace je tedy nahrazena numerickým postupem (dle vztahu (15)), kdy původními integračními křivkami jsou lomené čáry procházející řadami prvků kolem čela trhliny (obr. 9). Postup je opakován pro libovolný počet integrací, další integrační křivky volí program ANSYS pro řady prvků mimo již použité.



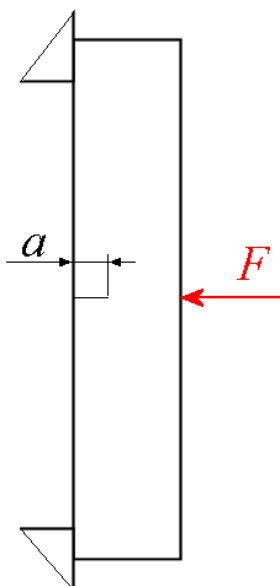
Obr. 9: Příklady integračních cest Γ

Vlastní zadávání výpočtu J -integrálu v prostředí programu ANSYS je realizováno v části preproccessingu pomocí příkazu CINT. Pro správné určení hodnoty J je nutné

specifikovat uzel na čele trhliny a směr kolmý k lomovým plochám. Uzel na čele trhliny je určený vytvořením komponenty obsahující právě tento jeden uzel. Normálový směr k lomovým plochám lze zadat buď přímo pomocí vektoru odvozeného od aktivního souřadnicového systému, nebo vytvořením nového souřadnicového systému s počátkem na čele trhliny, osou x ve směru trhliny a osou y kolmou na lomové plochy^[9]. Dále je možné zadat například podmínky symetrie a počet integračních cest kolem čela trhliny. Program ANSYS také umožňuje automatické rozpoznání potřebných směrů od čela trhliny. Automatické určení však není vždy přesné a u obecně tvarovaných trhlín je mnohem výhodnější ruční zadávání.

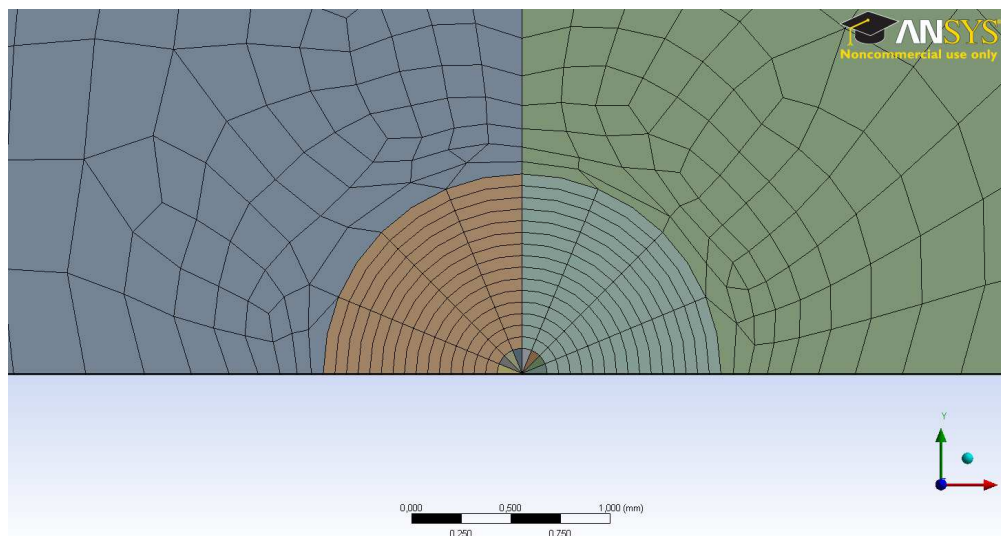
2.1.2 Posouzení ekvivalence integračních cest

Podle definice J -integrálu by měly pro různé integrační cesty vycházet stejné hodnoty J . Aby se ověřila použitelnost výpočtu J -integrálu programem ANSYS ve zplastizovaném tělese, byl proveden tento výpočet na jednoduchém modelu rovinné desky s trhlinou namáhané ohybem (obr. 10). Trhlinka je tedy namáhána pouze v módu I.



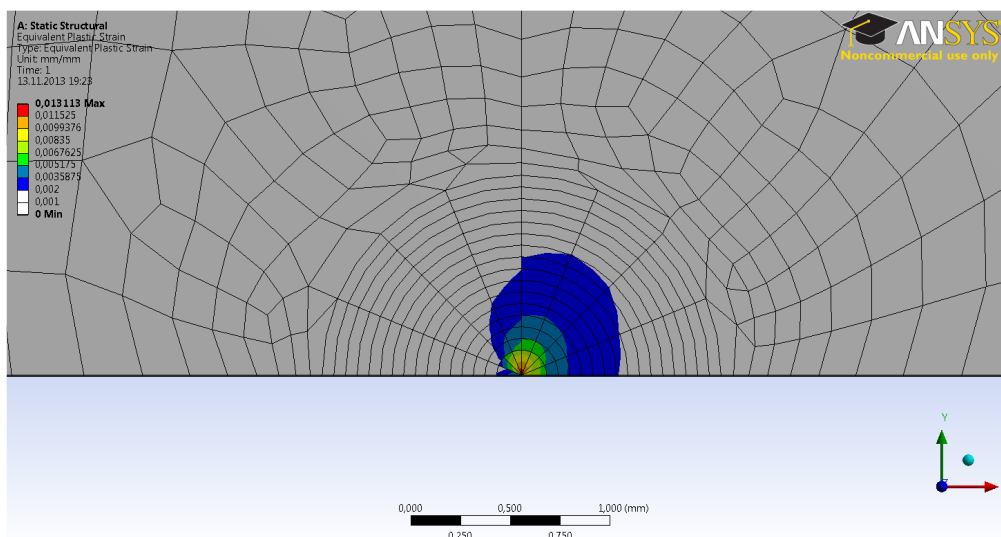
Obr. 10: Geometrie rovinné desky s trhlinou

Tuto úlohu je možné zjednodušit na 2D výpočet s využitím symetrie, takže stačí ve výpočetním programu vymodelovat polovinu desky. Diskretizace úlohy na síť konečných prvků byla provedena podle pravidel popsanych v kapitole 2.1.1 (obr. 11).



Obr. 11: Síť konečných prvků na rovinné desce u čela trhliny

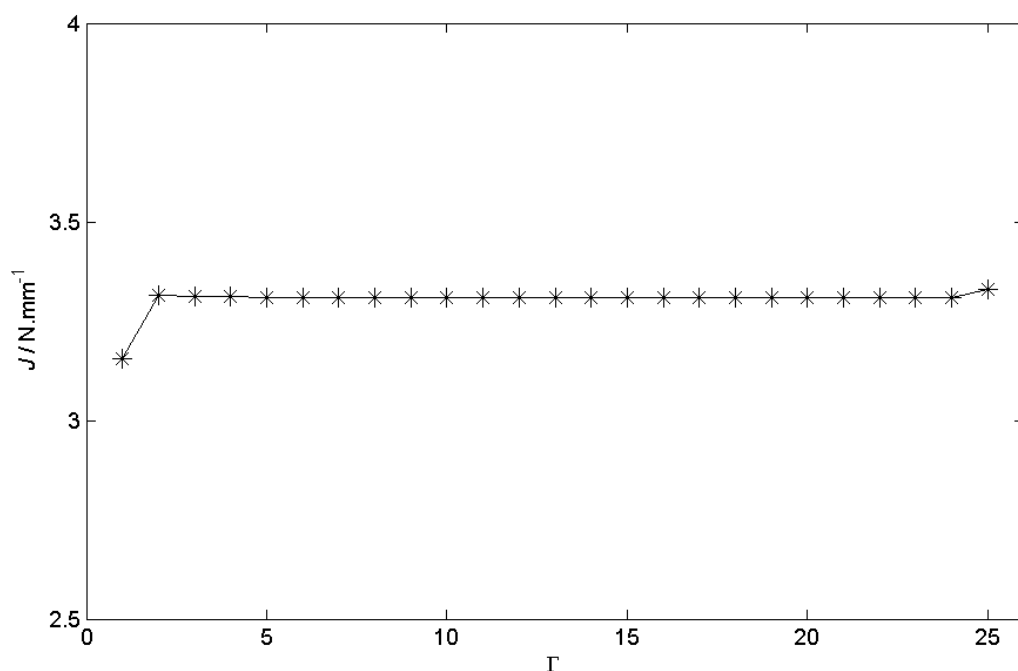
Okrajové podmínky úlohy byly zadány v souladu s pravidly symetrie a se zadáním. K vytvoření ostré trhliny byl na ose symetrie zamezen posuv kolmo na ni a část tvořící trhlínu byla ponechána bez omezení. K zahrnutí plasticity do výpočtu bylo použito bi-lineárního modelu materiálu s isotropním zpevněním. Zatížení bylo zvoleno tak, aby došlo k vytvoření malé plastické oblasti kolem čela trhliny (obr. 12). Výpočet hodnoty J -integrálu byl zadán pomocí příkazu CINT s počtem 25 integračních cest.



Obr. 12: Plastická oblast kolem čela trhliny v rovinné desce

Výsledné hodnoty J -integrálu jsou vykresleny v grafu (obr. 13). Z číselných výsledků je patrné, že kromě první a poslední hodnoty jsou všechny ostatní téměř shodné (rozdíly jsou v řádu desetin procenta). Odchylna první integrační křivky je způsobena blízkostí k čelu trhliny, protože je první řada elementů ovlivněna singularitou na čele trhliny. Poslední integrační křivka nejspíš na straně volného povrchu desky v malém úseku neprochází materiálem, nebo využívá elementů již použitých ve 24. křívce (25 křívce bylo voleno tak,

aby byla pokryta co největší plocha s ohledem na síť konečných prvků), takže již nemůže dát 100% relevantní výsledek.



Obr. 13: Hodnoty J -integrálu pro různé integrační křivky

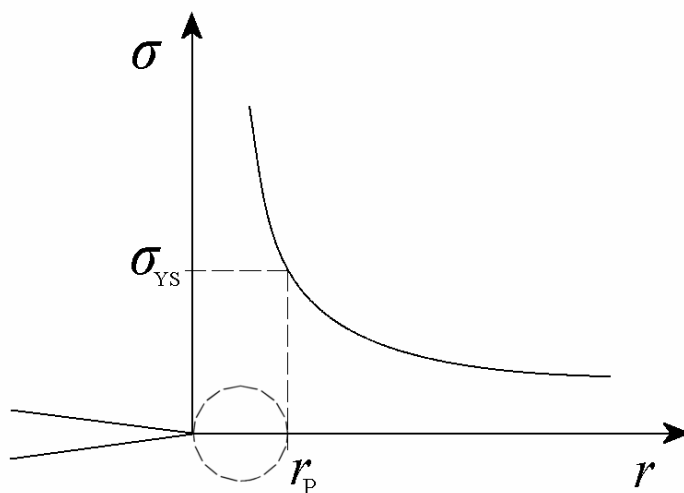
Výsledky potvrzují, že se výpočet J -integrálu v simulačním programu ANSYS řídí pravidly z teorie koncepce J -integrálu. Zároveň zjištěné hodnoty ukazují fakt, že při výpočtu může integrační křivka procházet i oblastí s plastickou deformací, zplastizovaná byla plocha minimálně přes řadu prvních sedmi prvků (obr. 12). To je možné díky pojetí modelu materiálu ne jako elasto-plastického, ale jako nelineárně elastického.

S ohledem na tato zjištění je vhodné určovat počet kontur pro integraci podle počtu řad elementů ve vějířovité části sítě konečných prvků u čela trhliny (je zde zajištěna rovnoměrnost řad elementů) a první integrační cestu je nutné z výsledků vyřadit.

2.2 Velikost plastické zóny r_P

Jak vyplývá z elastického řešení (viz. kapitola 1), složky napětí na čele trhliny dosahují velmi vysokých hodnot, které jsou vyšší než mez kluzu materiálu σ_{YS} . V okolí čela trhliny tedy vzniká lokální plastická zóna. Existence plastické zóny podstatně změní pole napětí na čele trhliny.

Protože velikost této plastické zóny rozhoduje o možnosti užití LELM nebo EPLM, je zapotřebí určit vhodný parametr, kterým je v tomto případě charakteristický rozměr r_P plastické zóny (obr. 14) ve směru trhliny.



Obr. 14: Plastická zóna u čela trhliny (schématicky)

2.2.1 Analytické určení r_P

Protože v okolí čela trhliny je prostorová napjatost, využívá se pro určení místa, kde napětí dosáhne mez kluzu, podmínka plasticity HMM:

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}, \quad (17)$$

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_{YS}. \quad (18)$$

Singularita napětí u čela trhliny je v LELM pro složky napětí σ_{ij} popsána vztahem (1), uvedeným v kapitole 1, ze kterého lze určit průběh napětí v závislosti na poloze u čela trhliny definované vzdáleností r od čela trhliny a úhlem φ .

Nenulové složky napětí u čela trhliny zatížené v módu II za předpokladu rovinné deformace jsou σ_x , σ_y , σ_z , a τ_{xy} a jsou popsána vztahy:

$$\sigma_{x,II}(K_{II}, \varphi, r) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \left(-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left[2 + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \right] \right), \quad (19)$$

$$\sigma_{y,II}(K_{II}, \varphi, r) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \left(\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \right), \quad (20)$$

$$\sigma_{z,II}(K_{II}, \varphi, r) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \left(-2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right), \quad (21)$$

$$\tau_{xy,II}(K_{II}, \varphi, r) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left[1 - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \right] \right). \quad (22)$$

Pro trhlínu zatíženou v módu III jsou jediná nenulová napětí τ_{xz} a τ_{yz} a jsou popsána vztahy:

$$\tau_{xz,III}(K_{III}, \varphi, r) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \left(-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right), \quad (23)$$

$$\tau_{yz,III}(K_{III}, \varphi, r) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right). \quad (24)$$

Dosazením do vztahu (17) pro redukované napětí dle podmínky HMM dostaneme průběhy redukovaných napětí u čela trhliny zatížené v módu II (25) a v módu III (26) jako funkci úhlu φ , vzdálenosti od čela trhliny r a příslušného K -faktoru za stavu rovinné deformace:

$$\sigma_{red,II}(K_{II}, \varphi, r) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \sqrt{3 - \frac{9}{4} \cdot \sin^2(\varphi) + (2\mu - 1)^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}, \quad (25)$$

$$\sigma_{red,III}(K_{III}, \varphi, r) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{6 \cdot \left(\frac{K_{III}^2}{2\pi r} \cdot \left[\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \right)} = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{K_{III}}{\sqrt{\pi r}}. \quad (26)$$

Je zřejmé, že redukované napětí pro mód III (26) není závislé na úhlové souřadnici φ .

Vzdálenost r od čela trhliny, kde redukované napětí dosáhne hodnoty meze kluzu σ_{YS} (dle vztahu (18)), je možné prohlásit za velikost plastické zóny r_P . Ve směru trhliny ($\varphi = 0^\circ$) je pak velikost plastické zóny dána pro zatížení v módu II:

$$r_{P,II}(K_{II}) = \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{K_{II}^2}{\sigma_{YS}^2}, \quad (27)$$

a pro zatížení v módu III:

$$r_{P,III}(K_{III}) = \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{K_{III}^2}{\sigma_{YS}^2}. \quad (28)$$

Vztahy pro r_P odvozené z podmínky plasticity HMM ukazují, že v závislosti na příslušných K -faktorech je velikost plastické zóny pro oba módy shodná. Tento fakt je využit i při odvození velikosti plastické zóny na základě meze kluzu ve smyku^[3], kde po dosažení za souřadnici $\varphi = 0^\circ$ ve vztahu (29)^[3] a nahrazením K_{III} za K_{II} vyjde závislost $r_{P,III}$ na K_{III} :

$$r_{P,II}(K_{II}, \varphi) = \frac{1}{6\pi} \cdot \frac{K_{II}^2}{\tau_{YS}^2} \left[3 + \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{9}{4} \sin^2(\varphi) - 4\mu(1-\mu) \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right], \quad (29)$$

$$r_{P,III}(K_{III}, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{K_{III}^2}{\tau_{YS}^2}. \quad (30)$$

Při porovnání vztahů (28) a (30) pro $r_{P,III}$ je vidět jejich shoda při použití platného vztahu mezi σ_{YS} a τ_{YS} dle HMM:

$$\tau_{YS} = \frac{\sigma_{YS}}{\sqrt{3}}. \quad (31)$$

Pro potřeby posuzování plastické zóny pomocí hodnoty J -integrálu je nutné vyjádřit hodnotu r_P v závislosti na J . Dosažením závislosti J na K (13) do rovnice (29) vzniká vztah pro velikost plastické zóny pro zatížení v módu II a stav rovinné deformace:

$$r_{P,II}(J_{II}) = \frac{3}{2\pi(1-\mu^2)} \cdot \frac{J_{II}E}{\sigma_{YS}^2}, \quad (32)$$

a pro zatížení v módu III a stav rovinné deformace (dosažením (14) do rovnice (28)):

$$r_{P,III}(J_{III}) = \frac{3}{2\pi(1+\mu)} \cdot \frac{J_{III}E}{\sigma_{YS}^2}. \quad (33)$$

Uvedené vztahy (19) - (33) jsou však platné pouze při splnění podmínek LELM.

2.2.2 Určení r_p pomocí MKP

Přístup k určení velikosti plastické zóny pomocí MKP výpočtu je principiálně shodný s analytickým přístupem popsaným v předešlé kapitole - určuje se bod, kdy napětí resp. deformace v okolí čela trhliny dosáhne mezního stavu plasticity. Odlišnost v MKP přístupu spočívá ve způsobu určení napětí, respektive deformací u čela trhliny.

Zatímco analytický přístup využívá teorie LELM a vztahů k určení singularity napětí na čele trhliny, MKP přístup určuje složky tenzoru napětí a deformace na základě numerických výpočetních metod. MKP tedy umožňuje využitím nelineárního konstitutivního vztahu σ - ε určit složky tenzoru napětí a deformace i v případě zplastizovaného materiálu. Je tedy možné určit velikost plastické zóny i pro případy, kdy přestává platit teorie LELM.

Při určení velikosti plastické zóny r_p pomocí MKP lze vycházet z vypočítaných deformací a nebo napětí. Konkrétní hodnoty napětí a deformací jsou popsány obdobně jako v analytickém případě vztahem pro redukované (ekvivalentní) napětí^[9]:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)]}, \quad (34)$$

a ekvivalentní plastickou deformaci $\varepsilon_{eq, pl}$ ^[9] podle podmínky HMH:

$$\varepsilon_{eq, pl} = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + \mu)} \sqrt{(\varepsilon_{x, pl} - \varepsilon_{y, pl})^2 + (\varepsilon_{y, pl} - \varepsilon_{z, pl})^2 + (\varepsilon_{x, pl} - \varepsilon_{z, pl})^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy, pl}^2 + \gamma_{yz, pl}^2 + \gamma_{xz, pl}^2)}. \quad (35)$$

Složky tenzoru napětí a deformace jsou určeny pomocí numerických metod. Pro výpočet ekvivalentní plastické deformace $\varepsilon_{eq, pl}$ dosazuje program ANSYS za Poissonovo číslo μ hodnotu 0,5^[9]. To odpovídá materiálu ve zplastizovaném stavu.

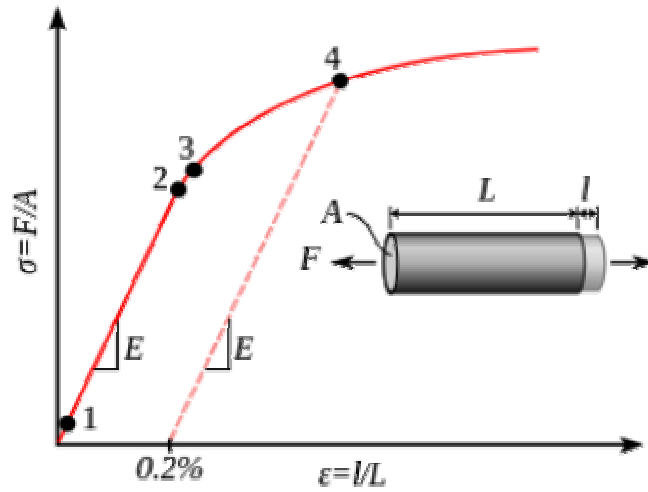
Z podmínky plasticity:

$$\sigma_{eq} = \sigma_{YS}, \quad (36)$$

je pak určena hranice plastické zóny.

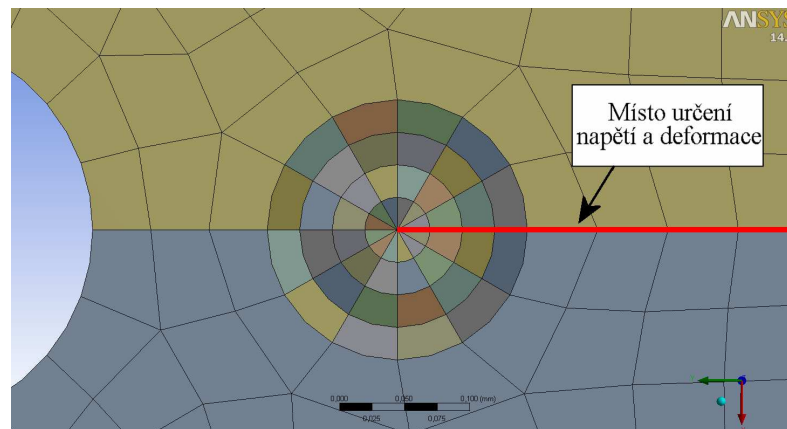
Pro určení velikosti plastické zóny z numericky vypočtené ekvivalentní plastické deformace je možné využít smluvní hranice plastického chování materiálu. Smluvně byl jako hranice plasticity určen bod (v průběhu grafu σ - ε), kdy je dosaženo 0,2% trvalé deformace^[11] (obr. 15), tzn.:

$$\varepsilon_{eq, pl} = 0,002. \quad (37)$$



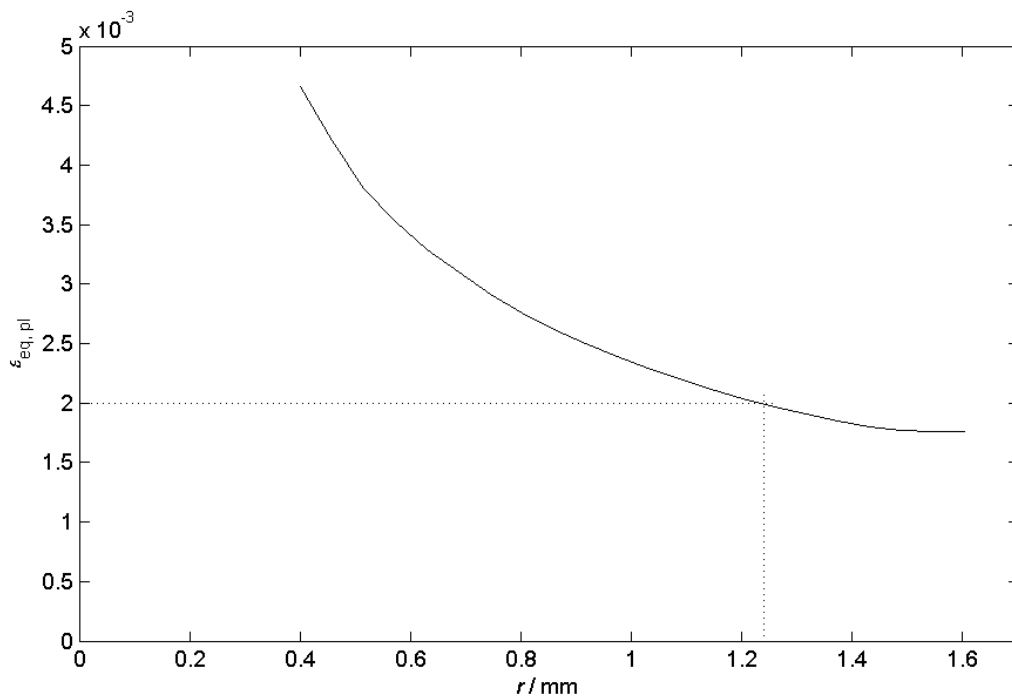
Obr. 15^[12]: Smluvní mez kluzu

Tyto podmínky (36) a (37) jsou pro určení velikosti plastické zóny r_p u čela trhliny aplikovány na numericky získané průběhy napětí σ_{eq} a deformací $\epsilon_{eq, pl}$, které jsou ve směru trhliny (obr. 16), tedy pro $\varphi = 0^\circ$.



Obr. 16: Místo určení napětí a deformací ve směru trhliny

Z grafu (obr. 17) je zřejmé, jak je získána hodnota velikosti plastické zóny r_p .



Obr. 17: Konkrétní průběh $\varepsilon_{eq,pl}$

Velikost plastické zóny r_p je tedy určena jako vzdálenost, kde ekvivalentní plastická deformace překoná hranici 0,2%.

3 Výpočet

Pro porovnání velikostí plastické zóny získaných na základě lineárních předpokladů a hodnot získaných pomocí MKP je nutné vytvořit výpočtový model, který umožní:

- 1) získat hodnoty J -integrálu pro konkrétní geometrii a zatížení;
- 2) výpočtově (pomocí MKP) zjistit velikost plastické zóny r_p pro konkrétní geometrii a zatížení.

Pro výpočtové modelování byly jako předloha použity experimenty prováděné k určování prahových hodnot součinitelů intenzity napětí K_{th} pro zatěžování ve smykových módech II a III, prováděné Ing. Vojtkem^[13].

3.1 Model materiálu

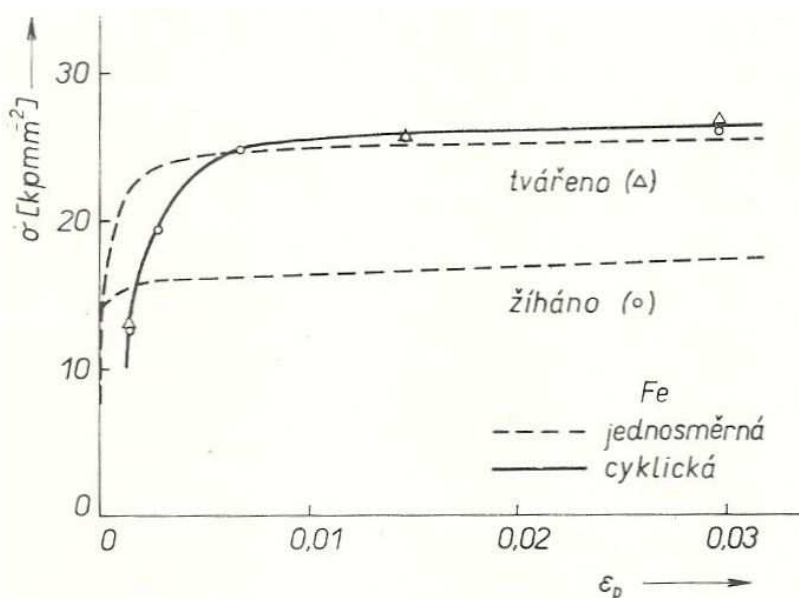
Materiál zkušebních těles používaných při experimentech^[13] bylo ARMCO železo. Model materiálu pro výpočet byl tedy vytvořen podle konkrétních materiálových charakteristik.

Model materiálu byl určen závislostí σ - ε , která zohledňovala elasto-plastické chování materiálu. Lineární část křivky σ - ε byla definována pomocí modulu pružnosti E a Poissonova čísla μ , jejichž konkrétní hodnoty jsou vypsány v tabulce (tab. 2).

E / MPa	210 000
μ	0,3

Tab. 2: Lineární materiálové charakteristiky

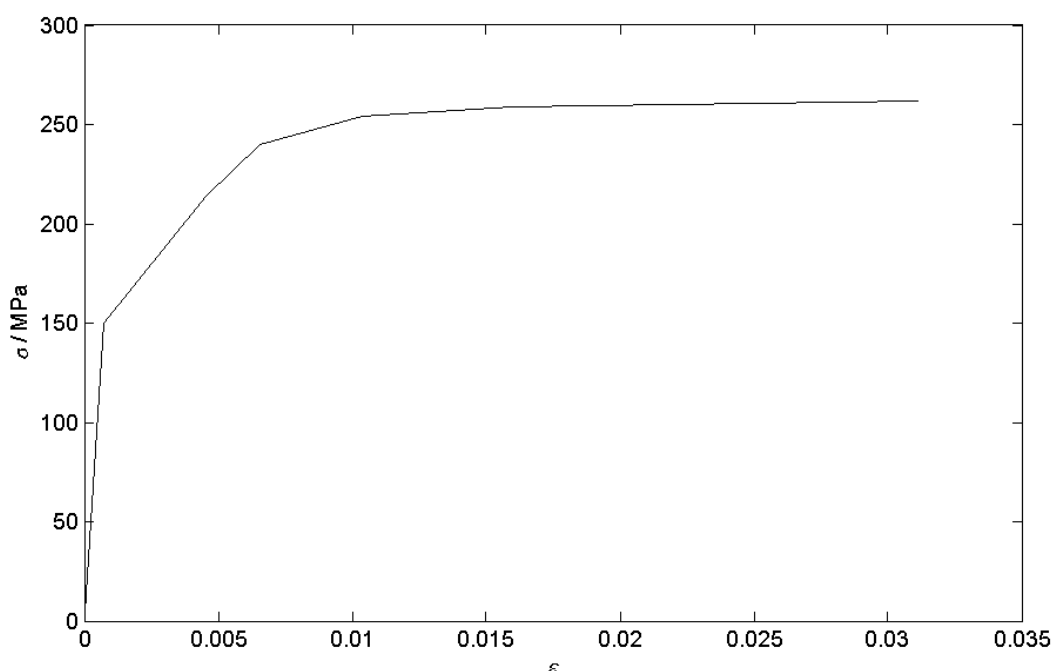
Část křivky vyjadřující plastické chování umožňuje program ANSYS vytvořit několika způsoby^[9]. Pro tento konkrétní případ byla zvolena metoda zjednodušení skutečné naměřené křivky σ - ε_{pl} pomocí multi-lineární aproximace. Jako předloha byla použita cyklická křivka σ - ε_{pl} ^[14] určená pro vlastnosti ARMCO železa po mnohonásobně opakovaném zatěžování (obr. 18).



Obr. 18^[14]: Cyklická σ - ε_{pl} křivka pro ARMCO železo

Program ANSYS vyžaduje pro zvolený typ modelu materiálu zadat lineární charakteristiky pomocí konstant E a μ (viz. tab. 2), pro popsání plastického chování materiálu je pak nutné zadat tabulku hodnot plastických deformací pro příslušná napětí. Tyto hodnoty byly odečteny v několika bodech závislosti σ - ε_{pl} ARMCO železa^[14].

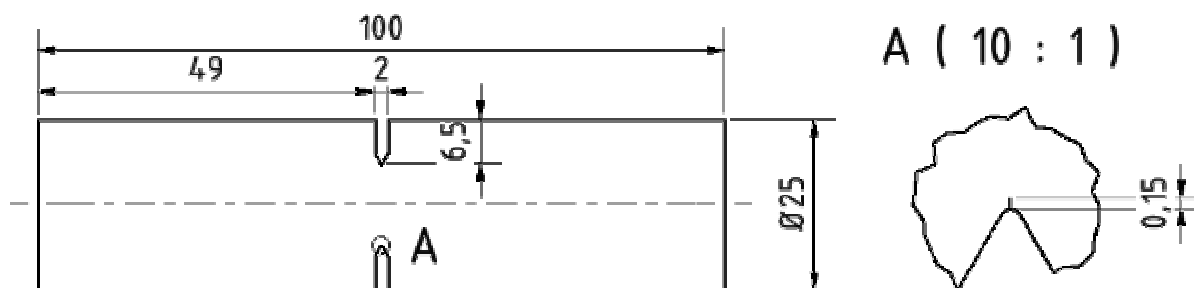
Po zadání jednotlivých hodnot napětí σ a jim příslušných plastických deformací ε_{pl} (dostatečného počtu pro multi-lineární aproximaci) vznikl model materiálu pro výpočet, charakterizovaný plnou závislostí σ - ε (obr. 19).



Obr. 19: Charakteristika použitého modelu materiálu

3.2 Použitá geometrie a zatížení

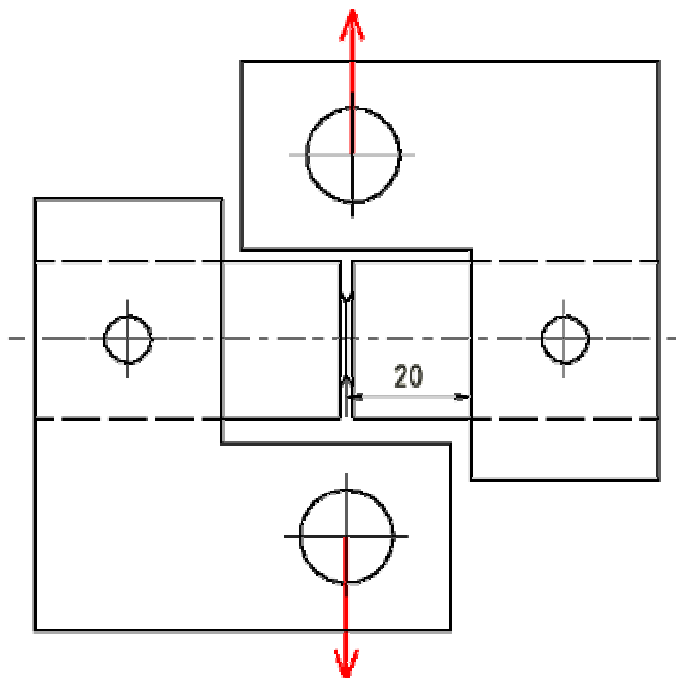
Model geometrie byl vytvořen podle tvaru a rozměrů zkušební vzorku použitého při experimentech^[13] (obr. 20).



Obr. 20: Geometrie modelu (příklad pro $a_0 = 0,15$ mm)

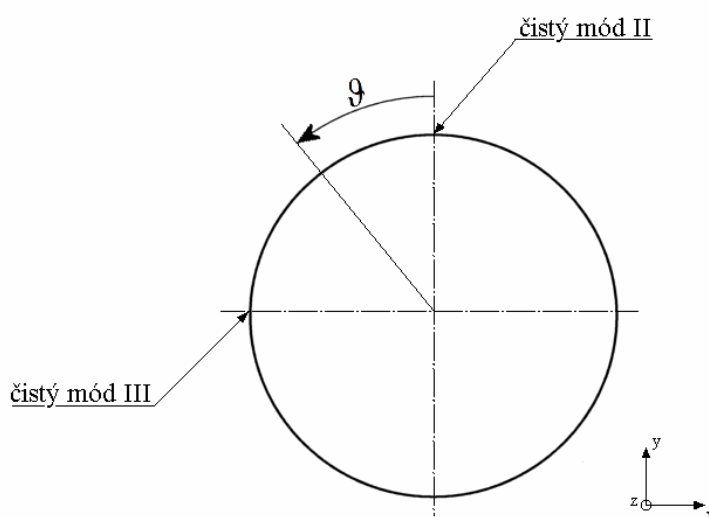
Jednalo se o válcový vzorek o délce 100 mm a průměru 25 mm. V polovině vzorku byl vytvořen obvodový vrub o hloubce 6,5 mm, z jehož čela vybíhala počáteční trhlina. Zatížení bylo realizováno silovým působením (obr. 21), které bylo při výpočtech nahrazeno

deformační okrajovou podmínkou, aby posuvy uchycených částí vzorku odpovídaly silovému zatížení. Tak bylo dosaženo toho, že v místě trhliny byl vzorek namáhaný pouze smykově, díky symetrickému uchycení byl v místě trhliny nulový ohybový moment a trhlina tak byla zatížena pouze ve smykových módech II a III.



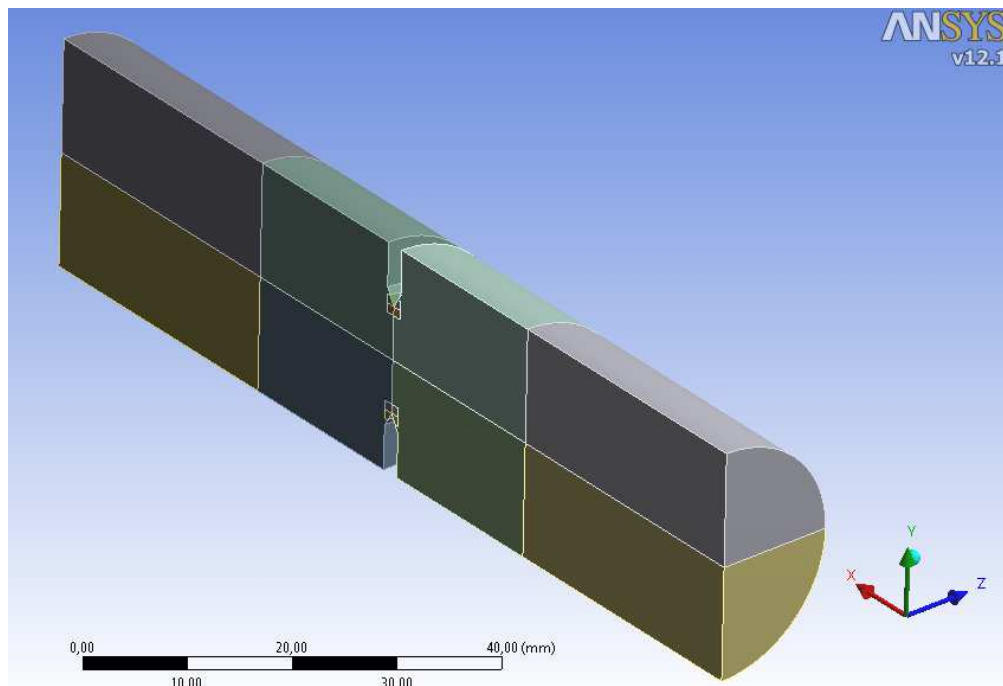
Obr. 21: Zatížení zkušebního vzorku

Na horní a spodní straně válečku (pro $\vartheta = 0^\circ$ a $\vartheta = 180^\circ$) byla trhlina zatížena v módu II, po stranách (pro $\vartheta = 90^\circ$ a $\vartheta = 270^\circ$) byla trhlina zatížena v módu III a v jakémkoliv jiném místě po obvodu vzorku byla kombinace těchto módů (obr. 22).



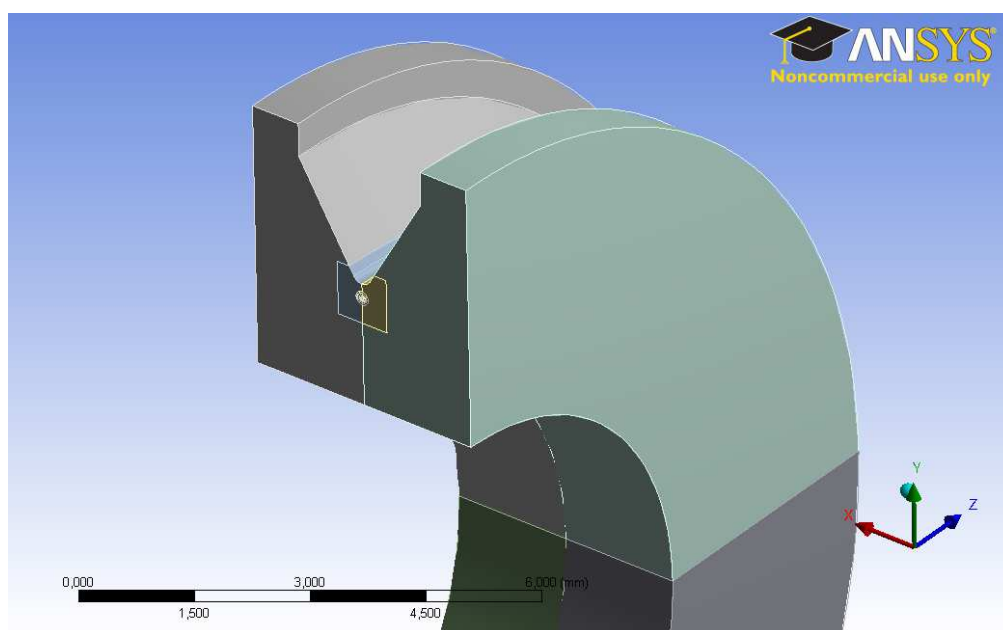
Obr. 22: Pozice čistých módů II a III

Model geometrie (obr. 23) byl v prostředí ANSYS vytvořen s využitím jedné roviny symetrie, která procházela osou zkušebního vzorku a byla rovnoběžná se silovým zatížením. Celý model byl rozdělen na několik částí kvůli následnému vytváření sítě konečných prvků a kvůli modelování trhliny jako nespojitosti v modelu.



Obr. 23: Model geometrie

Pro zkrácení doby výpočtu a zpřesnění získaných výsledků byl navíc vytvořen druhý výpočetní model, tzv. submodel. Tento submodel (obr. 24) byl výřezem z původního globálního modelu a byl diskretizován mnohem jemnější sítí konečných prvků. Vlastní výpočet probíhal postupně od globálního modelu, kde z vypočítaných posuvů v oblasti hranice, podle které byl vyříznut submodel, byly vytvořeny okrajové podmínky pro výpočet na submodelu. Výsledky z takto vytvořeného malého submodelu jsou mnohem přesnější díky lepší možnosti diskretizace konečnými prvky.

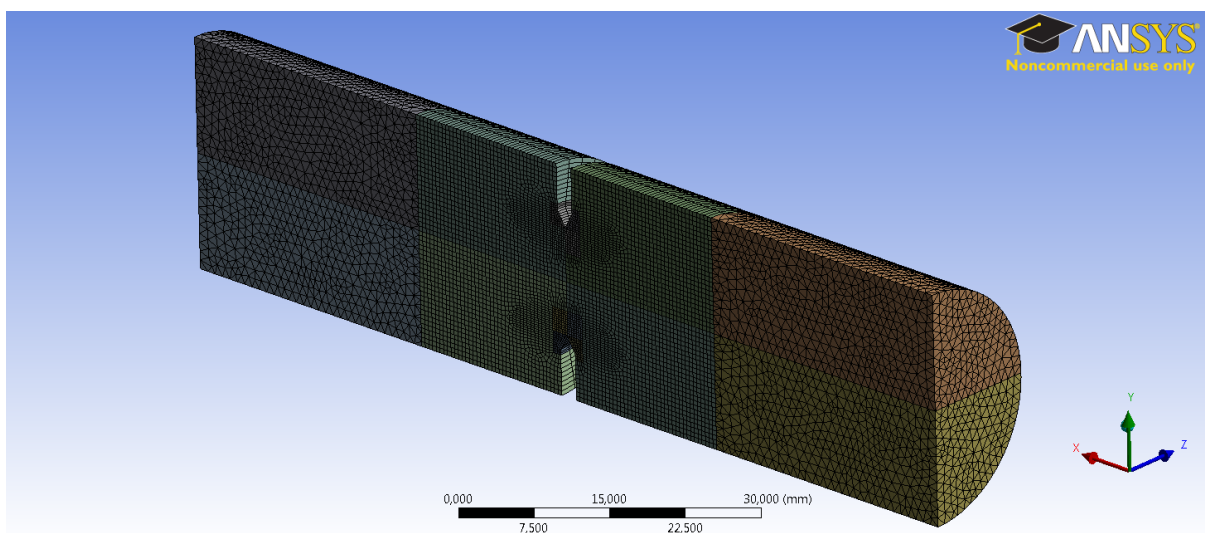


Obr. 24: Geometrie submodelu

3.3 Síť konečných prvků pro výpočet

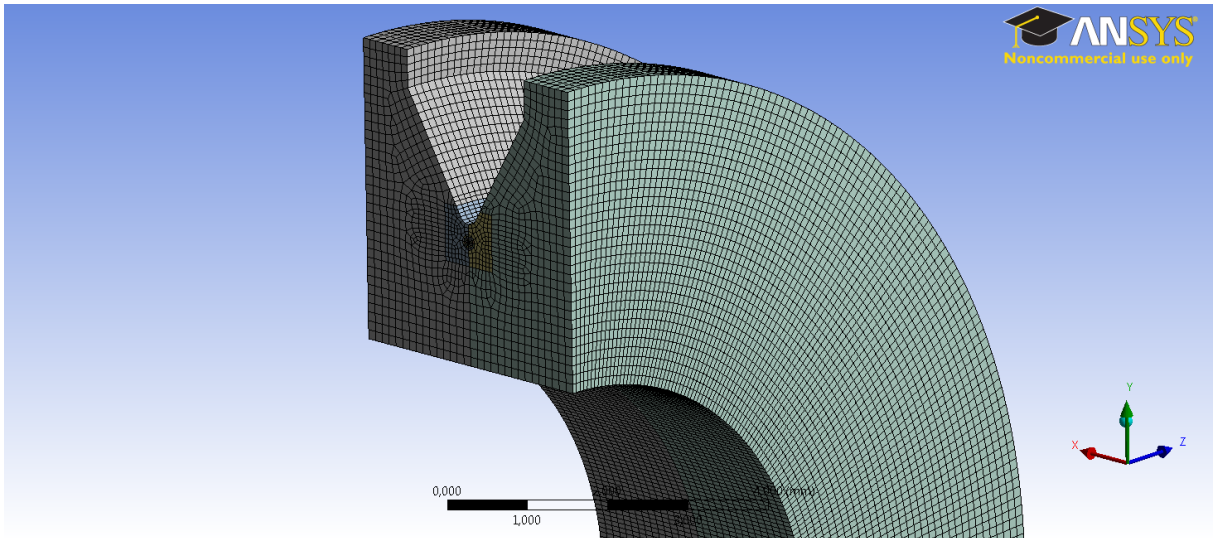
Pro MKP výpočet bylo nutné vytvořit na modelu geometrie vzorku síť konečných prvků, která musela splňovat několik podmínek, aby bylo dosaženo požadovaných výsledků na dobré úrovni.

Pro modelování a výpočty těles s trhlinou je potřeba, aby síť konečných prvků u čela trhliny byla dostatečně jemná. Čím jemnější síť konečných prvků je u čela trhliny, tím lépe je vystižen singulární nárůst deformací a napětí v okolí trhliny. Požadovaná jemnost konečných prvků při vytváření konkrétního výpočtu byla dosažena pomocí již zmíněného submodelingu. Globální model byl vyplněn relativně jemnou sítí konečných prvků (vztaženo k absolutní velikosti globálního modelu), která byla vhodná pro výpočet polí napětí a deformací ve zkušebním vzorku na makro - úrovni (obr. 25). Umožňovala tak dostatečně přesný výpočet zatíženého zkušebního vzorku při relativně krátké době výpočtu za použití dostupné výpočetní techniky (s počtem prvků sítě narůstá čas potřebný k výpočtu a spotřeba paměti RAM použitého počítače).



Obr. 25: Síť konečných prvků na globálním modelu

Na druhou stranu ale takto hrubá síť nemohla vystihnout velké gradienty napětí a deformací u čela trhliny. Proto bylo využito vlastností submodelingu. Submodel, který je mnohem menší než globální model, je možné diskretizovat řádově jemnější sítí konečných prvků (obr. 26), jejichž počet může být díky malému objemu modelu stále přijatelný.



Obr. 26: Síť konečných prvků na submodelu

Dále byl při vytváření MKP sítě brán ohled na předpokládaný průběh napětí a deformací okolo čela trhliny. Je známo^[1, 4], že za podmínek LELM singulárně rostou hodnoty napětí a deformací ve směru k čelu trhliny (v cylindrickém souřadném systému s počátkem na čele trhliny platí: když $r \rightarrow 0$, pak $\sigma, \varepsilon \rightarrow \infty$). Toto pravidlo lze aplikovat i na trhlínu za podmínek EPLM s tím rozdílem, že napětí již neroste kvůli plastizaci singulárně. Gradienty napětí a deformací jsou ale stále v relativně dobré shodě se zobrazením pomocí radiálních souřadnic. Proto je výhodné u submodelu s trhlínou vytvořit kolem čela trhliny vějířovitou síť konečných prvků, napodobující několik soustředných kružnic se středy na čele trhliny.

Použité konečné prvky byly prostorové prvky s označením SOLID 186, jejichž báze funkce jsou kvadratické^[9]. Tyto prvky byly zvoleny kvůli 3D charakteru úlohy a protože jejich báze funkce lépe vystihují vyšší gradienty napětí a deformací. Navíc mohla být využita metoda posuvu meziuzlů u první řady elementů u čela trhliny do 1/4 délky elementu. Tím bylo dosaženo zpřesnění výpočtu.

4 Zpracování výsledků pro čisté módy

Popsaný postup výpočtů byl proveden pro několik úrovní zatížení a pro různé délky trhliny a (uvažovaná délka trhliny od čela vrubu ve zkušebním tělese), které byly zjištěny při reálném experimentu^[5] (tab. 3).

Označení	F / N	$a / \mu\text{m}$
I.	10 070	234,0
II.	15 070	205,5
III.	12 070	217,5
IV.	8 458	122,0
V.	6 070	170,0
VI.	8 070	135,5
VII.	8 070	162,5
VIII.	15 070	316,0
IX.	10 070	237,0
X.	12 070	229,0

Tab. 3: Základní parametry jednotlivých modelů

Jako základní výstupní veličina, určovaná při simulacích, byla hodnota J -integrálu. Ta byla získána při jednotlivých výpočtech ze submodelu pomocí postupu, popsaného v kapitole 2.1.1, konkrétně pro celé čelo trhliny po obvodu zkušebního vzorku. Dále byly v patřičných řezech (rovina řezu kolmá na lomové plochy a procházející osou rotační symetrie modelu) určovány hodnoty napětí a deformace okolo čela trhliny, konkrétně byly pro určení velikosti plastické oblasti důležité hodnoty ekvivalentní plastické deformace $\varepsilon_{\text{eq, pl}}$ a ekvivalentního napětí σ_{eq} .

Vyhodnocovány byly primárně pozice na čele trhliny, kde docházelo k zatěžování ve smykových módech II a III (viz. kapitola 3.2, obr. 22), dále pak v jednom zvoleném místě, kde se vyskytla kombinace těchto módů.

Ze získaných hodnot J -integrálů bylo možné určit velikost plastické zóny analytickým postupem a porovnat ji s výsledky určenými na základě MKP výpočtu. Při shodě mezi hodnotami z lineárního a nelineárního výpočtu za daného zatížení je možné považovat podmínky LELM za splněné.

4.1 M3d II

Díky rotační symetrii zkušebního vzorku a smyslu zatěživání docházelo na horní a spodní straně zkušebního tělesa, tedy pro $\vartheta = 0^\circ$ a $\vartheta = 180^\circ$, k zatěživání v módu II. Tak bylo možné pouze v těchto místech pro danou délku trhliny a úroveň zatěživání určit velikost plastické zóny, která se vztahuje právě ke smykovému módu II.

Na základě této znalosti je možné hodnotu J -integrálu pro dané místo přiřadit danému módu (39). Toto zjednodušení ovšem platí pouze je-li dokázána absence módů I a III:

$$J_I(\vartheta = 0^\circ) = 0 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}, \quad J_{III}(\vartheta = 0^\circ) = 0 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}, \quad (38)$$

a platí:

$$J = J_I + J_{II} + J_{III} \rightarrow J(\vartheta = 0^\circ) = J_{II}(\vartheta = 0^\circ). \quad (39)$$

Díky vlivu jediného módu lze pak také pro určení velikosti plastické zóny r_p ve směru trhliny použít základní vztah odvozený v kapitole 2.2.1 (32), jehož modifikací po využití vlivu jediného módu (39) je vztah:

$$r_{p,II}(\vartheta = 0^\circ) = \frac{3E}{2\pi \cdot \sigma_{YS}^2 \cdot (1 - \mu^2)} \cdot J(\vartheta = 0^\circ). \quad (40)$$

Protože hodnoty modulu pružnosti E , Poissonova čísla μ a meze kluzu σ_{YS} jsou pro daný model materiálu konstanty, je velikost plastické zóny r_p závislá pouze na hodnotě J -integrálu. Tato závislost má lineární průběh.

K porovnání velikosti plastické zóny určené analytickým vztahem odvozeným na základě LELM bylo nutné určit r_p pomocí elasto-plastického řešení za stejných podmínek, jako byly určeny hodnoty J -integrálu. Z MKP simulací, provedených podle postupu popsaného v kapitole 3 a jejích podkapitolách, byly získány hodnoty ekvivalentní plastické deformace $\varepsilon_{eq,pl}$ u čela trhliny v patřičném řezu. Z nich byl určen průběh hodnot $\varepsilon_{eq,pl}$ ve směru trhliny v závislosti na vzdálenosti od čela trhliny. Z těchto průběhů byly pro každou konfiguraci výpočtu (tab. 3), na základě postupu popsaného v kapitole 2.2.2, určeny vzdálenosti bodu od čela trhliny, kde hodnota ekvivalentní plastické deformace $\varepsilon_{eq,pl}$ dosahuje smluvní hodnoty 0,2%.

Druhým způsobem určení r_p je využití redukovaného (ekvivalentního) napětí. V tomto případě se hledal bod, kde hodnota ekvivalentního napětí σ_{eq} podle podmínky HMM dosáhne smluvní meze kluzu σ_{YS} (viz. kapitola 2.2.2).

Velikosti plastické zóny, určené jednotlivými výše popsanými postupy, spolu s konkrétními hodnotami J -integrálu, jsou vypsány v následující tabulce (tab. 4), kde jsou přiřazeny konkrétním výpočtům (tab. 3). Hodnota meze kluzu byla určena v souladu s modelem materiálu (kapitola 3) a s pravidlem pro určení smluvní meze kluzu (obr. 15, kapitola 2.2.2) jako $\sigma_{YS} = 186,57 \text{ MPa}$.

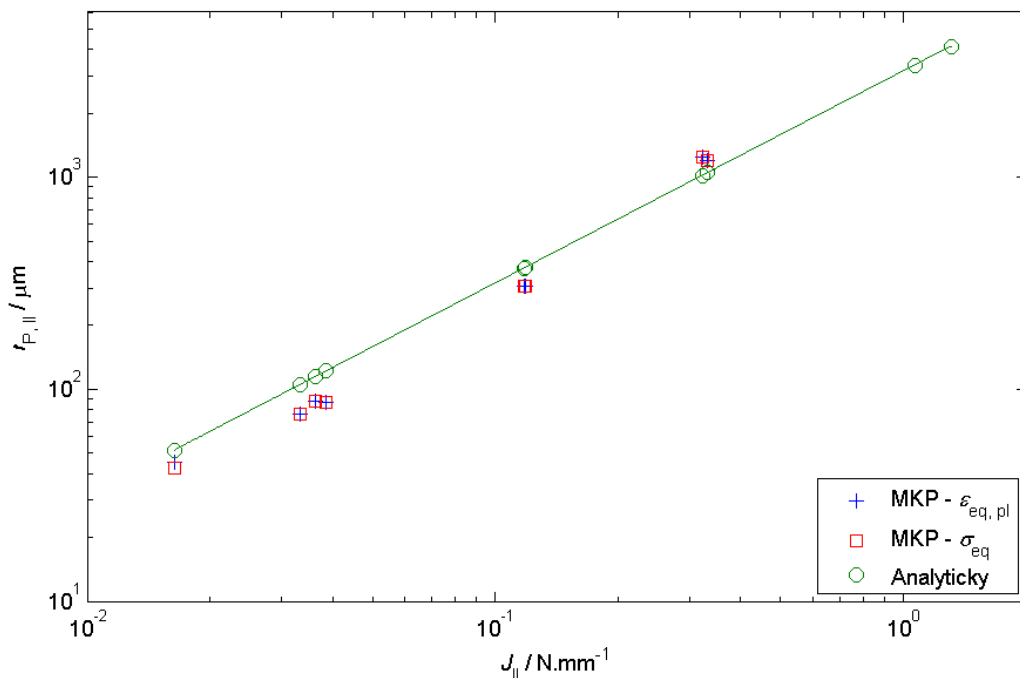
Označení	$J(\vartheta = 0^\circ) / \text{N}\cdot\text{mm}^{-1}$	$r_{P, II} / \mu\text{m}$		
		Analyticky	MKP - $\varepsilon_{\text{eq, pl}}$	MKP - σ_{eq}
I.	0,118	372	306	306
II.	1,068	3 380	---	---
III.	0,322	1 020	1 237	1 237
IV.	0,036	115	88	88
V.	0,016	52	45	43
VI.	0,033	105	76	76
VII.	0,039	122	86	87
VIII.	1,309	4 145	---	---
IX.	0,119	376	308	308
X.	0,332	1 049	1 200	1 199

Tab. 4: Hodnoty r_P pro mód II

Hodnoty $r_{P, II}$ z MKP výpočtu pro simulace II. a VIII. nebyly získány, protože vlivem velkého zatížení došlo k plastizaci celého průřezu zkušební vzorku a nešlo tedy velikost plastické zóny určit. Hodnota $r_{P, II}$ byla tedy v těchto dvou případech větší, než velikost nedolomené části vzorku.

Z výsledků je patrné, že obě metody určení $r_{P, II}$ pomocí MKP výpočtu dávají shodné výsledky, což vylučuje z postupu výpočtu možnost zanesených hrubých a systematických chyb.

Zjištěné hodnoty $r_{P, II}$ je také možné vykreslit v grafu v závislosti na J -integrálu (obr. 27), kde je patrný lineární průběh analytického vztahu (40).



Obr. 27: Závislost $r_{P, II}$ na J -integrálu

Při porovnání výsledků pro mód II z analytického (LELM) vztahu a numerického (EPLM) výpočtu je patrné, že pro malé hodnoty J -integrálu, tedy malé zatížení, jsou si lineární a nelineární výsledky blízké a velikost plastické zóny určená z elasto-plastického

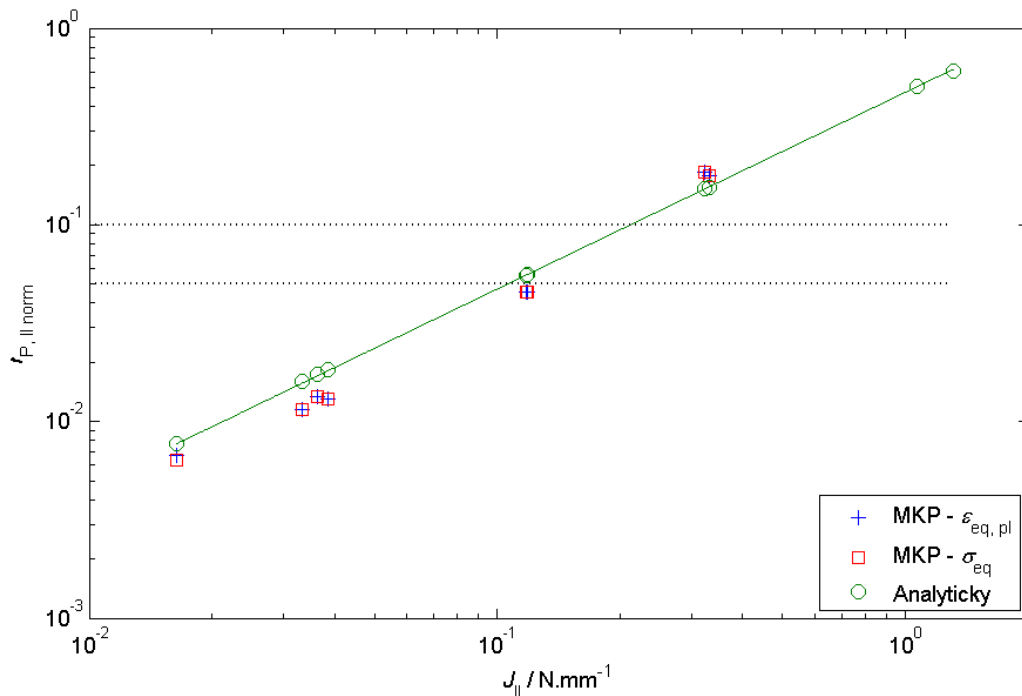
řešení je menší, než vypočítaná z postupu založeného na LELM. Zatímco pro zvyšující se zatížení dochází k nárůstu rozdílu mezi lineárním tj. analytickým a nelineárním tj. numerickým řešením, což se v krajním případě pro velmi vysoké zatížení projevuje plastizací celého průřezu zkušebního tělesa, zatímco analytický postup předpokládá menší plastickou zónu.

Dále výsledky z elasto-plastického řešení naznačují, že je není možné vyjádřit pomocí lineární závislosti, jako výsledky analytického řešení (40). Velikost plastické zóny určená za podmínek EPLM spíše odpovídá kvadratické nebo kubické závislosti.

Další porovnání velikostí plastické zóny je možné při jejím normování k použité délce trhliny (obr. 28) dle vztahu:

$$r_{P, II \text{ norm}} = \frac{r_{P, II}}{a_t} \quad (41)$$

Tím je možné zanést do grafu i základní používaná pravidla pro rozlišení malé a velké plastické zóny, tedy že je velká, když její charakteristický rozměr r_P přesáhne jednu desetinu, respektive jednu dvacetinu celkové délky trhliny a_t (3). Jako celková délka trhliny a_t je pak považována délka trhlíčky v tělese a (tab. 3), sečtená s hloubkou vrubu na zkušebním tělese (obr. 20)^[5].



Obr. 28: Závislost normované velikosti plastické zóny na J -integrálu (mód II)

Hranice jedné desetiny a jedné dvacetiny celkové délky trhliny je zobrazena přerušovanou čarou v grafu (obr. 28). Nárůst velikosti plastické zóny při MKP výpočtech nad lineární závislost je patrný pro zatížení, které způsobuje plastickou zónu o velikosti jedné desetiny celkové délky trhliny. Počet bodů vynesných v grafu však není dostatečný pro přesné zhodnocení vhodnosti použitých pravidel.

4.2 M3d III

Stejně jako v p3p3p3d3 vyšetřování m3d3 II (kapitola 4.1) lze na použit3m v3lcov3m vzorku naj3t dv3 m3sta, kde se vyskytuje pouze m3d3 III. Z hlediska geometrie modelu jsou to body na lev3 a prav3 stran3, tedy pro $\vartheta = 90^\circ$, respektive $\vartheta = 270^\circ$.

V t3chto dvou m3stech doch3z3 k zat3ř3v3n3i pouze v jedin3m m3du a je mořn3 op3t definovat podm3nku:

$$J_I(\vartheta = 90^\circ) = 0, \quad J_{II}(\vartheta = 90^\circ) = 0, \quad (42)$$

za jej3ř platnosti m3ře b3t hodnota J -integr3lu v dan3m m3st3 p3r3řazena pouze m3du III:

$$J = J_I + J_{II} + J_{III} \rightarrow J(\vartheta = 90^\circ) = J_{III}(\vartheta = 90^\circ). \quad (43)$$

Pro analytick3 ur3en3 velikosti plastick3 z3ny je pak mořn3 pouřit vztah (33), odvozen3 v kapitole 2.2.1, kter3 po modifikaci za pouřit3 pravidla (42) a (43) nab3v3 tvaru:

$$r_{p,III}(\vartheta = 90^\circ) = \frac{3E}{2\pi \cdot \sigma_{YS}^2 \cdot (1 + \mu)} \cdot J(\vartheta = 90^\circ). \quad (44)$$

Zlomek s materi3lov3mi charakteristikami tvo3r3 konstantu, velikost plastick3 z3ny je tedy line3rn3 z3visl3 na hodnot3 J -integr3lu v dan3m m3st3.

Pro porovn3n3 hodnot velikosti plastick3 z3ny ur3en3ch analytick3m vztahem (44) byly z3sk3ny pro jednotliv3 3rovn3 zat3řen3 velikosti plastick3 z3ny ve sm3ru trhliny pomoc3 MKP. Konkr3tn3 hodnoty byly ur3eny na z3klad3 postup3 p3psan3ch v kapitole 2.2.2, tedy za pomoc3 ur3en3 hrani3n3 hodnoty pro ekvivalentn3 plastickou deformaci $\varepsilon_{eq,pl} = 0,2\%$, respektive pro redukovan3 nap3t3 $\sigma_{eq} = \sigma_{YS}$.

Velikosti plastick3 z3ny ur3en3 analytick3 a pomoc3 MKP pro pouřit3 geometrii a model materi3lu (kapitola 3), se smluvn3 mez3 kluzu o velikost $\sigma_{YS} = 186,57$ MPa, jsou vypsan3 s konkr3tn3mi hodnotami J -integr3lu v n3sleduj3c3 tabulce (tab. 5). Jednotliv3 v3po3ty jsou op3t ozna3eny v souladu se z3kladn3mi parametry jednotliv3ch model3 (tab. 3).

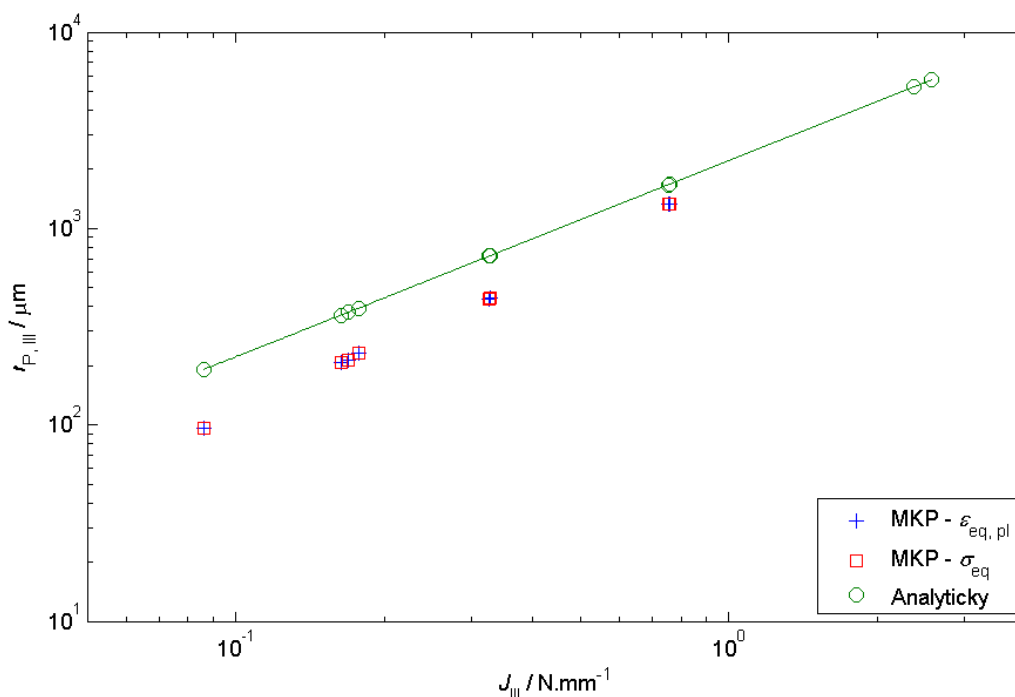
Ozna3en3	$J(\vartheta = 90^\circ) / \text{N}\cdot\text{mm}^{-1}$	$r_{p,III} / \mu\text{m}$		
		Analytick3	MKP - $\varepsilon_{eq,pl}$	MKP - σ_{eq}
I.	0,327	725	439	439
II.	2,373	5 259	---	---
III.	0,753	1 669	1 336	1 336
IV.	0,177	393	233	232
V.	0,086	191	96	96
VI.	0,163	362	209	208
VII.	0,169	374	213	213
VIII.	2,580	5 716	---	---
IX.	0,328	727	441	441
X.	0,760	1 683	1 325	1 325

Tab. 5: Hodnoty r_p pro m3d3 III

Hodnoty $r_{P, III}$ z MKP výpočtu pro simulace II. a VIII. nebyly opět získány, protože vlivem velkého zatížení došlo k plastizaci celého průřezu zkušební tělesa.

Obě dvě metody určení $r_{P, III}$ pomocí MKP dávají shodné výsledky. To je v souladu se zjištěním z předešlých výpočtů (kapitola 4.1).

Velikosti plastické zóny určené pomocí MKP a analytického vztahu pro mód III se od sebe, narozdíl od módu II, výrazně liší. MKP výsledky naznačují potlačení plastické zóny oproti lineárnímu analytickému výpočtu i v oblastech malého zatížení. Rozdíl je více patrný při vykreslení hodnot $r_{P, III}$ do grafu v závislosti na hodnotách J -integrálu (obr. 29).



Obr. 29: Závislost $r_{P, III}$ na J -integrálu

Tyto výsledky naznačují významné odlišnosti mezi módy II a III. Výpočty pro mód III jsou citlivější na rozdíly mezi MKP výpočtem a analytickým postupem. Při porovnávání výpočtů dochází k rozdílu mezi předpoklady analytického výpočtu (rovinná deska s centrální trhlinou, ideálně pružně-plastický model materiálu) a numerickým modelem (rotačně symetrické těleso a rovinné zatížení, model materiálu se zpevněním). Z dosud provedených výpočtů je patrné, že tyto rozdíly mají výraznější vliv na zatížení v módu III.

4.2.1 Vliv vrubu na r_P

Při analytickém výpočtu velikosti plastické zóny teoretického tělesa s trhlinou není uvažována přítomnost vrubu. Protože numerický výpočet byl realizován na tělese s vrubem, byl ověřen vliv vrubu.

Parametrem pro určení vlivu vrubu byl poměr velikostí plastické zóny určených MKP postupem a analytickým výpočtem. Porovnání těchto poměrů z výpočtů na vrubovaném a hladkém tělese umožnilo stanovit vliv vrubu na rozvinutí plastické zóny. Určené výsledky jsou vypsány v následující tabulce (tab. 6).

	$r_{P, MKP} / r_{P, analyticky}$	
	Mód II	Mód III
S vrubem	0,81	0,60
Bez vrubu	0,76	0,64

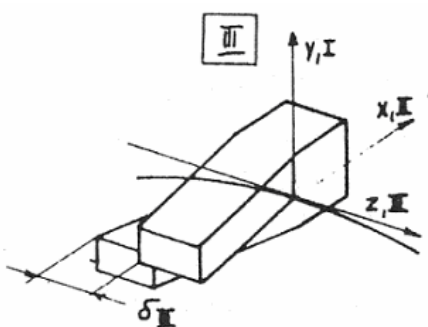
Tab. 6: Výsledky výpočtů pro určení vlivu vrubu na r_P

Z určených poměrů mezi MKP a analytickým řešením pro výpočet s vrubem (podle původní geometrie) je patrná malá odchylka u výpočtů pro mód II, charakterizovaná hodnotou poměru 0,81 (pro další výpočty v oblasti malých zatížení se poměr pohyboval v rozmezí od 0,8 do 1). Pro mód III je však poměr hodnot mnohem nižší a potvrzuje zjištění z kapitoly 4.2, že velikost plastické zóny pro mód III určená elasto-plastickým řešením je výrazně menší, než předpokládá analytický výpočet.

Při porovnání výsledků výpočtů pro vrubované a hladké těleso je vidět velmi blízká shoda mezi těmito konfiguracemi výpočtu. Provedené simulace tedy poukazují na to, že přítomnost vrubu v geometrii zkušebního tělesa výrazně neovlivňuje pole napětí a deformací před čelem trhliny.

4.2.2 Vliv rotačně symetrické geometrie na r_P

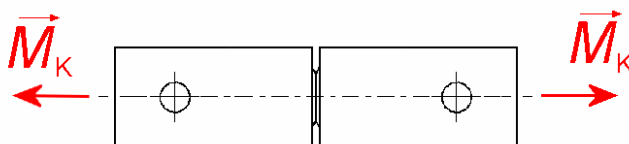
Analytické řešení pole napětí a deformací u čela trhliny lze provést pouze pro těleso s jednoduchou geometrií. Teoretické těleso je rovinné a nezahrnuje rotační symetrii tak, jak byla použita u konkrétního modelu. Tento rozdíl je mnohem patrnější pro mód III (obr. 30) než pro mód II, což mohlo mít vliv na zjištěné rozdíly ve výsledcích.



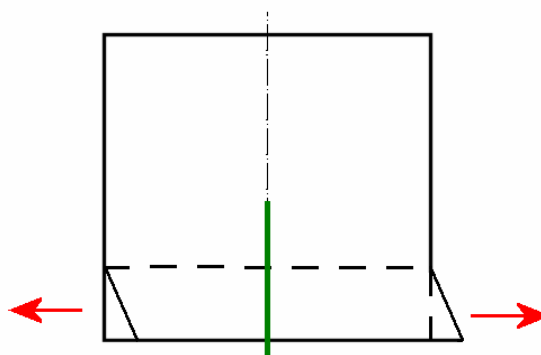
Obr. 30^[1]: Schématická definice módu III

Uvažovaná odlišnost analytického výpočtu pro mód III od provedeného numerického výpočtu na válcovém zkušební tělese tkví v rotační symetrii použité geometrie a v rovinné

symetrii smyslu zatěžování. Aby byl použitý válcový vzorek namáhaný ekvivalentně s teoretickým tělesem pro mód III (pro analytický výpočet), muselo by i zatížení být rotačně symetrické (obr. 31). Použité namáhání kolmo na osu rotace modelu je ale analogické pouze se střední částí geometrie dle teorie pro mód III (obr. 32).

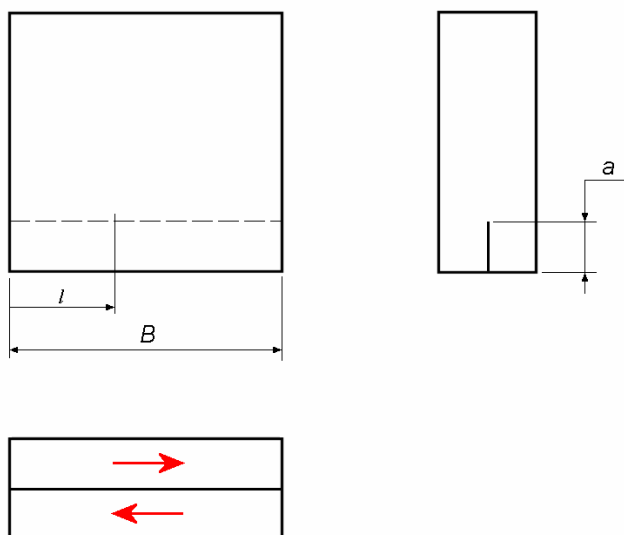


Obr. 31: Zatěžování plně shodné s teorií módu III



Obr. 32: Místo ekvivalentního namáhání pro použité zatěžování (vyznačeno zeleně)

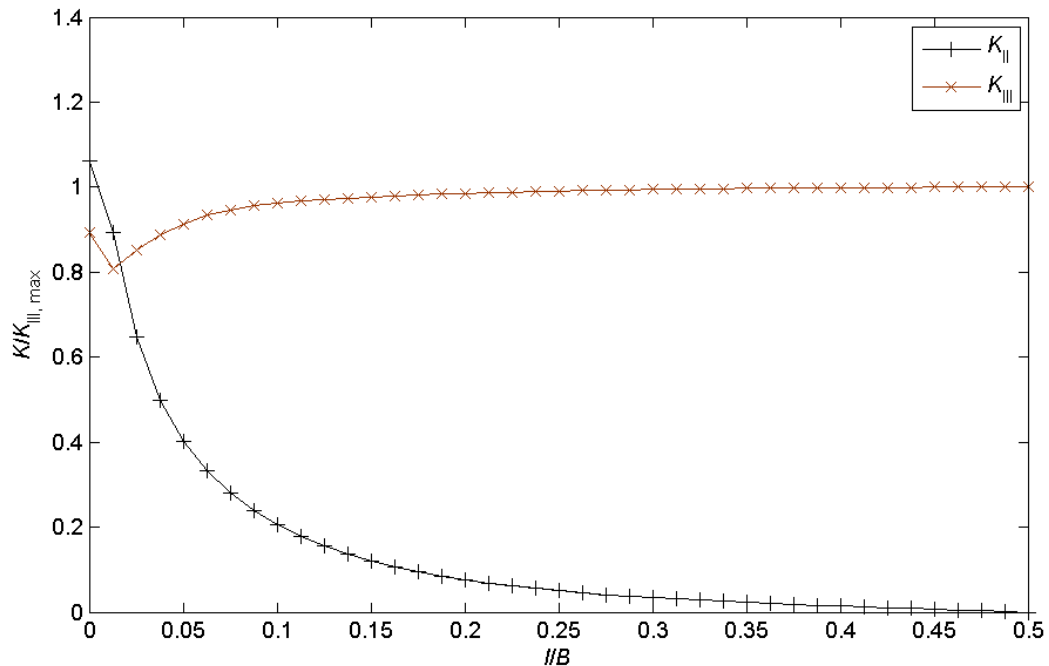
Pro kvalitativní porovnání výsledků zjištěných z rotačně symetrické geometrie s výpočty prováděnými na tělese s geometrií a zatížením dle analytických předpokladů byl vytvořen nový výpočtový model (obr. 33), který byl tvořen geometrií shodnou s analytickými předpoklady pro mód III (kvádr s trhlinou v polovině jedné strany), uchycen a zatěžován byl tak, aby bylo dosaženo módu III. Ve schématu (obr. 33) jsou naznačeny pouze důležité rozměry a značení - šířka tělesa B , pozice na čele trhliny l a délka trhliny a .



Obr. 33: Geometrie a smysl zatěžování zkušebního výpočtu

Síť konečných prvků byla vytvořena v souladu s pravidly pro modelování trhlin (kapitola 3.3).

Bylo dokázáno^[15], že při zatěžování v čistých módech dochází vlivem povrchu tělesa k indukovaní jiných módů (při zatěžování v módu III dochází k vytvoření módu II) v oblasti blízké povrchům použitého tělesa^[15]. Proto byly nejprve pro vytvořený model na základě elastické analýzy určeny součinitele intenzity napětí v závislosti na pozici na čele trhliny od povrchu modelu (obr. 34). Ty umožnily určení poměrného zastoupení módu II při zatížení v čistém módu III.

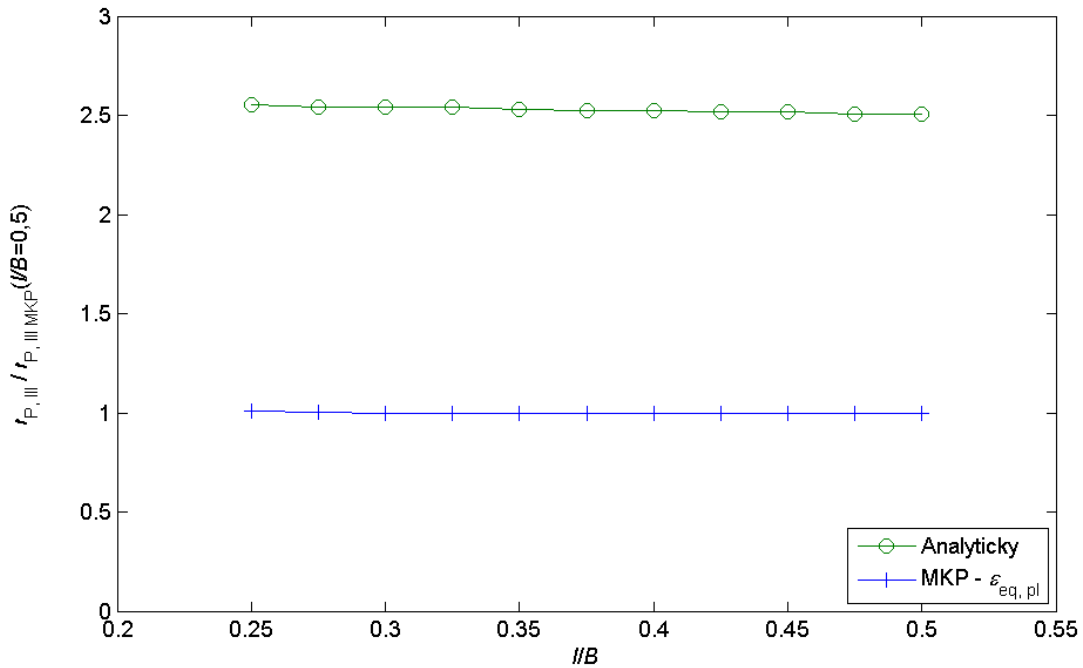


Obr. 34: Poměrné hodnoty K -faktorů v závislosti na pozici od kraje modelu

Z hodnot určených elastickým výpočtem je patrné, že u povrchu modelu dochází k poklesu vlivu módu III a zároveň k nárůstu K_{II} . U středu vzorku je ale indukovaný mód II zanedbatelný. Ve sledované oblasti, shodné s rotační geometrií, je tedy vliv indukce jiného módu nepodstatný. Další výsledky tohoto výpočtu byly brány pouze z oblasti poměru l/B od 0,25 do 0,5, aby byla s jistotou eliminována chyba zanesená indukovaným módem II.

Z elasto-plastické analýzy modelu podle teoretických předpokladů pro mód III (za použití stejného modelu materiálu jako při hlavních výpočtech) byly získány hodnoty J -integrálu a velikosti plastické zóny určené z MKP výpočtu. Na základě platnosti podmínky o výskytu jediného módu bylo možné určit velikost plastické zóny analytickým výpočtem dle vztahu (33). Všechny tyto veličiny byly určovány v závislosti na pozici na čele trhliny.

Velikosti plastické zóny, určené pomocí MKP a analytickou metodou, jsou porovnány v následujícím grafu (obr. 35). Hodnoty $r_{P, III}$ jsou vztaženy k velikosti plastické zóny určené pomocí MKP pro $l/B = 0,5$.



Obr. 35: Porovnání velikostí plastické zóny pro rovinný model

Z výsledků je patrné, že jak analytický (dle předpokladu, protože je závislý pouze na J -integrálu), tak MKP výpočet dávají pro danou oblast módu III téměř konstantní výsledky. To vyvrací domněnku, že by se výrazně odlišoval průběh velikosti plastické zóny pro celou rovinnou geometrii pro mód III od konkrétních hodnot v místě středu modelu. Rozdíl mezi rotační a přímou geometrií je tedy možné považovat za bezvýznamný.

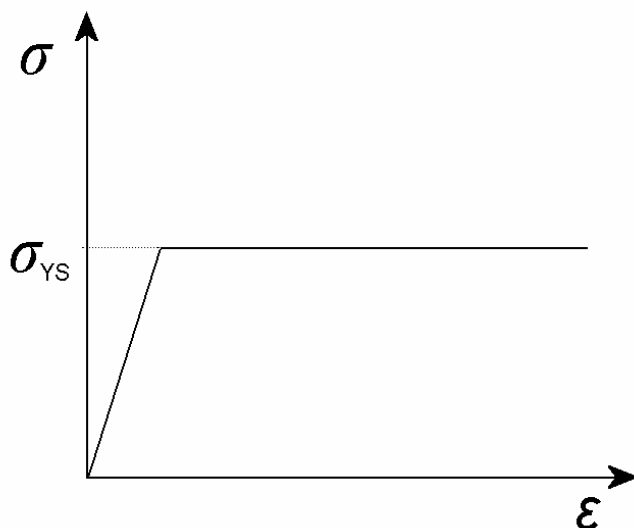
Zároveň výsledky ukazují, že i při použití rovinné geometrie dochází ke kvalitativně stejnému potlačení velikosti plastické zóny určené pomocí MKP vůči analytickému výpočtu, jako v případě původních výpočtů.

Další simulace s upravenou geometrií dokázaly, že poměr mezi analytický a MKP určenou velikostí plastické zóny je relativně málo závislý na změně velikosti zatížení (v lineární oblasti) a změně délky trhliny.

Na základě těchto výsledků je možné konstatovat, že potlačení velikosti plastické zóny za vlivu módu III není zapříčiněno rotačním charakterem geometrie a rovinným zatížením použitým při výpočtech.

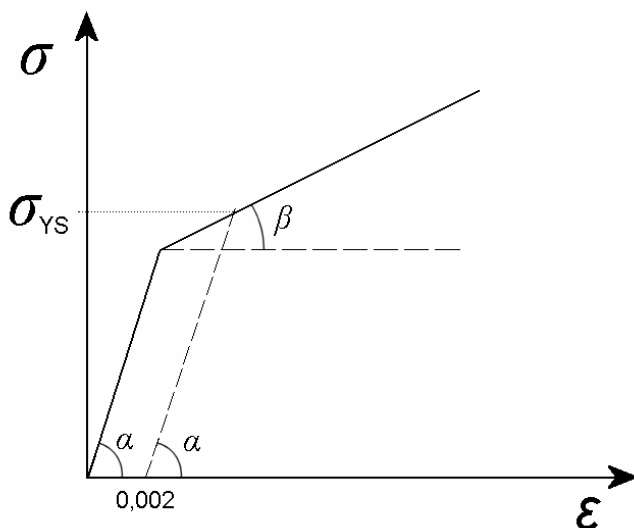
4.2.3 Vliv parametrů modelu materiálu na r_p

Vztahy pro určení velikosti plastické zóny dle analytických postupů byly odvozeny pro ideálně pružně-plastický model materiálu (obr. 36). Elasto-plastické řešení ale využívalo model materiálu vytvořený na základě průběhu křivky σ - ε pro ARMCO železo. Rozdíl mezi těmito použitými modely mohl mít vliv na výsledné hodnoty r_p .



Obr. 36: Závislost σ - ε pro ideálně pružně-plastický model materiálu

Model materiálu použitý při výpočtech byl charakterizován zpevněním v plastické oblasti a od ideálně pružně-plastického modelu se výrazně odlišoval. Z toho důvodu byl výpočet na původní geometrii několikrát zopakován pro bi-lineární model materiálu s různou velikostí zpevnění (obr. 37).



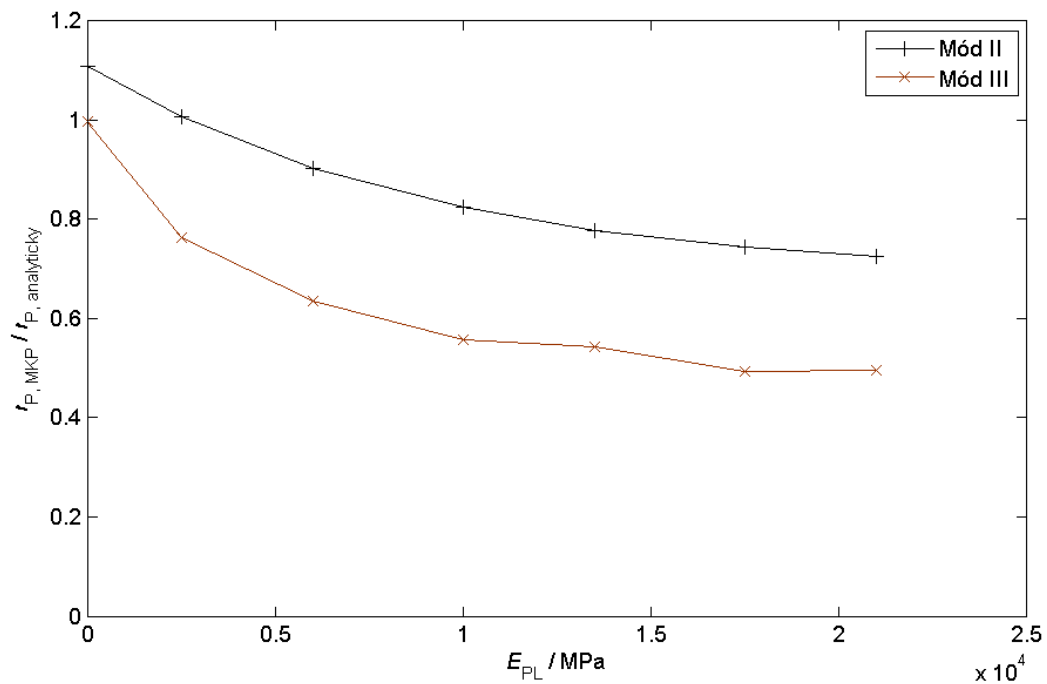
Obr. 37: Bi-lineární model materiálu

Použitý bi-lineární model materiálu byl charakterizován modulem pružnosti E , jehož hodnota byla vždy rovna 210 000 MPa a směrnicí plastického zpevnění E_{PL} , která se měnila:

$$E = \tan \alpha, \quad (45)$$

$$E_{PL} = \tan \beta. \quad (46)$$

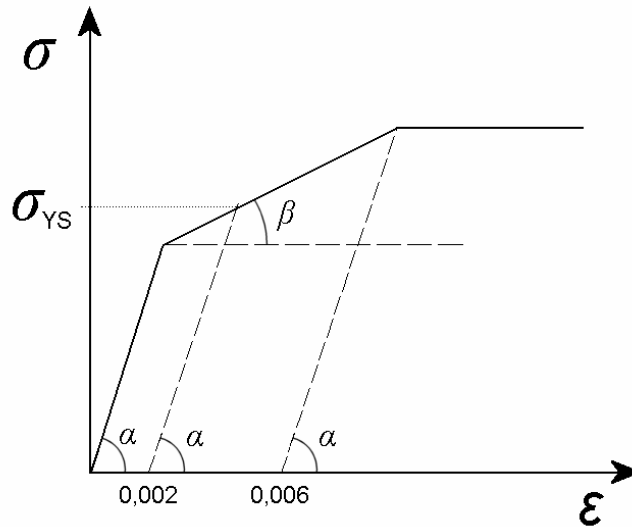
Charakterizující veličinou vlivu parametrů modelu materiálu byl opět poměr výsledků elasto-plastického a analytického řešení (obr. 38). Všechny výpočty byly provedeny v oblasti nízkých zatížení, výsledná plastická oblast byla menší než 1/20 celkové délky trhliny.



Obr. 38: Výsledné poměry pro bi-lineární model materiálu

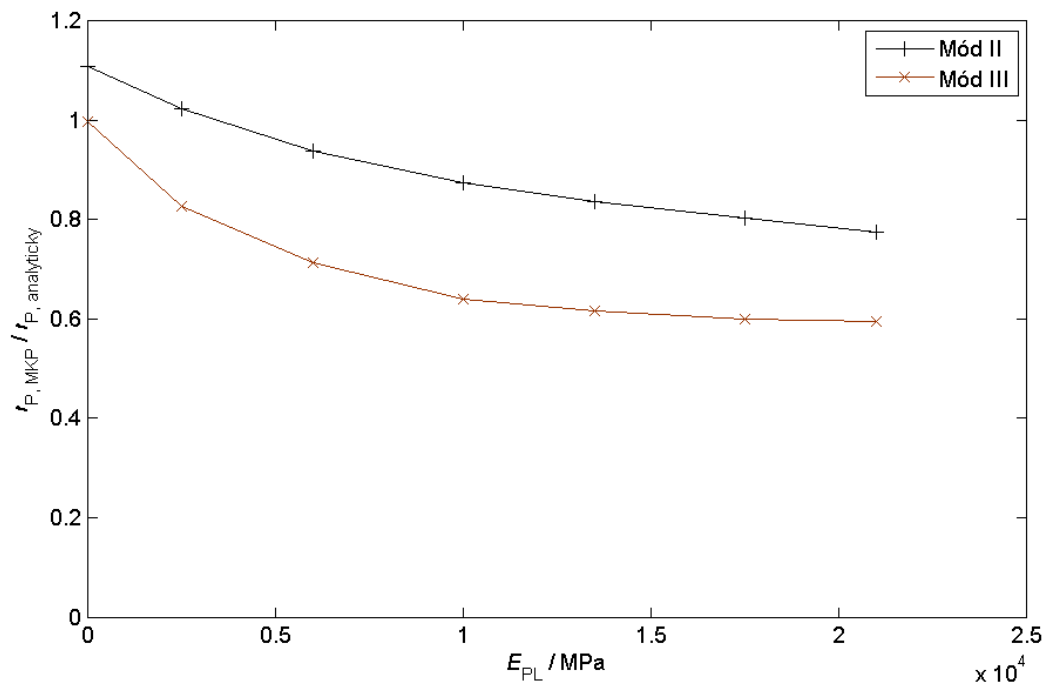
Z výsledků výpočtů s použitím bi-lineárního modelu materiálu je patrné, že poměr výsledků z MKP a analytických výsledků se blíží 1 pro nulové zpevnění, tedy pro ideálně pružně-plastický model materiálu. Pro zvyšující se hodnotu E_{PL} dochází k poklesu sledovaného poměru u módu II i III. Pokles pro mód III je mnohem výraznější než pro mód II a naznačuje značný vliv parametrů modelu materiálu na sledované výsledky.

Model materiálu použitý pro původní výpočty však na určité hranici napětí dosahoval téměř nulového zpevnění, podobnost s bi-lineárním modelem je tedy pouze v jedné oblasti. Z toho důvodu byly obdobné výpočty provedeny i pro tri-lineární model materiálu (obr. 39), který mnohem lépe vystihoval charakter původně použité křivky σ - ϵ .



Obr. 39: Tri-lineární model materiálu

Výsledky výpočtů s použitím tri-lineárního modelu materiálu jsou zobrazeny v následujícím grafu (obr.40). Hodnota modulu pružnosti E byla vždy rovna 210 000 MPa.



Obr. 40: Výsledné poměry pro tri-lineární model materiálu

Zjištěné poměry r_P pro použitý tri-lineární model materiálu je možné považovat za vyhovující vzhledem k tomu, že tri-lineární aproximace křivky σ - ϵ lépe odpovídá modelu materiálu použitému v původních MKP výpočtech.

Pro nulovou hodnotu zpevnění je opět vidět dobrá shoda analytických a MKP výsledků, zatímco pro zvyšující se sklon křivky zpevnění dochází k poklesu velikosti plastické zóny určené MKP postupem vůči analytickému přístupu. Pro mód II není tento pokles tak výrazný a koresponduje s malou odchylkou analytických a MKP výsledků (pro lineární oblast), která byla zmíněna v kapitole 4.1. Výraznější pokles sledovaného poměru pro

mód III pak vysvětluje velký rozdíl mezi výslednými hodnotami $r_{P, III}$, kde v oblasti pro hodnoty $E_{PL} = 17\,000$ MPa, která odpovídá zpevnění modelu materiálu použitého při původních výpočtech, byl pokles velikosti plastické oblasti určené MKP postupem vůči analytickému výpočtu více než 35% (pro tri-lineární model materiálu).

Ze zjištěných hodnot jasně vyplývá, že použitý model materiálu do značné míry ovlivňuje plastizaci před čelem trhliny, méně pro mód II a velmi výrazně pro mód III.

4.3 Doplnění o jiné úrovně zatížení

Kvůli velkému rozdílu mezi analyticky zjištěnou velikostí plastické zóny vůči MKP výpočtům při módu III a malému počtu různých konfigurací výpočtů dle předlohy bylo nutné výsledky výpočtů rozšířit mimo původně vyšetřované úrovně zatěžování (tab. 7). Přidání variant vstupních hodnot pro výpočet umožnilo lepší vystihnout vyšetřovaných závislostí velikosti plastické zóny na J -integrálu.

Protože se nejednalo o modely založené na skutečně naměřených hodnotách z experimentu^[13], bylo možné volit délku trhliny a velikost zatížení tak, aby bylo dosaženo požadovaných hodnot J -integrálu, které neobsahovala původní sada výpočtů. Délka trhliny byla zvolena pro tyto simulace konstantní, aby odpovídala délkám z původních výpočtů. Díky tomu byla úroveň namáhání řízena pouze velikostí zatížení.

Označení	F / N	$a / \mu\text{m}$
XI.	13564	229
XII.	12420	229
XIII.	12824	229
XIV.	13204	229
XV.	10794	229
XVI.	11428	229

Tab. 7: Základní parametry modelů pro doplňující výpočty

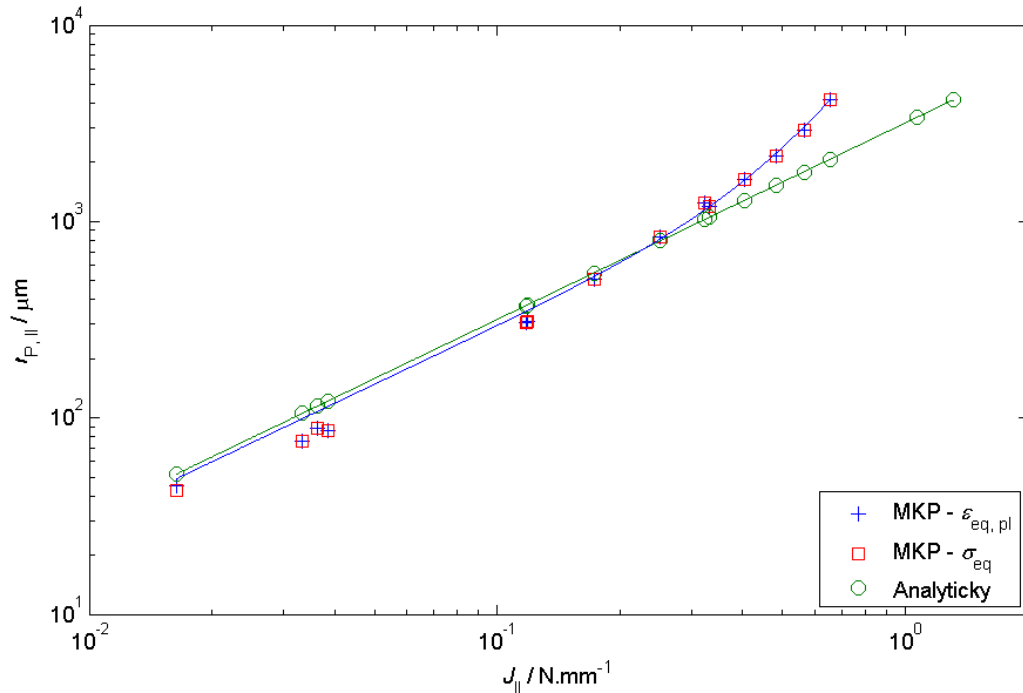
4.3.1 Mód II

Shodným postupem s uvedeným v kapitole 4.1 byly získány výsledky pro zatížení v módu II (pro úrovně zatížení XI. - XVI.), které jsou uvedeny v následující tabulce (tab. 8).

Označení	$J(\vartheta = 0^\circ) / N \cdot \text{mm}^{-1}$	$r_{p, II} / \mu\text{m}$		
		Analyticky	MKP - $\varepsilon_{\text{eq, pl}}$	MKP - σ_{eq}
XI.	0,655	2 073	4 198	4 199
XII.	0,404	1 279	1 633	1 633
XIII.	0,482	1 524	2 168	2 168
XIV.	0,565	1 788	2 919	2 920
XV.	0,173	548	510	510
XVI.	0,252	796	838	838

Tab. 8: Hodnoty r_p pro mód II (výsledky přidávaných výpočtů)

Výsledky potvrzují dříve zjištěný fakt, že pro větší zatížení je plastická zóna na čele dané trhliny, namáhané v módu II, výrazně větší, než předpokládá analytický vztah, odvozený na základě LELM, zatímco pro nízké hodnoty J -integrálu je patrná dobrá shoda mezi lineárním a elasto-plastickým přístupem. V lineární oblasti je pouze u velmi malých hodnot zatížení patrný velmi malý rozdíl mezi analytickým a MKP řešením, způsobený blízkostí rozměrů plastické zóny k rozměrům konečných prvků použitých při výpočtu. Tyto skutečnosti jsou dobře patrné po vykreslení všech výsledných velikostí plastické zóny pro mód II do grafu v závislosti na J -integrálu (obr. 41).



Obr. 41: Závislost všech určených $r_{P, II}$ na J -integrálu

Díky existenci více výsledků v dané závislosti mohla být body z MKP řešení proložena křivka pomocí programu Matlab. Využita byla lineární metoda nejmenších čtverců s algoritmem typu trust-region^[16]. Z důvodu dobrého vystihnutí zkoumané oblasti byla zvolena kubická závislost ve tvaru:

$$r_{P, II}(J_{II}) = C_{II,1} \cdot J_{II}^3 + C_{II,2} \cdot J_{II}^2 + C_{II,3} \cdot J_{II}. \quad (47)$$

Zvolená závislost navíc splňuje podmínku nulové plastické zóny při nulovém zatížení zkoumaného objektu, lineární člen umožňuje dobré vystihnutí oblasti malých zatížení, zatímco člen ve třetí mocnině umožňuje velký nárůst hodnot $r_{P, II}$ pro vyšší zatížení.

Konstanty $C_{II,1}$, $C_{II,2}$ a $C_{II,3}$ byly určeny pro vyjádření v jednotkách mm a N, s přesností proložení definovanou koeficientem determinace R^2 pro zjištěné hodnoty $r_{P, II}$:

$$C_{II,1} = 10,39 \text{ MPa}^{-3} \cdot \text{mm}^{-2}; \quad C_{II,2} = -1,766 \text{ MPa}^{-2} \cdot \text{mm}^{-1}; \quad C_{II,3} = 3,021 \text{ MPa}^{-1}, \quad (48)$$

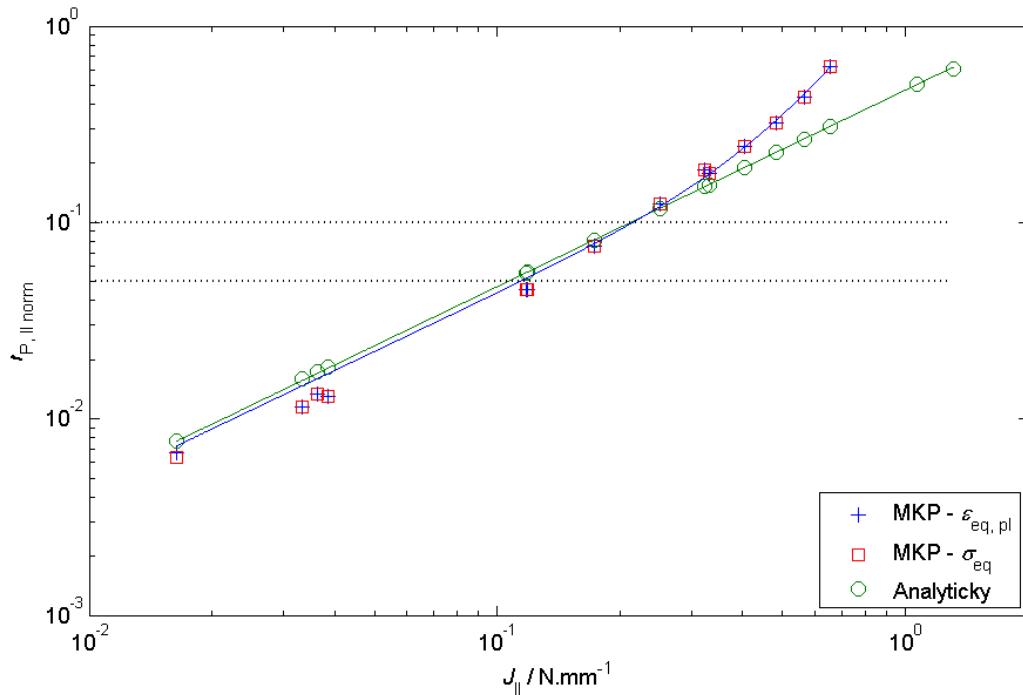
$$R^2 = 0,9985. \quad (49)$$

Konstanta $C_{II,3}$ nabývá velmi podobné hodnoty jako zlomek z analytického vztahu pro mód II (40) označený D_{II} :

$$D_{II} = \frac{3E}{2\pi \cdot \sigma_{YS}^2 \cdot (1 - \mu^2)} = \frac{3 \cdot 210000}{2\pi \cdot 186,57^2 \cdot (1 - 0,3^2)} = 3,165 \text{ MPa}^{-1}, \quad (50)$$

což koresponduje s podobností obou křivek pro malé hodnoty J -integrálu, kdy je druhá a třetí mocnina malého čísla ve vztahu (47) nepodstatná vůči lineárnímu členu.

Po vztážení určených velikostí plastické zóny z rozšířených výpočtů k celkové délce trhliny a_t je možné porovnat zjištěné průběhy s pravidlem pro rozlišení malé a velké plastické oblasti, kdy je hranice na jedné dvacetině, resp. desetině celkové délky trhliny (obr. 42).



Obr. 42: Závislost normovaného $r_{P, II}$ na J -integrálu

Přidané výsledky oproti původním z kapitoly 4.1 pouze doplnily sledovanou oblast těsně nad uvažovanými hranicemi malé plastické zóny. Je z nich patrná shoda mezi elastickým a elasto-plastickým řešením pro velikost plastické zóny až do jedné desetiny celkové délky trhliny.

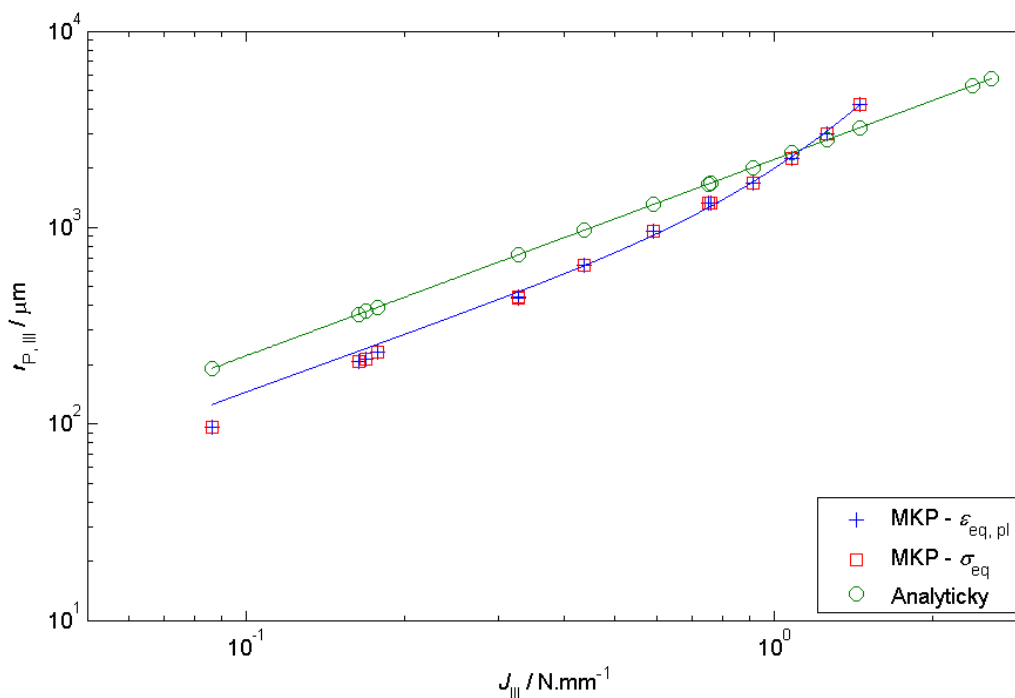
4.3.2 M3d III

Shodn3m postupem s uveden3m v kapitole 4.1 byly z3sk3ny v3sledky pro zat3žení v m3du III (pro 3rovn3 zat3žení XI. - XVI.), kter3 jsou uvedeny v n3sleduj3c3 tabulce (tab. 9).

Označení	$J(\vartheta = 90^\circ) / \text{N}\cdot\text{mm}^{-1}$	$r_{p, \text{III}} / \mu\text{m}$		
		Analyticky	MKP - $\varepsilon_{\text{eq, pl}}$	MKP - σ_{eq}
XI.	1,451	3 214	4 228	4 228
XII.	0,914	2 024	1 691	1 692
XIII.	1,081	2 395	2 253	2 253
XIV.	1,260	2 792	2 995	2 994
XV.	0,438	970	644	644
XVI.	0,590	1 307	952	952

Tab. 9: Hodnoty r_p pro m3d III (v3sledky p3idan3ch v3počt3)

Pro lepš3 zhodnocen3 v3sledk3 jsou v3echny určen3 velikosti plastick3 z3ny pro m3d III (včetně p3vodn3ch v3počt3) vykresleny v grafu v z3vislosti na J -integr3lu (obr. 43).



Obr. 43: Z3vislost v3ech určen3ch $r_{p, \text{III}}$ na J -integr3lu

Je patrn3, že narozd3l od m3du II jsou v3sledky z3sk3n3 MKP postupem značně odlišn3 od analytick3ho postupu, a to i pro mal3 3rovn3 zat3žení, jak naznačov3ly p3vodn3 v3počty. Plastick3 z3na je pro mal3 hodnoty J -integr3lu podle elasto-plastick3ho ř3šení v3razn3 menš3, než p3edpoklád3 line3rn3 ř3šení. Pro hodnotu J -integr3lu kolem $1 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-1}$ pak doch3z3 k p3ekročení MKP v3sledk3 nad analytickou, line3rn3 z3vislost, což umožnily zobrazit až dopln3n3 v3počty, kter3 v3stihly oblast v3šš3ho zat3žení, než p3vodn3 v3počty.

Body v závislosti $r_{p, III} - J$, určené pomocí MKP z průběhů ekvivalentní plastické deformace, bylo možné opět proložit pomocí programu Matlab (lineární metodou nejmenších čtverců, algoritmem typu trust-region^[16]) kubickou křivkou ve tvaru:

$$r_{p, III}(J_{III}) = C_{III,1} \cdot J_{III}^3 + C_{III,2} \cdot J_{III}^2 + C_{III,3} \cdot J_{III}. \quad (51)$$

Konstanty $C_{III,1}$, $C_{III,2}$ a $C_{III,3}$ byly zjištěny pomocí programu Matlab a jejich číselné hodnoty jsou vypsány níže. Zjištěná závislost platí pro dosazení v jednotkách N a mm:

$$C_{III,1} = 1,008 \text{ MPa}^{-3} \cdot \text{mm}^{-2}; \quad C_{III,2} = -5,086 \text{ MPa}^{-2} \cdot \text{mm}^{-1}; \quad C_{III,3} = 1,49 \text{ MPa}^{-1}. \quad (52)$$

Přesnost proložení daných bodů je posouzena opět pomocí hodnoty R^2 :

$$R^2 = 0,9986. \quad (53)$$

Pro mód II byla shoda mezi analytickým a elasto-plastickým řešením pro malé hodnoty J -integrálu potvrzena shodností lineárních koeficientů daných závislostí. Pro případ módu III je lineární člen elasto-plastického řešení dán konstantou $C_{III,3}$ (52) a lineární člen analytického řešení D_{III} dán vztahem:

$$D_{III} = \frac{3E}{2\pi \cdot \sigma_{YS}^2 \cdot (1 + \mu)} = \frac{3 \cdot 210000}{2\pi \cdot 186,57^2 \cdot (1 + 0,3)} = 2,216 \text{ MPa}^{-1}. \quad (54)$$

Při porovnání koeficientů je vidět značný rozdíl, což odpovídá neshodě mezi zjištěnými průběhy závislostí $r_{p, III} - J$, získanými lineárním a elasto-plastickým řešením pro nízké hodnoty J -integrálu. Zároveň se ukazuje dobrá shoda s výpočty provedenými pro zjištění vlivu parametrů modelu materiálu (kapitola 4.2.3). Tato nesrovnalost může být vyjádřena pomocí poměru P_{III} těchto lineárních koeficientů:

$$P_{III} = \frac{C_{III,3}}{D_{III}} = \frac{1,49}{2,216} = 0,67. \quad (55)$$

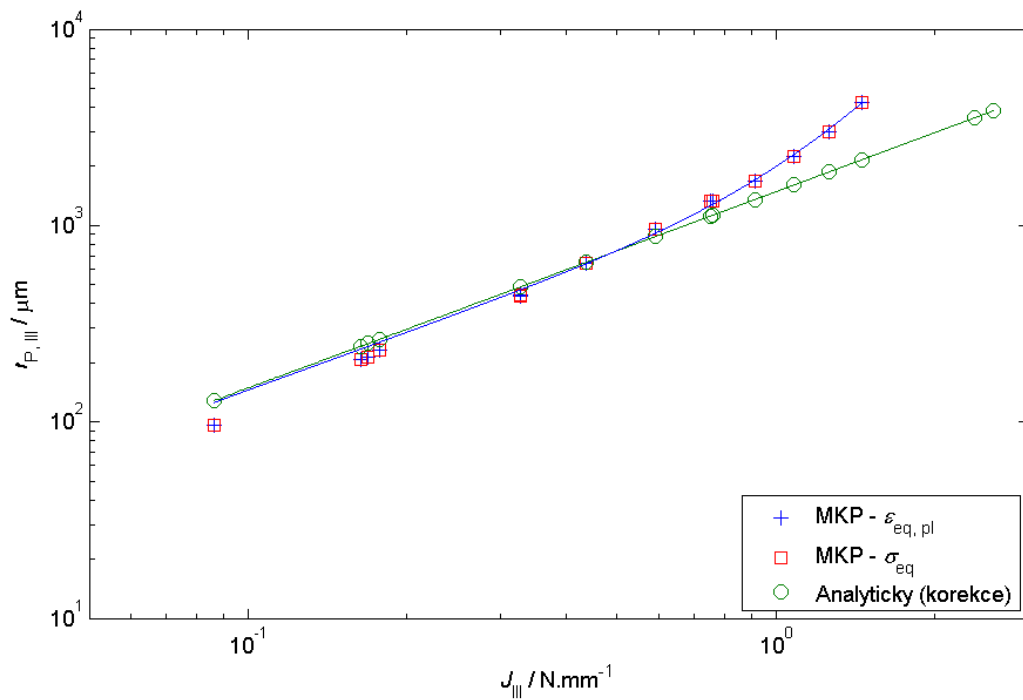
Hodnota poměru P_{III} (55) je velmi blízká určenému poklesu velikosti plastické zóny pro tri-lineární model materiálu. Shoda není dokonalá, protože existují odchylky mezi použitým a tri-lineárním modelem materiálu, poměr P_{III} je však možné díky zjištěním v kapitole 4.2.3 považovat za vyjádření vlivu parametrů materiálu na plastickou zónu před čelem trhliny zatěžované v módu III.

Díky tomuto bezrozměrnému číslu je možné provést korekci analytického vztahu pro velikost plastické oblasti v módu III, pouze však pro použitý model materiálu. Analytické řešení je pak vyjádřeno korigovaným vztahem:

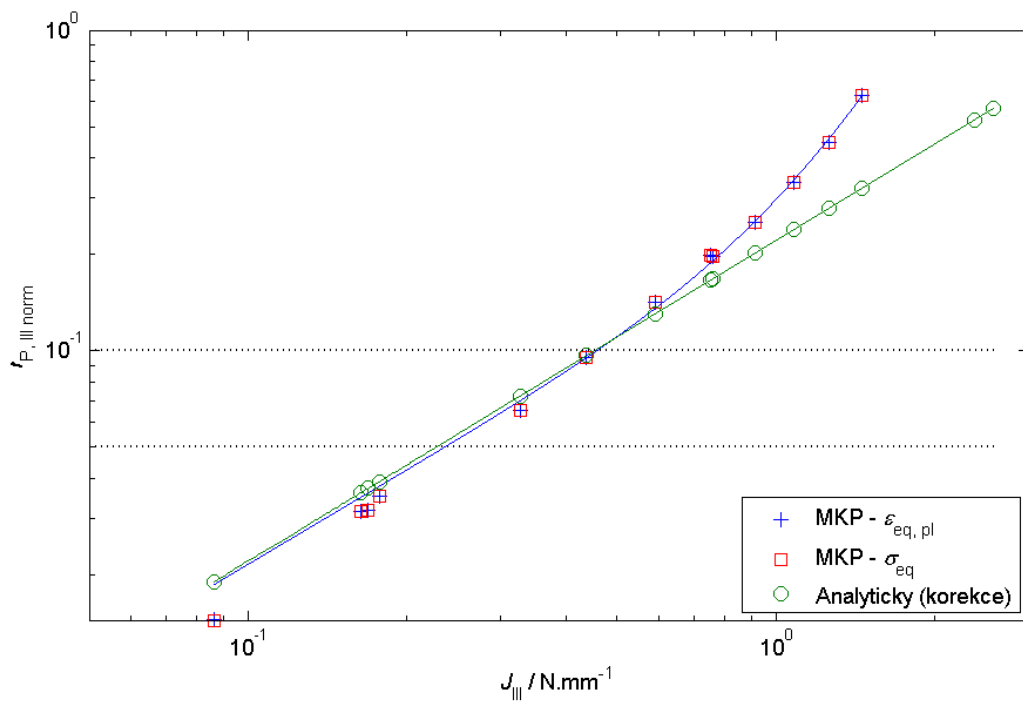
$$r_{p, III}^{\text{korekce}}(\vartheta = 90^\circ) = P_{III} \cdot \frac{3E}{2\pi \cdot \sigma_{YS}^2 \cdot (1 + \mu)} \cdot J(\vartheta = 90^\circ). \quad (56)$$

Vhodnost použitého postupu korekce je zobrazena v grafu závislosti $r_{p, III}$ na J -integrálu (obr. 44), kde jsou vykresleny hodnoty z korigovaného analytického postupu a hodnoty získané pomocí MKP. Zde je vidět velmi dobrá shoda mezi korigovaným vztahem a elasto-plastickým řešením pro nízké hodnoty J -integrálu. Zároveň graf ukazuje, že průběh

určený proložením MKP výsledků je lineární až do hodnoty J -integrálu $0,5 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-1}$, která pro zkoumaný případ odpovídá plastické zóně o velikosti jedné desetiny celkové délky trhliny (obr. 45).



Obr. 44: Závislost všech určených $r_{P, III}$ na J -integrálu



Obr. 45: Závislost normovaného $r_{P, III}$ na J -integrálu (korekce)

5 Zpracování výsledků pro smíšený mód II+III

Jak je uvedeno v kapitole 3.2, na čele trhliny po obvodu válcového tělesa jsou 4 body, ve kterých je trhlina zatížena pouze v módu II nebo III. Ve všech ostatních bodech je ale zatížena kombinací smykových módů II+III. V těchto bodech tedy platí:

$$J_I(\vartheta) = 0, \quad J_{II}(\vartheta) \neq 0, \quad J_{III}(\vartheta) \neq 0, \quad (57)$$

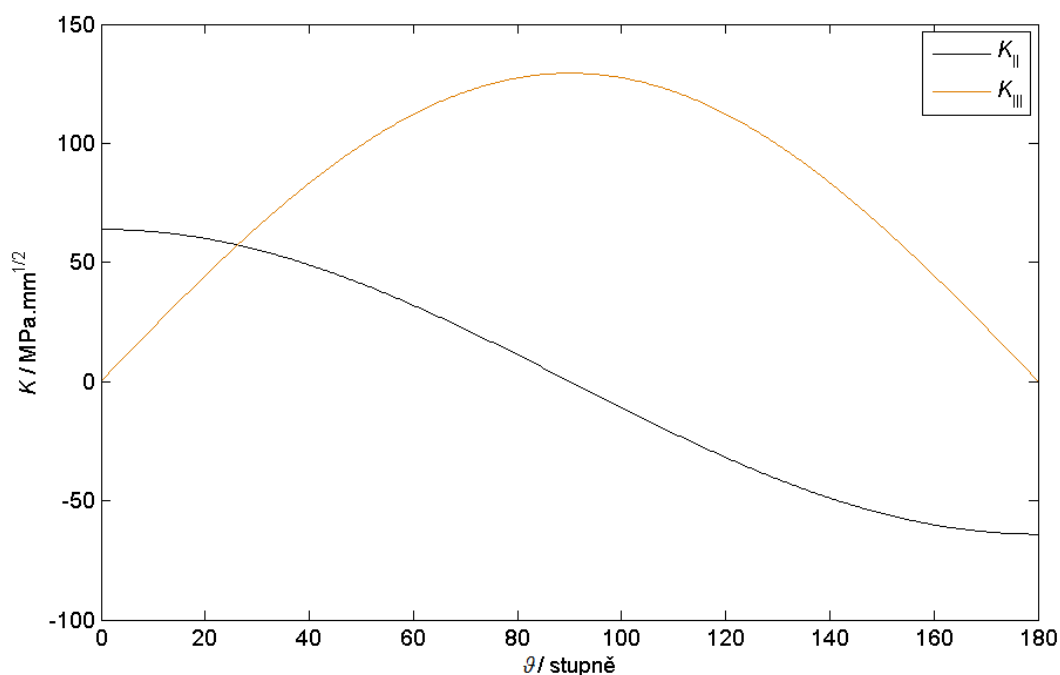
$$J = J_I + J_{II} + J_{III} \rightarrow J(\vartheta) = J_{II}(\vartheta) + J_{III}(\vartheta). \quad (58)$$

Vzhledem k tomu, že analytické řešení velikosti plastické zóny (kapitola 2.2.1) není definováno k celkové hodnotě J -integrálu, ale k jeho složkám a řešení pro mód II a III vyjádřené pomocí J -integrálu nejsou shodná, je nutné nejdříve pro konkrétní použitý válcový vzorek určit poměry J_{II} a J_{III} v závislosti na pozici na čele trhliny (dané úhlem ϑ).

5.1 Poměry složek J -integrálu

K určení vlivu jednotlivých módů pro libovolnou pozici na čele trhliny je nutné použít výsledky dříve počítaného lineárního řešení válcového tělesa s trhlinou^[17, 18], provedeného na základě LELM. Lineární řešení umožňuje rozdělení na tři módy prostřednictvím součinitelů intenzity napětí (K_I , K_{II} , K_{III}), narozdíl od elasto-plastického řešení, které vychází z jediné hodnoty J -integrálu, která v sobě zahrnuje vliv všech tří módů.

Z dříve získaných hodnot K -faktorů bylo patrné, že jejich průběhy v závislosti na pozici okolo válcového vzorku nabývají tvaru sinusoidy^[17, 18] (obr. 46).



Obr. 46: Součinitele intenzity napětí v závislosti na ϑ (elastické řešení)

Pro nahrazení vypočítaných hodnot pro libovolnou souřadnici ϑ byly pro K_{II} a pro K_{III} navrhnuty goniometrické závislosti^[18]:

$$K_{II}(\vartheta) = K_{II}(\vartheta = 0^\circ) \cdot \cos(\vartheta), \quad (59)$$

$$K_{III}(\vartheta) = K_{III}(\vartheta = 90^\circ) \cdot \sin(\vartheta). \quad (60)$$

Přesnost proložení vypočítaných hodnot pomocí těchto funkcí byla ověřena pomocí koeficientu determinace R^2 , který prokázal pro oba módy vhodnost navržených funkcí:

$$R^2 = 1. \quad (61)$$

Pomocí závislostí (59) a (60) je tedy možné vyjádřit hodnotu K_{II} nebo K_{III} pro libovolnou souřadnici ϑ pouze z velikosti K -faktorů v místech zatížených pouze jedním módem.

Celková hodnota J -integrálu (pro rovinnou deformaci) je dána součtem příspěvků od jednotlivých módů (13), konkrétně pro kombinaci módů II+III ve tvaru:

$$J = \frac{(1-\mu)^2}{E} K_{II}^2 + \frac{1+\mu}{E} K_{III}^2. \quad (62)$$

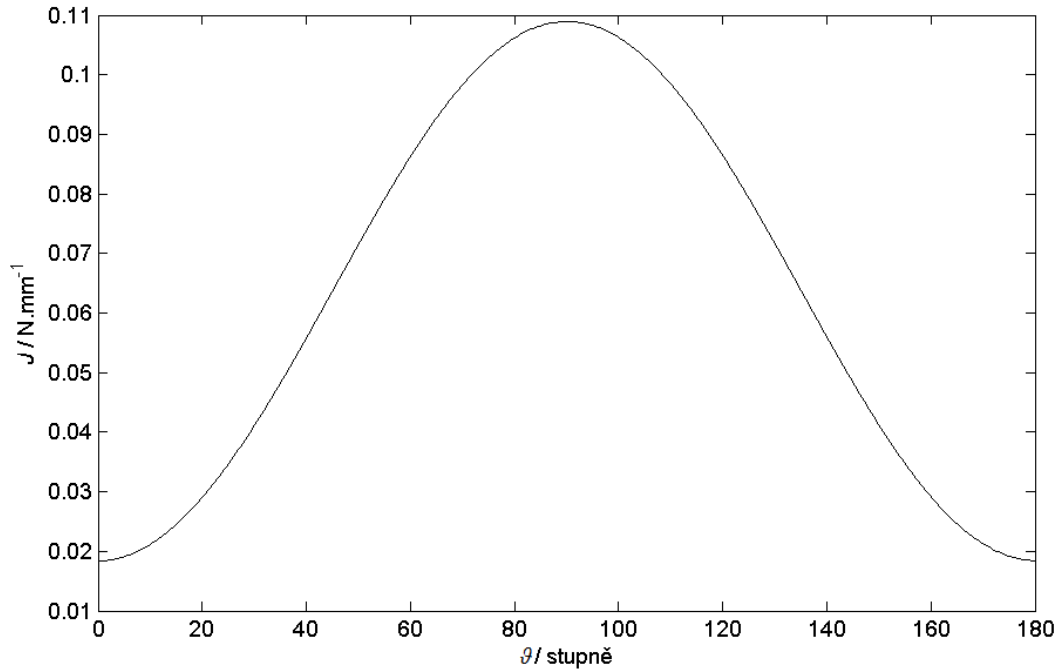
Na základě průběhů (59) a (60) pro K -faktory a závislosti pro J -integrál (62), která je funkcí druhých mocnin K_{II} a K_{III} , byl navržen vztah pro nahrazení určených hodnot J -integrálu jedinou funkcí^[19]:

$$J(\vartheta) = J(\vartheta = 0^\circ) \cdot \cos^2(\vartheta) + J(\vartheta = 90^\circ) \cdot \sin^2(\vartheta). \quad (63)$$

Tento postup opět umožňuje určení celkového J -integrálu pro libovolnou hodnotu souřadnice ϑ z hodnot určených v místech zatížených pouze jedním módem^[19].

Velmi dobrá shoda navržené závislosti byla opět prokázána určením velikosti koeficientu determinace R^2 při proložení hodnot elastického J -integrálu (obr. 47) pomocí funkce (63):

$$R^2 = 1. \quad (64)$$



Obr. 47: J -integrál v závislosti na ϑ (elastické řešení)

Provedené výpočty tedy dokazují, že pro danou geometrii zkušebního tělesa je v elastické oblasti možné nahradit bodové určování charakteristik trhliny (v závislosti na poloze na jejím čele) pomocí goniometrických funkcí (59), (60) a (63).

Pro ověření platnosti vztahu (63) i v elasto-plastických výpočtech byla tato funkce opět proložena hodnotami J -integrálu, které byly tentokrát určeny pomocí elasto-plastické analýzy (konkrétně pro zatížení vzorku silou 12 kN). Výsledná shoda bodových hodnot a funkce (63) je opět vyjádřena pomocí koeficientu determinace R^2 :

$$R^2 = 0,9981. \quad (65)$$

Shoda (65) již není tak dokonalá, jako pro elastické výpočty, je ale dostatečná a dokazuje vhodnost navržené závislosti i v elasto-plastické oblasti.

Závislost (63) pro celkovou hodnotu J -integrálu byla navrhována na základě rozdělení na součet jednotlivých složek J -integrálu. Je tedy možné rozdělit celkovou hodnotu J -integrálu podle příslušných módů na složky J_{II} a J_{III} a vyjádřit je jako závislost na souřadnici ϑ s použitím celkové hodnoty J -integrálu v místech čistých módů:

$$J_{II}(\vartheta) = J(\vartheta = 0^\circ) \cdot \cos^2(\vartheta), \quad (66)$$

$$J_{III}(\vartheta) = J(\vartheta = 90^\circ) \cdot \sin^2(\vartheta). \quad (67)$$

5.2 Analytické určení r_P pro smíšený mód II+III

Určení velikosti plastické zóny pomocí analytického vztahu bývá odvozováno pouze pro čisté módy z důvodu různých poměrů zastoupených módů při smíšeném zatížení. Pro získání potřebného vztahu je ale možné využít LELM, protože vztahy pro r_P , uvedené v kapitole 2.2.1, vychází také z průběhů napětí určených na základě lineárního chování materiálu.

Jelikož r_P je lineární funkcí J -integrálu a analytické vztahy pro určení r_P uvedené v kapitole 2.2.1 jsou založeny na LELM, kde platí princip superpozice^[4], je možné velikost plastické zóny pro smíšený mód II+III vyjádřit ve tvaru:

$$r_{P,II+III}(\vartheta, J) = r_{P,II}(\vartheta, J_{II}) + r_{P,III}(\vartheta, J_{III}), \quad (68)$$

kde $r_{P,II}$ a $r_{P,III}$ jsou poloměry plastické zóny pro mód II (32) a pro mód III (33). Vzhledem k jejich závislosti na složkách J -integrálu pro příslušný mód je však nutné využít známých průběhů těchto složek pro řešené válcové těleso, které byly navrženy v kapitole 5.1. Kombinací vztahů (32), (33), (66), (67) a (68) získáme závislost celkové velikosti plastické zóny na hodnotě J -integrálu pro libovolné místo na čele trhliny po obvodu použitého válcového vzorku:

$$r_{P,II+III}(\vartheta, J) = \frac{3E}{2\pi \cdot \sigma_{YS}^2} \cdot \left(\frac{1}{1-\mu^2} \cdot J(\vartheta = 0^\circ) \cdot \cos^2(\vartheta) + \frac{1}{1+\mu} \cdot J(\vartheta = 90^\circ) \cdot \sin^2(\vartheta) \right). \quad (69)$$

Vztah (69) je tedy určen pouze pomocí celkové hodnoty J -integrálu v místech čistých módů, materiálových charakteristik a souřadnic místa, ve kterém je $r_{P,II+III}$ určována.

Vzhledem ke zjištěné redukci plastické zóny pro mód III, popsané v kapitolách 4.2, 4.2.3 a 4.3.2, může být i smíšený mód II+III ovlivněn stejným efektem. Z tohoto důvodu byl vztah (69) rozšířen o korekci pomocí poměru P_{III} (55), kterým byla roznásobena část odpovídající $r_{P,III}$:

$$r_{P,II+III}^{\text{korekce}}(\vartheta, J) = \frac{3E}{2\pi \cdot \sigma_{YS}^2} \cdot \left(\frac{1}{1-\mu^2} \cdot J(\vartheta = 0^\circ) \cdot \cos^2(\vartheta) + \frac{P_{III}}{1+\mu} \cdot J(\vartheta = 90^\circ) \cdot \sin^2(\vartheta) \right). \quad (70)$$

Zatímco vztah (69) tedy představuje obecné odvození velikosti plastické zóny na čele trhliny pro použité válcové těleso, závislost (70) představuje konkretizaci na základě zjištěných faktů o módu III pro daný model materiálu.

5.3 Smíšený mód II+III - výsledky pro $\vartheta = 45^\circ$

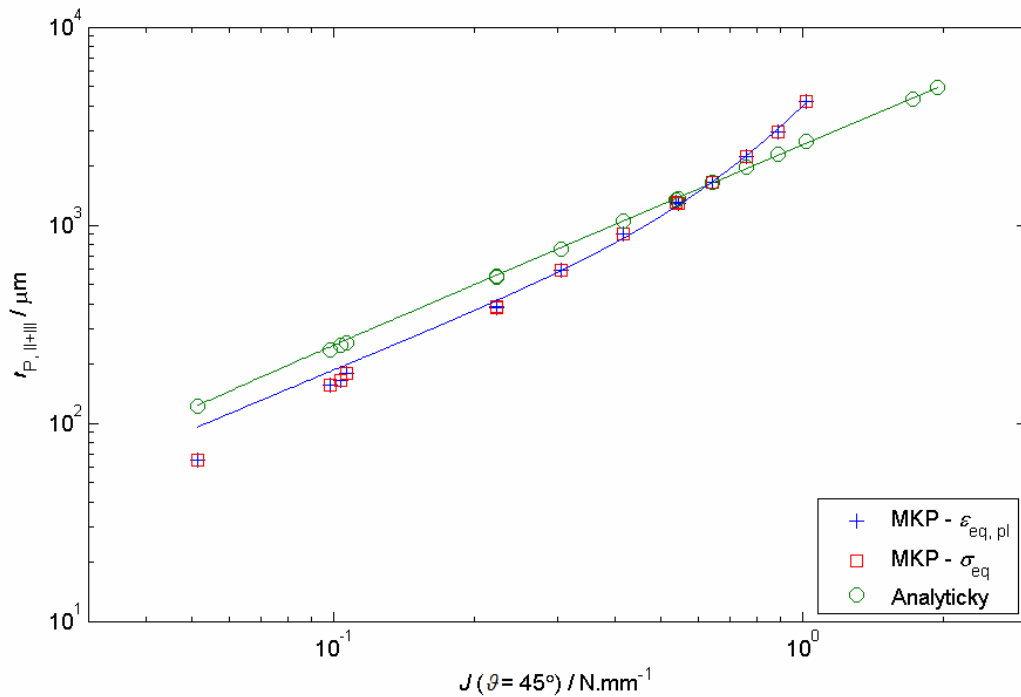
Díky geometrii válcového zkušebního tělesa nastává kombinace módů II+III téměř po celém obvodu, vyjma míst čistých módů pro $\vartheta = \{0^\circ; 90^\circ; 180^\circ; 270^\circ\}$. Místo pro detailnější porovnání analytických a MKP výsledků bylo zvoleno s ohledem na to, aby byl v dostatečné míře zahrnut vliv obou módů. Zvolené místo je pro $\vartheta = 45^\circ$.

Vyhodnocení velikostí plastické zóny bylo provedeno pro analytické řešení na základě obecnějšího vztahu (69) i podle navržené korekce dle vztahu (70). V MKP řešení bylo opět využito přístupu založeného na ekvivalentní plastické deformaci $\varepsilon_{eq, pl}$ a na ekvivalentním napětí σ_{eq} (viz. kapitola 2.2.2). Vyhodnocení bylo provedeno z výsledků všech provedených simulací, tedy z původní i rozšiřující sady parametrů modelu. Určené velikosti plastické zóny pro smíšený mód II+III jsou vypsány v následující tabulce (tab. 10).

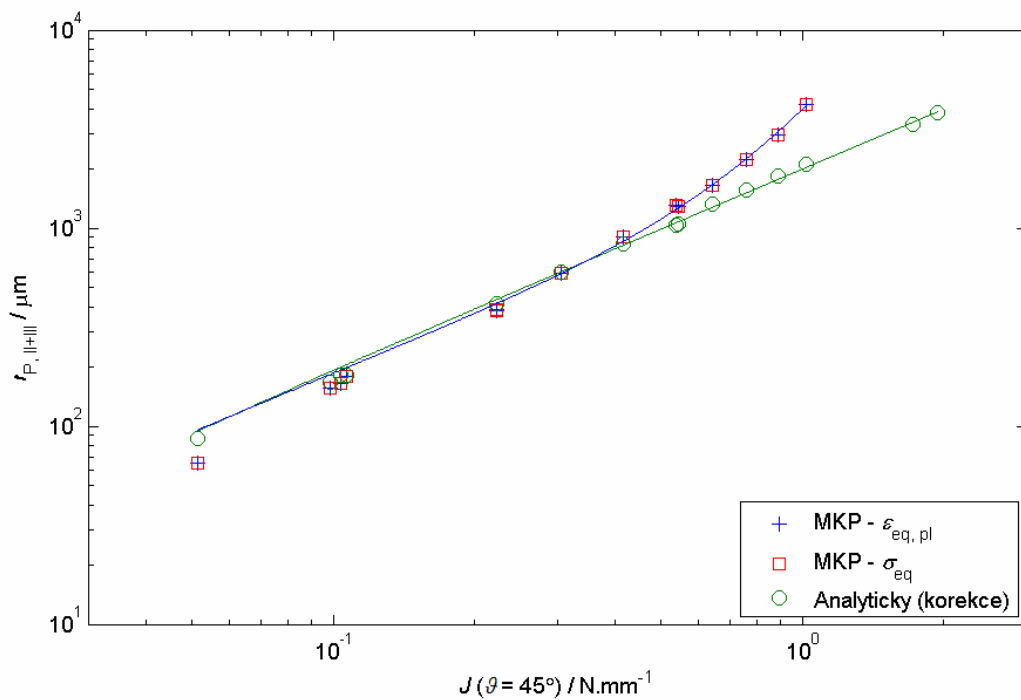
Označení	$J(\vartheta = 45^\circ) / \text{N}\cdot\text{mm}^{-1}$	$r_{P, II+III} / \mu\text{m}$			
		Analytický	Analytický (korekce)	MKP - $\varepsilon_{eq, pl}$	MKP - σ_{eq}
I.	0,223	549	414	385	385
II.	1,721	4 319	3 328	---	---
III.	0,538	1 344	1 031	1 301	1 301
IV.	0,107	254	182	178	178
V.	0,051	121	87	65	65
VI.	0,098	234	168	155	155
VII.	0,104	248	180	164	164
VIII.	1,945	4 931	3 845	---	---
IX.	0,223	551	416	387	387
X.	0,546	1 366	1 050	1 288	1 288
XI.	1,022	2 644	2 113	4 213	4 199
XII.	0,645	1 652	1 318	1 649	1 650
XIII.	0,762	1 960	1 564	2 222	2 222
XIV.	0,888	2 290	1 829	2 964	2 964
XV.	0,306	759	599	593	593
XVI.	0,415	1 052	836	908	908

Tab. 10: Hodnoty $r_{P, II+III}$ pro smíšený mód II+III

Z výsledných hodnot (tab. 10) je dobře patrná předpokládaná shoda mezi MKP metodami. Dále je vidět, že se projevuje zmenšení plastické zóny vlivem módu III při elasto-plastickém řešení. Dokazuje to velký rozdíl mezi analytickým řešením bez korekce a MKP řešením. Naproti tomu při použití korekčního parametru P_{III} bylo dosaženo opět dobré shody mezi lineárním a nelineárním řešením pro nízké úrovně zatížení. Vliv korekce je také dobře rozpoznatelný při porovnání grafů závislosti $r_{P, II+III}$ na J -integrálu s analytickým řešením bez korekce (obr. 48) a s korekcí (obr. 49).



Obr. 48: Závislost $r_{P, II+III}$ na J -integrálu (bez korekce)



Obr. 49: Závislost $r_{P, II+III}$ na J -integrálu (s korekcí)

Výsledky MKP řešení z ekvivalentní plastické deformace byly proloženy v programu Matlab (pomocí lineární metody nejmenších čtverců, algoritmem typu trust-region^[16]) funkcí ve tvaru:

$$r_{P, II+III}(J_{II+III}^*) = C_{II+III,1} \cdot J_{II+III}^{*3} + C_{II+III,2} \cdot J_{II+III}^{*2} + C_{II+III,3} \cdot J_{II+III}^*, \quad (71)$$

kde proměnná J_{II+III}^* vyjadřuje vliv módů II a III:

$$J_{II+III}^*(J, \vartheta) = \frac{1}{1-\mu^2} \cdot J(\vartheta = 0^\circ) \cdot \cos^2(\vartheta) + \frac{P_{III}}{1+\mu} \cdot J(\vartheta = 90^\circ) \cdot \sin^2(\vartheta). \quad (72)$$

Použitá závislost (71) má opět tvar polynomu třetího řádu, je však rozšířena do funkce dvou proměnných pomocí J_{II+III}^* (72) a je tak tvarově podobná s analytickým vztahem po korekci (70).

Konstanty pro danou závislost:

$$C_{II+III,1} = 7,993 \text{ MPa}^{-3} \cdot \text{mm}^{-2}; \quad C_{II+III,2} = -2,23 \text{ MPa}^{-2} \cdot \text{mm}^{-1}; \quad C_{II+III,3} = 2,996 \text{ MPa}^{-1}, \quad (73)$$

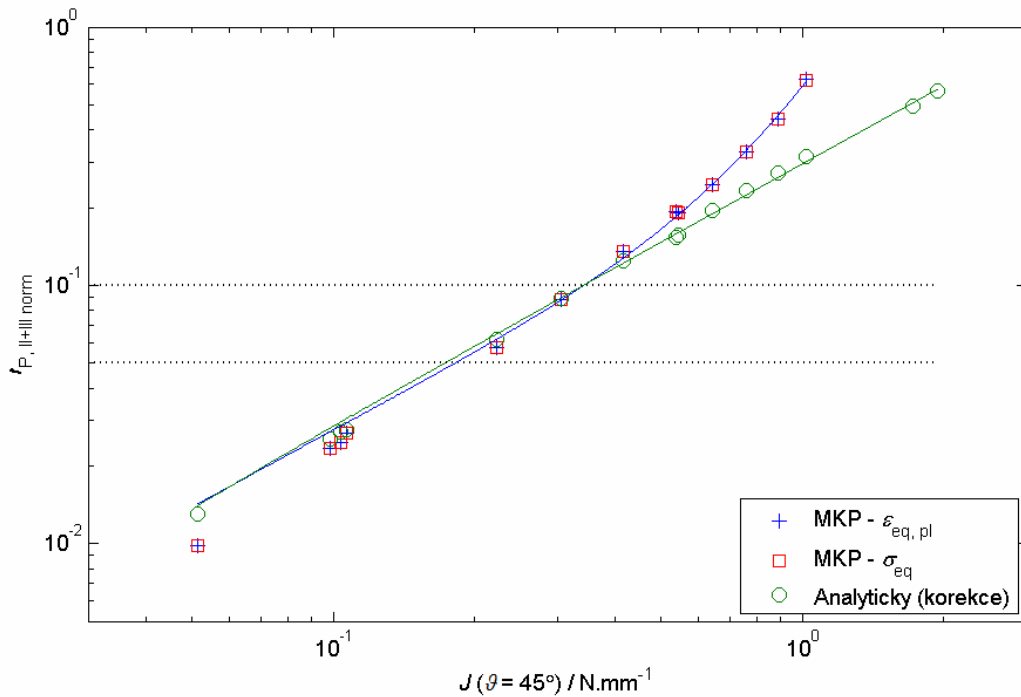
byly vyčísleny pro dosazení v jednotkách mm a N s přesností určenou pomocí koeficientu determinace R^2 :

$$R^2 = 0,9984. \quad (74)$$

Dosazením konstant (73) do vztahu (71) získáme vztah pro velikost plastické zóny určené dle elasto-plastického řešení pro libovolnou pozici na čele trhliny danou úhlem ϑ v závislosti na hodnotách J -integrálu pro čisté módy. Shodnost lineárních oblastí navržené závislosti (71) a analytického vztahu (70) je možné prokázat podobností lineárního členu $C_{II+III,3}$ (73) navržené závislosti a konstanty D_{II+III} z analytického výpočtu (70) dané vztahem:

$$D_{II+III} = \frac{3E}{2\pi \cdot \sigma_{YS}^2} = \frac{3 \cdot 210000}{2\pi \cdot 186,57^2} = 2,881 \text{ MPa}^{-1}. \quad (75)$$

Dále mohou být výsledné hodnoty pro smíšený mód II+III (po korekci) normovány k celkové délce trhliny. Výsledný graf (obr. 50) je použit k porovnání vypočtených hodnot s pravidlem pro rozlišení malé a velké plastické oblasti.



Obr. 50: Závislost normovaného $r_{P, \text{II+III}}$ na J -integrálu (mód II+III pro $\vartheta = 45^\circ$)

Velikosti plastické zóny pro kombinaci módů II+III (získané MKP postupem) normované k celkové délce trhliny (obr. 50) ukazují při porovnání s hodnotami z analytického postupu velmi dobrou shodu pro nízké úrovně zatížení až do velikosti r_P , srovnatelné s jednou desetinou celkové délky trhliny.

Závěr

Diplomová práce je součástí rozsáhlejšího česko-rakouského projektu, jehož cílem je experimentálně ověřit nové přístupy k popisu šíření trhlin, zatížených smykovými módy. Speciální vzorky, navržené pro tento projekt, byly zatěžovány tak, že na stejném vzorku bylo možné sledovat šíření únavové trhliny současně v módech II, III i ve smíšeném módu II+III. Nezbytnou součástí tohoto projektu musela být i podrobná analýza použitelnosti parametrů lineární lomové mechaniky.

V této diplomové práci byly provedeny lineární a elasto-plastické výpočty úlohy, modelované jak podle zmíněných experimentů, tak i pro další konfigurace dané geometrie a smyslu zatěžování. Z výsledků výpočtů byla určena velikost plastické zóny na čele trhliny, zatěžované pouze smykovými módy II, III a jejich kombinací pro různé úrovně zatížení.

Porovnání lineárních a nelineárních výpočtů ukázalo, že pro malé úrovně zatížení pro mód II předpokládá lineární přístup nepatrně větší plastizaci materiálu než ukázal elasto-plastický nelineární výpočet. Ve většině případů se však v této oblasti lineární výpočet dobře shodoval s nelineárním až do zatížení, které způsobí plastizaci o velikosti jedné desetiny celkové délky trhliny, ve shodě s jedním z používaných pravidel pro rozmezí platnosti LELM a EPLM. Pro smykový mód II pro zkoumaný případ je tedy možné toto rozmezí stanovit pomocí lineárního přístupu a pravidla jedné desetiny celkové délky trhliny.

Z výsledků je dále zřejmé, že pro mód III v konkrétním řešeném případě shoda základního lineárního přístupu s elasto-plastickým řešením pro malé zatížení neplatila. Pro použitou geometrii a model materiálu docházelo v módu III k silnému potlačení velikosti plastické zóny určené elasto-plastickým řešením pod úroveň, kterou předpokládal lineární přístup. Plastická zóna před čelem trhliny byla silně ovlivněna parametry použitého modelu materiálu. Z toho důvodu byl na základě porovnání elasto-plastického a čistě elastického řešení jak pro použitý model materiálu, tak pro tri-lineární zjednodušení modelu materiálu v lineární oblasti stanoven korekční faktor P_{III} . Po úpravě analytického vztahu pomocí koeficientu P_{III} již platila shoda lineárního a elasto-plastického řešení až do zatížení, které vytvořilo zplastizovanou zónu na čele trhliny o velikosti jedné desetiny celkové délky trhliny.

Pro smíšený mód II+III se ukázalo, že malé úrovně zatížení je možné popsat pomocí součtu velikostí plastické zóny pro mód II a III, přičemž musel být určen postup pro popis poměrů zmíněných módů v libovolném místě, kde docházelo ke kombinaci módů II+III. Bylo využito nahrazení celkové velikosti J -integrálu pro mód II+III součtem druhých mocnin goniometrických funkcí s amplitudou určenou pomocí J -integrálu z míst s výskytem pouze módu II nebo III. Porovnání analytického řešení s elasto-plastickým opět prokázalo dobrou shodu těchto přístupů (při použití korekčního faktoru P_{III}) až do zatížení vyvolávajícího plastickou zónu na čele trhliny o velikosti jedné desetiny celkové délky trhliny.

Výsledné velikosti plastické zóny v závislosti na J -integrálu, určené pomocí elasto-plastického přístupu, byly také proloženy pro zkoumané případy funkcí ve tvaru polynomu třetího řádu. Ten dobře vystihnul počátek průběhu pomocí lineárního členu a zároveň člen ve třetí mocnině dobře popsal oblast vysokých zatížení, kde hodnoty prudce rostly. Tyto průběhy tak umožní relativně přesné určení velikosti plastické zóny i pro úrovně zatížení daného modelu, které nebyly řešeny. Nahrazují tak pro použitou geometrii a model materiálu lineární vztahy, které byly použitelné jen pro malé zatížení. Vztah, který vznikl proložení výsledků pro smíšený mód II+III pak představuje nejobecnější vyjádření, vhodné pro určení velikosti plastické zóny pro vyšší zatížení kdekoliv po obvodu válcového vzorku.

Důležitost výsledků, dosažených v této diplomové práci, byla ověřena jejich zveřejněním a pozitivním přijetím vědeckou komunitou na významných mezinárodních konferencích (7th Materials Structure & Micromechanics of Fracture, Brno 2013,

14th European Congress and Exhibition on Advanced Materials and Processes, Seville 2013, 8th Meeting of the ESIS Technical Committee on Micromechanisms, Oxford 2012) i v recenzovaných časopisech^[18, 19], indexovaných v databázi Web of Science firmy Thomson Reuters.

Seznam použitých zdrojů

- [1] ONDRÁČEK, Emanuel; VRBKA, Jan; JANÍČEK, Přemysl a BURŠA Jiří. *Mechanika těles: Pružnost a pevnost II*. 4. přeprac. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM s.r.o., 2006, s. 185-195. ISBN 80-214-3260-8
- [2] POKLUDA, J.; KROUPA, F. a OBDRŽÁLEK, L. *Mechanické vlastnosti a struktura pevných látek: kovy – keramika – plasty*. Brno: PC-DIR spol. s.r.o. – Nakladatelství, 1994. ISBN 80-214-0575-9
- [3] VARFOLOMEYEV, I. V.; KLEPACZKO, J. R. *Approximate Analysis on Strain Rate Effects and Behavior of Stress and Strain Fields at the Crack Tip in Mode II in Metallic Materials*. Metz: Institut superieur de genie mecanique et productique, 1992.
- [4] ANDERSON, T. L. *Fracture mechanics: Fundamentals and applications*. 2nd ed. Boca Raton (Florida): CRC Press, 1995. ISBN 0-8493-4260-0
- [5] VOJTEK, T.; POKLUDA, J.; ŠANDERA, P.; HORNÍKOVÁ, J.; HOHENWARTER, A. a PIPPAN, R. Analysis of Fatigue Crack Propagation under Mixed Mode II+III in ARMCO Iron. *International Journal of Fatigue*. 2014, (zasláno). ISSN 0142-1123
- [6] ASTM E399 - 09. *Standart Test Method for Plane-Strain Fracture Toughness of Metallic Materials*. West Conshohocken, PA, United States: ASTM International, 2009. 33 s.
- [7] FLORIAN, Z. *5PP - Pružnost a pevnost II*. (přednáška) Brno: VUT v Brně, 2011
- [8] RICE, J. R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*. 1968, č. 35, s. 379-386.
- [9] ANSYS Inc. *Ansys 14.0 help*. [DVD]. SAS IP, ©2011, [cit. 2014]
- [10] SHIH, C. F.; MORAN, B.; NAKAMURA, T. Energy Release Rate Along a Three-Dimensional Crack Front in a Thermally Stressed Body. *International Journal of Fracture*. 1986, č. 30, s. 79-102.
- [11] CALLISTER, William D. Jr. *Materials Science and Engineering, An Intoduction*. 7th ed. New York (NY): John Wiley & Sons, Inc., 2007. ISBN 978-0-471-73696-7
- [12] *Yield (engineering)* [online], poslední aktualizace 12. 4. 2014, 10:41 [cit. 19. 4. 2014], Wikipedie. Dostupné z WWW: <http://en.wikipedia.org/wiki/Yield_stress>
- [13] VOJTEK, T.; PIPPAN, R.; HOHENWARTER, A.; HOLÁŇ, L. a POKLUDA, J. Near-threshold propagation of mode II and mode III fatigue cracks in ferrite and austenite. *Acta MATERIALIA* 61. 2013, č. 13, s. 4625-4635. ISSN 1359-6454
- [14] KLESNIL, M.; LUKÁŠ, P. *Únava kovových materiálů při mechanickém namáhání*. 1. vyd. Praha: ACADEMIA, 1975, s. 21. 21-079-75

- [15] POOK, L., P. A 50-year retrospective review of three-dimensional effects at cracks and sharp notches. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2013, č. 36, s. 699-723. DOI 10.1111/ffe.12074
- [16] MATHWORKS Inc. *Matlab Help v. 7.12.0.635 (R2011a)*. [DVD]. ©2011, [cit. 2014]
- [17] ŽÁK, S. *Elastická analýza stability trhliny ve smykových zátěžných módech*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. 42 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Jana Horníková, Ph.D.
- [18] HORNÍKOVÁ, J.; ŽÁK, S. a ŠANDERA, P. K-calibration of Special Specimens for Mode II, III and II+III Crack Growth. *Engineering Fracture Mechanics 110*. 2013, č. 1, s. 430-437. ISSN 0013-7944, WOS:000328176100031
- [19] HORNÍKOVÁ, J.; ŠANDERA, P.; ŽÁK, S. a POKLUDA, J. Specimens for Simultaneous Mode II, III and II+III Fatigue Crack Propagation: Elasto-Plastic Solution of Crack Tip Stress-Strain Field. *Advanced Materials Research 891-892*. 2014, s. 1585-1590. ISSN 1022-6680

Seznam použitých zkratek a symbolů

EPLM		elasto - plastická lomová mechanika
HMH		Huber - von Mises - Hencky
LELM		lineární elastická lomová mechanika
MKP		metoda konečných prvků
RAM		random - acces memory
RD		rovinná deformace
RN		rovinná napjatost
<i>A</i>	[m ²]	plocha trhliny
<i>A_{ie}</i>	[m ²]	plocha konečného prvku číslo <i>ie</i>
<i>B</i>	[m]	šířka tělesa
<i>C</i>	[m ²]	lomová plocha na které je při MKP výpočtu uvažováno tření
<i>C_{II (III, II+III), 1}</i>	[Pa ⁻³ ·m ⁻²]	koeficienty kubického členu závislosti <i>r_P</i> (mód II, III a II+III)
<i>C_{II (III, II+III), 2}</i>	[Pa ⁻² ·m ⁻¹]	koeficienty kvadratického členu závislosti <i>r_P</i> (mód II, III a II+III)
<i>C_{II (III, II+III), 3}</i>	[Pa ⁻¹]	koeficienty lineárního členu závislosti <i>r_P</i> (mód II, III a II+III)
<i>D_{II (III, II+III)}</i>	[Pa ⁻¹]	lineární koeficient analytického vztahu pro <i>r_P</i> (mód II, III a II+III)
<i>E</i>	[Pa]	modul pružnosti v tahu
<i>E_{PL}</i>	[Pa]	směrnice zpevnění bi-lineárního a tri-lineárního modelu materiálu
<i>F</i>	[N]	vnější silové zatížení
<i>J</i>	[N·m ⁻¹]	<i>J</i> -integrál
<i>J[*]_{II+III}</i>	[N·m ⁻¹]	kombinovaná hodnota <i>J</i> -integrálu pro smíšený mód II+III
<i>K_{I (II, III)}</i>	[Pa·m ^{1/2}]	součinitel intenzity napětí (mód I, II a III)
<i>K_{th}</i>	[Pa·m ^{1/2}]	prahová hodnota součinitele intenzity napětí
<i>L_i</i>	[m]	charakteristický geometrický rozměr tělesa s trhlinou
<i>M_k</i>	[N·m]	kroučící moment
<i>P</i>	[N]	silové zatížení tělesa s trhlinou
<i>P_{III}</i>	[-]	korekční poměr
<i>R²</i>	[-]	koeficient determinace
<i>S</i>	[m ²]	plocha
<i>T_i</i>	[N]	vektor povrchových sil k integrační křivce
<i>U</i>	[J]	deformační energie tělesa s trhlinou
<i>U[*]</i>	[J]	doplňková deformační energie tělesa s trhlinou
<i>a</i>	[m]	délka trhliny
<i>a₀</i>	[m]	počáteční délka trhliny
<i>a_t</i>	[m]	celková délka trhliny
<i>f_{ij}</i>	[-]	funkce závislosti napětí na typu nespojitosti
<i>k</i>	[-]	tvárová funkce
<i>l</i>	[m]	pozice na tělese s trhlinou
<i>q</i>	[-]	vektor směru trhliny
<i>r</i>	[m]	vzdálenost od čela trhliny
<i>r_P</i>	[m]	velikost plastické zóny před čelem trhliny
<i>r_{P, II (III, II+III)}</i>	[m]	velikost plastické zóny před čelem trhliny pro konkrétní zátěžné módy II, III a II+III
<i>r_{P, II (III, II+III) norm}</i>	[m]	velikost plastické zóny před čelem trhliny pro konkrétní zátěžné módy II, III a II+III normovaná k celkové délce trhliny <i>a_t</i>
<i>r_{P, III (II+III) korekce}</i>	[m]	velikost plastické zóny pro módy III a II+III korigovaná poměrem <i>P_{III}</i>

$r_{P, \text{analyticky}}$	[m]	velikost plastické zóny před čelem trhliny určená analyticky
$r_{P, \text{MKP}}$	[m]	velikost plastické zóny před čelem trhliny určená MKP postupem
s	[m]	délka integrační cesty
t_j	[-]	koeficient tření na lomových plochách
$u_{i,j}$	[m]	složky vektoru posuvů v okolí čela trhliny
w	[J·m ⁻³]	hustota deformační energie
w_{iw}	[-]	váhové funkce
Γ	[-]	integrační cesta
Δ	[m]	deformační zatížení tělesa s trhlinou
Π	[J]	potenciální energie tělesa s trhlinou
α	[rad]	úhel sklonu elastické části závislosti σ - ε
β	[rad]	úhel sklonu plastické části závislosti σ - ε
δ_{ij}	[-]	Kroneckerovo delta
ε	[-]	poměrná deformace
$\varepsilon_{eq, pl}$	[-]	ekvivalentní poměrná plastická deformace (dle HMM)
ε_{ij}	[-]	složky tenzoru poměrné deformace
ε_{pl}	[-]	poměrná plastická deformace
ϑ	[rad]	úhlová souřadnice pozice na obvodu válcového zk. tělesa
μ	[-]	Poissonovo číslo
σ	[Pa]	napětí
σ_{eq}	[Pa]	ekvivalentní napětí používané programem ANSYS (dle HMM)
σ_{ij}	[Pa]	složky tenzoru napětí
σ_{red}	[Pa]	redukované napětí (dle podmínky HMM)
σ_{YS}	[Pa]	smluvní mez kluzu v tahu
τ	[Pa]	smykové napětí
τ_{YS}	[Pa]	smluvní mez kluzu ve smyku
φ	[rad]	úhlová souřadnice pozice okolo čela trhliny