VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

MATICE, DETERMINANT A OBJEMY TĚLES

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE RADOVAN ŠOMPLÁK
AUTHOR

BRNO 2009

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

MATICE, DETERMINANT A OBJEMY TĚLES

MATRICES, DETERMINANT AND BODY VOLUME

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE — RADOVAN ŠOMPLÁK
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE — Mgr. PETR VAŠÍK, Ph.D.
SUPERVISOR

BRNO 2009

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky
Akademický rok: 2008/2009

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Radovan Šomplák

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Matice, determinant a objemy těles

v anglickém jazyce:

Matrices, Determinant and Body Volume

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Determinant matice je objemová forma. Jako taková určuje například změnu objemu tělesa daného lineárně nezávislými vektory po přenesení do jiného vektorového prostoru pomocí lineárního zobrazení reprezentovaného maticí. Důsledkem tohoto faktu je například známé Cramerovo pravidlo pro řešení soustav lineárních rovnic.

Cíle bakalářské práce:

Student by měl chápat matice jako lineární zobrazení mezi vektorovými prostory a determinant jako charakteristickou vlastnost těchto zobrazení. Dále by měl nalézt důsledky tohoto pohledu od výpočtu objemu čtyřstěnu po aplikaci Jacobiánu v transformacích vícenásobných integrálů.

Seznam odborné literatury:

Motl, L., Zahradník, M.: Pěstujeme lineární algebru, UK v Praze, Nakladatelství Karolinum, 2003.

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Vašík, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2008/2009.

V Brně, dne 20.11.2008

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.	doc. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Ředitel ústavu	Děkan fakulty

Abstrakt

Ve své bakalářské práci popisuji základní vlastnosti matic, determinantu a jejich využití v otázkách zobrazení mezi vektorovými prostory. V závěrečných kapitolách se věnuji determinantu a jeho aplikacím, kde ukazuji vztah mezi determinantem a výpočtem objemu. Následně popisuji použití determinantu při výpočtu těles pomocí vícenásobných integrálů. Další možnou aplikací je pak tzv. Cramerovo pravidlo, které nám umožňuje řešení soustav n lineárních rovnic o n neznámých.

Abstract

In his thesis describes the basic properties of matrices, determinants and their use in display issues between vector spaces. In the final chapters devoted to determinants and its applications, which indicates the relation between determinants and calculation of volume. Subsequently determinanti describes how to use in calculating the elements using multiple integrals. Another possible application is the so-called Cramerovo rule which allows us to solving systems of linear equations.

Klíčová slova

Matice, determinant, vektorový prostor, objem těles.

Keywords

Matrices, determinants, vector space, the volume of solids.

ŠOMPLÁK, R. *Matice, determinant a objemy těles.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. 25 s. Vedoucí bakalářské práce Mgr. Petr Vašík, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Matice, determinant a objemy těles* vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Petra Vašíka, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Radovan Šomplák

Děkuji svému školiteli Mgr. Petru Vašíkovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce.

Radovan Šomplák

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Počátky teorie matic a determinantů lze nalézt ve 2. století př.n.l., ale k jejímu skutečnému vývoji dochází teprve koncem 17. století, kdy byla teorie matic a determinantů znovu objevena v souvislosti se studiem soustav lineárních rovnic. Matematik Cardan ve svém díle "Ars Magna" z roku 1595 jako první uvedl pravidlo pro řešení soustavy dvou lineárních rovnic, které nazval regula de modo (matka pravidel). Cardanovo pravidlo pro řešení soustav o dvou lineárních rovnicích odpovídá Cramerovu pravidlu, ale Cardan neučinil poslední krok a nedospěl k definici determinantu. Jeho konstrukcí se zabýval japonský matematik Seki. Ve své práci: "Metody řešení nepodobných problémů", zapsal maticové metody jako tabulky přesně stejným způsobem, jako tomu bylo u čínských matematiků. Aniž Seki použil pojmu determinant, konstruoval je a vypracoval obecné metody počítání příkladů na jejich základě.
Ve své práci jsem ve 2. kapitole definoval vektorový prostor a jeho vlastnosti. V následující kapitole jsem definoval matice jako možný příklad vektorového prostoru. Ve 4. kapitole popisuji lineární zobrazení mezi vektorovými prostory a jejich reprezentaci pomocí matic při daných bázích. V závěrečných kapitolách se věnují determinantu a jeho aplikacím, kde ukazuji vztah mezi determinanem a výpočtem objemů rovnoběžnostěnu ve vektorových prostorech a následně popisuji použití determinantu při výpočtu těles pomocí vícenásobných integrálů. Další možnou aplikací je pak tzv. Cramerovo pravidlo, tedy pravidlo na řešení soustavy n lineárních rovnic o n neznámých, kdy matice soustavy má nenulový determinant.

Kapitola 2

Vektorový prostor a jeho vlastnosti

V této kapitole se budeme věnovat zavedení některých základních pojmů z lineární algebry. Například vektorový prostor, báze, skalární součin.

2.1 Vektorový prostor

Definice 2.1. Komutativní grupa $(\mathbb{V}, +)$ se nazývá vektorový prostor (nad $\mathbb{R}$), jestliže pro každý prvek $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ a každé reálné číslo $r \in \mathbb{R}$ je definován prvek $r \cdot \mathbf{v} = r\mathbf{v}$ z množiny $\mathbb{V}$ a přitom platí pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V};\ r, s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} r \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= r \cdot \mathbf{u} + r \cdot \mathbf{v}, \\ (r + s) \cdot \mathbf{u} &= r \cdot \mathbf{u} + s \cdot \mathbf{u}, \\ (r \cdot s) \cdot \mathbf{u} &= r \cdot (s \cdot \mathbf{u}), \\ 1 \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Prvky tohoto prostoru jsou *vektory* a značíme je $\overrightarrow{v}$ nebo tučným písmenem $\mathbf{v}$.

2.2 Lineární kombinace

Vektor

$$\mathbf{u} = \sum_i \mathbf{u_i} r_i, \quad r_i \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

nazveme *lineární kombinací* vektorů $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}$.

Definice 2.2. Pro libovolnou množinu vektorů M nazveme prostor $\mathcal{L}$ jejím lineárním obalem, jestliže

$$\forall \mathbf{u} \in \mathcal{L},\ \exists s_i \in \mathbb{R},\ \mathbf{v_i} \in \mathbf{M} \quad \mathbf{u} = \sum_i s_i \mathbf{v_i}$$

2.3 Báze a souřadnice

Definice 2.3. *Báze* prostoru $\mathbb{V}$ je každá minimální množina vektorů, jejímž lineárním obalem je celé $\mathbb{V}$. Minimální množina je taková, z níž nelze žádný prvek ubrat tak, že se lineární obal nezmění.

Definice 2.4. Jestliže vektorový prostor $\mathbb{V}$ má bázi $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ ($n \in \mathbb{N}$), nazveme číslo n *dimenzí vektorového prostoru* $\mathbb{V}$ a píšeme

$$\dim \mathbb{V} = n.$$

Definice 2.5. Koeficienty jediné lineární kombinace vyjadřující daný vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ ve zvolené bázi $(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n})$ se nazývají *souřadnice vektoru* $\mathbf{u}$ v této bázi.

Příklad 2.1. *Nechť báze vektorového prostoru* $\mathbb{V}$ *je tvořená vektory* $\mathbf{v_1} = (1, 0, 0), \mathbf{v_2} = (0, 1, 0), \mathbf{v_3} = (0, 0, 1)$. *A nechť* $\mathbf{u} = 3 \cdot \mathbf{v_1} + 5 \cdot \mathbf{v_2} + 6 \cdot \mathbf{v_3}$. *Pak* $\mathbf{u} = (3, 5, 6)$ *v bázi* $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

Příklad 2.2. *Nechť* $\mathbb{V}$ *je vektorový prostor dimenze* n *a nechť* $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$. *Pak* $\mathbf{u}$ *má v nějaké bázi souřadnice* $(u_1, \ldots, u_n)$. *Tedy máme identifikaci* $\mathbb{V} \approx \mathbb{R}^n$ *proto můžeme* $\mathbb{R}^n$ *chápat jako vektorový prostor.*

Definice 2.6. Nechť $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ je uspořádaná báze vektorového prostoru $\mathbb{V}$. Řekneme, že tato báze je *kladná* nebo *pravotočivá*, jestliže při otočení o dutý úhel φ $(0 < \varphi < \pi)$ proti směru hodinových ručiček kolem osy dané vektorem $\mathbf{v}_3$ vektor $\mathbf{v}_1$ splyne s vektorem $\mathbf{v}_2$. V opačném případě se nazývá *záporná* nebo *levotočivá*.

2.4 Skalární součin

Definice 2.7. Zobrazení $\mathbb{V}^2 \to \mathbb{R}$ je *skalárním součinem* (značíme $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ nebo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$), platí-li pro všechna $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}$ a pro všechna $a \in \mathbb{R}$ následující vztahy

1. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})$
3. $(a \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v}) = a \cdot (\mathbf{u}, \mathbf{v})$
4. $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0,\ (\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Poznámka 2.1. Obecně lze vektorový prostor definovat nad polem $\mathbb{T}$, pak skalární součin je zobrazení $\mathbb{V}^2 \to \mathbb{T}$ a vlastnost 1. bude tvaru $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$. Kde pruhem je označeno číslo komplexně sdružené.

Kapitola 3

Matice

Definice 3.1. Buďte $m, n \in \mathbb{N}$ a pro celá čísla i, j $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ buďte a_{ij} čísla reálná. Schéma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

obsahující m řádků a n sloupců se nazývá *matice typu* $m \times n$ a reálná čísla a_{ij} se nazývají *prvky matice* A. Značíme $A = (a_{ij}), 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n.$

Jestliže $n = m$, nazývá se matice A *čtvercová matice.* V tomto případě číslo $m = n$ nazýváme *řádem matice* A. Jestliže $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu m, pak matice

$$u = (a_{11}, \ldots, a_{mm})$$

typu $1 \times m$ se nazývá *hlavní diagonála matice* A. Jsou-li všechny prvky matice matice A rovny nule s možnou výjimkou prvků na hlavní diagonále, nazýváme matici A *diagonální* a píšeme

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_m \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Definice 3.2. Nechť A je matice typu $m \times n$. Pro celá čísla k,l $(1 \leq k \leq n,\ 1 \leq l \leq m)$ položíme $b_{kl} = a_{lk}$. Pak matice $B = (b_{kl})$ $(1 \leq k \leq n,\ 1 \leq l \leq m)$ typu $n \times m$ se nazývá *matice transponovaná k matici* A a značí se A^T nebo A'. Jestliže $A = A^T$, pak se A nazývá *symetrická matice.* Symetrická matice je čtvercová.

Definice 3.3. Nechť $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ jsou matice stejného typu $m \times n$. Pro celá čísla i,j položíme $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Matice $C = (c_{ij})$ typu $m \times n$ se nazývá *součet matic* A,B a píšeme

$$C = A + B. \tag{3.3}$$

Definice 3.4. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$ a $r \in \mathbb{R}$. Položíme $(c_{ij}) = r \cdot (a_{ij})$. Matice $C = (c_{ij})$ se nazývá *součin matice* A *s reálným číslem* r a píše se

$$C = r \cdot A \quad \text{nebo} \quad C = rA \tag{3.4}$$

Poznámka 3.1. Matice spolu s operátory + a násobením skalárem tvoří vektorový prostor.

Definice 3.5. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$ a $B = (b_{ij})$ je matice typu $n \times p$ $(n, m, p \in \mathbb{N})$. Pro celá čísla i, j položíme

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj}. \tag{3.5}$$

Matice $C = (c_{ij})$ typu $m \times p$ se nazývá *součinem matice A s maticí B*. Píšeme pak

$$C = A \cdot B \quad \text{nebo} \quad C = AB. \tag{3.6}$$

Věta 3.1. *Nechť A,B,C jsou matice vhodných typů. Pak platí:*

$$(a) \quad A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \qquad \text{(pravý asociativní zákon)} \tag{3.7}$$

$$(b) \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \qquad \text{(levý distributivní zákon)} \tag{3.8}$$

$$(c) \quad (B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A \qquad \text{(pravý distributivní zákon)} \tag{3.9}$$

Pro násobení matic neplatí komutativní zákon.

Definice 3.6. Pro přirozené číslo n budeme značit I_n čtvercovou matici řádu n, jejíž všechny prvky jsou rovny 0 s výjimkou prvků na hlavní diagonále, které jsou rovny číslu 1. Matice I_n je tedy diagonální matice, která se nazývá *jednotková matice (řádu n).* Není-li to nutné, značí se matice I_n jen písmenem I Máme tedy

$$I = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Věta 3.2. *Nechť A je matice typu $m \times n$, B matice typu $n \times p$. Pak platí:*

$$A \cdot I_n = A, \quad I_n \cdot B = B.$$

Věta 3.3. *Nechť A je matice typu $m \times n$ a B je matice typu $n \times p$. Pak platí:*

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

Kapitola 4

Lineární zobrazení

Definice 4.1. Nechť $\mathbb{V}$ a $\mathbb{W}$ jsou lineární prostory. *Lineárním zobrazením* mezi vektorovými prostory (*homomorfismem*) $f : \mathbb{V} \mapsto \mathbb{W}$ rozumíme každé zobrazení splňující vztahy

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}, \\ f(c\mathbf{v}) &= cf(\mathbf{v}) \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Definice 4.2. Budiž $f : A \mapsto B$, $g : B \mapsto C$. Zobrazení $h : A \mapsto C$ určené vzorcem: $h(x) = g[f(x)]$ pro každé $x \in A$ se nazývá *složené zobrazení ze zobrazení f a zobrazení g*. Pořadí zobrazení g a f není volitelné. Zobrazení h značíme symbolem $g \circ f$. Tedy $h = g \circ f : A \mapsto C$.

Poznámka 4.1. Každé lineární zobrazení mezi vektorovými prostory dané lze pro dané báze reprezentovat maticí příslušných rozměrů. Nebude-li uvedeno jinak, budeme v následujícím textu používat standartní ortonormální bázi.

Poznámka 4.2. Součin matic můžeme chápat i jako skládání zobrazení. $\mathbf{u} \cdot A : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{v} \in \mathbb{W}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{V}, A$ je matice vhodného typu. $\mathbf{v} \cdot B : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{w} \in \mathbb{Z}$, B je matice vhodného typu. $C = A \cdot B, \mathbf{u} \cdot C : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{w}$.

Příklad 4.1. *Položme*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u} = (1,2,3) \quad \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot A = (7,7),$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot B = (21,7,7),$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot C = (21,7,7).$$

Poznámka 4.3. U sloupcových vektorů probíhá násobení matice A a vektoru $\mathbf{u}$ v opačném pořadí, kde matice A je transponovaná. Dale budeme uvažovat vektory sloupcové.

Příklad 4.2. *Položme*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = A \cdot \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

4.1 Příklady

1. Zobrazení typu $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, kde

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad f_k(\mathbf{x}) = \sum_j a_{jk} x_j. \tag{4.1}$$

   Tabulku (a_{jk}) nazýváme maticí tohoto zobrazení.

2. Otočení, zrcadlení, stejnolehlost, zkosení.

   Podrobněj se budeme věnovat Otočení:
   Nechť E je libovolná uspořádaná ortonormální báze $\mathbb{R}^2$. Pomocí matice otočení

$$R_2 = \begin{pmatrix} \mathit{cos}\ \varphi & \text{-}\mathit{sin}\ \varphi \\ \mathit{sin}\ \varphi & \mathit{cos}\ \varphi \end{pmatrix}$$

   dokážeme otáčet vektory v $\mathbb{R}^2$ okolo počátku o zadaný úhel φ. Nechť $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ je vektor. Otočení vektoru $\mathbf{x}$ o úhel φ spočítáme vztahem

$$\overline{\mathbf{x}} = R \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

   kde vektor $\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \end{pmatrix}$, jehož složky odpovídají souřadnicím otočeného vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k stejné bázi.
   Matici R_2 otáčení v rovině můžeme snadno rozšířit i do $\mathbb{R}^3$ s libovolnou uspořádanou ortonormální bázi $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ tak, aby otáčela vektory kolem osy dané vektorem $\mathbf{e}_3$. Při takové rotaci totiž zůstává třetí souřadnice konstantní a první dvě se otočí jako v rovině. Matice rotace vzhledem k bázi E kolem osy dané $\mathbf{e}_3$ je tedy matice:

$$\begin{pmatrix} \mathit{cos}\ \varphi & \text{-}\mathit{sin}\ \varphi & 0 \\ \mathit{sin}\ \varphi & \mathit{cos}\ \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Řada příkladu z matematické analýzy na nekonečněrozměrných prostorech funkcí a jejich vhodných podprostorech, například

$$f \to f' = \frac{df}{dx} \quad \textit{(derivace)} \tag{4.2}$$

$$f \to \int_0^x f(y)dy \quad \textit{(primitivní fukce)} \tag{4.3}$$

$$f \to g \cdot f \quad \textit{(násobení fukcí)} \tag{4.4}$$

$$f \to f_t \quad \textit{kde } f_t(x) = f(x+t), \quad \textit{(posun o t).} \tag{4.5}$$

Kapitola 5

Determinant

V této části se budeme věnovat jednomu z nejdůležitějších pojmů lineární algebry. Zavedeme si pojem *determinant matice* A, jeho vlastnosti a metody jeho výpočtu. Každé čtvercové matici $A = (a_{ij})$ řádu n je přiřazeno reálné číslo nazývané *determinant matice* A. Značíme:

$$\det A \qquad \text{nebo} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A|.$$

Pro čtvercovou matici $A = (a)$ řádu 1 je definice determinantu snadná - klademe

$$\det A = \det\,(a) = a.$$

Definice 5.1. Bijektivní zobrazení množiny A samu na sebe nazveme *permutací množiny* A. Permutace σ množiny $A = \{1, \dots, n\}$ lze zapsat pomocí výsledného pořadí ve formě tabulky : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$. Prvek $a \in A$ se nazývá samodružným bodem permutace σ, pokud platí $a = \sigma(a)$. Permutaci, ve které jsou prohozeny pouze dva prvky a ostatní jsou na svých pořadových místech, nazýváme *transpozicí*. Každou další permutaci lze zkonstruovat pomocí konečného počtu transpozic.

Definice 5.2. Nechť $a, b \in A = \{1, \dots, n\}$, σ je permutace množiny A a platí $a > b$ a $\sigma(a) < \sigma(b)$. Pak dvojice prvků a, b tvoří *inverzi v permutaci* σ. Permutace σ se nazývá *lichá* (resp.*sudá*), jestliže má *lichý* (resp. *sudý*) počet inverzí. *Parita permutace* σ je $(-1)^m$, kde m je počet inverzí. Paritu permutace σ značíme $\operatorname{sgn}(\sigma)$. Na množině $A = \{1, \dots, n\}$ je právě $n!$ různých permutací. Množinu všech permutací množiny A budeme značit S_n.

Definice 5.3. Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n. Pak číslo

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

nazýváme *determinant* matice A.

Poznámka 5.1. Jinak řečeno, determinant je číslo, které vznikne součtem součinů, které jsou tvořeny vždy právě jedním číslem z každého sloupce i řádku. Znaménko součinu je dáno počtem transpozic.

Nyní zavedeme definici determinantu pomocí Laplaceova rozvoje, který je vhodnější pro počítání determinantů v praxi.

Definice 5.4. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$ a nechť $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l (k, l \in \mathbb{N})$ jsou přirozená čísla s vlastností $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k < m$, $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_l < n$. Vybranou podmatici matice A na řádcích $i_1, \dots, i_k$ a sloupcích $j_1, \dots, j_l$ matice A rozumíme matici B, která vznikne z matice A, jestliže vypustíme všechny řádky s výjimkou řádků $i_1, \dots, i_k$ a všechny sloupce s výjimkou sloupců $j_1, \dots, j_l$. Jinak řečeno: matice $B = (b_{uv})$ je matice typu $k \times l$, kde pro $1 \leq u \leq k$, $1 \leq u \leq l$ máme

$$b_{uv} = a_{i_u j_v}.$$

Příklad 5.1. *Uvažujme matici* A *typu* 3×4*:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -5 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Podmaticí matice A *vybraná na řádcích* 1,3 *a sloupcích* 2,4 *matice* A *je matice* B *typu* 2×2*:*

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definice 5.5. Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Předpokládejme, že pro každou matici řádu $n-1$ je již definován její determinant. Nechť $i, j \in \mathbb{N}$ a platí $1 \leq i, j \leq n$. Determinant z podmatice matice A vybrané na všech řádcích matice A s výjimkou řádku i a všech sloupců matice A s výjimkou sloupce j nazveme *(i,j)-minorem matice A* a označíme ho symbolem $M_{ij}(A)$. *Algebraický doplněk prvku a_{ij} matice A* nebo též *(i,j)-kofaktor matice A* označovaný symbolem $C_{ij}(A)$ je definován jako číslo

$$C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} M_{ij}(A).$$

Definice 5.6. Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ a předpokládáme, že pro každou čtvercovou matici řádu $n-1$ je již definován její determinant. Pro přirozená čísla *i,j*, $1 \leq i, j \leq n$ položíme

$$R(i) = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} C_{ir}(A), \; S(j) = \sum_{\eta=1}^{n} a_{\eta j} C_{\eta j}(A).$$

Jedním z nejdůležitějších výsledků této teorie je fakt, že všechny hodnoty R(i) a S(j) jsou si rovny, jinak řečeno :
Pro přirozená čísla *i,j,k,l*, $1 \leq i, j, k, l \leq n$ máme

$$R(i) = R(k) = S(j) = S(l).$$

Tuto společnou hodnotu nazveme *determinant matice A*. Jestliže počítáme det A pomocí výrazu *R(i)*, řekneme, že jsme det A počítali *Laplaceovým rozvojem podle i-tého řádku* nebo že jsme det A *rozvinuli podle i-tého řádku (Laplaceovým rozvojem)*. Podobně pro sloupec.

Věta 5.1. *Pro čtvercovou matici* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *2. řádu máme*

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & c \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cd.$$

Věta 5.2. *Pro čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ 3. řádu máme*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Příklad 5.2. *Položíme*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 6 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pak determinant matice A *vypočítáme Laplaceovým rozvojem podle druhého řádku a užijeme větu* 5.2:

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)\cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)\cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= -2(-12 - 6 + 0 + 9 + 12 - 0) - 4(16 - 6 + 18 - 9 - 24 + 8) = \\ &= -6 - 12 = -18 \end{aligned}$$

Věta 5.3. *Pro čtvercovou matici A platí:*

$$\det A = \det A^T.$$

Poznámka 5.2. Z toho plyne, že vše co platí v determinantu pro řádky, platí i pro sloupce a naopak.

Věta 5.4. *Nechť A je čtvercová matice. Pak platí:*

(a) *Jestliže některý řádek nebo sloupec obsahuje samé nuly, pak* $\det A = 0$.

(b) *Jestliže zaměníme dva sousední řádky nebo sloupce matice A, pak se změní znaménko determinantu.*

(c) *Jestliže řádek nebo sloupec matice A násobíme reálným číslem r, pak výsledná matice má determinant rovný* $r \cdot (\det A)$.

(d) *Jestliže dva různé řádky nebo sloupce matice A jsou si rovny, pak* $\det A = 0$.

Důkaz: Tvrzení (a) a (c) plynou ihned z definice determinantu matice a tvrzení (d) plyne snadno (b).
Tvrzení (b) dokážeme úplnou indukcí vzhledem k řádu n matice A. Pro $n = 1$ a $n = 2$ toto tvrzení zřejmě platí. Nechť $n \geq 3$ a nechť platí (b) pro determinanty řádu $n - 1$. Nechť $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ a vyměňme v matici A řádky i a j. Jelikož $n \geq 3$, existuje $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, $i \neq k \neq j$. Rozviňme det A podle řádku k. Pak Pak v algebraických doplňcích prvků a_{kl} $(1 \leq l \leq n)$ jsou vyměněny dva různé řádky, tudíž podle indukčního předpokladu mění tyto algebraické doplňky znaménko, z čehož plyne tvrzení pro řádky. Tvrzení pro sloupce plyne z věty 5.3.

5.1 Vektorový součin

Definice 5.7. *Normou vektoru* $\|\mathbf{u}\|$ rozumíme reálnou funkci na vektorovém prostoru $\mathbb{V}$, platí-li pro libovolné dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ a libovolný $a \in \mathbb{R}$:

1. $\|\mathbf{u}\| \geq 0$
2. $\|\mathbf{u}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{u} = 0$
3. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$
4. $\|a\mathbf{u}\| = |a| \cdot \|\mathbf{u}\|$

Pomocí skalárního součinu zavedeme úhel dvou vektorů. V následujícím textu budeme používáme euklidovskou normu, která je dána $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Definice 5.8. *Úhlem* dvou nenulových vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ rozumíme úhel $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ daný vztahem

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}, \quad \text{tj.} \quad \varphi = \arccos \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}.$$

Nyní zavedeme operaci vektorového součinu ve $\mathbb{V}$ dimenze 3 (dále budeme značit $\mathbb{V}_3$).

Definice 5.9. Nechť $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{V}_3$. Definujeme vektorový součin vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ (v tomto pořadí) jako vektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \in \mathbb{V}_3$ daný vztahem

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{jsou-li vektory lineárně závislé} \\ \mathbf{w}, & \text{nejsou-li vektory lineárně závislé,} \end{cases}$$

přičemž

(i) $\| \mathbf{w} \| = \| \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{v} \| \cdot \sin\varphi$, kde φ je úhel vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$,

(ii) vektor $\mathbf{w}$ je kolmý k vektorům $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$,

(iii) uspořádaná báze ($\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$) je kladná.

Věta 5.5. *Operace vektorového součinu má tyto vlastnosti:*

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ *pro libovolné* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{V}_3$. *(antikomutativní zákon)*
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ *pro libovolné* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{V}_3$. *(distributivní zákon)*
3. $(a \cdot \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = a \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ *pro libovolné* $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{V}_3$.
4. $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$, *kde* $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$.
5. $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$, *kde* $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$.
6. *Je-li* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, *pak*

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right). \tag{5.2}$$

Kapitola 6

Objemy a jejich aplikace

6.1 Objemy a lineární zobrazení

Definice 6.1. Smíšeným součinem $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ tří vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ (v tomto pořadí) nazýváme číslo

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

Věta 6.1. *Pro smíšený součin tří vektorů* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *(v tomto pořadí), které v ortonormálné bázi* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *mají souřadnice* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3), \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ *platí*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Věta 6.2. *Smíšený součin má tyto vlastnosti:*

1. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

2. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$

3. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a})$.

4. $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1, \ (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) = 1, \ (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1, \ \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_=(0, 0, 1)$.

5. *Objem V rovnoběžnostěnu, který je určen třemi vektory* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, *je určen*

$$V = |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|.$$

Příklad 6.1. *Určete objem V rovnoběžnostěnu daného vektory* $\mathbf{a} = (1, 2, 3), \mathbf{b} = (2, 3, 2), \mathbf{c} = (1, 1, 2)$.

$$V = |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})| = |\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}| = |\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}| = |6 + 6 + 4 - 9 - 2 - 8| = 3.$$

Příklad 6.2. *Mějme dva vektorové prostory $\mathbb{V}$ a $\mathbb{W}$, které mají dimenzi 3 a mějme lineární zobrazení $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ reprezentované maticí* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Jak se změní objem* *rovnoběžnostěnu z příkladu* 6.1*, zobrazíme-li rovnoběžnostěn sestrojený vektory* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}$ *na rovnoběžnostěn daný vektory* $A \cdot \mathbf{a}, A \cdot \mathbf{b}, A \cdot \mathbf{c} \in \mathbb{W}$*?*

$$\overline{\mathbf{a}} = A \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{b}} = A \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{c}} = A \cdot \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$V' = (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = |\det \begin{pmatrix} 10 & 10 & 9 \\ 11 & 14 & 9 \\ 7 & 7 & 6 \end{pmatrix}| = |840 + 693 + 630 - 882 - 660 - 630| = 9.$$

Jelikož matice A *reprezentuje lineární zobrazení* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$*, můžeme využít její determinant, který udává násobek změny objemu, a tím si usnadnit výpočet, protože platí* $V' = |A| \cdot V$*.*

$$\det\ A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 6 + 1 - 4 - 2 - 6 = 3, \quad V' = |A| \cdot V = 3 \cdot 3 = 9.$$

Věta 6.3. ***(Cauchyova věta o determinantu součinu matic)***
Nechť A,B jsou čtvercové matice stejného řádu. Pak

$$\det (A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

Příklad 6.3. *Mějme dva vektorové prostory* $\mathbb{W}$ *jako v Příkladu* 6.2 *a* $\mathbb{U}$*, které mají dimenzi 3 a mějme lineární zobrazení* $g : \mathbb{W} \to \mathbb{U}$ *reprezentované maticí* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$*. Jak se změní objem rovnoběžnostěnu z Příkladu* 6.2 *zobrazíme-li rovnoběžnostěn daný vektory* $\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}$ *na rovnoběžnostěn daný vektory* $B \cdot \overline{\mathbf{a}}, B \cdot \overline{\mathbf{b}}, B \cdot \overline{\mathbf{c}}$*?*

$$\det\ B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 9 - 2 - 12 = 3, \quad V'' = |B| \cdot V' = 3 \cdot 9 = 27.$$

Využijeme Větu 6.3*. Lineární zobrazení* $g \circ h$ *vznikne složením zobrazení* f *a* g*, a je pak reprezentované matici* $A \cdot B$*.*

$$C = B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 11 \\ 10 & 7 & 8 \\ 11 & 8 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\det\ C = \begin{vmatrix} 10 & 7 & 11 \\ 10 & 7 & 8 \\ 11 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 490 + 880 + 616 - 640 - 490 - 847 = 9, \quad V'' = |C| \cdot V = 9 \cdot 3 = 27.$$

6.2 Jacobián a její aplikace

Definice 6.2. Nechť $f_i(x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jsou funkce, které mají parciální derivace $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ pro $i = 1, \ldots, n$. Pak *Jacobiho determinant (Jacobián)* je definován jako

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Jacobián se využívá při transformacích souřadnic při výpočtu integrálů.

Příklad 6.4. *Vypočteme objem válce o poloměru r a výšce v pomocí transformace do cylindrických souřadnic.*

Převod kartézských souřadnic (x, y, z) na cylindrické souřadnice (ρ, φ, w) je dán vztahy.

$$x = \rho \cdot \cos\varphi,\ y = \rho \cdot \sin\varphi,\ z = w,\ \text{kde } \rho \in \langle 0, r\rangle,\ \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ w \in \langle 0, v\rangle.$$

Změna objemu při změně souřadnic je vyjádřena Jacobiánem

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho\,(\cos\varphi)^2 + \rho\,(\sin\varphi)^2 = \rho,$$

Neboť objem daného válce je $\pi r^2 v$, ale bez doplnění Jacobiánu by objem tělesa po transformaci byl roven objemu kvádru daného rozsahem proměných ρ, φ, w, $\rho \in \langle 0, r\rangle$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $w \in \langle 0, v\rangle$, tedy $2\pi r v$. S doplněným Jacobiánem však získáme

$$\int_0^r \int_0^v \int_0^{2\pi} \rho\ d\varphi dw d\rho = \pi\, r^2\, v.$$

6.3 Cramerovo pravidlo

Cramerovo pravidlo je metoda umožňující nalezení řešení soustavy lineárních rovnic pomocí determinantů. Determinantem soustavy n lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \tag{6.1}$$

nazýváme determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{6.2}$$

Věta 6.4. *Je-li determinant* (6.2) *soustavy lineárních rovnic různý od nuly, pak tato soustava má jediné řešení*

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

kde

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

pro $i = 1, 2, \cdots, n$.

Je-li $D = 0$, pak soustava (6.1) buď nemá řešení, nebo má nekonečně mnoho řešení.

Příklad 6.5. *Pomocí determinantu řešme soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} 3x + 4y - z &= 5, \\ x + 2y + 3z &= 3, \\ x - 2y + z &= 1. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Nejdříve vypočítáme determinanty D, D_1, D_2, D_3 :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6{+}2{+}12{+}2{+}18{-}4 = 36, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 10{+}6{+}12{+}2{+}30{-}12 = 48,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9{-}1{+}15{+}3{-}9{-}5 = 12, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6{-}10{+}12{-}10{+}18{-}4 = 12.$$

Daná soustava rovnic má tedy řešení

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{48}{36} = \frac{4}{3}, \qquad y = \frac{D_2}{D} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}, \qquad z = \frac{D_3}{D} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

Kapitola 7

Závěr

Ve své práci jsem se snažil co nejpřehledněji a nejsrozumitelněji popsat základní vlastnosti matic, determinantů, a ukázat jejich využití v různých oblastech matematiky, nejen v lineární algebře. Matice jsem se snažil chápat také jako reprezentanty lineárních zobrazení mezi vektorovými prostory a determinantem jsem pak rozuměl objemovou formu, tedy číslo vyjadřující změnu objemu po aplikaci lineárního zobrazení reprezentovaného danou maticí. Ukazuje se, že tuto vlastnost determinantu lze využít i při výpočtech objemů těles pomocí trojných integrálů, změna objemu je reprezentována tzv. Jacobiánem. Spíše klasickou aplikací determinantu v lineární algebře je pak tzv. Cramerovo pravidlo pro řešení SLR.
Ve své práci jsem se tedy snažil o propojení lineární algebry a některých dalších oblastí matematiky.

Literatura

[1] KARÁSEK, J., SKULA, L.: *Lineární algebra*, CERM, Brno, 2005.

[2] MOTL, L., ZAHRADNÍK, M.: *Pěstujeme lineární algebru*, Karolinum, Praha, 2003.

[3] JIRÁSEK, F., KRIEGELSTEIN, E., TICHÝ, Z.: *Sbírka řešených příkladů z matematiky*, SNTL, Praha, 1981.

[4] SLOVÁK, J.: *Lineární algebra [online]*, 1997/1998.
Dostupné z www: <http://www.math.muni.cz/~slovak/Vyuka/la.pdf>.

[5] VESELÝ, P.: *2D transformace [online]*, 2006.
Dostupné z www:
<http://school.lynn.cz/grafika/prednasky/PG_2006_P03_Trasformace2D_4s.pdf>.

[6] REKTORYS, K. a spol.: *Přehled užité matematiky I.* Prometheus, spol. s.r.o., Praha, 2003.

[7] BARTOŠ, R., SVRŠEK, J.: *Matice a determinanty [online]*, 3.9.2001.
Dostupné z www: <http://natura.baf.cz/natura/2001/9/20010903.html>.