Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Přírodovědecká fakulta

Počáteční úloha pro homogenní lineární diferenciální rovnici 4. řádu s parametry.

Bakalářská práce

Pavel Holšan

školitel: Mgr. Jan Eisner, Dr.

České Budějovice 2013

Holšan P., 2013: Počáteční úloha pro homogenní lineární diferenciální rovnici 4. řádu s parametry. [The initial-value linear homogenous problem of the 4th-order with parametres. Bc. Thesis, in Czech.] 55 p., Faculty of Science, University of South Bohemia, České Budějovice, Czech Republic.

Annotation:
Let us have an initial-value problem of the 4th-order homogenous linear differential equation with constant coefficients and let two of that coefficients be parameters. Let two of four initial-conditions also be parameters and other ones be zero. The qualitative analysis with respect to these four parameteres is the main subject of the thesis. Attention is mainly devoted to the existence of periodic solutions.

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

České Budějovice, 11.12.2013.

Poděkování

Mgr. Janu Eisnerovi, Dr. za vstřícný odborný dohled a věnovaný čas.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

V naší práci se zabýváme počáteční úlohou pro homogenní lineární diferenciální rovnici 4. řádu s parametry. Ke komplexnímu uchopení zadaného problému a patřičnému vhledu do všech souvislostí s naší úlohou souvisejících věnujeme jednu z kapitol, Kapitolu 2, hloubkově vystavěné obecné teorii homogenních lineárních diferenciálních rovnic n-tého řádu s uvedenými přímými vazbami na teorii lineárních systémů diferenciálních rovnic prvního řádu, kteroužto v plném znění z kapacitních důvodů neuvádíme; pro hloubkově vybudovanou teorii lineárních systémů diferenciálních rovnic, o níž se teorie homogenních lineárních diferenciálních rovnic opírá, však lze doporučit knihu [4], kterážto i nám při budování Kapitol 2 a 3 posloužila jako základní stavební kámen, a z níž také čerpáme řadu definic, vět a důkazů. Jako další materiál posloužily pak knihy [1],[2],[3].

Kapitolu 3 dále věnujeme metodám řešení homogenních lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů s konstantními koeficienty, přičemž i zde se snažíme o umožnění hloubkového vhledu do všech souvislostí, příčin a důsledků; explicitní postupy využívané při samotném studiu v následné kapitole zde budujeme od základu a postupně demonstrujeme jejich použití na jednoduchých vzorových příkladech.

Kapitolu 4 konečně věnujeme avizované kvalitativní analýze zadané úlohy vzhledem ke zvoleným parametrům a počátečním podmínkám, zvláštní pozornost je přitom věnována hledání periodických řešení.

V práci dle potřeby využíváme značení $y = y(x)$, $y = f(x)$. Dle kontextu rovněž užíváme značení derivací

$$y^{(k)}(x), \quad \frac{d^k y(x)}{dx^k}.$$

Symbolem $\mathbb{Q}$ dále značíme množinu racionálních čísel, symbolem $\mathbb{R}^+$ pak interval $(0, \infty)$.

Symbol $\Phi = \Phi(x)$ značí vektorovou funkci $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

Důkazy vět ukončujeme znakem $\Box$.

Práce je vysázená typografickým systémem LaTeX, obrázky vykresleny programem WolframMathematica.

Kapitola 2

Teorie (homogenních) lineárních diferenciálních rovnic n-tého řádu

Poznámka 2.0.1 *Je předpokládána znalost teorie homogenních lineárních systémů diferenciálních rovnic, uváděny z této problematiky jsou pouze ty definice a věty, na něž explicitně odkazujeme v důkazech (a to vždy na prvních pozicích před dokazovanými tvrzeními a větami, v nichž na tyto definice a věty odkazujeme poprvé), tvrzeních a větách.*

Obyčejná lineární diferenciální rovnice (LDR) n-tého řádu se závisle proměnnou y a nezávisle proměnnou x je rovnice, jež má tvar

$$a_0(x) \cdot \frac{d^n y(x)}{dx^n} + a_1(x) \cdot \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x) \cdot \frac{dy(x)}{dx} + a_n(x)y(x) = F(x), \quad (2.1)$$

přičemž $a_0(x) \neq 0$ pro všechna x na $[a, b]$. Budeme předpokládat, že $a_0, a_1, .., a_n$, a F jsou spojité reálné funkce na reálném intervalu $[a, b]$. Pravý člen $F(x)$ je označován jako člen nehomogenní. Je-li F indentickou nulou, rovnice (2.1) přechází do podoby

$$a_0(x) \cdot \frac{d^n y(x)}{dx^n} + a_1(x) \cdot \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x) \cdot \frac{dy(x)}{dx} + a_n(x)y(x) = 0, \quad (2.2)$$

a je pak označována jako homogenní rovnice.

Pro $n = 4$ z rovnice (2.1) získáváme nehomogenní lineární diferenciální rovnici 4. řádu

$$a_0(x) \cdot \frac{d^4 y(x)}{dx^4} + a_1(x) \cdot \frac{d^3 y(x)}{dx^3} + a_2(x) \cdot \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + a_3(x) \cdot \frac{dy(x)}{dx} + a_4(x)y(x) = F(x),$$

a z rovnice (2.2) pak homogenní lineární diferenciální rovnici 4. řádu

$$a_0(x) \cdot \frac{d^4 y(x)}{dx^4} + a_1(x) \cdot \frac{d^3 y(x)}{dx^3} + a_2(x) \cdot \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + a_3(x) \cdot \frac{dy(x)}{dx} + a_4(x)y(x) = 0.$$

Zde předpokládejme, že $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, F$ jsou spojitými reálnými funkcemi na reálném intervalu $[a, b]$ a že $a_0(x) \neq 0$ pro všechna x na $[a, b]$.

Poznámka 2.0.2 *Dále ve zřejmých případech místo $y(x)$ budeme psát y.*

Definice 2.0.3 *Řešením rovnice (2.1) na intervalu $[a, b]$ je reálná funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ na intervalu $[a, b]$ až do řádu $n-1$ spojitě diferencovatelná a pro všechna $x \in [a, b]$ rovnici (2.1) splňující.*

Věta 2.0.4 *Mějme lineární diferenciální rovnici n-tého řádu*

$$a_0(x) \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x) \cdot \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = F(x),$$

kde $a_0, a_1, .., a_n$ a F jsou spojité a reálné funkce na reálném intervalu $[a, b]$ a $a_0(x) \neq 0$ pro každé x na $[a, b]$. Dále nechť x_0 je libovolným bodem z intervalu $[a, b]$ a $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ nechť jsou libovolnými reálnými konstantami. Pak existuje jednoznačné řešení $y = f(x)$ této rovnice takové, že

$$f(x_0) = c_0, \quad f'(x_0) = c_1, \ldots, \; f^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1},$$

které je definováno na celém intervalu $[a, b]$.

Důsledek 2.0.5 *Nechť funkce $y = f(x)$ je řešením lineární diferenciální rovnice n-tého řádu*

$$a_0(x) \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x) \cdot \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = 0$$

takové, že

$$f(x_0) = 0, \quad f'(x_0) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

kde x_0 je bodem intervalu $[a, b]$, na němž jsou funkce $a_0, a_1, \ldots, a_n$ spojité a $a_0(x) \neq 0$. Pak $f(x) = 0$ pro každé $x \in [a, b]$.

Definice 2.0.6 *Nechť $f_1, f_2, \ldots, f_m$ je m daných funkcí a $c_1, c_2, \ldots, c_m$ je m daných konstant. Pak vyjádření*

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m$$

nazýváme lineární kombinací funkcí $f_1, f_2, \ldots, f_m$.

Věta 2.0.7 *Nechť* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *je* m *řešení homogenní lineární diferenciální rovnice (2.2). Pak* $c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_mf_m$ *je rovněž řešením rovnice (2.2), kde* $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *jsou libovolnými konstantami.*

Definice 2.0.8 *Funkce* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *nazýváme lineárně závislé na intervalu* $[a, b]$, *existují-li konstanty* $c_1, c_2, \ldots, c_n$, *z nichž alespoň jedna je nenulová, takové, že*

$$c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_nf_n = 0$$

pro všechna $x \in [a, b]$. *Nejsou-li funkce* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *na intervalu* $[a, b]$ *lineárně závislé, nazýváme je lineárně nezávislé na intervalu* $[a, b]$.

Věta 2.0.9 *Jsou-li funkce* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *lineárně nezávislé na* $[a, b]$ *při relaci*

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x) = 0$$

pro všechna $x \in [a, b]$, *pak*

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Věta 2.0.10 *Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu*

$$a_0(x) \cdot \frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x) \cdot \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x) \cdot \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0$$

má vždy n lineárně nezávislých řešení. Jsou-li $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *lineárně nezávislými řešeními rovnice, pak můžou všechna řešení* f *této rovnice být vyjádřena lineární kombinací*

$$f = c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_nf_n$$

pomocí vhodné volby konstant $c_1, c_2, \cdots, c_n$.

Definice 2.0.11 *Jsou-li* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *lineárně nezávislá řešení homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu (2.2) na* $x \in [a, b]$, *poté se systém* $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ *nazývá fundamentální systém řešení této rovnice a funkce* f *definovaná jako*

$$f(x) = c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x), \qquad x \in [a, b],$$

kde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *jsou libovolnými konstantami, se nazývá obecné řešení rovnice (2.2) na intervalu* $[a, b]$.

Pro homogenní lineární diferenciální rovnici 4. řádu

$$a_0(x) \cdot \frac{d^4y}{dx^4} + a_1(x) \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + a_2(x) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + a_3(x) \cdot \frac{dy}{dx} + a_4(x)y = 0$$

se fundamentální systém skládá ze čtyř lineárně nezávislých řešení $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. *Obecné řešení je pak definováno na* $[a, b]$ *jako*

$$f(x) = c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + c_3f_3(x) + c_4f_4(x),$$

kde c_1, c_2, c_3, c_4 *jsou libovolné konstanty.*

Definice 2.0.12 *Nechť* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *jsou reálné funkce, přičemž u každé existuje na reálném intervalu* $[a, b]$ *derivace až do řádu* $n - 1$. *Determinant*

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

se pak nazývá Wronskiánem těchto n *funkcí.* $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ *je sám reálnou funkcí definovanou na intervalu* $[a, b]$, *její hodnotu v bodě* x *značíme* $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x)$ *nebo* $W[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)]$.

Věta 2.0.13 *Řešení* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *homogenní lineární diferenciální rovnice* n*-tého řádu jsou lineárně nezávislá na* $[a, b]$ *tehdy a jen tehdy, je-li Wronskián funkcí* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *různý od nuly pro nějaké* $x \in [a, b]$.

Věta 2.0.14 *Wronskián* n *řešení* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *homogenní lineární diferenciální rovnice* n*-tého řádu je buď identicky nulový na celém intervalu* $[a, b]$, *anebo je na celém intervalu* $[a, b]$ *nenulový (není pro žádné* $x \in [a, b]$ *roven nule).*

Pro další budování teorie nyní provedeme následující úvahu. Označíme

$$\begin{aligned} y_1 &= y, \\ y_2 &= \frac{dy}{dx}, \\ y_3 &= \frac{d^2y}{dx^2}, \\ &\vdots \\ y_{n-1} &= \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}, \\ y_n &= \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Postupným derivováním systému (2.3) získáme

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= \frac{dy}{dx}, \\ \frac{dy_2}{dx} &= \frac{d^2y}{dx^2}, \\ &\vdots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \\ \frac{dy_n}{dx} &= \frac{d^ny}{dx^n},\end{aligned} \tag{2.4}$$

z čehož plyne, že

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_3, \\ &\vdots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= y_n.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Nyní lze za předpokladu $a_0(x) \neq 0$ na intervalu $[a, b]$ zapsat rovnici (2.2) ve tvaru

$$\frac{d^ny}{dx^n} = -\frac{a_n(x)}{a_0(x)}y - \frac{a_{n-1}(x)}{a_0(x)}\frac{dy}{dx} - \cdots - \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

a vzhledem k rovnostem (2.3) a (2.4) pak ekvivalentně

$$\frac{dy_n}{dx} = -\frac{a_n(x)}{a_0(x)}y_1 - \frac{a_{n-1}(x)}{a_0(x)}y_2 - \cdots - \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y_n. \tag{2.6}$$

Rovnice (2.5) a (2.6) tedy utváří

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_3, \\ &\vdots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= y_n, \\ \frac{dy_n}{dx} &= -\frac{a_n(x)}{a_0(x)}y_1 - \frac{a_{n-1}(x)}{a_0(x)}y_2 - \cdots - \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y_n,\end{aligned} \tag{2.7}$$

což je systém n rovnic 1. řádu pro vektorovou funkci

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Nyní budeme uvažovat funkci f splňující homogenní lineární diferenciální rovnici (2.2), tj. máme

$$a_0(x)f^{(n)}(x) + a_1(x)f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)f'(x) + a_n(x)f(x) = 0 \tag{2.8}$$

pro $x \in [a, b]$. Dále uvažujme vektor $\Phi = \Phi(x)$, $x \in [a, b]$, definovaný jako

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \phi_3(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-1}(x) \\ \phi_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{(n-2)}(x) \\ f^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Z rovnic (2.8) a (2.9) postupným derivováním získáme

$$\begin{aligned} \phi_1'(x) &= \phi_2(x), \\ \phi_2'(x) &= \phi_3(x), \\ &\vdots \\ \phi_{n-1}'(x) &= \phi_n(x), \\ \phi_n'(x) &= -\frac{a_n(x)}{a_0(x)}\phi_1(x) - \frac{a_{n-1}(x)}{a_0(x)}\phi_2(x) - \cdots - \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\phi_n(x). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Porovnáním zjišťujeme, že vektor Φ z (2.9) vyhovuje systému (2.7).

Opačným způsobem můžeme předpokládat, že vektorová funkce

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{pmatrix}$$

vyhovuje systému (2.7) na $[a, b]$. Ukážeme, že $f = \phi_1(x)$ řeší rovnici (2.2). Prvních $n-1$ rovnic z (2.7) spolu s takto definovaným f dává, že

$$\begin{aligned} \phi_2(x) &= \phi_1'(x) = f'(x) \\ \phi_3(x) &= \phi_2'(x) = \phi_1''(x) = f''(x) \\ &\vdots \\ \phi_n(x) &= \phi_{n-1}'(x) = \phi_{n-2}''(x) = \cdots = \phi_1^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) \end{aligned} \tag{2.11}$$

a také, že $\phi_n'(x) = \phi_1^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$. Poslední rovnice z (2.10) poté přechází do podoby

$$\phi_1^{(n)}(x) = -\frac{a_n(x)}{a_0(x)}\phi_1(x) - \frac{a_{n-1}(x)}{a_0(x)}\phi_1'(x) - \cdots - \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\phi_1^{(n-1)}(x),$$

neboli

$$a_0(x)\phi_1^{(n)}(t) + a_1(x)\phi_1^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\phi_1'(x) + a_n(x)\phi_1(x) = 0.$$

Tedy $f = \phi_1(x)$ je skutečně řešením homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu (2.2), přičemž rovnosti (2.11) navíc ukazují, že původní řešení systému (2.7) je tvaru

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Získané poznatky shrneme v následující větě.

Věta 2.0.15 *Mějme lineární diferenciální rovnici n-tého řádu*

$$a_0(x) \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x) \cdot \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0$$

a jí příslušící lineární systém (2.7). Je-li f řešením této rovnice na intervalu $[a,b]$, pak

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

je řešením (2.7) na $[a,b]$. Naopak, je-li

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{pmatrix}$$

řešením (2.7) na [a,b], pak $f = \phi_1(x)$ je řešením uvažované rovnice n-tého řádu na $[a,b]$.

Důsledek 2.0.16 *Je-li f řešením homogenní lineární diferenciální rovnice (2.2) na $[a, b]$ splňujícím počáteční podmínky*

$$f(x_0) = c_0, \quad f'(x_0) = c_1, \quad f''(x_0) = c_2, \ldots, f^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1},$$

potom

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

je řešením příslušného homogenního lineárního systému (2.7) na $[a, b]$ splňujícím počáteční podmínky

$$\Phi(x_0) = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Naopak, je-li

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{pmatrix}$$

řešením (2.7) na $[a, b]$ splňujícím počáteční podmínky

$$\phi_1(x_0) = c_0, \quad \phi_2(x_0) = c_1, \quad \phi_3(x_0) = c_2, \ldots, \phi_n(x_0) = c_{n-1},$$

poté $f = \phi_1(x)$ je řešením rovnice (2.2) na [a,b] splňujícím počáteční podmínky

$$f(x_0) = c_0, \quad f'(x_0) = c_1, \quad f''(x_0) = c_2, \ldots, f^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}.$$

Věta 2.0.17 *Lineární kombinace m řešení vektorové homogenní lineární diferenciální rovnice*

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}, \tag{2.12}$$

kde $\mathbf{A} : [a,b] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *je matice odpovídající systému (2.7), je rovněž jejím řešením. Jsou-li tedy vektorové funkce* $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m$ *řešeními rovnice (2.12) a* $c_1, c_2, \dots, c_m$ *jsou* m *konstantami, je vektorová funkce*

$$\Phi = \sum_{k=1}^{m} c_k \Phi_k$$

rovněž řešením rovnice (2.12).

Řešením rovnice (2.12) v předchozí větě myslíme funkci $\mathbf{y} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ spojitě diferencovatelnou a pro všechna $x \in [a,b]$ rovnici (2.12) splňující.

Věta 2.0.18 *Lineární kombinace* m *řešení homogenní lineární diferenciální rovnice* n*-tého řádu*

$$a_0(x) \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x) \cdot \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = 0, \tag{2.13}$$

je také jejím řešením, tj. jsou-li funkce $f_1, f_2, \dots, f_m$ *řešeními rovnice (2.13) a jsou-li* $c_1, c_2, \dots, c_m$ m *reálnými konstantami, pak funkce*

$$f = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k$$

je také řešením rovnice (2.13).

Důkaz: Předpokládejme, že $f_1, f_2, \dots, f_m$ jsou řešeními rovnice (2.13). Proto dle Věty 2.0.15 jsou

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \\ \vdots \\ f_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2' \\ \vdots \\ f_2^{(n-1)} \end{pmatrix}, \dots, \Phi_m = \begin{pmatrix} f_m \\ f_m' \\ \vdots \\ f_m^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

řešeními homogenního lineárního systému (2.7). Následně dle Věty 2.0.17 je

$$\Phi = \sum_{k=1}^{m} c_k \Phi_k$$

také řešením (2.7). Tím pádem rovněž

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} c_k f_k \\ \sum_{k=1}^{m} c_k f_k' \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{m} c_k f_k^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

je řešením systému (2.7). Z Důsledku 2.0.16 je pak patrné, že první složka tohoto vektoru

$$\sum_{k=1}^{m} c_k f_k$$

je řešením rovnice (2.13). $\square$

Definice 2.0.19 *Řešení* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$ *homogenního lineárního systému (2.7) se nazývají lineárně nezávislá na* $[a, b]$ *tehdy a jen tehdy, implikuje-li relace*

$$c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x) + \cdots + c_m\Phi_m(x) = 0$$

pro všechna $x \in [a, b]$*, že*

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0.$$

Definice 2.0.20 *Řešení* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$ *homogenního linárního systému (2.7) se nazývají lineárně závislá na* $[a, b]$ *tehdy a jen tehdy, nejsou-li na tomto intervalu nezávislá.*

Věta 2.0.21 *Jsou-li řešení* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu (2.2) lineárně nezávislá na* $[a, b]$*, poté i příslušná řešení*

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \\ \vdots \\ f_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2' \\ \vdots \\ f_2^{(n-1)} \end{pmatrix}, \ldots, \Phi_n = \begin{pmatrix} f_n \\ f_n' \\ \vdots \\ f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

homogenního lineárního systému (2.7) jsou na intervalu $[a, b]$ *lineárně nezávislá, a naopak.*

Důkaz: Předpokládejme, že $f_1, f_2, \ldots, f_n$ jsou lineárně nezávislá řešení na $[a, b]$. Jsou také $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ lineárně nezávislá? Předpokládejme, že

$$c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x) + \cdots + c_n\Phi_n(x) = 0 \tag{2.14}$$

pro všechna $x \in [a, b]$. Je patrné, že první skalární složkou vektorového vztahu (2.14) je vztah

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0, \tag{2.15}$$

jež díky předpokládané lineární nezávislosti $f_1, f_2, \ldots, f_n$ implikuje $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, tudíž, že i $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n$ jsou na intervalu $[a, b]$ lineárně nezávislá.

Nyní předpokládejme, že $f_1, f_2, \dots, f_n$ jsou lineárně závislé na $[a,b]$. Pak existují konstanty $c_1, c_2, \dots, c_n$, z nichž alespoň jedna je nenulová, takové, že

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0 \tag{2.16}$$

pro všechna $x \in [a,b]$. Derivováním tohoto vztahu až do stupně $n-1$ dostáváme rovnice

$$\begin{aligned} c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + \cdots + c_n f_n'(x) &= 0, \\ c_1 f_1''(x) + c_2 f_2''(x) + \cdots + c_n f_n''(x) &= 0, \\ &\vdots \\ c_1 f_1^{(n-1)}(x) + c_2 f_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n f_n^{(n-1)}(x) &= 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

platné na intervalu $[a,b]$. Vztahy (2.16) a (2.17) tvoří $1 + (n-1) = n$ skalárních vztahů ekvivalentních vektorové relaci

$$c_1 \Phi_1(x) + c_2 \Phi_2(x) + \cdots + c_n \Phi_n(x) = 0$$

pro všechna $x \in [a,b]$. Podle předpokladu jsou $c_1, c_2, \dots, c_n$ ne vesměs nulové, a tedy podle Definice 2.0.20 jsou $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ na intervalu [a,b] lineárně závislé. $\square$

Pro další teorii nechť $f_1, f_2, \dots, f_n$ je n řešení homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu (2.2) na intervalu $[a,b]$ a nechť

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \\ \vdots \\ f_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2' \\ \vdots \\ f_2^{(n-1)} \end{pmatrix}, \dots, \Phi_n = \begin{pmatrix} f_n \\ f_n' \\ \vdots \\ f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

jsou příslušnými řešeními homogenního lineárního systému (2.7) na $[a,b]$. Z Definice 2.0.12 plyne, že Wronskián n řešení $f_1, f_2, \dots, f_n$ rovnice (2.2) má tvar

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

a je mimo jiné zřejmé, že

$$W(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)(x) = W(f_1, f_2, \dots, f_n)(x) \tag{2.18}$$

pro všechna $x \in [a, b]$.

Věta 2.0.22 *Nechť vektorové funkce* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ *jsou* n *řešeními vektorové homogenní lineární diferenciální rovnice*

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}$$

na reálném intervalu $[a, b]$*. Poté buď* $W(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)(x) = 0$ *pro všechna* $x \in [a, b]$*, nebo* $W(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)(x) \neq 0$ *pro všechna* $x \in [a, b]$*.*

Věta 2.0.23 *Nechť vektorové funkce* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ *jsou* n *řešeními vektorové homogenní lineární diferenciální rovnice*

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}$$

na reálném intervalu $[a, b]$*. Těchto* n *řešení* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ *je linárně nezávislých na* $[a, b]$ *tehdy a jen tehdy, když*

$$W(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)(x) \neq 0$$

pro všechna $x \in [a, b]$*.*

Věta 2.0.24 *Nechť* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *je* n *řešení homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu (2.2) na* $[a, b]$*. Pak buď* $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) = 0$ *pro všechna* $x \in [a, b]$*, anebo pro všechna* $x \in [a, b]$ *je* $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) \neq 0$*.*

Dle Věty 2.0.21 jsou řešení $f_1, f_2, ..., f_n$ rovnice (2.2) lineárně nezávislá na $[a, b]$ tehdy a jen tehdy, jsou-li i příslušná řešení systému (2.7)

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \\ \vdots \\ f_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2' \\ \vdots \\ f_2^{(n-1)} \end{pmatrix}, \ldots, \Phi_n = \begin{pmatrix} f_n \\ f_n' \\ \vdots \\ f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

na intervalu $[a, b]$ lineárně nezávislá. Dle Věty 2.0.23 jsou pak řešení $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ lineárně nezávislá na $[a, b]$ tehdy a jen tehdy, je-li $W(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)(x) \neq 0$ pro všechna $x \in [a, b]$. Z rovnice (2.18) tedy plyne, že řešení $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ jsou lineárně nezávislá na $[a, b]$ tehdy a jen tehdy, je-li $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) \neq 0$ pro všechna $x \in [a, b]$. Je tedy patrné, že řešení $f_1, f_2, ..., f_n$ jsou lineárně nezávislá na $[a, b]$ tehdy a jen tehdy, pokud $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) \neq 0$ pro všechna $x \in [a, b]$, což formulujeme následující větou.

Věta 2.0.25 *Nechť* $f_1, f_2, ..., f_n$ *jsou* n *řešeními homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu*

$$a_0(x) \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x) \cdot \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = 0$$

na intervalu $[a, b]$. *Pak těchto* n *řešení* $f_1, f_2, ..., f_n$ *je lineárně nezávislých na* $[a, b]$ *tehdy a jen tehdy, je-li*

$$W(f_1, f_2, ..., f_n)(x) \neq 0$$

pro všechna $x \in [a, b]$.

Důsledek 2.0.26 *Nechť* $f_1, f_2, ..., f_n$ *je* n *řešení homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu (2.2) na* $[a, b]$. *Pak těchto* n *řešení je lineárně závislých na* $[a, b]$ *tehdy a jen tehdy, je-li* $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) = 0$ *pro všechna* $x \in [a, b]$.

Věta 2.0.27 *Mějme vektorovou diferenciální rovnici*

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{F}(x), \tag{2.19}$$

kde $\mathbf{A} : [a, b] \to \mathbb{R}^{n \times n}$ *a* $\mathbf{F} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. *Nechť složky* $a_{ij}(x), i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, n$, *matice* $\mathbf{A}(x)$ *a složky* $F_i(x), i = 1, 2, \ldots, n$, *vektoru* $\mathbf{F}(x)$ *jsou spojité na reálném intervalu* $[a, b]$. *Nechť* x_0 *je bodem z intervalu* $[a, b]$ *a nechť*

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

je libovolný vektor n *konstant* $c_1, c_2, \ldots, c_n$. *Pak existuje jednoznačné řešení*

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

vektorové diferenciální rovnice (2.19) definované na celém intervalu [a,b] takové, že

$$\Phi(x_0) = \mathbf{c};$$

čili

$$\phi_1(x_0) = c_1,$$

$$\phi_2(x_0) = c_2,$$
$$\vdots$$
$$\phi_n(x_0) = c_n.$$

Věta 2.0.28 *Vždy existuje fundamentální systém řešení vektorové homogenní lineární diferenciální rovnice*

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}. \tag{2.20}$$

Důkaz: Mějme speciálně definované vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ tak, že

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní nechť $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ je n řešení systému (2.20) splňujících podmínky

$$\Phi_i(x_0) = \mathbf{u}_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

čili

$$\Phi_1(x_0) = \mathbf{u}_1, \quad \Phi_2(x_0) = \mathbf{u}_2, \ldots, \Phi_n(x_0) = \mathbf{u}_n,$$

kde x_0 je bodem z intervalu $[a, b]$. Tato řešení dle Věty 2.0.27 vždy existují a jsou jednoznačná. Je nyní dále patrné, že

$$W(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)(x_0) = W(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Z Věty 2.0.22 pak plyne, že $W(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)(x) \neq 0$ pro všechna $x \in [a, b]$, zároveň také z Věty 2.0.23 plyne, že řešení $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ jsou na intervalu $[a, b]$ lineárně nezávislá. Řešení $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ tudíž tvoří fundamentální systém řešení diferenciální rovnice (2.20).
□

Věta 2.0.29 *Vždy existuje fundamentální systém řešení lineární diferenciální rovnice n-tého řádu*

$$a_0(x) \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = 0 \tag{2.21}$$

na intervalu $[a, b]$.

Důkaz: Rovnici (2.21) lze dle Věty 2.0.15 ekvivalentně přepsat na lineární systém (2.7). Dle Věty 2.0.28 pak vždy bude existovat fundamentální systém řešení lineárního systému (2.7) na $[a, b]$. Nechť

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \\ \vdots \\ f_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2' \\ \vdots \\ f_2^{(n-1)} \end{pmatrix}, \dots, \Phi_n = \begin{pmatrix} f_n \\ f_n' \\ \vdots \\ f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

je takovým fundamentálním systémem. Z definice fundamentálního systému je patrné, že tato řešení $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ jsou lineárně nezávislá na $[a, b]$. Z Věty 2.0.15 dále plyne, že $f_1, f_2, \dots, f_n$ jsou řešení rovnice (2.21). Dle věty 2.0.21 pak tato $f_1, f_2, \dots, f_n$ jsou lineárně nezávislá na $[a, b]$, a tedy tvoří fundamentální systém rovnice (2.21) na $[a, b]$. $\square$

Věta 2.0.30 *Nechť* $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ *definované jako*

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_{11}(x) \\ \phi_{21}(x) \\ \vdots \\ \phi_{n1}(x) \end{pmatrix}, \Phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_{12}(x) \\ \phi_{22}(x) \\ \vdots \\ \phi_{n2}(x) \end{pmatrix}, \dots, \Phi_n = \begin{pmatrix} \phi_{1n}(x) \\ \phi_{2n}(x) \\ \vdots \\ \phi_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

tvoří fundamentální systém vektorové homogenní lineární diferenciální rovnice

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}$$

a nechť $\Phi(x)$ *je libovolným řešením rovnice (2.12) na intervalu [a,b]. Pak existují konstanty* $c_1, c_2, \dots, c_n$ *takové, že*

$$\Phi = c_1 \Phi_1 + c_2 \Phi_2 + \dots + c_n \Phi_n$$

na $[a, b]$.

Věta 2.0.31 *Nechť $f_1, f_2, \ldots, f_n$ je fundamentální systém homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu*

$$a_0(x) \cdot \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x) \cdot \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = 0$$

a nechť f je libovolným řešením rovnice (2.2) na $[a, b]$. Pak lze f vyjádřit vhodnou lineární kombinací $f_1, f_2, \ldots, f_n$, jako

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n \tag{2.22}$$

na $[a, b]$ s vhodnými $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Důkaz: Nechť

$$\Phi = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \Phi_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \\ \vdots \\ f_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2' \\ \vdots \\ f_2^{(n-1)} \end{pmatrix}, \ldots, \Phi_n = \begin{pmatrix} f_n \\ f_n' \\ \vdots \\ f_n^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

jsou řešeními příbuzného homogenního lineárního systému (2.7), jimž příslušně odpovídají řešení $f_1, f_2, \ldots, f_n$ rovnice (2.2). Jelikož řešení $f_1, f_2, \ldots, f_n$ tvoří fundamentální systém rovnice (2.2) na $[a, b]$, jsou na $[a, b]$ lineárně nezávislá. Dle Věty 2.0.21 jsou tak lineárně nezávislými na $[a, b]$ i řešení $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$, která tak představují fundamentální systém úlohy (2.7) na $[a, b]$. Dle Věty 2.0.30 pak existují konstanty $c_1, c_2, \ldots, c_n$ takové, že

$$\Phi = c_1 \Phi_1 + c_2 \Phi_2 + \cdots + c_n \Phi_n.$$

Pro první složku daných vektorů tedy máme

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n,$$

což je rovnice (2.22). □

Kapitola 3

Řešení homogenních LDR vyšších řádů s konstantními koeficienty

3.1 Úvod

V této kapitole se zaměříme na speciální případ homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

$$a_0\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = 0, \tag{3.1}$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou reálnými konstantami. Ukážeme, že lze explicitně najít obecné řešení takovéto rovnice. Při snaze o nalezení řešení se budeme přirozeně ptát, nesplňuje-li vlastnosti řešení nějaký nám dobře známý typ funkce. Je patrné, že pro určité konstanty a_i musí existovat nulová lineární kombinace řešení rovnice (3.1) $y = f(x)$ a jeho derivací až do řádu n, platná při daných ne vesměs nulových konstantách a_i pro všechna x, pro která je rovnice (3.1) definována. V našem případě to tedy bude funkce taková, jejíž derivace budou zároveň násobky jí samé:

$$\frac{d^k}{dx^k}[f(x)] = m_k f(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Tuto podmínku zjevně splňuje funkce $f(x) = e^{mx}$, kde m je konstanta, neboť

$$\frac{d^k}{dx^k}(e^{mx}) = m^k e^{mx}.$$

Řešení rovnice (3.1) tedy budeme hledat ve formě $y(x) = e^{mx}$. Ukážeme, že $y(x) = e^{mx}$ pro vhodné m řeší rovnici (3.1). Máme:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= me^{mx}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= m^2e^{mx}, \\ &\vdots \\ \frac{d^ny}{dx^n} &= m^ne^{mx}. \end{aligned}$$

Dosazením do rovnice (3.1) pak dostáváme

$$a_0m^ne^{mx} + a_1m^{n-1}e^{mx} + \cdots + a_{n-1}me^{mx} + a_ne^{mx} = 0$$

neboli

$$e^{mx}(a_0m^n + a_1m^{n-1} + \cdots + a_{n-1}m + a_n) = 0.$$

Jelikož $e^{mx} \neq 0$, dostáváme algebraickou rovnici o neznámé m:

$$a_0m^n + a_1m^{n-1} + \cdots + a_{n-1}m + a_n = 0. \tag{3.2}$$

Tuto rovnici nazýváme charakteristickou rovnicí dané diferenciální rovnice (3.1) a její levou stranu charakteristickým polynomem. Je-li $y = e^{mx}$ řešením rovnice (3.1), musí m splňovat rovnici (3.2). Pro kořeny charakteristického polynomu pak vyvstává jeden ze tří možných případů– kořeny reálné rozdílné, kořeny reálné násobné, kořeny komplexní.

Pro komplexní kořeny nebudeme oddělovat případ s jednoduchými kořeny od násobných kořenů do rozdílných podsekcí.

3.2 Kořeny charakteristické rovnice reálné rozdílné

Uvažme jako kořeny rovnice (3.2) n navzájem různých reálných čísel

$$m_1, m_2, \ldots, m_n.$$

Pak

$$e^{m_1x}, e^{m_2x}, \ldots, e^{m_nx}$$

jsou n různými lineárně nezávislými řešeními rovnice (3.1), a tvoří tak její fundamentální systém.

Věta 3.2.1 *Mějme homogenní lineární diferenciální rovnici n-tého řádu s konstantními koeficienty (3.1). Má-li pak charakteristická rovnice (3.2) n různých reálných kořenů* $m_1, m_2, \ldots, m_n$*, má obecné řešení rovnice (3.1) tvar*

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x},$$

kde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *jsou libovolnými konstantami.*

Příklad 3.2.2 *Mějme diferenciální rovnici*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Charakteristická rovnice má podobu

$$m^2 - 3m + 2 = 0.$$

Odtud postupně

$$(m-1)(m-2) = 0,$$

a tedy

$$m = 1, \quad m = 2.$$

Kořeny jsou reálné různé. Funkce e^x *a* e^{2x} *jsou tedy řešeními a obecné řešení lze zapsat ve tvaru*

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x},$$

kde c_1, c_1 *jsou reálné konstanty.*

Ověřme navíc, že jsou funkce e^x *a* e^{2x} *lineárně nezávislé. Wronskián*

$$W(e^x, e^{2x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x} \neq 0$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$*. Funkce* e^x *a* e^{2x} *jsou tedy lineárně nezávislé.*

Příklad 3.2.3 *Mějme diferenciální rovnici*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 6y = 0.$$

Charakteristická rovnice má podobu

$$m^3 - 4m^2 + m + 6 = 0.$$

Uhodneme kořen $m = -1$. Odtud vytknutím a rozkladem dostaneme

$$(m+1)(m^2-5m+6)=0,$$

$$(m+1)(m-2)(m-3)=0.$$

Kořeny jsme dostali reálné různé

$$m_1=-1, \quad m_2=2, \quad m_3=3,$$

a obecné řešení lze zapsat ve tvaru lineární kombinace

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}.$$

3.3 Kořeny charakteristické rovnice reálné násobné

Příklad 3.3.1 *Mějme diferenciální rovnici*

$$\frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+9y=0. \tag{3.3}$$

Charakteristická rovnice má podobu

$$m^2-6m+9=0$$

$$(m-3)^2=0.$$

Kořeny této rovnice jsou

$$m_1=3, \quad m_2=3.$$

Pro oba kořeny m_1 i m_2 dostáváme totéž řešení e^{3x}. Lineární kombinace $c_1e^{3x}+c_2e^{3x}$ těchto řešení evidentně nemůže být obecným řešením rovnice, neboť řešení nejsou lineárně nezávislá. Musíme tedy najít lineárně nezávislé řešení k prvnímu řešení e^{3x}. Zaveďme proto:

$$y(x)=e^{3x}v(x).$$

Poté

$$\frac{dy}{dx}=e^{3x}\frac{dv}{dx}+3e^{3x}v,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^{3x}\frac{d^2v}{dx^2}+6e^{3x}\frac{dv}{dx}+9e^{3x}v.$$

Substitucí do rovnice (3.3) následně dostáváme

$$\left(e^{3x}\frac{d^2v}{dx^2} + 6e^{3x}\frac{dv}{dx} + 9e^{3x}v\right) - 6\left(e^{3x}\frac{dv}{dx} + 3e^{3x}v\right) + 9e^{3x}v = 0$$

$$e^{3x}\frac{d^2v}{dx^2} = 0.$$

Substitucí $w = dv/dx$ následně dostáváme diferenciální rovnici prvního řádu

$$e^{3x}\frac{dw}{dx} = 0,$$

z čehož plyne

$$\frac{dw}{dx} = 0.$$

Řešením této diferenciální rovnice je evidentně $w(x) = c$, kde c je libovolnou konstantou. Konkrétní volbou $c = 1$ postupně dostáváme, že $\frac{dv}{dx} = w = 1$, z čehož plyne, že

$$v(x) = x + c_0,$$

kde c_0 je libovolnou konstantou. Volbou $c_0 = 0$ nakonec získáváme hledané řešení

$$y = xe^{3x},$$

níže ověříme, že spolu s $y = e^{3x}$ tvoří fundamentální systém. Obecné řešení rovnice (3.3) bude mít podobu

$$y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x},$$

$$y = (c_1 + c_2x)e^{3x}.$$

Z předchozího příkladu je zřejmé, že má-li charakteristická rovnice (3.2) dvojnásobný kořen m, budou e^{mx} a xe^{mx} odpovídajícími řešeními. Tato řešení budou dle Věty 2.0.25 lineárně nezávislá, neboť

$$W = (y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{mx} & xe^{mx} \\ me^{mx} & e^{mx} + mxe^{mx} \end{vmatrix} = e^{2mx} + mxe^{2mx} - mxe^{2mx} = e^{2mx} \neq 0$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Uvažujme nyní specifický případ, kdy rovnice (3.2) má dvojnásobný kořen m a $(n-2)$ kořenů reálných různých

$$m_1, m_2, \ldots, m_{n-2}.$$

Pak lineárně nezávislá řešení rovnice (3.1) tvoří fundamentální systém

$$\{e^{mx}, xe^{mx}, e^{m_1x}, e^{m_2x}, \ldots, e^{m_{n-2}x}\},$$

a obecné řešení zapíšeme jako

$$y(x) = c_1e^{mx} + c_2xe^{mx} + c_3e^{m_1x} + c_4e^{m_2x} + \cdots + c_ne^{m_{n-2}x},$$

$$y(x) = (c_1 + c_2x)e^{mx} + c_3e^{m_1x} + c_4e^{m_2x} + \cdots + c_ne^{m_{n-2}x}.$$

Podobným způsobem, bude-li mít charakteristická rovnice (3.2) trojnásobný kořen m, odpovídající lineárně nezávislá řešení budou

$$e^{mx},\ xe^{mx} \quad a \quad x^2e^{mx}.$$

Příslušná část obecného řešení se pak zapíše jako

$$(c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{mx}.$$

Věta 3.3.2 *Mějme homogenní lineární diferenciální rovnici (3.1) s konstantními koeficienty. Má-li její charakteristická rovnice k-násobný reálný kořen m, poté část obecného řešení (3.1) příslušící tomuto k-násobnému kořenu má podobu*

$$y(x) = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + \cdots + c_kx^{k-1})e^{mx}.$$

Dále, pokud zbývající kořeny dané charakteristické rovnice jsou navzájem různá reálná čísla $m_{k+1}, \ldots, m_n$, má obecné řešení rovnice (3.1) podobu

$$y(x) = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + \cdots + c_kx^{k-1})e^{mx} + c_{k+1}e^{m_{k+1}x} + \cdots + c_ne^{m_nx}.$$

Příklad 3.3.3 *Nalezněte obecné řešení rovnice*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 18y = 0.$$

Charakteristická rovnice

$$m^3 - 4m^2 - 3m + 18 = 0$$

má kořeny $3, 3, -2$. Obecné řešení je

$$y(x) = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + c_3e^{-2x}$$

$$y(x) = (c_1 + c_2x)e^{3x} + c_3e^{-2x}.$$

Příklad 3.3.4 *Nalezněte obecné řešení rovnice*
$$\frac{d^4y}{dx^4} - 5\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 8y = 0.$$
Charakteristická rovnice
$$m^4 - 5m^3 + 6m^2 + 4m - 8 = 0$$
má kořeny $2, 2, 2, -1$. *Část obecného řešení příslušející násobným kořenům má podobu*
$$y_1 = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{2x},$$
část příslušející jednoduchému kořenu $m = -1$ *pak*
$$y_2 = c_4e^{-x}.$$
Obecné řešení $y = y_1 + y_2$ *tedy je*
$$y(x) = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{2x} + c_4e^{-x}.$$

3.4 Kořeny charakteristické rovnice komplexně sdružené

Nyní uvažujme nenásobný komplexní kořen charakteristické rovnice $a + bi$ (a, b reálná čísla, $i^2 = -1, b \neq 0$) a k němu číslo komplexně sdružené $a - bi$, jež je rovněž nenásobným kořenem. Příslušná část obecného řešení má tedy tvar
$$k_1e^{(a+bi)x} + k_2e^{(a-bi)x},$$
kde k_1 a k_2 jsou libovolnými konstantami. Řešení definovaná jako $e^{(a+bi)x}$ a $e^{(a-bi)x}$ jsou komplexními funkcemi reálné proměnné x. Je však žádoucí tato dvě lineárně nezávislá řešení přepsat pomocí Eulerovy formule
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$
která takto platí pro všechna reálná θ, do podoby
$$\begin{aligned}
k_1e^{(a+bi)x} + k_2e^{(a-bi)x} &= k_1e^{ax}e^{bix} + k_2e^{ax}e^{-bix} \\
&= e^{ax}[k_1e^{ibx} + k_2e^{-ibx}] \\
&= e^{ax}[k_1(\cos bx + i\sin bx) + k_2(\cos bx - i\sin bx)] \\
&= e^{ax}[(k_1 + k_2)\cos bx + i(k_1 - k_2)\sin bx] \\
&= e^{ax}[c_1\sin bx + c_2\cos bx],
\end{aligned}$$

kde $c_1 = i(k_1 - k_2), c_2 = k_1 + k_2$ jsou dvě nově vzniklé libovolné konstanty. Část obecného řešení odpovídající nenásobným komplexně sdruženým kořenům $a \pm bi$ má tedy podobu

$$e^{ax}[c_1 \sin bx + c_2 \cos bx].$$

Věta 3.4.1 *Mějme lineární diferenciální rovnici n-tého řádu (3.1) s konstantními koeficienty. Má-li její charakteristická rovnice (3.2) nenásobné komplexně sdružené kořeny $a + bi$ a $a - bi$, pak příslušná část obecného řešení rovnice (3.1) odpovídá*

$$y(x) = e^{ax}(c_1 \sin bx + c_2 \cos bx).$$

Jsou-li $a + bi$ a $a - bi$ k-násobnými kořeny charakteristické rovnice (3.2), pak příslušná část řešení rovnice (3.1) má tvar

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{ax}[(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_k x^{k-1}) \sin bx + \\ &\quad +(c_{k+1} + c_{k+2} x + c_{k+3} x^2 + \cdots + c_{2k} x^{k-1}) \cos bx]. \end{aligned}$$

Příklad 3.4.2 *Nalezněte obecné řešení rovnice*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Charakteristická rovnice

$$m^2 + 1 = 0$$

má kořeny $m = \pm i$, což jsou komplexní čísla formy $a \pm bi$, kde $a = 0, b = 1$. Obecným řešením je tedy

$$y(x) = e^{0x}(c_1 \sin 1 \cdot x + c_2 \cos 1 \cdot x),$$

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Příklad 3.4.3 *Nalezněte obecné řešení rovnice*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 25y = 0.$$

Charakteristická rovnice má zřejmě tvar $m^2 - 6m + 25 = 0$, řešením dostáváme

$$m = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 100}}{2} = \frac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i.$$

Obecným řešením je tedy

$$y(x) = e^{3x}(c_1 \sin 4x + c_2 \cos 4x).$$

Příklad 3.4.4 *Nalezněte obecné řešení rovnice*

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4\frac{d^3y}{dx^3} + 14\frac{d^2y}{dx^2} - 20\frac{dy}{dx} + 25y = 0.$$

Charakteristická rovnice má tvar

$$m^4 - 4m^3 + 14m^2 - 20m + 25 = 0.$$

Mějme známy její kořeny

$$1 + 2i, \quad 1 - 2i, \quad 1 + 2i, \quad 1 - 2i.$$

Obecné řešení tedy bude

$$y(x) = e^x[(c_1 + c_2x)\sin 2x + (c_3 + c_4x)\cos 2x],$$

což lze přepsat

$$y(x) = c_1e^x \sin 2x + c_2xe^x \sin 2x + c_3e^x \cos 2x + c_4xe^x \cos 2x,$$

kde c_1, c_2, c_3, c_4 jsou reálné konstanty.

3.5 Počáteční úloha

Nyní aplikujeme poznatky o obecném řešení homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty na řešení počáteční úlohy.

Příklad 3.5.1 *Je dána počáteční úloha*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 25y = 0, \tag{3.4}$$

$$y(0) = -3, \tag{3.5}$$

$$y'(0) = -1. \tag{3.6}$$

Dle Věty 2.0.4 je patrné, že musí existovat jednoznačné řešení $y = y(x)$ takovéto počáteční úlohy definované pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Obecné řešení jsme již získali v Příkladu 3.4.3, a to ve tvaru

$$y(x) = e^{3x}(c_1 \sin 4x + c_2 \cos 4x), \tag{3.7}$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty.

Řešení počáteční úlohy znamená najít konkrétní hodnoty koeficientů c_1, c_2, aby bylo vyhověno počátečním podmínkám. K jednoznačnému určení c_1, c_2 potřebujeme 2 počáteční podmínky.

Z obecného řesení (3.7) tedy snadno získáváme

$$\frac{dy(x)}{dx} = e^{3x}[(3c_1 - 4c_2)\sin 4x + (4c_1 + 3c_2)\cos 4x]. \tag{3.8}$$

Nyní aplikujeme podmínku (3.5), $y(0) = -3$, na rovnici (3.7), a dostáváme

$$-3 = e^0(c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0),$$

z čehož je patrné, že

$$c_2 = -3. \tag{3.9}$$

Dále aplikováním podmínky (3.6), $y'(0) = -1$, na rovnici (3.8), získáme

$$-1 = e^0[(3c_1 - 4c_2)\sin 0 + (4c_1 + 3c_2)\cos 0],$$

tedy

$$4c_1 + 3c_2 = -1. \tag{3.10}$$

Řešením rovnic (3.9) a (3.10) máme

$$c_1 = 2, \quad c_2 = -3.$$

Dosazením těchto nalezených konstant c_1 a c_2 do rovnice (3.7) pak získáme jednoznačné řešení (3.4) vzhledem k počátečním podmínkám, a to

$$y(x) = e^{3x}(2\sin 4x - 3\cos 4x).$$

Kapitola 4

Analýza zadané počáteční úlohy LDR 4.řádu vzhledem k počátečním podmínkám a parametrům

4.1 Zadání

Mějme zadanou rovnici

$$\frac{d^4y}{dx^4} + p\frac{d^2y}{dx^2} + qy = 0, \tag{4.1}$$

kde p a q jsou reálnými parametry, s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, \\ y'(0) &= \gamma_1, \\ y''(0) &= 0, \\ y'''(0) &= \gamma_3, \end{aligned} \tag{4.2}$$

kde γ_1, γ_3 jsou dané reálné parametry.

4.2 Charakteristická rovnice

Charakteristická rovnice zadané diferenciální rovnice (4.1) má tvar

$$m^4 + pm^2 + q = 0. \tag{4.3}$$

Zavedeme-li substituci

$$\omega = m^2, \tag{4.4}$$

pak (4.3) nabývá tvaru

$$\omega^2 + p\omega + q = 0, \tag{4.5}$$

a jejími řešeními jsou obecně komplexní čísla

$$\omega_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

4.3 Periodická řešení

Definice 4.3.1 *Funkce f je periodická s periodou T tehdy a jen tehdy, platí-li*

$$x \pm T \in D(f)$$

a

$$f(x) = f(x + T),$$

kde

$$T \in \mathbb{R}^+.$$

Poznámka 4.3.2 *Funkci $y(x) = c$ (konstantní) neuvažujeme jako periodickou.*

Věta 4.3.3 *Funkce $y(x) = \sin \beta x$ je pro $\beta \neq 0$ periodická s periodou*

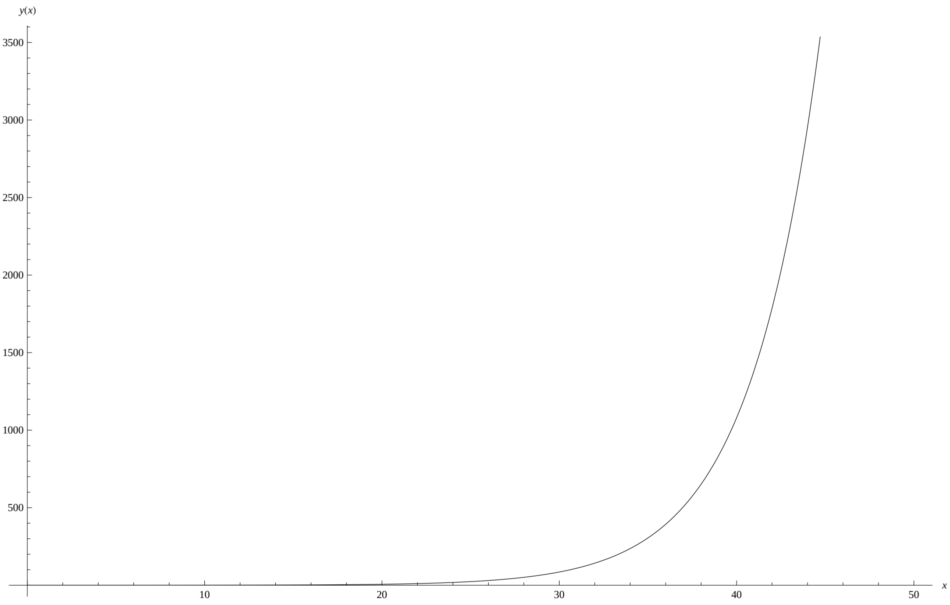
$$T = \frac{2\pi}{\beta}.$$

Věta 4.3.4 *Lineární kombinace periodických funkcí f, g s příslušnými periodami T_f, T_g je periodická tehdy a jen tehdy, je-li*

$$\frac{T_f}{T_g} \in \mathbb{Q}.$$

Důsledek 4.3.5 *Funkce $y(x) = c_1 \sin \alpha x + c_2 \sin \beta x$ je periodická právě tehdy, je-li*

$$\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}.$$



Obrázek 4.1: Příklad řešení rovnice (4.1) pro $0 < \omega_2 < \omega_1$

4.4 Hledání periodických řešení vzhledem k počátečním podmínkám a parametrům

4.4.1 Kořeny char. rovnice $0 < \omega_2 < \omega_1$

Vzhledem k substituci (4.4) platí, že

$$m_{1,2} = \pm\sqrt{\omega_1} \in \mathbb{R},$$

$$m_{3,4} = \pm\sqrt{\omega_2} \in \mathbb{R},$$

což implikuje fundamentální systém rovnice (4.1) ve tvaru

$$\{e^{\sqrt{\omega_1}x}, e^{-\sqrt{\omega_1}x}, e^{\sqrt{\omega_2}x}, e^{-\sqrt{\omega_2}x}\}.$$

Obecné řešení rovnice (4.1) tedy bude mít podobu

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{\omega_1}x} + c_2 e^{-\sqrt{\omega_1}x} + c_3 e^{\sqrt{\omega_2}x} + c_4 e^{-\sqrt{\omega_2}x}.$$

Jak je patrné, fundamentální systém rovnice (4.1) v tomto případě sestává výhradně z neperiodických funkcí. Řešení tedy za žádných okolností nebude periodické. Na Obr. 4.1 je uvedeno jedno z možných řešení tohoto typu.

Vzhledem ke složitosti takové varianty v tomto případě ustoupíme od dalšího studia počáteční úlohy (4.2) vzhledem k obecným parametrům p, q, γ_1, γ_3 a řešením charakteristické rovnice (4.5).

Pro úplnost nicméně uvádíme, že tento případ, kdy $< \omega_2 < \omega_1$, nastane pouze za podmínek

$$\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} > 0,$$

$$\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} > 0,$$

$$p^2 - 4q > 0,$$

tedy je-li

$$p < 0,$$

$$q \in (0, \frac{p^2}{4}).$$

.

4.4.2 Kořeny char. rovnice $0 = \omega_2 < \omega_1$

Vzhledem k substituci (4.4) platí, že

$$m_{1,2} = \pm\sqrt{\omega_1} \in \mathbb{R},$$

$$m_{3,4} = 0,$$

což implikuje fundamentální systém rovnice (4.1) ve tvaru

$$\{e^{\sqrt{\omega_1}x}, e^{-\sqrt{\omega_1}x}, 1, x\}.$$

Obecné řešení rovnice (4.1) tedy bude mít podobu

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{\omega_1}x} + c_2 e^{-\sqrt{\omega_1}x} + c_3 + c_4 x.$$

Jak je patrné, fundamentální systém rovnice (4.1) v tomto případě sestává výhradně z neperiodických funkcí $e^{\sqrt{\omega_1}x}, e^{-\sqrt{\omega_1}x}, x$ a funkce konstantní 1. Další studium počáteční úlohy (4.2) vzhledem k obecným parametrům p, q, γ_1, γ_3 a řešením charakteristické rovnice (4.5) nebudeme provádět, primárně se nám za těchto podmínek jednalo o výše uvedený popis příslušného fundamentálního systému a obecného řešení a samotné zdůraznění možnosti takto speciálního případu.

Tento případ, kdy $0 = \omega_2 < \omega_1$, nastane za podmínek

$$\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} > 0,$$

$$\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}=0,$$
$$p^2-4q>0,$$

tedy, je-li

$$p<0,$$
$$q=0.$$

.

4.4.3 Kořeny char. rovnice $0<\omega_1=\omega_2=:\omega$

Vzhledem k substituci (4.4) platí, že

$$m_{1,3}=\sqrt{\omega}\in\mathbb{R},$$
$$m_{3,4}=-\sqrt{\omega}\in\mathbb{R},$$

což implikuje fundamentální systém rovnice (4.1) ve tvaru

$$\{e^{\sqrt{\omega}x},xe^{\sqrt{\omega}x},e^{-\sqrt{\omega}x},xe^{-\sqrt{\omega}x}\}.$$

Obecné řešení rovnice (4.1) tedy bude mít podobu

$$y(x)=c_1e^{\sqrt{\omega}x}+c_2xe^{\sqrt{\omega}x}+c_3e^{-\sqrt{\omega}x}+c_4xe^{-\sqrt{\omega}x}.$$

Jak je znovu patrné, fundamentální systém rovnice (4.1) v tomto případě opět sestává výhradně z neperiodických funkcí, a řešení tak nikdy nebude periodické. Příklad možného řešení tohoto typu uvádíme na Obr. 4.2.

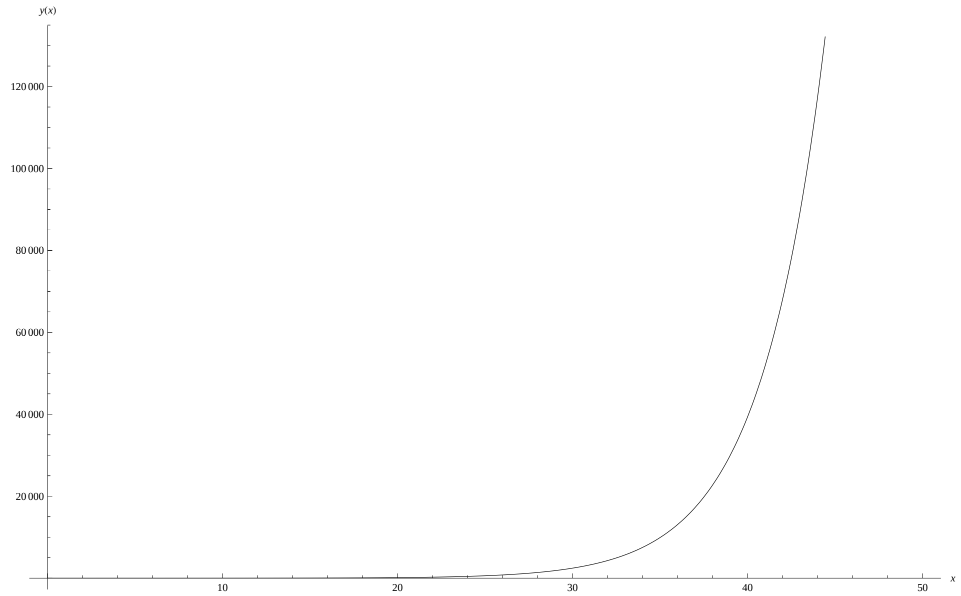
Vzhledem ke složitosti v tomto případě opět ustoupíme od dalšího studia počáteční úlohy (4.2) vzhledem k obecným parametrům p,q,γ_1,γ_3 a řešením charakteristické rovnice (4.5).

Pro úplnost opět uvádíme, že tento případ, kdy $0<\omega_1=\omega_2$, nastane pouze za podmínek

$$\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}>0,$$
$$p^2-4q=0,$$

tedy, je-li

$$p<0,$$
$$q=\frac{p^2}{4}.$$



Obrázek 4.2: Příklad řešení rovnice (4.1) pro $0 < \omega_1 = \omega_2$

4.4.4 Kořeny char. rovnice $0 = \omega_1 = \omega_2 =: \omega$

Vzhledem k substituci (4.4) platí, že

$$m_{1,2,3,4} = 0,$$

což implikuje fundamentální systém rovnice (4.1) ve tvaru

$$\{1, x, x^2, x^3\}.$$

Obecné řešení rovnice (4.1) tedy bude mít podobu

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3.$$

Jak je znovu patrné, fundamentální systém rovnice (4.1) v tomto případě opět sestává výhradně z neperiodických funkcí x, x^2, x^3 a funkce konstantní 1, a řešení tak nikdy nebude periodické. Další studium počáteční úlohy (4.2) vzhledem k obecným parametrům p, q, γ_1, γ_3 a řešením charakteristické rovnice (4.5) nebudeme provádět, primárně se nám za těchto podmínek jednalo o výše uvedený popis příslušného fundamentálního systému a obecného řešení a samotné zdůraznění možnosti takto speciálního případu.

Tento případ, kdy $0 = \omega_1 = \omega_2$, nastane pouze za podmínek

$$\frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = 0,$$

$$p^2 - 4q = 0,$$

tedy, je-li

$$p = 0,$$
$$q = \frac{p^2}{4} = 0.$$

4.4.5 Kořeny char. rovnice $\omega_2 < 0 < \omega_1$

Vzhledem k substituci (4.4) platí, že

$$m_{1,2} = \pm\sqrt{\omega_1} \in \mathbb{R},$$

$$m_{3,4} = \pm i\sqrt{-\omega_2} \in i\mathbb{R},$$

což implikuje fundamentální systém rovnice (4.1)

$$\{e^{\sqrt{\omega_1}x}, e^{-\sqrt{\omega_1}x}, \sin(\beta x), \cos(\beta x)\},$$

kde

$$\beta = \sqrt{-\omega_2}.$$

Obecné řešení rovnice (4.1) tedy bude mít podobu

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{\omega_1}x} + c_2 e^{-\sqrt{\omega_1}x} + c_3 \sin(\beta x) + c_4 \cos(\beta x). \tag{4.6}$$

Je patrné, že fundamentální systém vedle neperiodických řešení sestává i ze dvou periodických funkcí $\sin\beta x, \cos\beta x$, a má tak smysl se pro tento případ zabývat hledáním periodických řešení vzhledem k počátečním podmínkám.

Vzešlé obecné řešení (4.6) pro aplikaci na počáteční podmínky (4.2) postupně zderivujeme až do řádu 3

$$\begin{aligned}
y(x) &= c_1 e^{\sqrt{\omega_1}x} + c_2 e^{-\sqrt{\omega_1}x} + c_3 \sin(\beta x) + c_4 \cos(\beta x),\\
y'(x) &= c_1\sqrt{\omega_1} e^{\sqrt{\omega_1}x} - c_2\sqrt{\omega_1} e^{-\sqrt{\omega_1}x} + c_3\beta \cos(\beta x) - c_4\beta \sin(\beta x),\\
y''(x) &= c_1\omega_1 e^{\sqrt{\omega_1}x} + c_2\omega_1 e^{-\sqrt{\omega_1}x} - c_3\beta^2 \sin(\beta x) - c_4\beta^2 \cos(\beta x),\\
y'''(x) &= c_1\sqrt{\omega_1^3} e^{\sqrt{\omega_1}x} - c_2\sqrt{\omega_1^3} e^{-\sqrt{\omega_1}x} - c_3\beta^3 \cos(\beta x) + c_4\beta^3 \sin(\beta x),
\end{aligned}$$

což po dosazení do (4.2) dává

$$
\begin{aligned}
y(0) &= c_1 e^{\sqrt{\omega_1}\cdot 0} + c_2 e^{-\sqrt{\omega_1}\cdot 0} + c_3 \sin(\beta\cdot 0) + c_4 \cos(\beta \cdot 0) = c_1 + c_2 + c_4 = 0,\\
y'(0) &= c_1\sqrt{\omega_1} e^{\sqrt{\omega_1}\cdot 0} - c_2\sqrt{\omega_1} e^{-\sqrt{\omega_1}\cdot 0} + c_3\beta \cos(\beta\cdot 0) - c_4\beta \sin(\beta\cdot 0) = \\
&= c_1\sqrt{\omega_1} - c_2\sqrt{\omega_1} + c_3\beta = \gamma_1,\\
y''(0) &= c_1\omega_1 e^{\sqrt{\omega_1}\cdot 0} + c_2\omega_1 e^{-\sqrt{\omega_1}\cdot 0} - c_3\beta^2 \sin(\beta\cdot 0) - c_4\beta^2 \cos(\beta\cdot 0) = \\
&= c_1\omega_1 + c_2\omega_2 - c_4\beta^2 = 0,\\
y'''(0) &= c_1\sqrt{\omega_1^3} e^{\sqrt{\omega_1}\cdot 0} - c_2\sqrt{\omega_1^3} e^{-\sqrt{\omega_1}\cdot 0} - c_3\beta^3 \cos(\beta\cdot 0) + c_4\beta^3 \sin(\beta\cdot 0) = \\
&= c_1\sqrt{\omega_1^3} - c_2\sqrt{\omega_1^3} - c_3\beta^3 = \gamma_3.
\end{aligned}
$$

Vzhledem k první rovnici a faktu, že i v tomto případě ustoupíme od hledání neperiodických řešení počáteční úlohy (4.2) vzhledem k obecným parametrům p, q, γ_1, γ_3 a řešením charakteristické rovnice (4.5), a zaměříme se pouze na hledání řešení periodických, dostáváme, že $c_1 = c_2 = c_4 = 0$. Dosazením těchto hodnot konstant do zbylých rovnic máme

$$
\begin{aligned}
y'(0) &= c_3\beta = \gamma_1,\\
y''(0) &= 0,\\
y'''(0) &= -c_3\beta^3 = \gamma_3,
\end{aligned}
$$

z čehož, jak patrno,

$$c_3 = \frac{\gamma_1}{\beta},$$

tím pádem

$$\frac{-\gamma_1}{\beta}\beta^3 = \gamma_3,$$

a také

$$\beta = \sqrt{\frac{-\gamma_3}{\gamma_1}}.$$

Tím dostáváme následující větu.

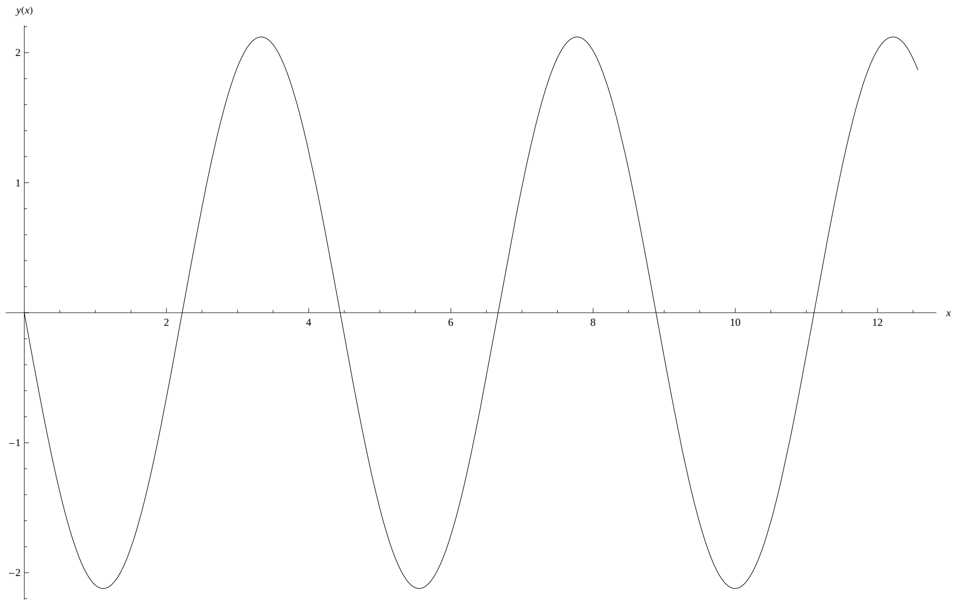
Věta 4.4.1 *Nechť*

$$q < 0,$$

$$p \in \mathbb{R}.$$

Splňují-li parametry γ_1, γ_3 vztah

$$\frac{\gamma_3}{\gamma_1} = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$



Obrázek 4.3: Příklad periodického řešení počáteční úlohy (4.1), (4.2) pro $\omega_2 < 0 \leq \omega_1$

a je-li vhodně zvolena konstanta c_3 *tak, že*

$$c_3 = \sqrt{\frac{-\gamma_1}{\gamma_3}},$$

máme periodické řešení problému (4.1), (4.2) ve tvaru

$$y(x) = \frac{\gamma_1}{\beta} \sin\left(\sqrt{\frac{-\gamma_3}{\gamma_1}} x\right).$$

Příklad 4.4.2 *Pro parametry* $\gamma_3 = 6, \gamma_1 = -3$ *a* $\beta = \sqrt{2}$ *máme splněny předpoklady Věty 4.4.3 a řešení* $y(x) = \frac{-3}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}x)$ *znázorněné na Obr 4.3 je periodické s periodou* $T = \sqrt{2}\pi$ *(viz Věta 4.3.3).*

4.4.6 Kořeny char. rovnice $\omega_2 < \omega_1 = 0$

Vzhledem k substituci (4.4) platí, že

$$m_{1,2} = 0,$$

$$m_{3,4} = \pm i\sqrt{-\omega_2} \in \mathbb{I},$$

což implikuje fundamentální systém rovnice (4.1) ve tvaru

$$\{1, x, \sin(\beta x), \cos(\beta x)\},$$

kde

$$\beta = \sqrt{-\omega_2}.$$

Obecné řešení rovnice (4.1) tedy bude mít podobu

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \sin(\beta x) + c_4 \cos(\beta x). \tag{4.7}$$

Jak je patrné, fundamentální systém rovnice (4.1) v tomto případě sestává ze dvou periodických funkcí $\sin(\beta x), \cos(\beta x)$, neperiodické x a konstantní 1, tedy má smysl se pro tento případ zabývat hledáním periodických řešení vzhledem k počátečním podmínkám.

Vzešlé obecné řešení (4.7) pro aplikaci na počáteční podmínky (4.2) postupně zderivujeme až do řádu 3

$$\begin{aligned}
y(x) &= c_1 + c_2 x + c_3 \sin(\beta x) + c_4 \cos(\beta x),\\
y'(x) &= c_2 + c_3 \beta \cos(\beta x) - c_4 \beta \sin(\beta x),\\
y''(x) &= -c_3 \beta^2 \sin(\beta x) - c_4 \beta^2 \cos(\beta x),\\
y'''(x) &= -c_3 \beta^3 \cos(\beta x) + c_4 \beta^3 \sin(\beta x),
\end{aligned}$$

což po dosazení do (4.2) dává

$$\begin{aligned}
y(0) &= c_1 + c_2 \cdot 0 + c_3 \sin(\beta \cdot 0) + c_4 \cos(\beta \cdot 0) = c_1 + c_4 = 0,\\
y'(0) &= c_2 + c_3 \beta \cos(\beta \cdot 0) - c_4 \beta \sin(\beta \cdot 0) = c_2 + c_3 \beta = \gamma_1,\\
y''(0) &= -c_3 \beta^2 \sin(\beta \cdot 0) - c_4 \beta^2 \cos(\beta \cdot 0) = -c_4 \beta^2 = 0,\\
y'''(0) &= -c_3 \beta^3 \cos(\beta \cdot 0) + c_4 \beta^3 \sin(\beta \cdot 0) = -c_3 \beta^3 = \gamma_3,
\end{aligned}$$

Vzhledem k první rovnici a faktu, že i v tomto případě ustoupíme od hledání neperiodických řešení počáteční úlohy (4.2) vzhledem k obecným parametrům p, q, γ_1, γ_3 a řešením charakteristické rovnice (4.5), a zaměříme se pouze na hledání řešení periodických, dostáváme, že $c_2 = 0$. Dosazením hodnot konstanty do zbylých rovnic dostáváme

$$\begin{aligned}
y(0) &= c_1 + c_4 = 0,\\
y'(0) &= c_3 \beta = \gamma_1,\\
y''(0) &= -c_4 \beta^2 = 0,\\
y'''(0) &= -c_3 \beta^3 = \gamma_3,
\end{aligned}$$

z čehož, jak patrno,

$$c_4 = 0,\ \ c_1 = 0$$

a

$$c_3 = \frac{\gamma_1}{\beta},$$

tím pádem

$$\frac{\gamma_1}{\beta}\beta^3 = \gamma_3,$$

a také

$$\beta = \sqrt{\frac{-\gamma_3}{\gamma_1}}.$$

Tím dostáváme následující větu.

Věta 4.4.3 *Nechť*

$$q = 0,$$

$$p \in \mathbb{R}.$$

Splňují-li parametry γ_1, γ_3 vztah

$$\frac{\gamma_3}{\gamma_1} = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

a je-li vhodně zvolena konstanta c_3 tak, že

$$c_3 = \sqrt{\frac{-\gamma_1}{\gamma_3}},$$

máme periodické řešení problému (4.1), (4.2) ve tvaru

$$y(x) = \frac{\gamma_1}{\beta}\sin\left(\sqrt{\frac{-\gamma_3}{\gamma_1}}x\right).$$

4.4.7 Kořeny char. rovnice $\omega_2 < \omega_1 < 0$

Zde vzhledem k substituci (4.4) platí, že

$$m_{1,2} = \pm i\sqrt{-\omega_1} \in i\mathbb{R},$$

$$m_{3,4} = \pm i\sqrt{-\omega_2} \in i\mathbb{R},$$

což implikuje fundamentální systém rovnice (4.1)

$$\{\sin(\alpha x), \cos(\alpha x), \sin(\beta x), \cos(\beta x)\},$$

kde

$$\alpha = \sqrt{-\omega_1},$$

$$\beta = \sqrt{-\omega_2}.$$

Obecné řešení rovnice (4.1) tedy bude mít podobu

$$y(x) = c_1 \sin(\alpha x) + c_2 \cos(\alpha x) + c_3 \sin(\beta x) + c_4 \cos(\beta x). \tag{4.8}$$

Je patrné, že fundamentální systém sestává výhradně z periodických funkcí $\sin(\alpha x)$, $\sin(\beta x), \cos(\alpha x), \cos(\beta x)$. Obecná řešení rovnice (4.1) vzešlá lineárními kombinacemi těchto periodických funkcí budou dle Věty 4.3.4 sama periodická právě když

$$\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}.$$

Pro aplikaci na počáteční podmínky (4.2) vzešlé obecné řešení (4.8) postupně zderivujeme až do řádu 3.

$$\begin{aligned}
y(x) &= c_1 \sin(\alpha x) + c_2 \cos(\alpha x) + c_3 \sin(\beta x) + c_4 \cos(\beta x),\\
y'(x) &= c_1\alpha \cos(\alpha x) - c_2\alpha \sin(\alpha x) + c_3\beta \cos(\beta x) - c_4\beta \sin(\beta x),\\
y''(x) &= -c_1\alpha^2 \sin(\alpha x) - c_2\alpha^2 \cos(\alpha x) - c_3\beta^2 \sin(\beta x) - c_4\beta^2 \cos(\beta x),\\
y'''(x) &= -c_1\alpha^3 \cos(\alpha x) + c_2\alpha^3 \sin(\alpha x) - c_3\beta^3 \cos(\beta x) + c_4\beta^3 \sin(\beta x).
\end{aligned}$$

Nyní tedy lze aplikovat na samotné počáteční podmínky (4.2)

$$\begin{aligned}
y(0) &= c_1 \sin(\alpha \cdot 0) + c_2 \cos(\alpha \cdot 0) + c_3 \sin(\beta \cdot 0) + c_4 \cos(\beta \cdot 0) = c_2 + c_4 = 0,\\
y'(0) &= c_1\alpha \cos(\alpha \cdot 0) - c_2\alpha \sin(\alpha \cdot 0) + c_3\beta \cos(\beta \cdot 0) - c_4\beta \sin(\beta \cdot 0) =\\
&= c_1\alpha + c_3\beta = \gamma_1,\\
y''(0) &= -c_1\alpha^2 \sin(\alpha \cdot 0) - c_2\alpha^2 \cos(\alpha \cdot 0) - c_3\beta^2 \sin(\beta \cdot 0) - c_4\beta^2 \cos(\beta \cdot 0) =\\
&= -c_2\alpha^2 - c_4\beta^2 = 0,\\
y'''(0) &= -c_1\alpha^3 \cos(\alpha \cdot 0) + c_2\alpha^3 \sin(\alpha \cdot 0) - c_3\beta^3 \cos(\beta \cdot 0) + c_4\beta^3 \sin(\beta \cdot 0) =\\
&= -c_1\alpha^3 - c_3\alpha^3 = \gamma_3.
\end{aligned}$$

Nyní se pokusíme získat do systému hlubší vhled a zjistit, za jakých podmínek řešení splňuje počáteční úlohu. Zapíšeme maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1\\ \alpha & 0 & \beta & 0\\ 0 & -\alpha & 0 & -\beta\\ -\alpha^3 & 0 & -\beta^3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ \gamma_1\\ 0\\ \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Prohodíme 1. a 2. sloupec (včetně 1. a 2. neznámé)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & -\alpha^3 & -\beta^3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_1 \\ 0 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Dále prohodíme 2. a 3. řádek

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & -\alpha^3 & -\beta^3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Následuje prohození 3. a 4. sloupce (včetně 3. a 4. neznámé)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta \\ 0 & -\alpha^3 & 0 & -\beta^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_4 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Nyní prohodíme 2. a 3. sloupec (včetně 2. a 3. neznámé)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\alpha^3 & -\beta^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_4 \\ c_1 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Nyní již snadno dostáváme schodovitý tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2\beta - \beta^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_4 \\ c_1 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_1 \\ \alpha^2\gamma_1 + \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Z výše uvedeného upraveného tvaru maticové rovnice tedy získáváme, že

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{\alpha^2\gamma_1 + \gamma_3}{\alpha^2\beta - \beta^3}, \\ c_1 &= \frac{-\gamma_3 - \gamma_1\beta^2}{\alpha^3 - \alpha\beta^2} \end{aligned}$$

a

$$
\begin{aligned}
-c_2\alpha - c_4\beta &= 0, \\
c_2 + c_4 &= 0.
\end{aligned}
$$

Z posledních dvou vztahů je plynoucí, že $c_2 = c_4 = 0$, neboť vztah $c_2 = \frac{-\beta}{\alpha} c_4$ je pro libovolné nenulové konstanty c_2, c_4 za podmínky $c_2 + c_4 = 0$ platný jen v případě, že $\alpha = \beta$, což ovšem vylučuje aktuální podmínka $\omega_2 < \omega_1 < 0$ pro kořeny char. rovnice (4.5). Tímto jsme dokázali následující větu.

Věta 4.4.4 *Pro*

$$
p > 0,
$$
$$
q \in (0, \frac{p^2}{4})
$$

máme řešení problému (4.2), (4.3) ve tvaru

$$
y(x) = \frac{-\gamma_3 - \gamma_1\beta^2}{\alpha^3 - \alpha\beta^2} \sin(\alpha x) + \frac{\alpha^2\gamma_1 + \gamma_3}{\alpha^2\beta - \beta^3} \sin(\beta x).
$$

Toto řešení je periodické právě tehdy, je-li

$$
\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}.
$$

Příklad 4.4.5 *Pro parametry $\gamma_3 = 6, \gamma_1 = -3$ a $\alpha = 3, \beta = 2$ máme splněny předpoklady Věty 4.4.4 a řešení $y(x) = \frac{6}{15} \sin(3x) - \frac{21}{10} \sin(2x)$ znázorněné na Obr. 4.4 je periodické.*

4.4.8 Kořeny char. rovnice $\omega_2 = \omega_1 =: \omega < 0$

Podobně jako v předchozích případech, i zde vzhledem k substituci (4.2) platí, že

$$
m_{1,3} = i\sqrt{-\omega} \in i\mathbb{R},
$$

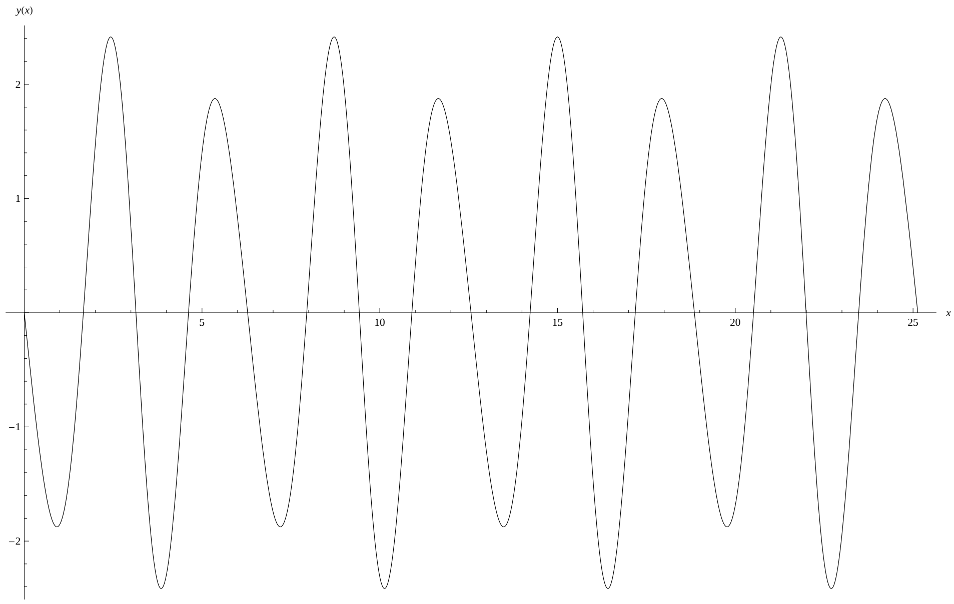
$$
m_{2,4} = -i\sqrt{-\omega} \in i\mathbb{R},
$$

což implikuje fundamentální systém rovnice (4.1)

$$
\{\sin(\beta x), \cos(\beta x), x\sin(\beta x), x\cos(\beta x)\},
$$

kde

$$
\beta = \sqrt{-\omega}.
$$



Obrázek 4.4: Příklad periodického řešení počáteční úlohy (4.1), (4.2) pro $\omega_2 < \omega_1 < 0$

Obecné řešení rovnice (4.1) tedy bude mít podobu

$$y(x) = c_1 \sin(\beta x) + c_2 \cos(\beta x) + c_3 x \sin(\beta x) + c_4 x \cos(\beta x). \tag{4.9}$$

Zde je patrné, že fundamentální systém sestává z periodických funkcí $\sin(\beta x), \cos(\beta x)$, a neperiodických funkcí $x \sin(\beta x), x \cos(\beta x)$.

Pro aplikaci na počáteční podmínky (4.2) vzešlé obecné řešení (4.9) postupně zderivujeme až do řádu 3

$$\begin{aligned}
y(x) &= c_1 \sin(\beta x) + c_2 \cos(\beta x) + c_3 x \sin(\beta x) + c_4 x \cos(\beta x), \\
y'(x) &= c_1 \beta \cos(\beta x) - c_2 \beta \sin(\beta x) + c_3 \sin(\beta x) + c_3 x \beta \cos(\beta x) + \\
&\quad + c_4 \cos(\beta x) - c_4 x \beta \sin(\beta x), \\
y''(x) &= -c_1 \beta^2 \sin(\beta x) - c_2 \beta^2 \cos(\beta x) + 2 c_3 \beta \cos(\beta x) - c_3 x \beta^2 \sin(\beta x) - \\
&\quad - 2 c_4 \beta \sin(\beta x) - c_4 x \beta^2 \cos(\beta x), \\
y'''(x) &= -c_1 \beta^3 \cos(\beta x) + c_2 \beta^3 \sin(\beta x) - 3 c_3 \beta^2 \sin(\beta x) - c_3 x \beta^3 \cos(\beta x) - \\
&\quad - 3 c_4 \beta^2 \cos(\beta x) - c_4 x \beta^3 \sin(\beta x)
\end{aligned}$$

což po dosazení do (4.2 dává

$$\begin{aligned}
y(0) &= c_1 \sin(\beta \cdot 0) + c_2 \cos(\beta \cdot 0) + c_3 \cdot 0 \cdot \sin(\beta \cdot 0) + c_4 \cdot 0 \cdot \cos(\beta \cdot 0) = 0, \\
y'(0) &= c_1 \beta \cos(\beta \cdot 0) - c_2 \beta \sin(\beta \cdot 0) + c_3 \sin(\beta \cdot 0) + c_3 \cdot 0 \cdot \beta \cos(\beta \cdot 0) + \\
&\quad + c_4 \cos(\beta \cdot 0) - c_4 \cdot 0 \cdot \beta \sin(\beta \cdot 0) = \gamma_1, \\
y''(0) &= -c_1 \beta^2 \sin(\beta \cdot 0) - c_2 \beta^2 \cos(\beta \cdot 0) + 2c_3 \beta \cos(\beta \cdot 0) - c_3 \cdot 0 \cdot \beta^2 \sin(\beta \cdot 0) - \\
&\quad -2c_4 \beta \sin(\beta \cdot 0) - c_4 \cdot 0 \cdot \beta^2 \cos(\beta \cdot 0) = 0, \\
y'''(0) &= -c_1 \beta^3 \cos(\beta \cdot 0) + c_2 \beta^3 \sin(\beta \cdot 0) - 3c_3 \beta^2 \sin(\beta \cdot 0) - c_3 \cdot 0 \cdot \beta^3 \cos(\beta \cdot 0) - \\
&\quad -3c_4 \beta^2 \cos(\beta \cdot 0) - c_4 \cdot 0 \cdot \beta^3 \sin(\beta \cdot 0) = \gamma_3.
\end{aligned}$$

Vzhledem k nulovosti některých členů tak dostáváme

$$\begin{aligned}
y(0) &= c_2 = 0, \\
y'(0) &= c_1 \beta + c_4 = \gamma_1, \\
y''(0) &= -c_2 \beta^2 + 2c_3 \beta = 0, \\
y'''(0) &= -c_1 \beta^3 - 3c_4 \beta^2 = \gamma_3.
\end{aligned}$$

Nyní se opět pokusíme získat do systému hlubší vhled a zjistit, za jakých podmínek řešení splňuje počáteční úlohu, a kdy je periodické. Zapíšeme maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\beta^2 & 2\beta & 0 \\ -\beta^3 & 0 & 0 & -3\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_1 \\ 0 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Prohodíme 1. a 2. sloupec (včetně 1. a 2. neznámé)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 1 \\ -\beta^2 & 0 & 2\beta & 0 \\ 0 & -\beta^3 & 0 & -3\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Dále prohodíme 2. a 3. řádek

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta^2 & 0 & 2\beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & -\beta^3 & 0 & -3\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_1 \\ 0 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Nyní již snadno dostáváme schodovitý tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta^2 & 0 & 2\beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_3 + \gamma_1\beta^2 \end{pmatrix}.$$

Z výše uvedeného upraveného tvaru maticové rovnice tedy získáváme, že

$$\begin{aligned} c_4 &= -\frac{1}{2}\left(\gamma_1 + \frac{\gamma_3}{\beta^2}\right), \\ c_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{3\gamma_1}{\beta} + \frac{\gamma_3}{\beta^3}\right) \end{aligned}$$

a

$$c_2 = 0,$$

$$-\beta^2 c_2 + 2\beta c_3 = 0,$$

což implikuje

$$c_3 = 0.$$

Tyto vztahy shrneme v následující větě.

Věta 4.4.6 *Pro*

$$p > 0,$$
$$q = \frac{p^2}{4}$$

máme řešení problému (4.1), (4.2) ve tvaru

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3\gamma_1}{\beta} + \frac{\gamma_3}{\beta^3}\right)\sin(\beta x) - \frac{1}{2}\left(\gamma_1 + \frac{\gamma_3}{\beta^2}\right) x\cos(\beta x).$$

Toto řešení počáteční úlohy (4.1), (4.2) je periodické právě když

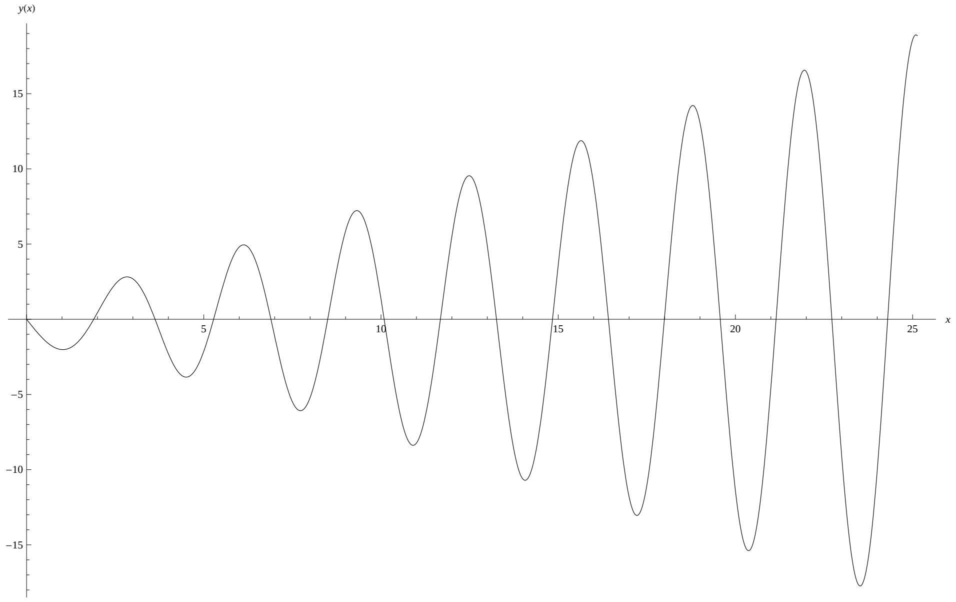
$$\gamma_3 = -\gamma_1\beta^2,$$

tím pádem

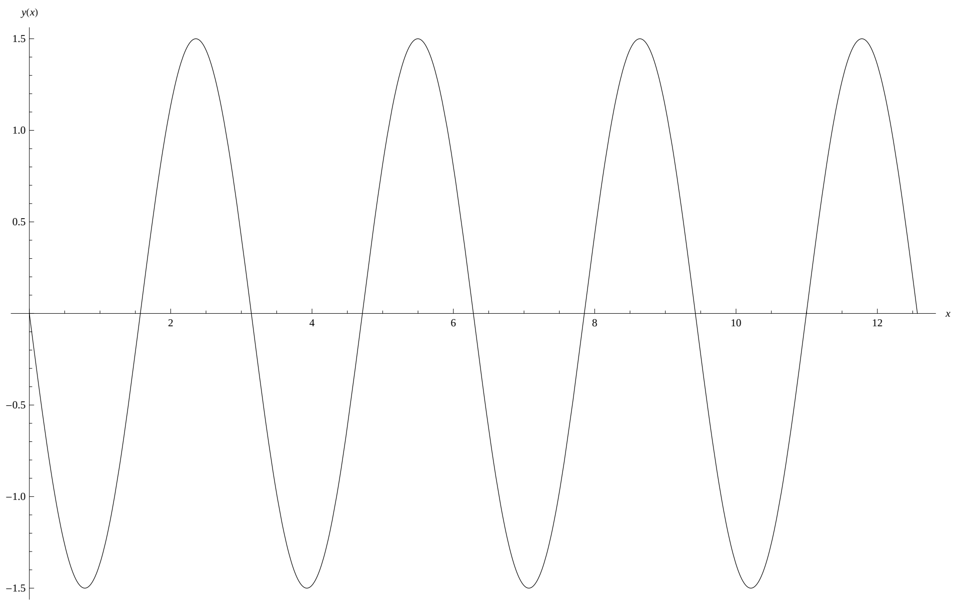
$$c_4 = 0,$$

a v této podobě má tvar

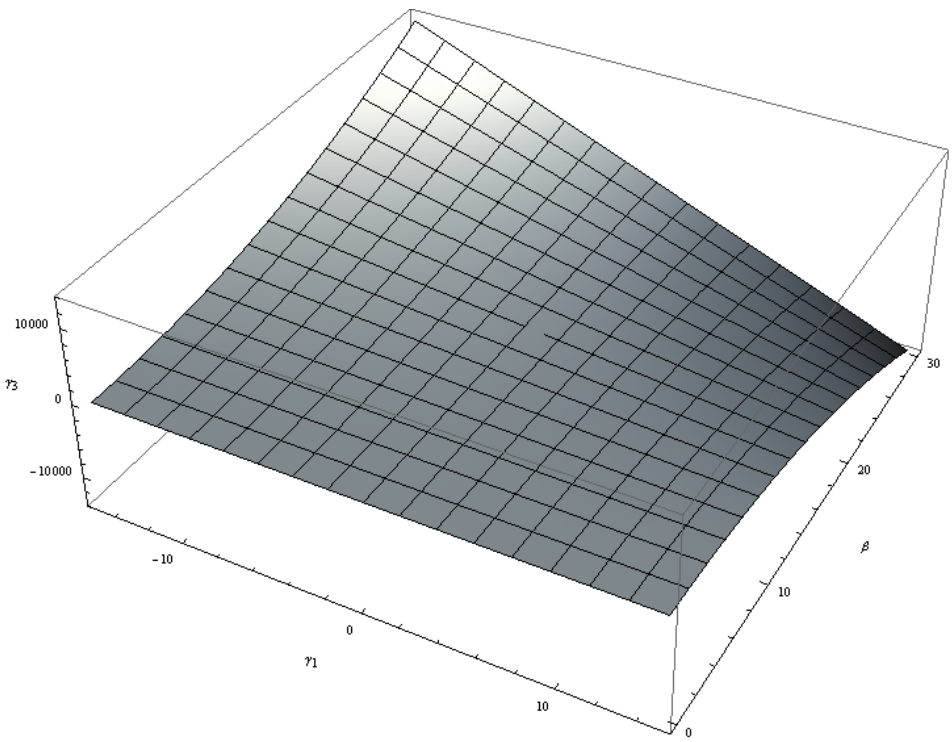
$$y(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3\gamma_1}{\beta} + \frac{\gamma_3}{\beta^3}\right)\sin(\beta x). \tag{4.10}$$



Obrázek 4.5: Příklad neperiodického řešení počáteční úlohy (4.1), (4.2) pro $\omega_2 = \omega_1 < 0$



Obrázek 4.6: Příklad periodického řešení počáteční úlohy (4.1), (4.2) pro $\omega_2 = \omega_1 < 0$



Obrázek 4.7: Vykreslení grafu funkce $\gamma_3(\gamma_1, \beta) = -\gamma_1\beta^2$, kterážto pro $\omega_2 = \omega_1 < 0$ mapuje případy periodického řešení (4.10)

Příklad 4.4.7 *Pro parametry* $\gamma_3 = 6, \gamma_1 = -3$ *a* $\alpha = 3, \beta = 2$ *nemáme splněny předpoklady Věty 4.4.6 a řešení* $y(x) = -\frac{15}{8}\sin(2x) + \frac{3}{4}x\cos(2x)$ *znázorněné na Obr. 4.5 je neperiodické.*

Příklad 4.4.8 *Pro parametry* $\gamma_3 = 12, \gamma_1 = -3$ *a* $\alpha = 3, \beta = 2$ *máme splněny předpoklady Věty 4.4.6 a řešení* $y(x) = -\frac{3}{2}\sin(2x)$ *znázorněné na Obr. 4.6 je periodické.*

Kapitola 5

Závěr

V Kapitolách 2 a 3 jsme důsledně vybudovali obecnou teorii homogenních lineárních diferenciálních rovnic n-tého řádu a teorii explicitních řešení homogenních lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů s konstantními koeficienty. Tento teoretický balík informací nám zajistil adekvátní vhled do souvislostí a jevů popisovaných v Kapitole 4, v níž jsme provedli kvalitativní analýzu zadané počáteční úlohy vzhledem ke zvoleným parametrům a počátečním podmínkám. Existenci periodických řešení, kterážto patřila k pilířům naší práce, se podařilo pro dílčí případy vzhledem ke zvoleným parametrům a počátečním podmínkám explicitně prokázat resp. vyvrátit, a nalézti s vzájemnými vztahy těchto zvolených počátečních podmínek, parametrů a jim podřízených řešení charakteristické rovnice explicitně popsané souvislosti. Získané poznatky demonstrujeme názornými obrázky.

Je rovněž na tomto místě vhodné dát čtenáři podnět k zamyšlení a otevřít otázku jiné variace zadání počátečních podmínek, např.

$$\begin{aligned} y(0) &= \gamma_0, \\ y'(0) &= 0, \\ y''(0) &= \gamma_2, \\ y'''(0) &= 0 \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned}
y(0) &= \gamma_0, \\
y'(0) &= \gamma_1, \\
y''(0) &= \gamma_2, \\
y'''(0) &= \gamma_3
\end{aligned}$$

a podobně. Je nepochybné, že studium úloh podobného typu rozkrývá netriviální vnitřní vztahy a přírodní zákonitosti, ježto mohou být ve své ryzí explicitně udané podobě dále efektivně využívány a prozkoumávány.

Literatura

[1] BOYCE, E. William a DIPRIMA, C. Richard. Elementary Differential Equations. 11th ed. John Willey & Sons, Inc. 2009. 656 s. ISBN 978-0-470-03940-3.

[2] EDWARDS, C. Henry a David E. PENNEY. Elementary diferential equations. 6th ed. Upper Saddle River, N.J.: Pearson Prentice Hall, 2008. 644 s. ISBN 01-323-9730-7.

[3] KURZWEIL, Jaroslav. Obyčejné diferenciální rovnice: Úvod do teorie obyčejných diferenciálních rovnic v reálném oboru. 1. vyd. Praha: SNTL, 1978. 418 s.

[4] ROSS, Shepley L. Differential equations. 3rd ed. Canada: Wiley, 1984. 816 s. ISBN 0-471-03294-8.