Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Geometrické konstrukce řešené s využitím algebraického výpočtu

Bakalářská práce

Jméno a příjmení:	Jana ZOBALOVÁ
Studijní program:	B1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor:	Finanční matematika
Vedoucí bakalářské práce:	RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Jindřichův Hradec, 27. dubna 2007

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Geometrické konstrukce řešené s využitím algebraického výpočtu“ vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Českých Budějovicích 27. dubna 2007.

…………………………..

podpis

Děkuji panu RNDr. Pavlovi Leischnerovi, Ph.D. za pomoc při vypracování této bakalářské práce a za prohloubení vědomostí získaných při této bakalářské práci.

Anotace

Název: Geometrické konstrukce řešené s využitím algebraického výpočtu
Vypracovala: Jana Zobalová
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Cílem práce bylo vypracovat sbírku řešených konstrukčních úloh, při jejichž řešení využíváme pomocné prvky sestrojené ze zadaných hodnot užitím algebraického výpočtu. Elektronická část práce bude obsahovat soubory těchto úloh vyřešených v programu Cabri geometrie.

Title: Geometric constructions on the basis of algebraic calculation
Author: Jana Zobalová
Supervisor: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

This thesis is a collection of solved construction problems. We are using helping points constructed from given values. On the basis of algebraic calculation. Electronic part of the thesis concerns files of solved problems using Cabri software.

Obsah

1. Úvod

Algebraická metoda řešení konstrukčních úloh je založena na sestrojování úseček, jejichž délky jsou vyjádřeny nějakými (danými, resp. získanými) algebraickými výrazy.

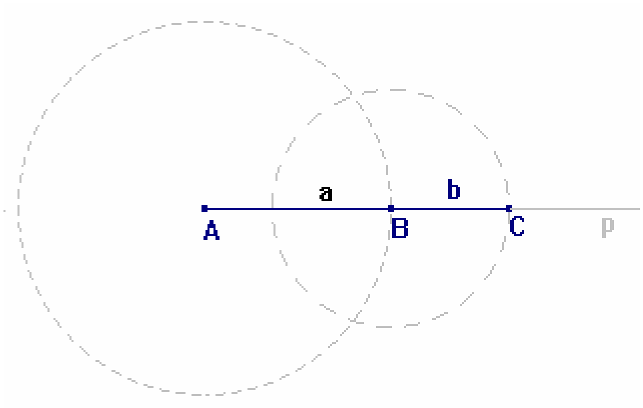
Základní úkoly takto řešené jsou nepolohové konstrukční úlohy tohoto typu: Máme sestrojit úsečku, jejíž délka x je rovna předepsanému algebraickém výrazu $V(a,b,\ldots)$, kde $a,b,\ldots$ jsou dané délky úseček (určitá kladná čísla, popř. parametry). Některé speciální případy konstrukčních úloh tohoto typu a jejich řešení (rozbor, popis konstrukce) je uveden vždy u příkladu.

Někdy se nám nedaří sestrojit požadovaný útvar z daných prvků, ale umíme nalézt algebraický výraz, který určuje prvek x pomocí prvků daných. Jestliže útvar dovedeme sestrojit, když k daným prvkům tento prvek x přidáme, převedli jsme úlohu na sestrojení prvku x pomocí nalezeného algebraického výrazu.

2. Konstrukce základních algebraických výrazů

V této kapitole uvedeme postupy sestrojení některých základních algebraických výrazů.

<u>Příklad 2.1.</u>: Sestrojte výraz $x = a + b$, který vyjadřuje součet úseček *a*, *b*.



obr 2.1.

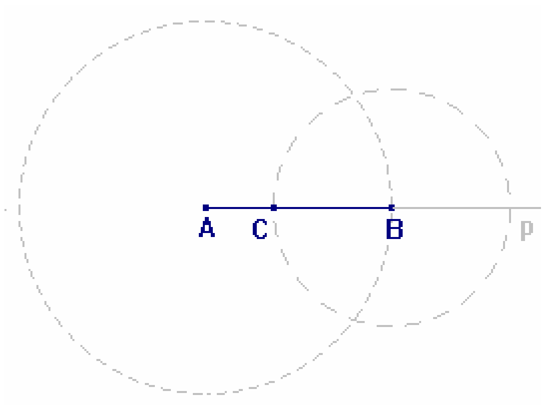
Řešení: Na dané polopřímce *p* lze sestrojit právě jednu úsečku shodnou s danou úsečkou *a* = AB; říkáme, že úsečka AB byla přenesena na polopřímku *p*.

Grafickým součtem úseček *a*, *b* nazýváme úsečku *x*, která obsahuje takový vnitřní bod B, že *a* = AB; *b* = BC. ([4], s. 350)

Postup konstrukce:

1) libovolný bod A
2) $\alpha \quad p$; A$\in p$
3) k_1 (A, *a*)
4) B$\in p \cap k_1$
5) k_2 (B, *b*)
6) C$\in k_2 \cap p$

<u>Příklad 2.2.</u> Sestrojte výraz $x = a - b$ (kde $a > b$), který vyjadřuje rozdíl úseček a, b.



obr 2.2.

Řešení: Grafickým rozdílem úseček a, b, z nichž první je větší než druhá ($a > b$), nazýváme takovou úsečku x, kterou-li sečteme s úsečkou b, vyjde grafický součet úsečky a.

Postup konstrukce:

1) libovolný bod A
2) $\alpha \ p$; A$\in p$
3) k_1(A, a)
4) B$\in p \cap k_1$
5) k_2(B, b)
6) C$\in k_2 \cap p$

<u>Příklad 2.3.</u> Sestrojte výraz $x = \dfrac{a \cdot b}{c}$ který je délkou úsečky, která se nazývá čtvrtá geometrická úměrná úseček o daných délkách *a*, *b*, *c*.

Řešení: Sestrojíme čtvrtou úsečku *x*, tak aby platilo: $x = \dfrac{a \cdot b}{c}$; (nebo-li z podobnosti trojúhelníků SBX a SCA, které nám vyjdou totiž plyne také $a : x = c : b$; $x : b = a : c$; nebo také $x \cdot c = a \cdot b$).

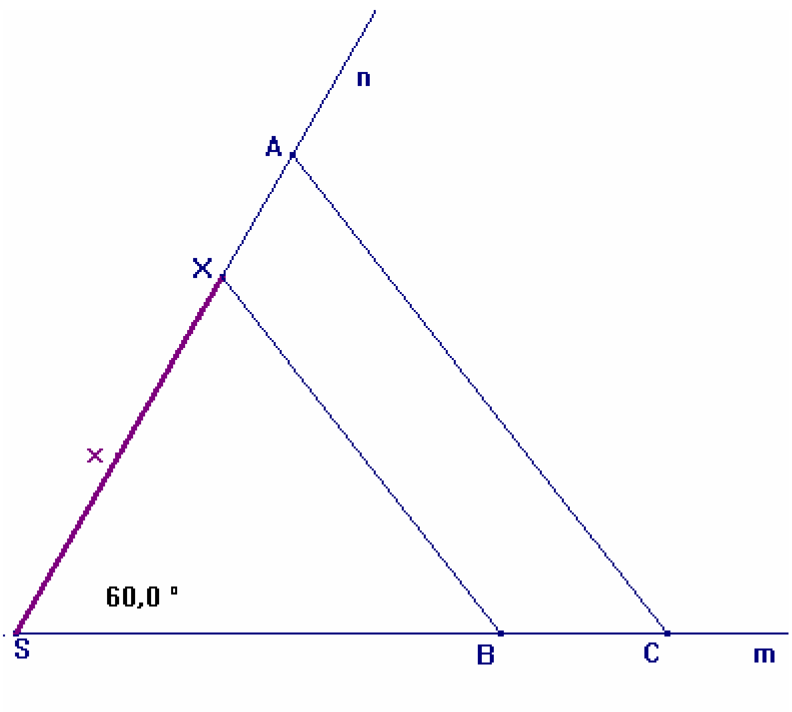
Na obrázku jsou strany uspořádány:

$a = SA$

$x = SX$

$c = SC$

$b = SB$



obr 2.3.

V programu Cabri samozřejmě můžeme měnit velikost úhlu pří vrcholu S, který svírají polopřímky m, n. Na rameni *m* jsou sestrojeny úsečky $|SC| = c$ a $|SB| = b$; na rameni *n* úsečky $|SA| = a$. Bodem B vedeme rovnoběžku s úsečkou AC a určíme její průsečík X s ramenem SA. Úsečka SX má délku x.

Postup konstrukce:

1) libovolný bod S
2) $\alpha \quad m; m \in S$
3) $\alpha \quad n; n \in S$
4) $m \in C; |SC| = c$
5) $m \in B; |SB| = b$
6) $n \in A; |SA| = a$
7) AC
8) BX $\|$ AC; $X \in n$
9) $x = |SX|$

<u>Příklad 2.4.</u> Sestrojte výraz $x = \frac{a}{c}$.

Řešení: Výraz $x = \frac{a}{c}$ je obdobou čtvrté geometrické úměrné úsečky o daných délkách *a*, *b*, *c*; kde velikost úsečky *b* je jednotková úsečka. (viz příklad 2.3)

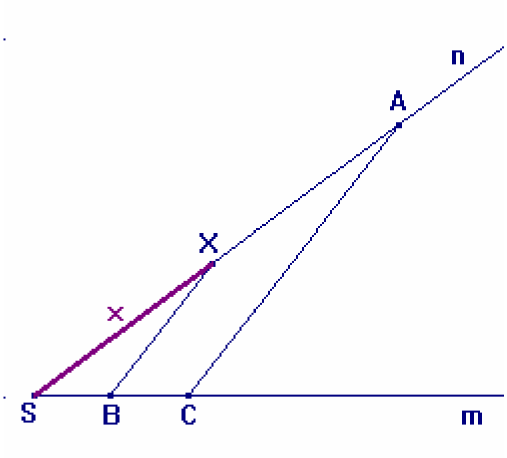
Na obrázku jsou strany uspořádány:

$a = SA$

$x = SX$

$c = SC$

$b = SB = 1\,cm$



obr 2.4.

Postup konstrukce: (stejný postup příkladu 2.3)

1) libovolný bod S
2) $\alpha \quad m; m \in S$
3) $\alpha \quad n; n \in S$
4) $m \in C; |SC| = c$
5) $m \in B; |SB| = b$
6) $n \in A; |SA| = a$
7) AC
8) BX $\|$ AC; $X \in n$
9) $x = |SX|$

Příklad 2.5. Sestrojte výraz $x = a \cdot b$.

Řešení: Výraz $x = a \cdot b$ je také analogickou obdobou čtvrté geometrické úměrné úsečky o daných délkách *a*, *b*, *c*; kde velikost úsečky *c* je jednotková úsečka. (viz příklad 2.3)

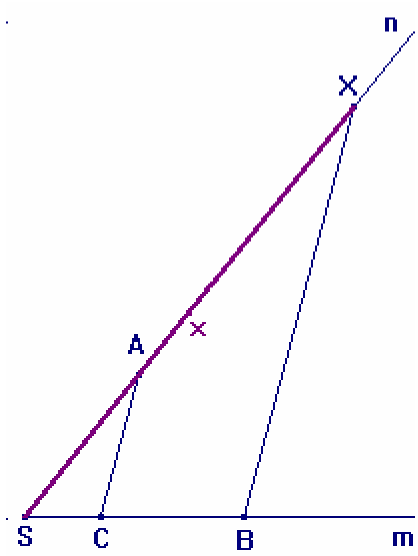
Na obrázku jsou strany uspořádány:

$a = SA$

$x = SX$

$c = SC = 1\,cm$

$b = SB$



obr 2.5.

Postup konstrukce: (stejný postup příkladu 2.3)

1) libovolný bod S
2) $\alpha \quad m; m \in S$
3) $\alpha \quad n; n \in S$
4) $m \in C; |SC| = c$
5) $m \in B; |SB| = b$
6) $n \in A; |SA| = a$
7) AC
8) BX $\|$ AC; $X \in n$
9) $x = |SX|$

<u>Příklad 2.6.</u> Sestrojte výraz $x = a^2$.

Řešení: Výraz $x = a^2$ konstruujeme stejně jako v příkladě 2.5; kde se velikost $b = a$.

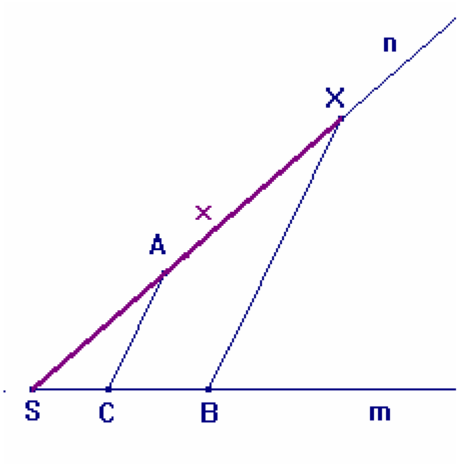
Na obrázku jsou strany uspořádány:

$a = SA$

$x = SX$

$c = SC = 1\,cm$

$b = SB = a$



obr 2.6.

Postup konstrukce:

1) libovolný bod S
2) $\alpha \quad m; m \in S$
3) $\alpha \quad n; n \in S$
4) $m \in C; |SC| = c = 1\text{cm}$
5) $m \in A; |SA| = a$
6) $n \in B; |SB| = a$
7) BC
8) BC $\|$ AX; $X \in n$
9) $x = |SX|$

<u>Příklad 2.7.</u> Sestrojte výraz $x = a^3$.

Řešení: K výrazu $x = a^3$ užijeme příklad 2.6. jako pomocnou konstrukci. Úsečku a^2 vynásobíme velikostí *a*, k tomu pak užijeme obdobu příkladu 2.5.

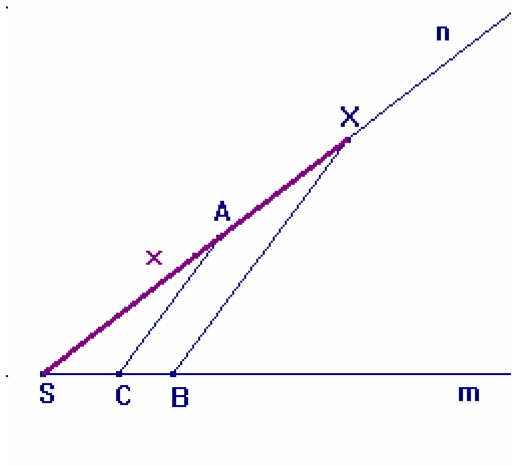
Na obrázku jsou strany uspořádány:

$a \cdot a = a^2 = SA$

$x = SX$

$c = SC = 1\,cm$

$b = SB = a$



obr 2.7.

Postup konstrukce:

1) libovolný bod S
2) α $m; m \in S$
3) α $n; n \in S$
4) $m \in C; |SC| = c = 1$ cm
5) $m \in A; |SA| = a$
6) $n \in B; |SB| = a^2$
7) BC
8) BC $\|$ AX; $X \in n$
9) $x = |SX|$

<u>Příklad 2.8</u>. Sestrojte úsečku délky $x = \sqrt{10}$ je-li zvolena jednotková úsečka.

Řešení 1

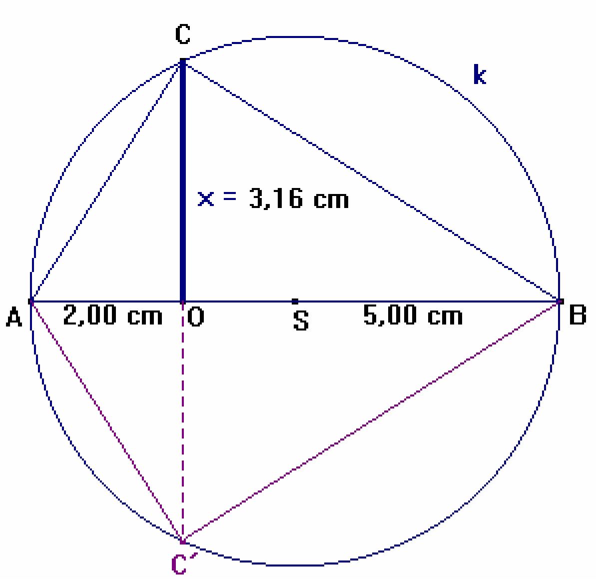
Úsečku délky $x = \sqrt{10}$ můžeme rozložit na součin $x = \sqrt{5 \cdot 2}$; takže jde o úlohu, kdy sestrojíme pomocí Thaletovy věty pravoúhlý trojúhelník s přeponou 10 cm, který je rozdělen na úseky délek 5 cm a 2 cm. Potom pomocí Euklidovy věty o výšce je délka výšky rovna x.

Na obrázku jsou:

$|OA| = 2$ cm

$|OB| = 5$ cm

$|OC| = x$



obr 2.8.a

V programu Cabri je provedeno druhé řešení: [pomocí ovladače]

Postup konstrukce:

1) libovolný bod A
2) $\alpha \quad p; p \in A$
3) $O \in p; |AO| = 2\ cm$
4) $B \in p; |OB| = 5\ cm$
5) $S \in p; |AS| = |SB|$
6) Thaletova kružnice $k(S; |AS|)$
7) $x \in O; x \perp AB$
8) $C \in k \cap x$
9) $x = |OC|$

Obecné znění zadání příkladu 2.8. je $x = \sqrt{c}$, kde musí být splněna podmínka c > 0

Úlohu pak rozložíme na tvar $x = \sqrt{c_1 \cdot c_2}$, kde pro velikosti úseček platí $c_1 > c_2 > 0$.

Pro výraz $x = \sqrt{c_1 \cdot c_2}$ se dříve používal název „střední geometrická úměrná ([5], s.445)

Řešení 2

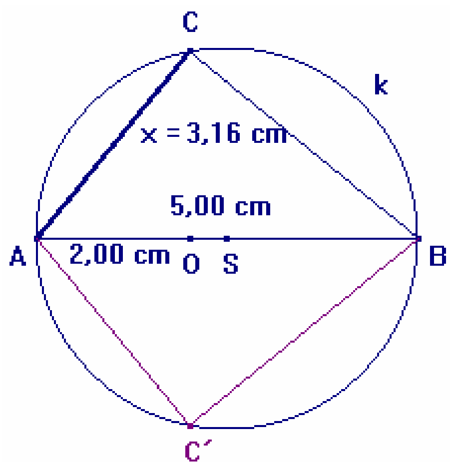
Sestrojíme pomocí Thaletovy věty pravoúhlý trojúhelník s přeponou délky $c = c_1 = 5$ cm a jedním jejím úsekem o délce $c_2 = 2$ cm. Pak zkonstruujeme úsečku podle Euklidovy věty o odvěsnách; odvěsna přilehlá k tomuto úseku má délku *x*.

Na obrázku jsou:

|AB| = 5 cm

|AO| = 2 cm

|AC| = *x*



obr 2.8.b

V programu Cabri je provedeno druhé řešení: [pomocí ovladače]

Postup konstrukce:

1) libovolný bod A
2) $\alpha \quad p; p \in A$
3) $B \in p; |AB| = 5\ cm$
4) $O \in p; |AO| = 2\ cm$
5) $S \in p; |AS| = |SB|$
6) Thaletova kružnice $k(S; |AS|)$
7) $y \in O; y \perp AB$
8) $C \in k \cap y$
9) $x = |AC|$

Řešení 3

Příklad 2.8.: Sestrojte úsečku délky $x = \sqrt{c}$, můžeme řešit i třetím způsobem.

Např. řešením, jak sestrojit úsečku délky $x = \sqrt{11}$, kde můžeme využít úpravy „na čtverec“: $x = \sqrt{11} = \sqrt{9+2} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{2})^2}$ a sestrojit ji na základě Pythagorovy věty. Úsečku délky x sestrojíme jako přeponu pravoúhlého trojúhelníku o odvěsnách délky 3 a $\sqrt{2}$.

Nebo konstrukčně jednodušší by bylo užití úpravy: $x = \sqrt{11} = \sqrt{36-25} = \sqrt{6^2 - 5^2}$, kde získáme celá čísla. Délka x je sestrojena jako odvěsna pravoúhlého trojúhelníka o přeponě délky 6 a druhé odvěsně délky 5.

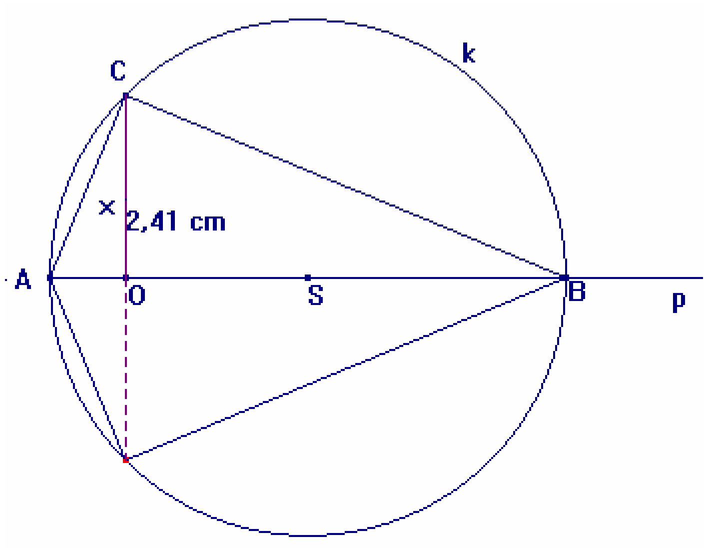
Nebo také tento způsob řešení můžeme využít v řešení níže uvedených příkladů 2.11. a 2.12.

Příklad 2.9. Sestrojte výraz $x = \sqrt[3]{a}$.

Řešení: Výraz $x = \sqrt[3]{a}$ nelze euklidovsky sestrojit.

<u>Příklad 2.10.</u> Sestrojte výraz $x = \sqrt[4]{a}$.

Řešení: Pro konstrukci tohoto výrazu $x = \sqrt[4]{a}$ si jej upravíme na výraz tvaru: $x = \sqrt{\sqrt{a}}$.



obr 2.10.

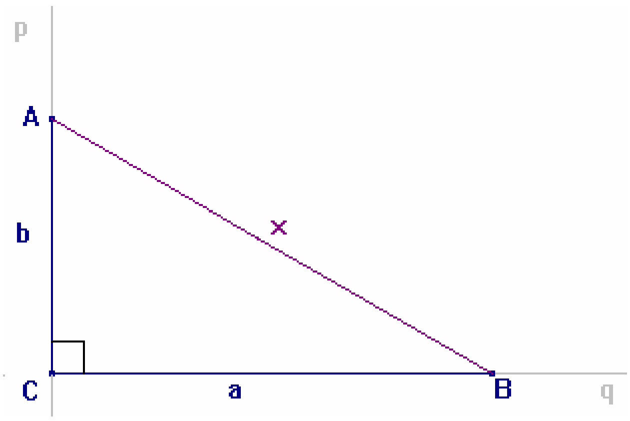
Pro konstrukci čtvrté odmocniny si sestrojíme pomocnou konstrukci $x' = \sqrt{a}$ podle příkladu 2.8. Hledanou úsečku *x* získáme z výsledné úsečky *x´* a jednotkové úsečky opět stejnou konstrukcí jako v příkladu 2.8.

Postup konstrukce:

1) Sestrojíme konstrukci příkladu 2.8. $x' = \sqrt{a}$; dále už tvoříme výslednou konstrukci
2) libovolný bod A
3) $\alpha \quad p; p \in A$
4) $O \in p; |AO| = 1\,cm$ … (jednotková úsečka)
5) $B \in p; |OB| = x'$
6) $S \in p; |AS| = |SB|$
7) Thaletova kružnice $k(S; |AS|)$
8) $x \in O; x \perp AB$
9) $C \in k \cap x$
10) $x = |OC|$

<u>Příklad 2.11.</u> Sestrojte výraz $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, kde pro velikosti úseček platí $a, b > 0$; a také samozřejmě podmínka pro konstrukci trojúhelníka: $a + b > x$

Řešení: Sestrojíme-li pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami o délkách *a*, *b*, pak podle Pythagorovy věty má jeho přepona délku *x*.



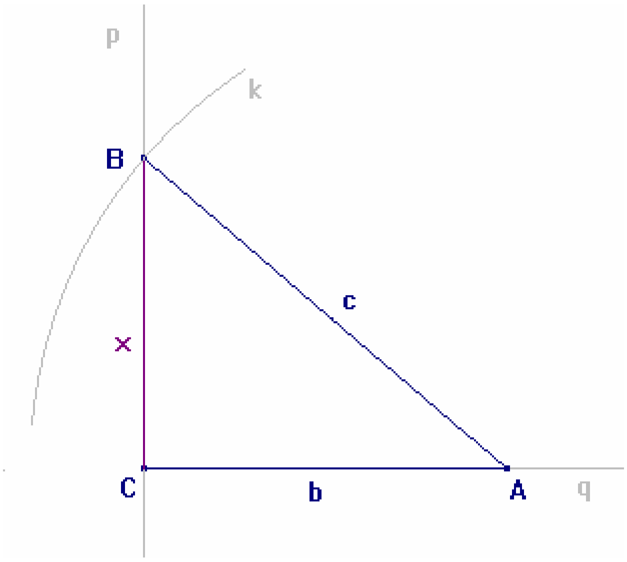
obr 2.11.

Postup konstrukce:

1) libovolný bod C
2) $\alpha \quad q; q \in C$
3) $p \perp q; p \in C$
4) $B \in q; |CB| = a$
5) $A \in p; |CA| = b$
6) ΔABC
7) $x = |AB|$

Příklad 2.12. Sestrojte výraz $x = \sqrt{c^2 - b^2}$, kde pro velikosti úseček platí c > b > 0

Řešení: Sestrojíme-li pravoúhlý trojúhelník s přeponou délky *c* a odvěsnou *b*, pak podle Pythagorovy věty má jeho druhá odvěsna délku *x*.



obr 2.12.

Postup konstrukce:

1) libovolný bod C
2) $\alpha \ \ q; q \in C$
3) $p \perp q; p \in C$
4) $A \in q; |AC| = b$
5) $k(A; r = c)$
6) $B \in p \cap k$
7) ΔABC
8) $x = |BC|$

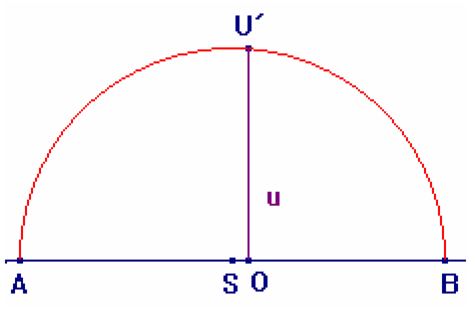
<u>Příklad 2.13.</u> Sestrojme výraz: $x = \sqrt{ab + cd}$

Řešení:

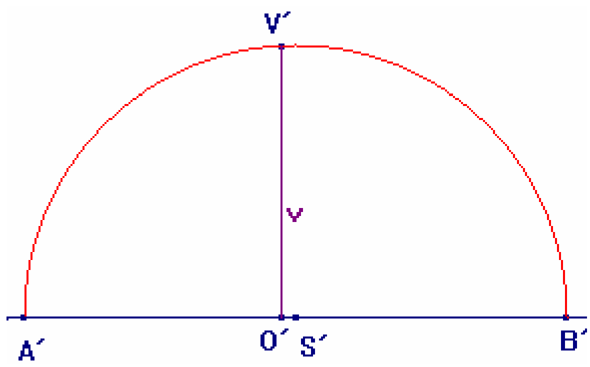
Zavedeme substituci: $u = \sqrt{ab}$

$v = \sqrt{cd}$.

Příklad vyřešíme pomocí Euklidovy věty, stejným postupem jako v příkladě 2.8.

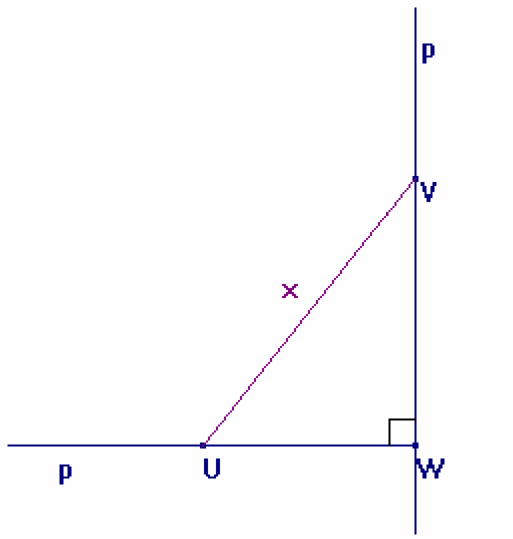


obr 2.13.a



obr 2.13.b

Po zavedení substituce dosadíme do Pythagorovy věty: $x = \sqrt{u^2 + v^2}$ a řešíme stejným postupem jako v příkladě 2.11.



obr 2.13.c

Postup konstrukce:

1. konstrukce úsečky *u* viz. příklad 2.8
2. konstrukce úsečky *v* viz. příklad 2.8
3. konstrukce hledané délky *x* viz. příklad 2.11.

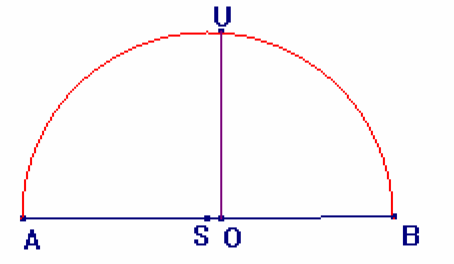
<u>Příklad 2.14.</u> Sestrojme výraz: $x = \sqrt{4ab - 3cd}$

Řešení:

Je to podobný typ výrazu, který musíme rozložit stejně jako v příkladě 2.13., ale je pod odmocninou rozdíl místo součtu. Výraz sestrojíme za předpokladu: $4ab > 3cd$

Položme substituci, pak získáme: $4ab = s^2$ $\quad s = \sqrt{4ab}$ $\quad s = 2\sqrt{ab}$

$3cd = v^2$ $\quad v = \sqrt{3cd}$ $\quad v = \sqrt{3} \cdot \sqrt{cd}$

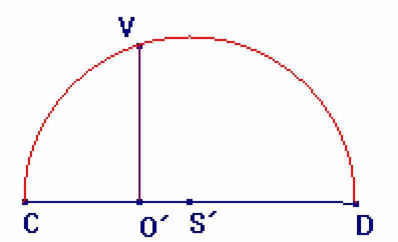


Velikost $|OU| = \sqrt{ab}$, je sestrojena podle příkladu 2.8.; tuto úsečku jsme vynásobili $\sqrt{4} = 2$

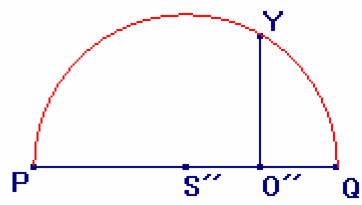
Získáme velikost $s = \sqrt{4ab}$

obr 2.14.a

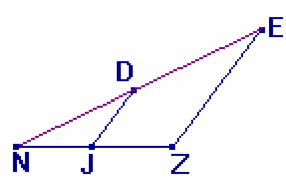
Další pomocnou konstrukcí sestrojíme $v = \sqrt{3cd}$, k tomu užijeme postupy z příkladů 2.8. a 2.5. $\quad |O'V| = \sqrt{cd}$; $\quad |O''Y| = \sqrt{3}$ $\quad |NE| = v = \sqrt{3cd}$



obr 2.14.b

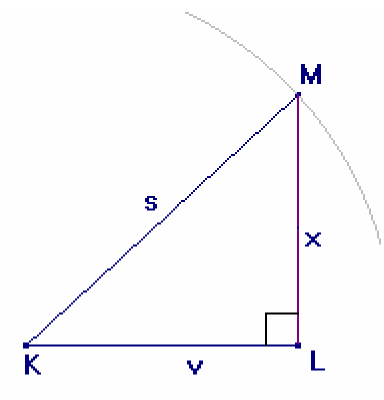


obr 2.14.c



obr 2.14.d

Dále pak úsečku $x = \sqrt{s^2 - v^2}$ sestrojíme Pythagorovou větou postupem v příkladu 2.12.

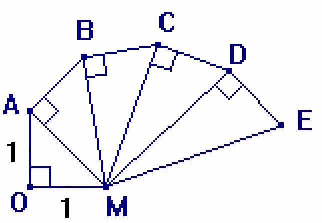


obr 2.14.e

3. Konstrukce některých dalších výrazů

Příklad 3.1 Sestrojte úsečky délek $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ … ([3], s.185)

Řešení: Využijeme-li Pythagorovu větu, je z obrázku patrné, že $|MA| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,



obr 3.1.

potom při opětovném použití Pythagorovy věty: $|MB| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3}$

$$|MC| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$|MD| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$|ME| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{6}$$

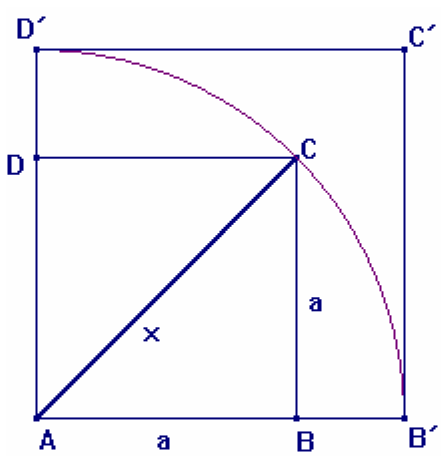
Postup konstrukce:

1) libovolný bod O
2) $|OM| = 1\,cm$
3) $|OA| = 1\,cm; \leftrightarrow OA \perp \leftrightarrow OM$
4) $|AM| = \sqrt{2}\ cm$
5) $|AB| = 1\,cm; \leftrightarrow AB \perp \leftrightarrow AM$
6) $|BM| = \sqrt{3}\ cm$
7) $|BC| = 1\,cm; \leftrightarrow BC \perp \leftrightarrow BM$
8) $|CM| = \sqrt{4}\ cm = 2\ cm$
9) $|CD| = 1\,cm; \leftrightarrow CD \perp \leftrightarrow CM$
10) $|DM| = \sqrt{5}\ cm$
11) $|DE| = 1\,cm; \leftrightarrow DE \perp \leftrightarrow DM$
12) $|DM| = \sqrt{6}\ cm$

<u>Příklad 3.2.</u> Sestrojte čtverec, jehož obsah je dvakrát větší než obsah čtverce o straně a. ([3], s.186)

Řešení: Pro obsah daného čtverce platí vztah: S = $a \cdot a = a^2$; je-li x strana hledaného čtverce, platí vztah: $x^2 = a^2 + a^2$.

x je přeponou pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka, jehož odvěsna je a.



obr 3.2.

<u>Postup konstrukce:</u>

1) libovolný bod A
2) $\alpha \ AB; |AB| = a$
3) $\alpha \ AD \perp \alpha \ AB; |AD| = a$
4) $\leftrightarrow BC \perp \alpha \ AB; |BC| = a$
5) $|DC| = a; (\leftrightarrow DC \perp \alpha \ AD)$
6) čtverec $ABCD$
7) $x = |AC|$
8) $k(A; r = |AC|)$
9) $B' \in \alpha \ AB \cap k$
10) $D' \in \alpha \ AD \cap k$
11) $\leftrightarrow B'C' \perp \alpha \ AB; |B'C'| = x$
12) $|D'C'| = x; (\leftrightarrow D'C' \perp \alpha \ AD)$
13) čtverec $ABC'D'$

<u>Příklad 3.3.</u> Sestrojte čtverec, jehož obsah je třikrát větší než obsah čtverce o straně a. ([3], s.186)

Řešení: Pro obsah daného čtverce platí vztah: S = $a \cdot a = a^2$; je-li x strana hledaného čtverce, platí vztah: $x^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3 \cdot a^2$.

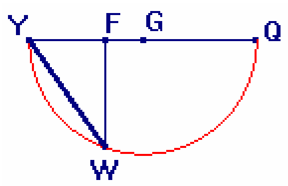
a) $x = a \cdot \sqrt{3}$; - úsečku délky $a\sqrt{3}$ sestrojíme podle příkladu 2.8.

b) $x = \sqrt{4a^2 - a^2}$ x je odvěsna pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona je $2a$ a druhá odvěsna je a.

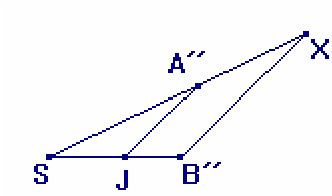
Obrázek je sestrojen podle postupu a)

Úsečka $\sqrt{3}$ byla sestrojena podle již zmíněného příkladu 2.8.

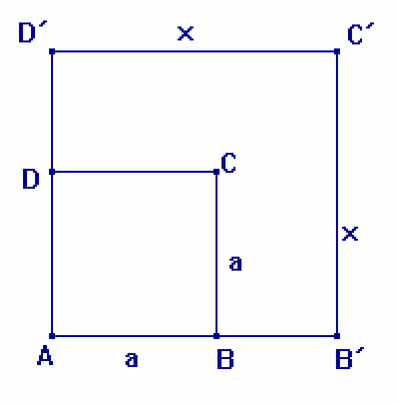
Úsečka $x = a \cdot \sqrt{3}$ pak byla sestrojena podle příkladu 2.5.



obr 3.3.a



obr 3.3.b



obr 3.3.c

Následně ze sestrojené úsečky $x = |SX|$ byl sestrojen čtverec trojnásobného obsahu.

Příklad 3.4.: Nechť máme zadanou úsečku délky *a*. Sestrojme úsečky délek: $a\sqrt{2}, a\sqrt{3}, a\sqrt{4} = 2a, a\sqrt{5}, \ldots$ ([3], s.206)

Řešení:

a) Jedno řešení bychom mohli převést a zkonstruovat podle příkladu č.3.2

b) Druhé řešení bychom sestrojili podle příkladu 2.8 Na příklad:

$x = a\sqrt{5} = \sqrt{5a \cdot a}$.

c) Nebo za třetí: Nechť velikost úsečky *AB* = *a*. V bodech *A*,*B* vztyčíme kolmice *p*, *q*. Na přímce *q* najdeme bod *C* tak, aby *BC* = *a* ; na přímce *p* najdeme bod *D* tak, aby *AD* = *AC*; na přímce *q* pak najdeme bod *E* tak, že *BD* = *BE* atd. Při tom všechny body leží v téže polorovině vyťaté přímkou *AB*.

Potom platí:

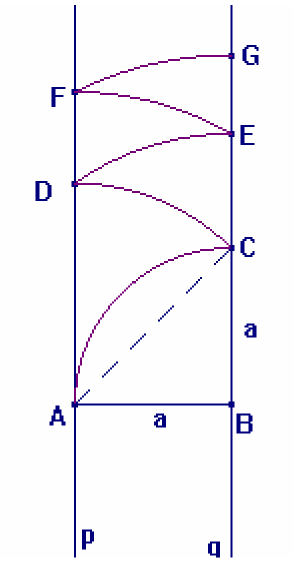
$|AB| = |BC| = a$

$|AC| = |AD| = a\sqrt{2}$

$|BD|^2 = a^2 + 2a^2 \qquad |BD| = |BE| = a\sqrt{3}$

$|AE|^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 \qquad |AE| = |AF| = 2a$

$|BF|^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2 \qquad |BF| = |BG| = a\sqrt{5}$



obr 3.4.

<u>Postup konstrukce:</u>

1) libovolný bod A

2) libovolná přímka $p,\ p \in A$

3) $B; |AB| = a$

4) $q \parallel p;\ q \in B$

5) $q \in C; |BC| = a$

6) $|AC| = |AD|; D \in p$

7) $|BD| = |BE|; E \in q$

8) $|AE| = |AD|; F \in p$

9) $|BF| = |BG|; G \in q$

Příklad 3.5. Nechť máme zadanou úsečku délky a. Sestrojme úsečky délek:

$a^2, a^3, a^4, \ldots$, ([3], s.208)

Řešení:

Sestrojme dvě přímky p, q k sobě kolmé; jejich průsečík je v bodě 0. Na přímce p sestrojme bod M tak, aby $OM = 1$, a na přímce q bod A tak, aby $OA = a$. V bodě A vztyčená kolmice k AM protne p v bodě B. V bodě B vztyčíme kolmici k AB a její průsečík s přímkou q je C. Takto postupujeme i následovně. Podle Euklidovy věty o výšce platí:

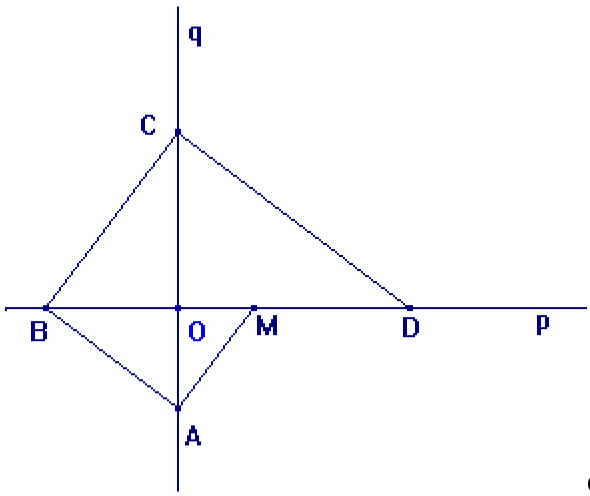
$$|AO|^2 = |BO| \cdot |OM| \qquad \text{tedy} \qquad |BO| = a^2$$

$$|BO|^2 = |OC| \cdot |OA| \qquad \text{tedy} \qquad |OC| = a^3$$

Dále bychom dostali $|OD| = a^4$ atd.

Postup konstrukce :

1) libovolný bod O
2) libovolná přímka p, $p \in O$
3) $q \perp p; q \in O$
4) $M \in p; |OM| = 1\,cm$
5) $A \in q; |AO| = a$
6) $B \in p; \leftrightarrow AB \perp \leftrightarrow AM$
7) $C \in q; \leftrightarrow BC \perp \leftrightarrow AB$
8) $D \in p; \leftrightarrow CD \perp \leftrightarrow BC$



obr 3.5.

Příklad 3.6. Nechť máme zadanou úsečku délky a. Sestrojme úsečky délek:

$\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, … ([3], s.209)

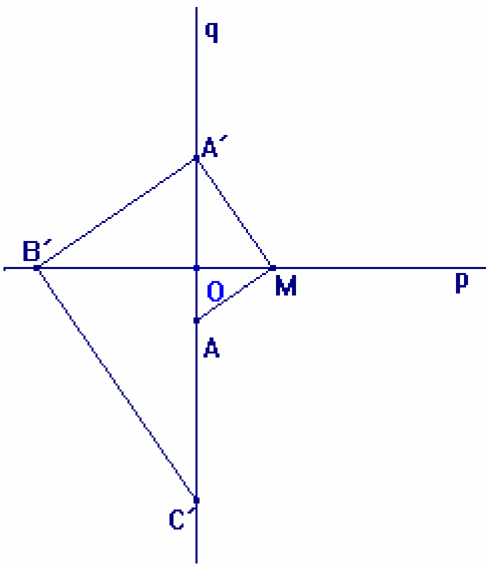
Řešení:

Sestrojme dvě přímky p, q k sobě kolmé; jejich průsečík je v bodě 0. Na přímce p sestrojme bod M tak, aby $OM = 1$, a na přímce q bod A tak, aby $OA = a$. V bodě M vztyčme k AM kolmici a její průsečík s přímkou q označíme A'. V A' vztyčená kolmice k MA' protne p v bodě B' atd. opět platí:

$$|OM|^2 = |OA| \cdot |OA'| \qquad \text{tj. } |OA'| = \frac{1}{a}$$

$$|OA'|^2 = |OM| \cdot |OB'| \qquad \text{tj. } |OB'| = \frac{1}{a^2}$$

$$|OB'|^2 = |OA'| \cdot |OC'| \qquad \text{tj. } |OC'| = \frac{1}{a^3}$$



obr 3.6.

Postup konstrukce příkladu 3.7.:

1) libovolný bod O
2) libovolná přímka p, $p \in O$
3) $q \perp p; q \in O$
4) $M \in p; |OM| = 1\,cm$
5) $A \in q; |AO| = a$
6) $A' \in q; \leftrightarrow A'M \perp \leftrightarrow AM$
7) $B' \in p; \leftrightarrow A'B' \perp \leftrightarrow A'M$
8) $C' \in q; \leftrightarrow B'C' \perp \leftrightarrow A'B'$

Příklad 3.7.

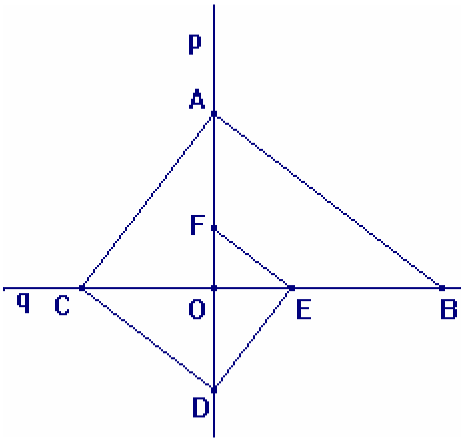
Jsou dány dvě úsečky délek *a, b*. Sestrojme úsečky jejichž délky *x* jsou po řadě dány výrazy $\frac{a^2}{b}$, $\frac{a^3}{b^2}$, $\frac{a^4}{b^3}$, … ([3], s.211)

Řešení:

„Libovolným bodem *O* proložme dvě přímky *p*, *q* k sobě kolmé. Na přímce *p* sestrojme bod *A* tak, aby *OA* = *a*, na přímce *q* sestrojme bod *B* tak, aby *OB* = *b*. K přímce *AB* sestrojme v *A* kolmici a ta protne přímku *q* v bodě *C*; v bodě *C* vztyčme k *AC* kolmici a ta vytne na *p* bod *D* atd. Na základě Eukleidovy věty platí:

$$|OA|^2 = |OB| \cdot |OC| \qquad \text{tedy} \qquad |OC| = \frac{a^2}{b}$$

$$|OC|^2 = |OA| \cdot |OD| \qquad \text{tedy} \qquad |OD| = \frac{a^3}{b^2}$$



obr 3.7.

Postup konstrukce :

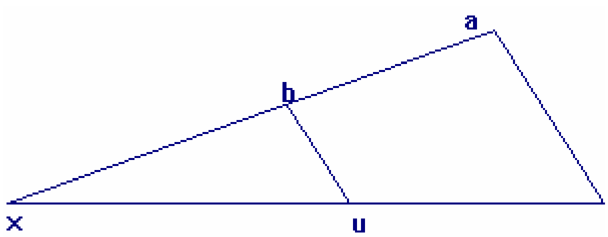
1) libovolný bod O
2) libovolná přímka $p,\ p \in O$
3) $q \perp p; q \in O$
4) $A \in p; |OA| = a$
5) $B \in q; |OB| = b$
6) $C \in q; \leftrightarrow AC \perp \leftrightarrow AB$
7) $D \in p; \leftrightarrow CD \perp \leftrightarrow AC$
8) $E \in q; \leftrightarrow DE \perp \leftrightarrow CD$
9) $F \in p; \leftrightarrow EF \perp \leftrightarrow DE$

4. Konstrukční úlohy řešené s využitím pomocného algebraického výpočtu

Příklad 4.1. Sestrojte trojúhelník *ABC* z daných délek *a*, *b*, *u* - kde *u* je délka osy úhlu *ACB*.

Řešení: Tento trojúhelník sestrojíme podle známých pravidel. Osa *CU* úhlu *ACB* vytváří dva úhly stejné velikosti: $\angle UCB = \varphi = \angle ACU$. Vycházíme přitom z podobnosti trojúhelníků a z vět o úhlech. Sestrojme rovnoběžku *p* vrcholem *B* se stranou *AX*. Označme $X = p \cap \leftrightarrow CU$. Z této rovnoběžnosti plyne: úhel $|\angle CXB| = \varphi$. Tento vztah vyplynul ze střídavých úhlů. O stranách *BC* a *BX* víme, že jejich velikosti se rovnají. $|BC| = |BX|$ = *a*, neboť proti shodným úhlům trojúhelníka *CXB* musí ležet shodné strany. Vidíme i podobnost trojúhelníků: $\Delta\, ACU \approx \Delta\, BXU$.

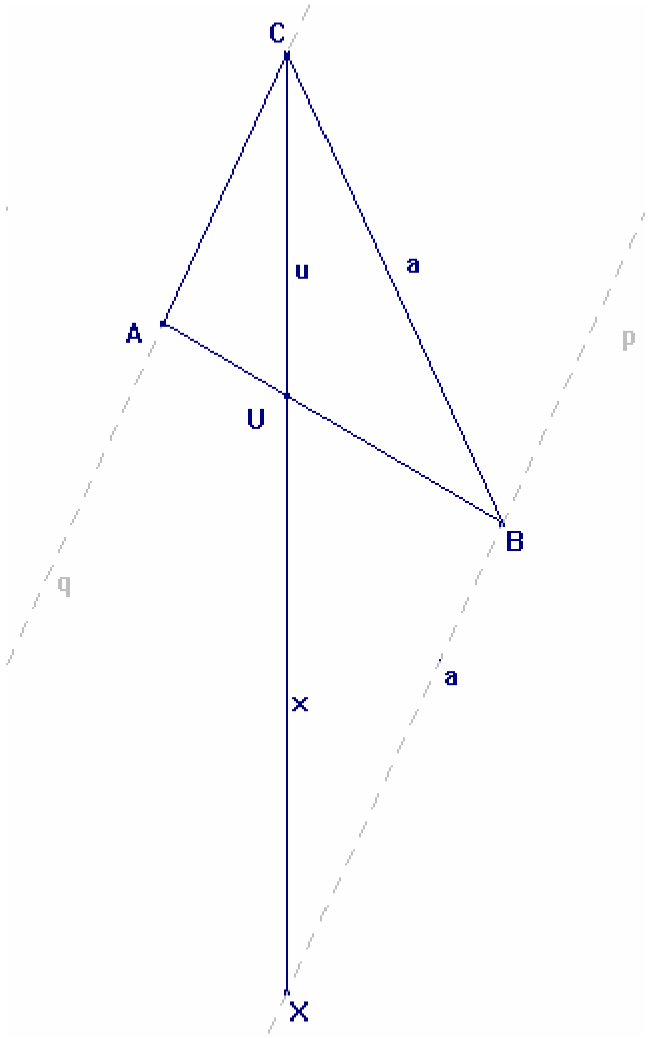
Z podobnosti trojúhelníků tedy platí vztah: $\frac{|XU|}{|UC|} = \frac{|XB|}{|AC|}$ a odtud plyne, když položíme $|UX| = x$, $\frac{x}{u} = \frac{a}{b}$.



obr 4.1.a

Postup konstrukce:

1) Sestrojíme pomocnou úsečku velikosti *x* (pomocná konstrukce – čtvrtá geometrická úměrná z příkladu.2.3.)
2) Z délek stran sestrojíme ΔCXB $\left(|BC| = |BX| = a; |CX| = u + x\right)$ výše uvedený obrázek, kde musí platit: $u + x < 2a$.
3) $q \parallel BX$; $C \in q$
4) $A \in q \cap \alpha$ *BU*
5) ΔABC



obr 4.1.b

Příklad 4.2. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán úhel $\gamma = 90°$, velikost součtu odvěsen $m = a + b$ a výška trojúhelníka na stranu *c* (v_c).

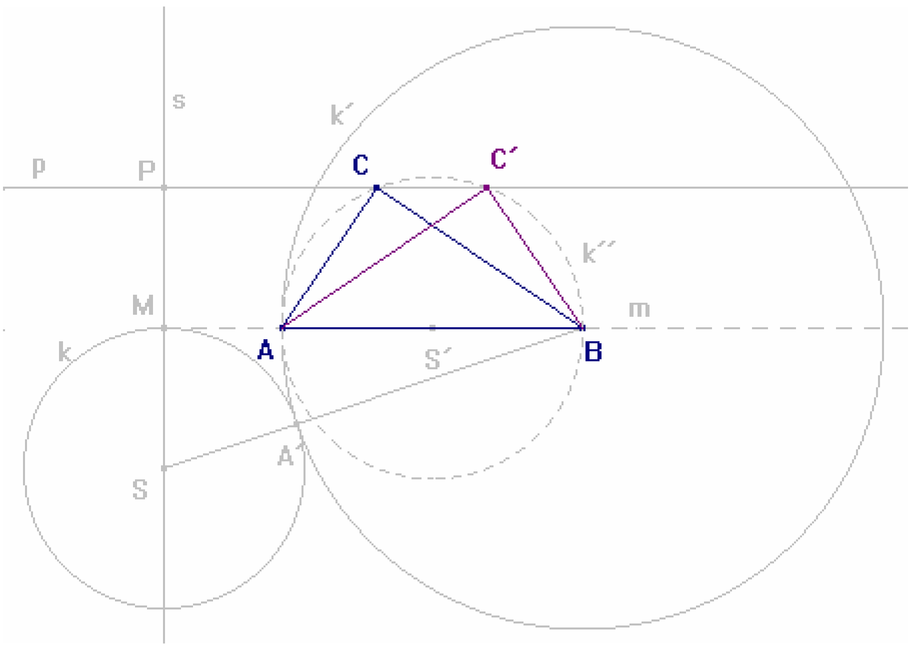
Řešení: I v této úloze začneme algebraickým způsobem. Danou velikost $a + b = m$ umocníme na druhou, tedy dostaneme: $m^2 = (a+b)^2$

$$m^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

využijeme Pythagorovy věty $a^2 + b^2 = c^2$, kterou dosadíme: $m^2 = c^2 + 2ab$.

Z druhého vyjádření obsahu pravoúhlého trojúhelníka $S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$ dostaneme rovnost $c \cdot v_c = a \cdot b$. Odtud dosadíme levou stranu místo součinu $a \cdot b$ do vztahu

$m^2 = c^2 + 2ab$ a dostaneme $m^2 = c^2 + 2 \cdot c \cdot v_c$. Rovnice $c \cdot (c + 2v_c) = m^2$ nám připomíná mocnost bodu ke kružnici.



Obr 4.2.

Postup konstrukce:

1) libovolný bod M
2) $\alpha \quad m; m \in M$
3) $|MB| = m = a + b$; $B \in m$
4) $\leftrightarrow s \perp \alpha \quad m; M \in s$
5) $S \in s; |SM| = v_c$
6) $k(S; v_{c)}$
7) $A' \in SB \cap k$
8) $k'(B; |BA'|)$
9) $A \in k' \cap m$
10) $S' \in AB, |AS'| = |S'B|$
11) $k''(S'; |AS'|)$
12) $P \in s; |MP| = v_c$
13) $p \parallel m; P \in p$
14) $C, C' \in p \cap k''$
15) ΔABC a $\Delta ABC'$

Příklad 4.3. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník *ABC* se základnou *AB*, je-li dáno: $2m = 2a - c$; a výška v na stranu c.

Řešení: Úlohu budeme nejprve řešit algebraicky. Výraz $2m = 2a - c$ upravíme na tvar: $m = a - \frac{c}{2}$; dále pak umocníme na druhou a dostaneme: $m^2 = a^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - ac$.

Z pravoúhlého trojúhelníka CC´B využijeme vztahu: $a^2 = v^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$. Tento vztah vycházející z Pythagorovy věty dosadíme do výrazu $m^2 = a^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - ac$ za proměnnou a. Dostáváme výraz: $m^2 = v^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - c \cdot \sqrt{v^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}$

Ten pak upravujeme: $m^2 = v^2 + 2 \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 - c \cdot \sqrt{v^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}$

$$m^2 = v^2 + \frac{c^2}{2} - c \cdot \sqrt{v^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$ / upravíme tak, abychom měli odmocninu na jedné straně

$$c \cdot \sqrt{v^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = v^2 + \frac{c^2}{2} - m^2$$ / umocníme na druhou

$$c^2 \cdot \left[v^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right] = \left[\left(v^2 - m^2\right) + \frac{c^2}{2}\right]^2$$

$$c^2v^2 + \frac{c^2}{1} \cdot \frac{c^2}{4} = \left(v^2 - m^2\right)^2 + 2 \cdot \frac{c^2}{2} \cdot \left(v^2 - m^2\right) + \frac{c^4}{4}$$

$$c^2v^2 + \frac{c^4}{4} = \left(v^2 - m^2\right)^2 + c^2 \cdot \left(v^2 - m^2\right) + \frac{c^4}{4}$$

$$c^2v^2 = \left(v^2 - m^2\right)^2 + c^2 \cdot \left(v^2 - m^2\right)$$ / upravíme tak, abychom měli c na jedné straně

$$c^2v^2 - c^2 \cdot \left(v^2 - m^2\right) = \left(v^2 - m^2\right)^2$$

$$c^2 \cdot \left[v^2 - \left(v^2 - m^2\right)\right] = \left(v^2 - m^2\right)^2$$

$$c^2 \cdot \left(v^2 - v^2 + m^2\right) = \left(v^2 - m^2\right)^2$$

$$c^2 \cdot m^2 = \left(v^2 - m^2\right)^2$$

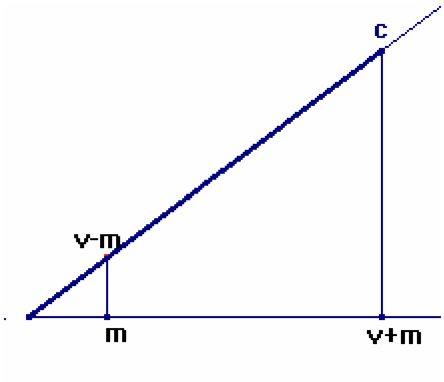
$$c^2 = \frac{\left(v^2 - m^2\right)^2}{m^2}$$

$$c = \sqrt{\frac{\left(v^2 - m^2\right)^2}{m^2}}$$

$$c = \frac{v^2 - m^2}{m} \qquad \text{upravíme:} \qquad c = \frac{(v-m)(v+m)}{m}$$

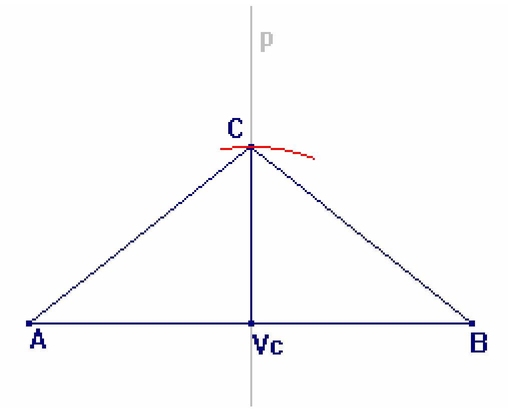
Pomocí posledního vztahu sestrojíme čtvrtou geometrickou úměrnou $\dfrac{c}{v-m} = \dfrac{v+m}{m}$ kde získáme velikost úsečky c.

obr 4.3.a



Z délky c a zadané výšky v pak sestrojíme rovnoramenný trojúhelník ABC.

obr 4.3.b



Postup konstrukce:

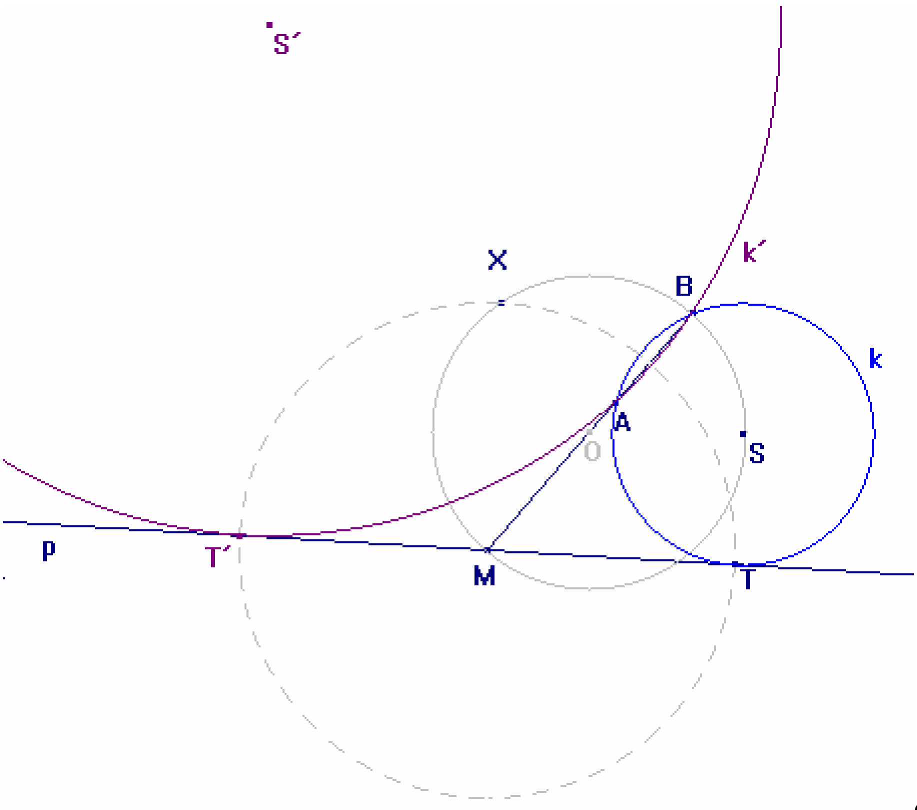
1. pomocná konstrukce (čtvrtá geometrická úměrná, viz. příklad 2.3.)
2. A je libovolný bod
3. $|AB| = c$
4. $Vc \in AB; |AVc| = |VcB|$
5. $p \perp AB; Vc \in p$
6. $k(Vc; r = v)$
7. $C \in k \cap v$
8. ΔABC

Příklad 4.4. Sestrojte kružnici, která prochází danými body *A*, *B* a dotýká se dané přímky *p*. Platí podmínky: $(A \neq B);(AB \neq p)$

Řešení: Protože platí vztah: $|MT|^2 = |MA| \cdot |MB|$, můžeme sestrojit úsečku délky $|MT|$. Ke konstrukci příkladu užijeme konstrukci příkladu 2.8., kde vyjdeme ze vztahu $\sqrt{|MA| \cdot |MB|} = |MX|$

Nejprve sestrojíme bod *M*, který je průsečíkem úsečky *A*, *B* a přímky *p*, potom Thaletovu kružnici nad průsečíkem *MB*, abychom v odvěsně našli hledanou velikost $|MX|$, což je také vzdálenost bodu *M* od bodu *T* dotyku kružnice *k* s průsečíkem *p*.

Středy hledaných kružnic sestrojíme jako kružnice opsané trojúhelníkům *ABT* a *ABT´*.



obr 4.4.

Postup konstrukce:

1) V programu Cabri je libovolně volen bod *M*, kterým prochází přímka *p*.
2) Vzdálenosti $|MA|;|MB|$ jsou určeny pomocí ovladačů.
3) Provedeme konstrukci bodu *X*, z příkladu 2.8. 2.řešení
4) Kružnicí se středem M; poloměrem $|MX|$ najdeme body dotyku *T*, *T´*.
5) kružnici *k* opsanou trojúhelníku *ABT*

   kružnici *k´* opsanou trojúhelníku *ABT´*

Pro situaci na obrázku má úloha 2 řešení.

Příklad 4.5. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník *ABC*, je-li dáno $m = c - a$ a $n = c - b$

Řešení: Vyjádříme si ze vztahu $a = c - m$ a $b = c - n$ a dosadíme do Pythagorovy věty

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = (c-m)^2 + (c-n)^2$$

$$c^2 = c^2 - 2cm + m^2 + c^2 - 2cn + n^2$$

$$-c^2 = m^2 + n^2 - 2cm - 2cn$$

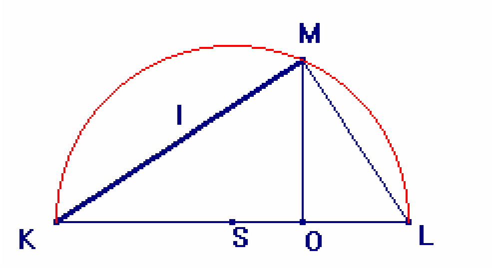
$$c^2 - 2(2m+2n)c + m^2 + n^2 = 0$$

$$D = 4\cdot(m+n)^2 - 4\cdot(m^2+n^2) = 4\cdot(m^2+2mn+n^2) - 4m^2 - 4n^2 =$$
$$= 4\cdot(m^2+2mn+n^2-m^2-n^2) = 8mn$$

$$c_{1,2} = \frac{-(-2m-2n)\pm\sqrt{8mn}}{2\cdot 1} = \frac{2(m+n\pm\sqrt{2mn})}{2} = m+n\pm\sqrt{2mn}$$

$$c_1 = m+n+\sqrt{2mn}$$

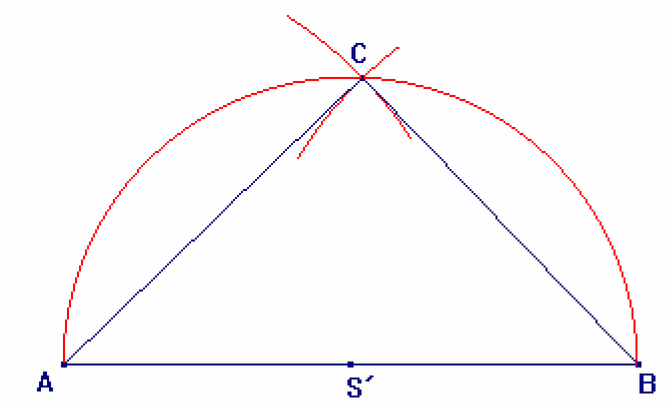
$c_2 = m+n-\sqrt{2mn}$ - kořen neexistuje; ($m + n = 2c - (a + b)$; $m + n < c$)



obr 4.5.a

Pro konstrukci pravoúhlého trojúhelníka ABC si nejprve sestrojíme pomocnou konstrukci $l = \sqrt{mn}$, kterou pak dosadíme do vypočteného kořene $c_1 = m + n + \sqrt{2mn}$, c_1 bude přepona *c*.

Ze zadaných vztahů $m = c - a$, $n = c - b$ nyní vyjádříme velikosti odvěsen: $a = c - m$, $b = c - n$. Hledaný bod *C*, protože sestrojujeme pravoúhlý trojúhelník, bude ležet na Thaletově kružnici a kružnicích konstruovaných podle věty *sss*.



obr 4.5.b

Postup konstrukce:

1. pomocná konstrukce $l = |KM| = \sqrt{mn}$, viz. Příklad 2.8.
2. úsečka $c = m + n + \sqrt{2mn} = m + n + l = |AB|$
3. $S' \in AB, |AS'| = |S'B|$
4. Thaletova kružnice (S'; $|AS'|$)
5. kružítkem naneseme velikosti odvěsen: $k_1(B;a)$; $k_2(A;b)$
6. $C \in k_1 \cap k_2 \cap$ Thaletova kružnice
7. ΔABC

Příklad 4.6. Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dáno v_a, v_b, v_c.

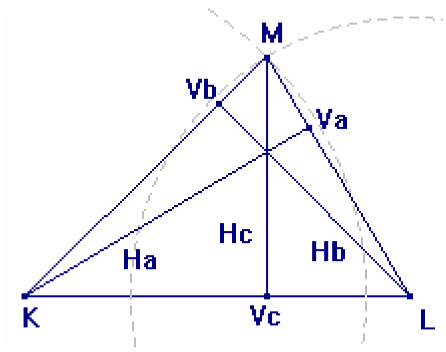
Řešení: Ze vzorce $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$ vyjádříme dvojnásobný obsah: $2S = a \cdot v_a = b \cdot v_b = c \cdot v_c$; úpravou dostaneme: $a = \frac{2S}{v_a}$; $b = \frac{2S}{v_b}$; $c = \frac{2S}{v_c}$.

Strany trojúhelníka dáme do poměru: $a : b : c = \frac{1}{v_a} : \frac{1}{v_b} : \frac{1}{v_c}$

Platí: $v_a : v_b : v_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$

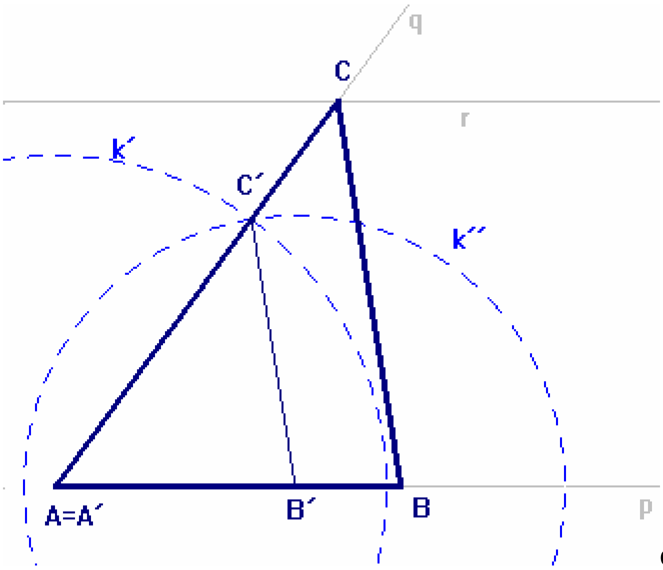
Musí také platit i poměr pomocných stran: $h_a : h_b : h_c = \frac{1}{v_a} : \frac{1}{v_b} : \frac{1}{v_c} = a : b : c$

Sestrojíme nejprve pomocný trojúhelník ze zadaných výšek, určíme v něm výšky, které označíme jako h_a, h_b, h_c podle obrázku.



obr 4.6.a

Z těchto pomocných úseček sestrojíme trojúhelník, a protože jsou s těmito velikostmi h_a, h_b, h_c strany hledaného trojúhelníka *ABC* v poměru, sestrojíme ho pomocí příkladu 2.3. „čtvrtá geometrická úměrná“.



obr 4.6.b

Postup konstrukce:

1. konstrukce ΔKLM , ze zadaných stran v_a, v_b, v_c
2. konstrukce výšek v ΔKLM : h_a, h_b, h_c
3. libovolný bod A'
4. $\alpha \quad p, A' \in p$
5. $\alpha \quad q, A' \in q$
6. $|A'B'| = h_c,\ B' \in p$
7. $k'(A'; h_b)$
8. $k''(B'; h_a)$
9. $C' \in q; C' \in k_1 \cap k_2$
10. $A = A'$
11. $p \parallel r$; vzdálenost p,r je v_c
12. $C \in q \cap r$
13. $B \in p; CB \parallel C'B'$
14. ΔABC

Příklad 4.7. Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dáno $m = c - a$ a $n = v_a - v_c$, kde $m > n$.

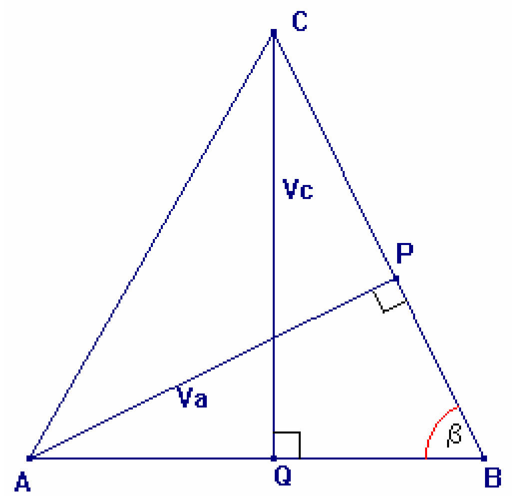
Řešení:

Vyjdeme z rozboru, kde si načrtneme trojúhelník *ABC* a sestrojíme v něm známé údaje: $\sin\beta$:

$$\Delta ABP : \sin\beta = \frac{v_a}{c}$$

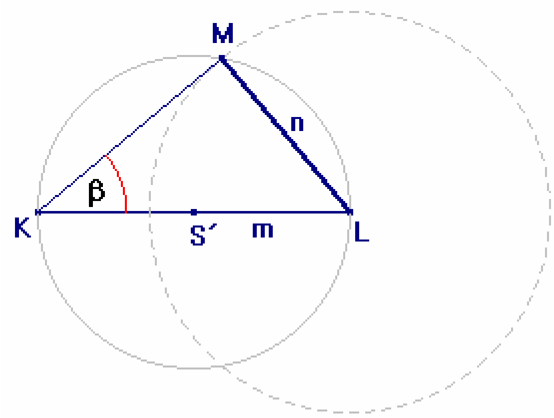
$$\Delta ABQ : \sin\beta = \frac{v_a}{a}$$

$$\sin\beta = \frac{v_a}{c} = \frac{v_c}{a} = \frac{v_a - v_c}{c - a} = \frac{n}{m}$$

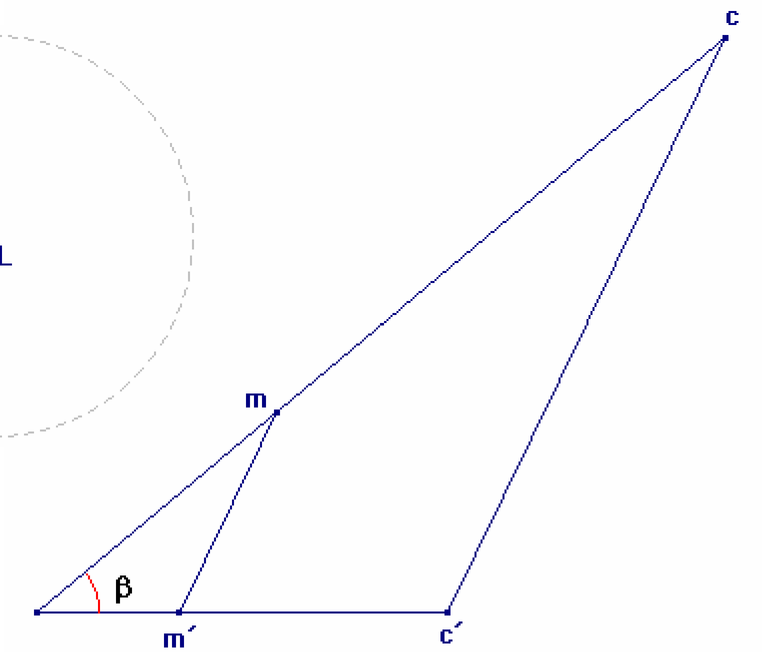


obr 4.7 - rozbor

Ze známých velikostí *m*, *n* sestrojíme pomocný pravoúhlý ΔKLM s přeponou *KL* délky *m* a odvěsnou *ML* délky *n*. Úhel při vrcholu *K* má velikost β.

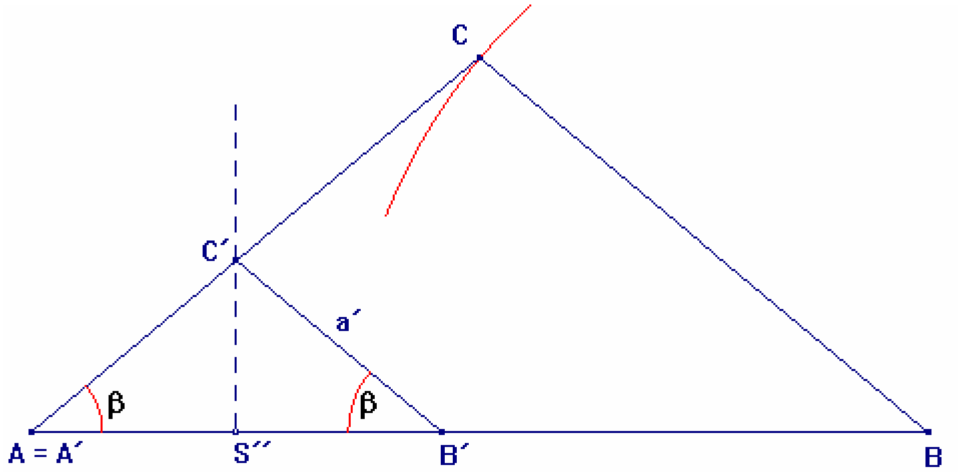


obr 4.7.a



obr 4.7.b

Dále si zvolíme libovolnou velikost *c´*, pomocí níž získáme *a´*. Díky této velikosti *a´* získáme *m´* = *c´* - *a´*. Čtvrtou geometrickou úměrnou z velikostí *m´*, *m*, *c´* sestrojíme velikost úsečky $|AB| = c$. Z této známé úsečky můžeme sestrojit ΔABC, protože strana *a* je rovnoběžná s *a´*.



obr 4.7.c

Postup konstrukce:

1. Pravoúhlý trojúhelník *KLM*;

   $$|KL| = m; S' \in KL, |KS'| = |S'L|; k(S', |KS'|); k_1(L, n); M \in k \cap k_1$$

2. Libovolná úsečka $c' = |A'B'|$, úsečka *c´* musí být rovnoběžná *KL*, pro sestrojení úhlu β v programu Cabri.
3. Vedeme rovnoběžku KM bodem A´, tím úhel β bude sestrojen.
4. Osovou souměrností sestrojíme úhel β i v bodě *B´*.
5. $\Delta A'B'C'$
6. Velikost úsečky *m´* = *c´* - *a´*; *a´* = *B´C´*.
7. Čtvrtá geometrická úměrná s velikostmi *m*, *m´*, *c´* (obr. na str. 40).
8. Výsledná úsečka $|AB| = c$, kterou naneseme na úsečku *A´B´*; *A´* = *A*
9. ΔABC sestrojíme také z konstrukce příkladu 2.3. čtvrtá geometrická úměrná

5. Závěr

Cílem mé práce na téma: „Geometrické konstrukce řešené s využitím algebraického výpočtu“ bylo vyhotovit sbírku úloh s řešením. Úlohy jsou konstruovány v programu CABRI GEOMETRIE. Všechny jsou vypracovány interaktivně na vložené příloze - CD.

Po úvodu, uvádím kapitolu 2. nazvanou „Konstrukce základních algebraických výrazů“, kde jsem sestavila přehled těchto konstrukcí: $x = a + b$; $x = a - b$; $x = \frac{a \cdot b}{c}$; $x = \frac{a}{c}$; $x = a \cdot b$; $x = a^2$; $x = a^3$; $x = \sqrt{10}$; $x = \sqrt{c}$; $x = \sqrt[4]{a}$; $x = \sqrt{a^2 + b^2}$; $x = \sqrt{c^2 - b^2}$; $\sqrt{ab + cd}$.

Ve 3. kapitole „Konstrukce některých dalších výrazů“, sestrojuji složitější algebraické výrazy. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, ...$; $a\sqrt{2}, a\sqrt{3}, a\sqrt{4} = 2a, a\sqrt{5}, ...$;

$$a^2, a^3, a^4, a^5, ...;\ \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, ...;\ \frac{a^2}{b}, \frac{a^3}{b^2}, \frac{a^4}{b^3}, ...$$

Kapitola 4. „Konstrukční úlohy řešené s využitím pomocného algebraického výpočtu“ představuje aplikace poznatků z kapitol 2 a 3. Jsou v ní vyřešeny konstrukční úlohy s využitím algebraického výpočtu potřebného prvku pomocí zadaných hodnot. Prvek je sestrojen právě na základě nalezeného algebraického výpočtu a využit ke konstrukci hledaného útvaru. Výpočet mi úlohu zjednoduší a úloha má snažší řešení při její konstrukci.

Po 5. kapitole „Závěr“ následuje poslední kapitola 6. „Přílohy“. V přílohách jsou definovány matematická tvrzení a uvedeny některé věty ze středoškolské planimetrie, které v práci používám.

Má bakalářská práce může posloužit jako pomůcka učitelům na středních školách či ke zdokonalování a prohlubování znalostí snaživých a vědomostichtivých studentů.

Základní geometrické pojmy

Základní vlastnosti incidence bodů a přímek v rovině: ([4], s. 347 - 348)

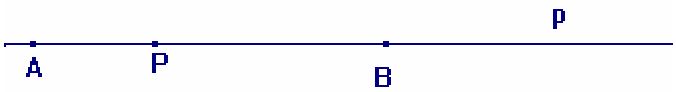
Pro libovolnou přímku *p* v rovině ρ existují body *X*, pro něž platí $X \in p$ (říkáme, že leží na přímce *p* nebo že icidují s přímkou *p*) a body *X*, pro něž platí $X \notin p$ (říkáme, že neleží na přímce *p* nebo že neincidují s přímkou *p*).

Body značíme velkými písmeny *A*, *B*, *M*, *N* apod., přímky malými písmeny *p*, *q* apod., roviny malými řeckými písmeny φ, ω apod. Jestliže dva geometrické objekty splývají, tj. představují týž geometrický objekt, píšeme mezi ně znak $\equiv$ a říkáme, že jsou totožné. Jestliže dva geometrické objekty nejsou totožné, píšeme mezi ně tento znak přeškrtnutý a říkáme, že jsou různé.

Základní vlastnosti polohy bodů na přímce a v rovině ([4], s. 348 - 349)

Bod $P \in p$ dělí přímku p ve dvě části, z nichž každou nazýváme polopřímkou, bod *P* nazýváme počátkem polopřímky, ostatní body přímky jejími vnitřními body. Dvě různé polopřímky téže přímky, které mají společný počátek, se nazývají opačné polopřímky.

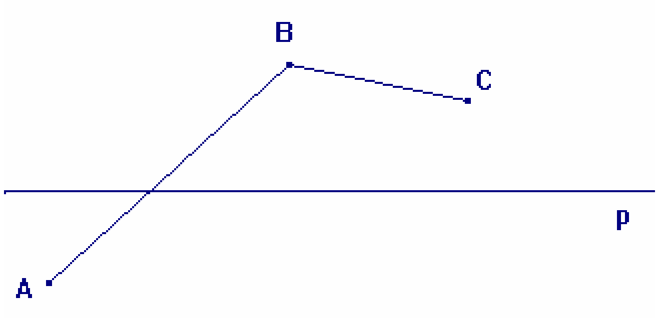
Ze tří různých bodů na přímce právě jeden leží mezi zbývajícími dvěma.

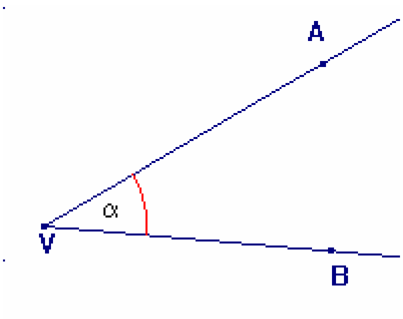


Definujeme: Úsečka *AB* je část přímky $p \equiv AB$, kterou tvoří body *A*, *B* ($A \neq B$) a všechny body $P \in p$, které leží mezi body *A*, *B*. Body *A*, *B* se nazývají krajní body úsečky *AB*, ostatní body úsečky *AB* je nazývají vnitřní body úsečky *AB*.

Přímka *p* dělí rovinu ve dvě části, z nichž každou nazýváme polorovinou; přímku *p* nazýváme hraniční přímkou poloroviny, ostatní body poloroviny jejími vnitřními body. Polorovina s hraniční přímkou *p* a vnitřním bodem *A* se značí $\alpha \; pA$. Dvě různé poloroviny dané roviny, které mají společnou hraniční přímku, se nazývají opačné poloroviny.

Jestliže krajní body nějaké úsečky leží v různých polorovinách, má tato úsečka s hraniční přímkou společný právě jeden bod; jestliže krajní body úsečky leží v téže polorovině a přitom neleží na její hraniční přímce, nemá tato úsečka s přímkou žádný společný bod.





Dvě polopřímky *VA*, *VB* dělí rovinu ve dvě části zvané úhly *AVB* (nebo *BVA*); polopřímky *VA*, *VB* se nazývají ramena a bod *V* vrchol úhlu. Každý bod úhlu, který neleží na jeho ramenech, se nazývá vnitřním bodem úhlu. Množinu všech vnitřních bodů úhlu nazýváme vnitřkem úhlu, množinu všech bodů, které nejsou body daného úhlu, nazýváme vnějškem úhlu.

Úhly rozdělujeme na konvexní (vypuklé) úhly, které mají tu vlastnost, že s každými dvěma různými body X, Y obsahují všechny body úsečky XY, a nekonvexní (nevypuklé) úhly, které tuto vlastnost nemají.

Základní vlastnosti shodnosti úseček ([4], s. 349 - 350)

Dva geometrické útvary v rovině se nazývají shodné, jestliže je lze přemístěním ztotožnit. Jsou-li úsečky *AB*, *CD* shodném vyjadřujeme to zápisem *AB* = *CD* (resp. *CD* = *AB*). Základní vlastnost shodných úseček vyjadřuje axióm: „Na dané polopřímce PQ lze sestrojit právě jednu úsečku PX shodnou s danou úsečkou AB; říkáme, že úsečka AB byla nanesena na polopřímku PQ od jejího počátku P."

O nanesení úsečky na polopřímku se opírá porovnávání úseček a jejich grafické sčítání a odčítání. (příklad 2.1, 2.2)

Základní vlastnosti velikosti úseček ([4], s. 351)

Každé úsečce lze přiřadit kladné číslo zvané velikost (délka) úsečky. Shodné úsečky mají velikosti sobě rovné. Vzhledem k této vlastnosti se k označení velikosti úsečky *AB* často užívá téhož symbolu *AB*. Zápis *AB* = *CD* značí pak nejen shodnost úseček *AB*, *CD*, ale též rovnost velikostí.

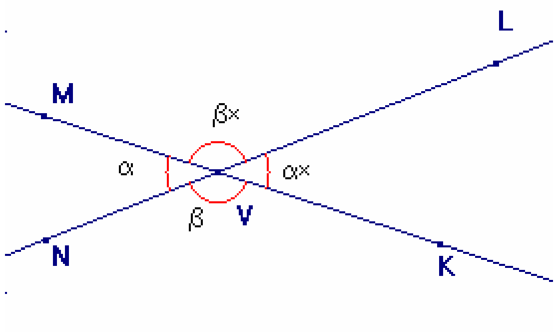
Každé úsečce lze přiřadit právě jedno kladné číslo jako její velikost, jestliže předem zvolíme úsečku velikosti 1, zvanou jednotková úsečka (délková jednotka). Nejčastěji užívané jednotkové úsečky mají speciální názvy, (týmiž názvy se označují příslušné jednotky délky jakožto fyzikální veličiny) např. metr (m), milimetr (mm), centimetr (cm), decimetr (dm), kilometr (km).

Někdy se uvažuje též tzv. nulová úsečka, jíž se rozumějí dva body $A \equiv B$; velikost se klade rovna 0.

Vzájemná poloha přímek v rovině: ([4], s. 353 - 354)

Dvě různé přímky *p*, *q* v rovině mohou mít společný nejvýše jeden bod *P* (tj. $p \cap q = \{P\}$ nebo $p \cap q = \{\theta\}$).

Dvě přímky, které mají právě jeden společný bod *P*, se nazývají různoběžné přímky nebo různoběžky; bod *P* nazýváme jejich průsečíkem. Dvě přímky, které nemají žádný společný bod nebo mají všechny body společné (tj. jsou totožné), se nazývají rovnoběžné přímky nebo rovnoběžky. Jsou-li přímky *p*, *q* rovnoběžné, vyjadřujeme to zápisem $p \| q$, nejsou-li rovnoběžné (tj. jsou-li různoběžné), píšeme pro jejich průsečík $P \equiv p \cdot q$



Dvě různoběžky určují čtyři úhly.

$\beta = \angle KVL$

$\alpha = \angle MVN$

$\beta^x = \angle LVM$

$\alpha^x = \angle NVK$

Dvojice úhlů jejichž ramena jsou opačné polopřímky (dvojice $\angle KVL$ a $\angle MVN$ a dvojice $\angle LVM$ a $\angle NVK$), se nazývají vrcholové úhly. Oba odpovídající si vrcholové úhly jsou shodné.

Vrcholové úhly mohou být ostré. Pak zbývající vrcholové úhly jsou tupé a říkáme, že různoběžky spolu svírají dva ostré a dva tupé úhly, nebo všechny vrcholové úhly jsou pravé, pak říkáme, že různoběžky spolu svírají čtyři pravé úhly a nazýváme je přímkami kolmými neboli kolmicemi. Průsečík kolmice s danou přímkou se jmenuje pata kolmice. Je-li přímka *p* kolmá k přímce *q*, vyjadřujeme to zápisem $p \perp q$.

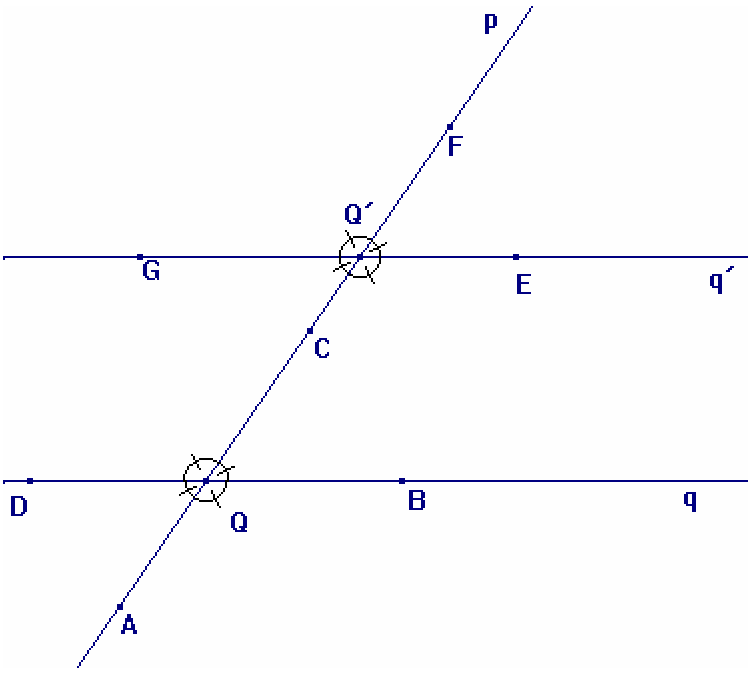
Vzdáleností dvou rovnoběžek *p*, *q* nazýváme vzdálenost pat P, *Q* jejich společné kolmice.

Je-li dána přímka *p*, která protíná dvě různé přímky *q*, *q´*ve dvou různých bodech *Q*, *Q´*, pak přímku *p* nazýváme příčkou přímek *q*, *q´* a pro úhly, které s nimi svírá, zavádíme názvy souhlasné, vedlejší nebo přilehlé a střídavé úhly. Na obrázku jsou vyznačeny souhlasné úhly jako úhly: $\angle AQB$ a $\angle CQ'E$

$\angle CQB$ a $\angle FQ'E$

$\angle CQD$ a $\angle FQ'G$

$\angle DQA$ a $\angle GQ'C$



Střídavé úhly jsou vyznačeny jako úhly: $\angle AQB$ a $\angle GQ'F$

$\angle CQB$ a $\angle GQ'C$

$\angle CQD$ a $\angle CQ'E$

$\angle DQA$ a $\angle FQ'E$

Vedlejší neboli přilehlé úhly jsou vyznačeny např. jako úhly: $\angle AQB$ a $\angle CQB$

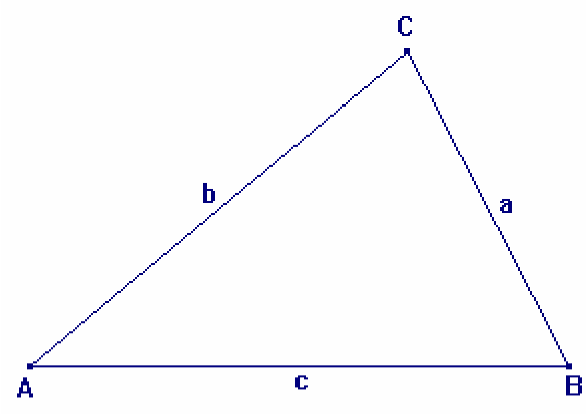
$\angle AQB$ a $\angle AQD$

Vedlejší úhly dávají v součtu vždy přímý úhel (180°).

Souhlasné i střídavé úhly určené přímkami q, q' a libovolnou jejich příčkou p jsou shodné právě tehdy, jsou-li přímky q, q' rovnoběžné.

Trojúhelník ([4], s. 356 - 362)

Základní prvky trojúhelníka: Jsou-li dány v rovině tři různé body *A*, *B*, *C*, které neleží v jedné přímce, pak množina bodů, které leží současně v polorovinách α *ABC*, α *BCA*, α *CAB* se nazývá trojúhelník *ABC*. Body *A*, *B*, *C* označujeme jako vrcholy, úsečky $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ jako jeho strany, úhly $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle ACB$ nazýváme jako vnitřní úhly trojúhelníka.



Množinu bodů trojúhelníka, které náleží jeho stranám, nazýváme obvodem trojúhelníka (též součet velikostí stran trojúhelníka).

Různostranný je trojúhelník, jehož žádné dvě strany nejsou shodné. Rovnoramenný je trojúhelník, který má právě dvě strany shodné (nazývají se ramena; třetí strana se nazývá základna). Rovnostranný je trojúhelník, jehož všechny strany jsou shodné. Pravoúhlý trojúhelník je trojúhelník, jehož (právě) jeden úhel je pravý; stranu protilehlou k pravému úhlu nazýváme přeponou pravoúhlého trojúhelníka, zbývající strany jeho odvěsnami. Tupoúhlý trojúhelník je trojúhelník, jehož (právě) jeden vnitřní úhel je tupý. Ostroúhlý trojúhelník je trojúhelník, jehož všechny vnitřní úhly jsou ostré. Ostroúhlé a tupoúhlé trojúhelníky označujeme souhrnně kosoúhlé.

Trojúhelníková nerovnost: Součet dvou stran trojúhelníka je větší než jeho strana třetí. Rozdíl dvou stran trojúhelníka je menší než jeho třetí strana. Tedy, jsou-li a, b, c velikosti stran trojúhelníka, platí:

$$|b - c| < a < b + c$$

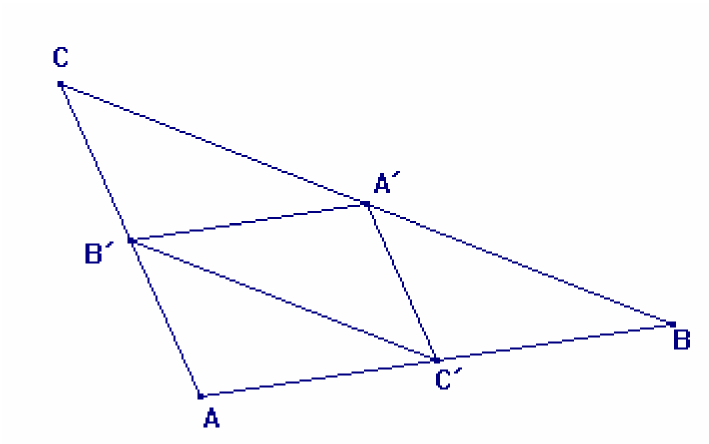
$$|a - c| < b < a + c$$

$$|a - b| < c < a + b$$

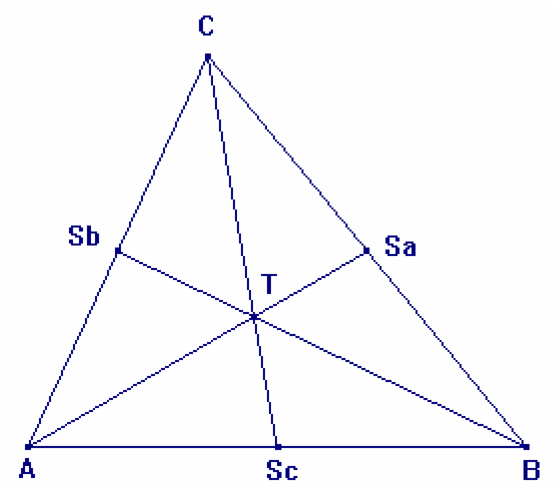
Součet vnitřních úhlů trojúhelníka je úhel přímý. Tedy, jsou-li α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka, platí: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Kromě stran trojúhelníka uvažujeme často ještě další význačné úsečky v něm; souhrnně je označujeme jako příčky. Jejich velikosti se mnohdy označují týmiž názvy. Jsou to střední příčky, těžnice a výšky trojúhelníka.

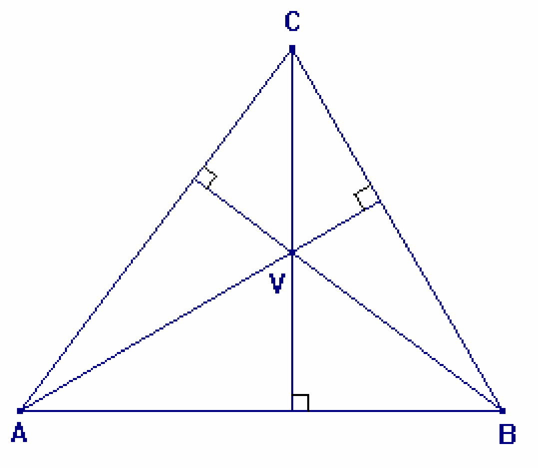
Střední příčka trojúhelníka: se nazývá úsečka, jejímiž krajními body jsou středy dvou stran trojúhelníka. Každá střední příčka trojúhelníka je rovnoběžná s jeho protější stranou a její velikost je rovna polovině velikosti této strany.



Těžnice trojúhelníka: je úsečka, jejímiž krajními body jsou vrchol trojúhelníka a střed jeho protější strany. Všechny tři těžnice trojúhelníka se protínají v jediném bodě T zvaném těžiště trojúhelníka. Vzdálenost těžiště od středu strany je rovna $\frac{1}{3}$ velikosti těžnice a vzdálenost těžiště od vrcholu je rovna $\frac{2}{3}$.



Výška trojúhelníka: je úsečka jejímiž krajními body jsou vrchol trojúhelníka a pata kolmice vedené tímto vrcholem k jeho protější straně. Všechny tři přímky, v nichž leží výšky trojúhelníka, se protínají v jediném bodě V zvaném průsečík výšek neboli ortocentrum, který v ostroúhlém trojúhelníku leží uvnitř trojúhelníka, v pravoúhlém trojúhelníku splývá s vrcholem pravého úhlu, v tupoúhlém trojúhelníku leží vně tohoto trojúhelníka.



Je-li v_a výška ke straně a, v_b výška ke straně b, v_c výška ke straně c, platí: $v_a : v_b : v_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

Shodnost trojúhelníků: Dva trojúhelníky ΔABC a $\Delta A'B'C'$ se nazývají shodné trojúhelníky, jestliže je lze přemístit tak, že se úplně kryjí, tj. mají-li shodné všechny strany i vnitřní úhly. Zápisem $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ vyjadřujeme, že ΔABC je shodný s $\Delta A'B'C'$ přičemž $A'B' = AB$; $B'C' = BC$; $A'C' = AC$; $\angle C'A'B' = \angle CAB$; $\angle A'B'C' = \angle ABC$; $\angle A'C'B' = \angle ACB$.

Máme-li určit, zda dva trojúhelníky jsou shodné, není nutné ověřovat shodnosti všech šesti základních prvků (stran i úhlů). Stačí ověřit, zda je splněno některé z kritérií (postačujících podmínek) podle následujících vět o shodnosti trojúhelníků: a) Dva trojúhelníky jsou shodné ve všech třech stranách (věta *sss*).

b) Dva trojúhelníky jsou shodné ve dvou stranách a v úhlu jimi sevřeném (věta *sus*).

c) Dva trojúhelníky jsou shodné ve dvou stranách a v úhlu proti větší z nich (věta *Ssu*).

d) Dva trojúhelníky jsou shodné v jedné straně a ve dvou úhlech k ní přilehlých (věta *usu*).

Podmínky vyjádřené ve větách o shodnosti trojúhelníků jsou nejen postačující, ale i nutné, pro jejich užití je však podstatná jejich postačitelnost.

Podobnost trojúhelníků: Dva trojúhelníky ΔABC a $\Delta A'B'C'$ se nazývají podobné, když jejich odpovídající si strany jsou úměrné, tj. existuje-li takové kladné číslo k (zvané poměr podobnosti), že platí: $A'B' = k \cdot AB$, $B'C' = k \cdot BC$, $A'C' = k \cdot AC$ čili $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = k$

Je-li $k > 1$, představuje podobnost zvětšení, je-li $0 < k < 1$, představuje zmenšení, pro $k = 1$ je to shodnost. Lze dokázat, že pro libovolné $k > 0$ mají podobné trojúhelníky shodné vnitřní úhly.

Zápisem $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ vyjadřujeme, že ΔABC a $\Delta A'B'C'$ jsou podobné, přičemž $A'B' = k \cdot AB$, $B'C' = k \cdot BC$, $A'C' = k \cdot AC$, $\angle C'A'B' = \angle CAB$, $\angle A'B'C' = \angle ABC$, $\angle A'C'B' = \angle ACB$.

Máme-li určit, zda dva trojúhelníky jsou podobné, není třeba ověřovat, zda všech šest základních prvků (strany a vnitřní úhly) splňuje podmínky plynoucí z podobnosti trojúhelníků. Stačí ověřit, zda je splněno některé z kritérií (postačujících podmínek) podle následujících vět o podobnosti trojúhelníků:

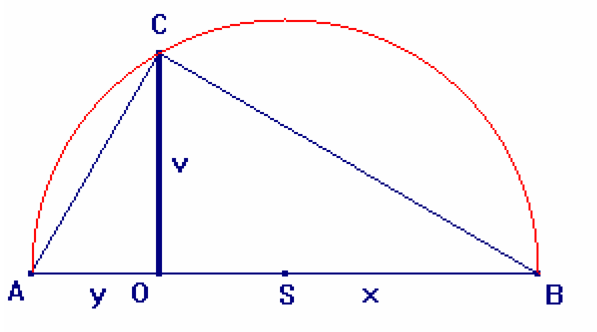
a) Dva trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se ve dvou úhlech (věta *uu*).
b) Dva trojúhelníky jsou podobné, jsou-li rovny poměry (rozumí se podíl jejich velikostí) dvou stran a úhly jimi sevřené (věta s*us*).
c) Dva trojúhelníky jsou podobné, jsou-li rovny poměry dvou stran a shodné úhly proti větším z nich (věta *Ssu*).

Podmínky uvedené v těchto větách o podobnosti trojúhelníků jsou nejen postačující, ale i nutné, pro jejich užití je však podstatná jejich postačitelnost.

Dále z vět o podobnosti trojúhelníků plyne pro pravoúhlé, rovnoramenné a rovnostranné trojúhelníky: Dva pravoúhlé trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se v jednom ostrém úhlu nebo v poměru dvou odpovídajících si stran. Dva rovnoramenné trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se v úhlu při základně nebo v úhlu při vrcholu. Každé dva rovnostranné trojúhelníky jsou si podobné.

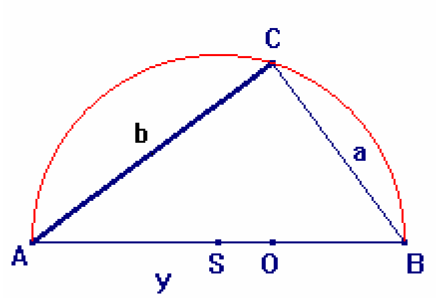
Užitím vět o podobnosti trojúhelníků lze též dokázat, že v pravoúhlém trojúhelníku platí tyto důležité věty:

Euklidova věta o výšce: „Jsou-li v pravoúhlém trojúhelníku *v* velikost výšky, *x*, *y* velikosti obou úseků přepony (tj. úseček, které na ní vytíná pata výšky), platí: $v^2 = x \cdot y$ “

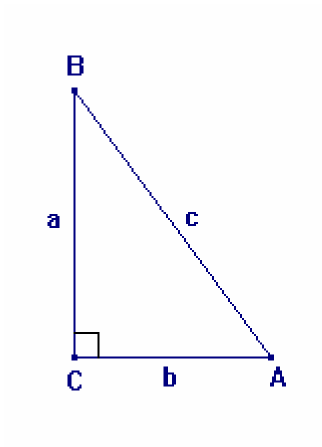


Euklidova věta o odvěsně: „Jsou-li v pravoúhlém trojúhelníku *a*, *b* velikosti odvěsen, *c* velikost přepony, y, x velikosti úseků přepony přilehlých (v uvedeném pořadí) k odvěsnám a, b, platí: $a^2 = c \cdot x$

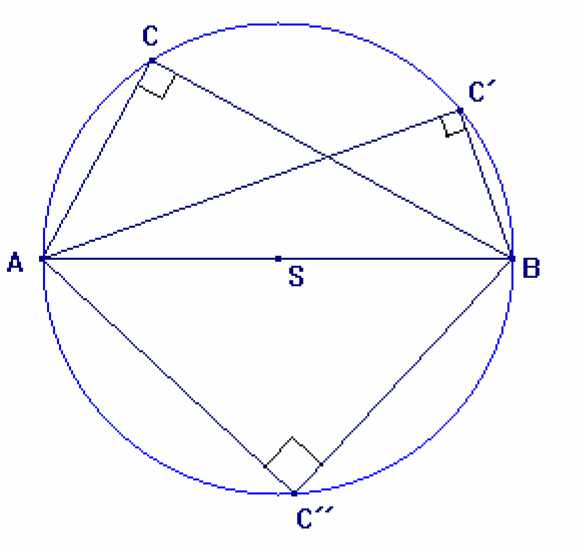
$b^2 = c \cdot y$



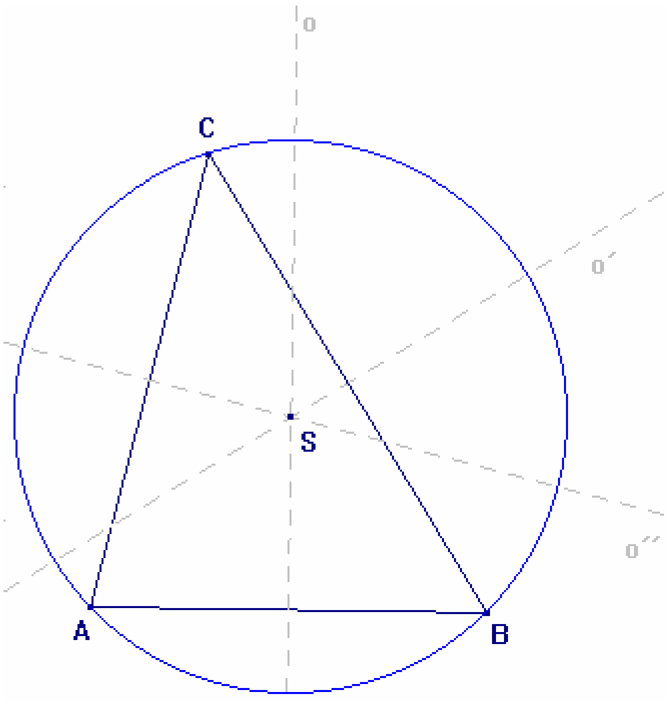
Pythagorova věta: „Jsou-li a, b velikosti odvěsen, c velikost přepony pravoúhlého trojúhelníka, platí: $c^2 = a^2 + b^2$ ([4], s. 371 - 373)



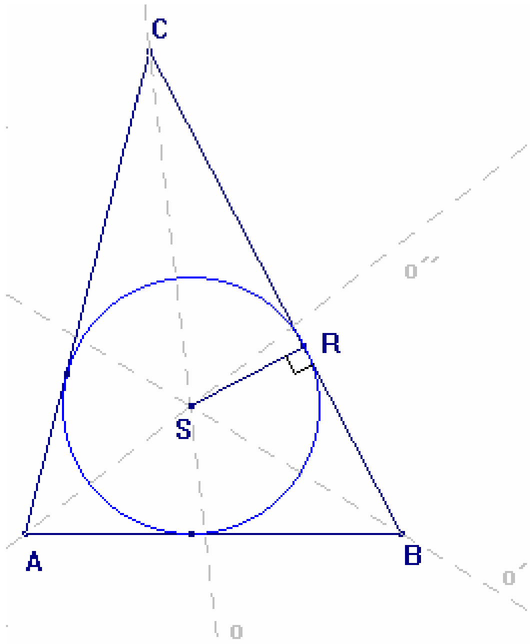
Thaletova věta: Všechny úhly sestrojené nad průměrem kružnice jsou pravé.



Kružnice opsaná trojúhelníku: Kružnice, která prochází všemi vrcholy trojúhelníka, se nazývá kružnice tomuto trojúhelníku opsaná. Její poloměr se zpravidla označuje *r*. Každému trojúhelníku lze opsat jedinou kružnici. Její střed *S* je průsečíkem os stran tohoto trojúhelníka. Je-li daný trojúhelník ostroúhlý, leží bod S uvnitř, je-li tupoúhlý, leží vně tohoto trojúhelníka, je-li pravoúhlý, leží ve středu jeho přepony.

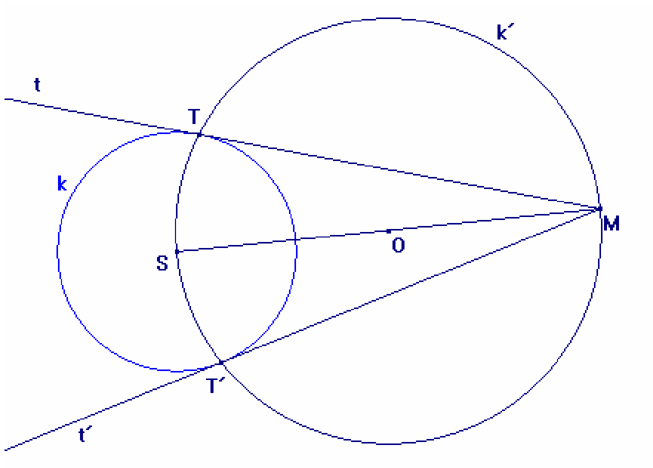


Kružnice vepsaná trojúhelníku: Kružnice, která se dotýká všech tří stran trojúhelníka se nazývá kružnice tomuto trojúhelníku vepsaná. Její poloměr se zpravidla označuje ρ. Každému trojúhelníku lze vepsat jedinou kružnici. Její střed S je průsečíkem os vnitřních úhlů tohoto trojúhelníka. V rovnostranném trojúhelníku splývá střed S kružnice vepsané a opsané s průsečíkem výšek V a těžištěm T. Protože jeho výšky mají velikost $v = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, kde a je strana rovnostranného trojúhelníka, a protože výšky splývají s těžnicemi, jsou poloměry kružnice opsané a vepsané $r = \frac{a}{3}\sqrt{3}$, $\rho = \frac{a}{6}\sqrt{3}$.



Příklad: Sestrojte tečny z bodu M k dané kružnici k.

Řešení: Body dotyku najdeme, sestrojíme-li Thaletovu kružnici, která má střed ve středu úsečky SM.



Mocnost bodu ke kružnici: Budiž dána kružnice k a mimo ni bod M. Veďme jím libovolnou sečnu kružnice k a označme průsečíky A, B. Pak lze dokázat, že součin $MA \cdot MB$ je konstantní pro libovolnou sečnu kružnice k. Pro $M \in k$ je zřejmě $MA \cdot MB = 0$

Na základě této věty přiřadíme libovolnému bodu M roviny reálné číslo m, pro něž platí: a) $|m| = |MA| \cdot |MB|$,

Kde A, B jsou průsečíky dané kružnice $k(S;\ r)$ s libovolnou sečnou procházející daným bodem M,

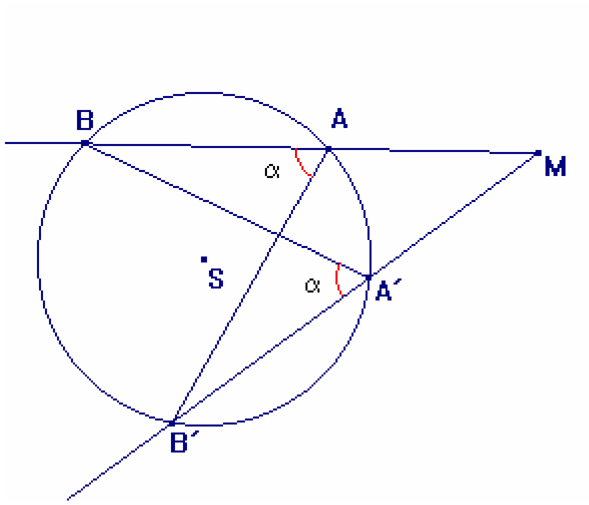
b) $m > 0$ pro body M vně kružnice k

$m = 0$ pro body $M \in k$

$m < 0$ pro body M uvnitř kružnice k

takto zavedené reálné číslo m nazýváme mocností bodu M ke kružnici k.

Mocnost bodu M ke kružnici $k(S;\ r)$ lze vyjádřit ve tvaru $m = v^2 - r^2$, kde $v \geq 0$ je vzdálenost bodu M od středu S. Odtud plyne, že mocnost bodu M ke kružnici lze vyjádřit ve tvaru $m = MT^2$, kde T je bod dotyku tečny vedené z bodu M k dané kružnici.



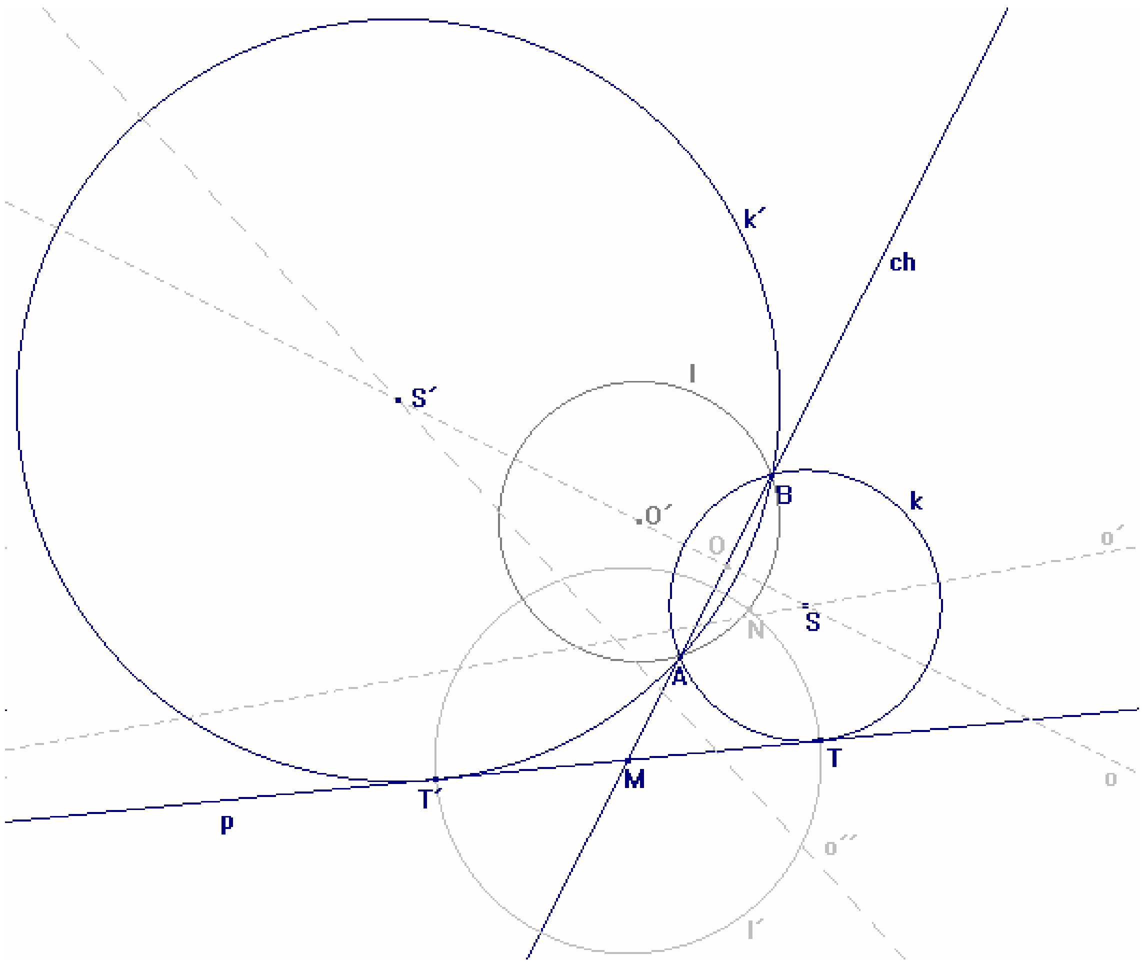
Příklad: Sestrojte kružnici, která prochází danými body *A*, *B* a dotýká se dané přímky *p*. Platí podmínky, že $(A \neq B);(AB \neq p)$

Řešení (jiné řešení): Ke konstrukci příkladu užijeme mocnosti bodu ke kružnici a přímku, která má stejnou mocnost k nesoustředným kružnicím *k* a *k´* nazývanou chordála.

Tedy sestrojíme si bod *M*, který je průsečíkem úsečky *A*, *B* a přímky *p*. Body *A*, *B* vedeme libovolnou kružnici, k níž sestrojíme libovolnou kružnici *l*. Dotykové body hledaných kružnic najdeme, pokud sestrojíme alespoň jednu tečnu k pomocné kružnici *l*. Tento bod je na obrázku vyznačen jako bod *N*. $|MN|^2 = |MA| \cdot |MB|$

Pak už jen najdeme body dotyku hledaných kružnic *T*, *T´* pro něž platí vztah: $|MT|^2 = |MA| \cdot |MB|$

Středy hledaných kružnic sestrojíme jako kružnice opsané trojúhelníkům *ABT* a *ABT´*.



Postup konstrukce:

6) v programu Cabri je libovolně volen bod *A*, *B* a přímka *p* se kterými je možný libovolný pohyb
7) $M \in \leftrightarrow AB \cap \leftrightarrow p$
8) $o \perp AB, O \in o$
9) libovolný bod *O´*, pro který platí: $O' \in o$
10) $l(O'; r = |O'A| = |O'B|)$
11) konstrukce tečny z bodu *M* ke kružnici *l*; bodem dotyku je bod *N*
12) pomocnou kružnici $l'(M; r = |MN|)$
13) body dotyku $T \in l' \cap p$;

    $T' \in l' \cap p$
14) kružnici *k* opsanou trojúhelníku *ABT*

    kružnici *k´* opsanou trojúhelníku *ABT´*

Úloha má tedy dvě řešení

„Přímka, která je množinou bodů, majících stejnou mocnost ke dvěma nesoustředným kružnicím se nazývá chordála.“

6. Seznam literatury

[1] Šofr,B.: *Euklidovské geometrické konštrukcie*, Bratislava: Alfa, 1976.

[2] Pomykalová, E.: *Matematika pro gymnázia Planimetrie*, Praha: Prometheus, spol.s.r.o., 2004

[3] Maška, O.: *Řešené úlohy z matematiky Planimetrie,* Praha: SNTL 1959

[4] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky,* Praha: SPN 1977

[5] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky,* Praha: Prometheus, spol. s.r.o. 2005