VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA PODNIKATELSKÁ

FACULTY OF BUSINESS AND MANAGEMENT

ÚSTAV INFORMATIKY

INSTITUTE OF INFORMATICS

TEORIE KOALIC PRO COURNOTŮV MODEL OLIGOPOLU

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE — Ivan Eryganov

AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE — doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.

SUPERVISOR

BRNO 2017

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA PODNIKATELSKÁ

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav informatiky
Student:	**Ivan Eryganov**
Studijní program:	Kvantitativní metody v ekonomice
Studijní obor:	Matematické metody v ekonomice
Vedoucí práce:	**doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.**
Akademický rok:	2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 Sb., o vysokých školách ve znění pozdějších předpisů a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně zadává bakalářskou práci s názvem:

Teorie koalic pro Cournotův model oligopolu

Charakteristika problematiky úkolu:

Úvod
Cíle práce, metody a postupy zpracování
Teoretická východiska práce
Analýza současného stavu
Vlastní návrhy řešení
Závěr
Seznam použité literatury

Cíle, kterých má být dosaženo:

Cílem práce je osvojení si základů teorie her s důrazem na vybrané speciální partie kooperativní teorii her. Vybudovaná teorie bude demonstrována na několika praktických příkladech.

Základní literární prameny:

GILLES, Robert P. The cooperative game theory of networks and hierarchies. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. ISBN 978-3-642-05281-1.

OWEN, Guillermo. Game theory. Philadelphia: W.B. Saunders, 1969. ISBN 125-311-516.

PELEG, Bezalel a Peter SUDHÖLTER. Introduction to the theory of cooperative games. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003. ISBN 14-020-7784-X.

PETERS, Hans. Game Theory-A Multi-Leveled Approach. Berlin: Springer-Verlag, 2015. ISBN 978--662-46950-7.

SCHOFIELD, Norman. Mathematical methods in economics and social choice. Berlin: Springer-Verlag, 2014. ISBN 978-364-2398-179.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně dne 28.2.2017

L. S.

doc. RNDr. Bedřich Půža, CSc. ředitel	doc. Ing. et Ing. Stanislav Škapa, Ph.D. děkan

Abstrakt

Tato bakalářská práce je věnovaná základním teoretickým aspektům teorie her, chování firem v podmínkách oligopolu a budování teorie, která by popisovala chování firem v kooperativních oligopolních hrách pro Cournotův oligopol. V dané práci jsou vysvětlovány důležité pojmy, jejichž vlastnosti jsou demonstrované na příkladech. Dále je práce soustředěna na kooperativní oligopolní hry, popisování jejich vlastností a definování γ-charakteristické funkce. Postup počítání a popis některých vlastností kooperativních oligopolních her jsou demonstrované na dvou příkladech.

Abstract

This bachelor thesis is devoted to the basic theoretical aspects of game theory, to the behavior of firms in oligopoly conditions and to the building of theory which describe behaviour in cooperative oligopoly games for Cournot's oligopoly. At this work are explained important definitions and they properties are demonstrated in the examples. Further work is focused on cooperative oligopoly games, describing their properties and defining a γ-characteristic function. Procedure of computing it and the description of some properties of cooperative oligopoly games are demonstrated on two examples.

klíčová slova

teorie her, kooperativní hry, jádro, Cournotův model, oligopol, γ-charakteristická funkce

key words

game theory, cooperative games, core, Cournot model, oligopoly, γ-characteristic function

Bibliografická citace

ERYGANOV, I. Teorie koalic pro Cournotův model oligopolu. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta podnikatelská, 2017. 74 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že předložená bakalářská práce je původní a zpracoval jsem ji samostatně. Prohlašuji, že citace použitých pramenů jsou úplné, že jsem ve své práci neporušil autorská práva (ve smyslu Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském a o právech souvisejících s právem autorským).

V Brně dne 2. června 2017

....

Ivan Eryganov

Poděkování
Rád bych poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce doc. Mgr. Jaroslavu Hrdinovi, Ph.D. za jeho odborné vedení, cenné rady a vstřícnost při konzultacích a vypracování mé bakalářské práce.

Obsah

Úvod

Teorie her je matematickým oborem sloužícím nejen k matematickému popisu různých konfliktních situací, ve kterých dochází ke střetu zájmů jednotlivých účastníků konfliktu, ale i k nalezení optimálních strategií pro "hráče". Optimální strategie jako řešení pro matematické modely byly nabízeny ještě v 18. století. V 19. století byly studovány úlohy výroby a tvorby cen v oligopolech, v jejichž rámcích byly předložené představy o matematické teorii střetu zájmů. Jedním z takových příkladů je právě Cournotův model oligopolu, který popisuje konkurování firem v oligopolu prostřednictvím změn v objemech jejich výroby. Teorie budované a probírané v praktické části této práce jsou založené na myšlence, že firmy konkurují mezi sebou právě prostřednictvím změn výstupů. Avšak Cournotův model byl pouhým základem teorie her. Poprvé byly matematické aspekty teorie her a její aplikace popsané v knize Johna von Neumanna a Oskara Morgensterna „Teorie her a ekonomického chování" vydané v roce 1944. Při studování různých konfliktních situací, kterým se říká hry, se setkáme s tím, že hry je možné rozdělit na dvě základní skupiny. První skupinou je skupina nekooperativních her, takových situací, ve kterých neexistuje žádná spolupráce mezi účastníky konfliktu. Je zřejmé, že druhou skupinou jsou kooperatívní hry, ve kterých hráči navzájem spolupracují a mohou vytvářet mezi sebou koalice. Cournotuv model je obecně nekooperativní hrou firem mezi sebou. Avšak v této práci jsou základní úvahy tohoto modelu přeskládány tak, abychom dostali kooperativní hru firem mezi sebou.

První kapitola je nejprve věnovaná základům teorie grafů, které jsou nezbytné k pochopení teorie her. Dále je věnovaná základním pojmům teorie her, formám her a kooperativním hrám a jejich vlastnostem. Na konci jsou představeny základy teorie oligopolu a základní modely oligopolu. Důležité teoretické poznatky jsou demonstrované na příkladech.

Ve druhé kapitole se zabýváme kooperativními oligopolními hrami pro Cournotův oligopol s kapacitními omezeními. V první části budujeme matematický model pro oligopolní situaci: definujeme oligopolní hru v normální formě, kooperativní oligopolní hru a γ- charakteristickou funkci. Druhá část kapitoly obsahuje studium vlastností kooperatívních oligopolních her pro Cournotův oligopol, jehož základním cílem je ukázat na to, že γ- charakteristická funkce je dobře definována, neboli že může být aplikovaná na množinu kooperatívních oligopolních her splňujících určité vlastnosti. Třetí část je věnovaná balancovanosti kooperatívních oligopolních her pro Cournotův oligopol a existenci γ-jádra. Ve čtvrté části jsou řešené otázky nalezení řešení pro oligopolní hry, ve kterých jsou nákladové funkce firem lineárními funkcemi.

Na závěr ve třetí kapitole jsou představené praktické příklady, na základě kterých je demonstrován postup počítaní γ-charakteristické funkce pro konkrétní oligopolní situaci za využití optimalizačních nástrojů, které jsou součástí softwaru "Matlab". Navíc pro dané příklady zjišťujeme některé vlastnosti kooperatívních her a také pomocí "Matlabu" počítáme množinu imputací a γ-jádro.

Cíle práce, metody a postupy zpracování

Cílem je osvojení teoretických aspektů teorie her spolu s vytvářením systematizovaného a srozumitelného textu a také definování γ-charakteristické funkce jako aparátu teorie her sloužícího k popsání kooperatívních oligopolních her pro Cournotův model oligopolu a koalic, které v nich mohou vzniknout.

V teoretické části se zabýváme definováním pojmů z teorie grafů, teorie her a teorie oligopolů. Teoretické poznatky z těchto oblastí jsou vždy doprovázené praktickými příklady, na kterých můžeme vidět věci, na které jsme v běžném životě zvyklí z pohledu matematiky.

Analýza současného stavu je rozsáhlým popisem kooperatívních oligopolních her a studiem jejich vlastností pomocí zavedených aparátů teorie her.

Vlastní návrhy řešení představují počítaní γ-charakteristické funkce pro případy lineární a kvadratické inverzní funkce poptávky a analýzu určitých vlastností kooperatívních oligopolních her pro Cournotův model oligopolu.

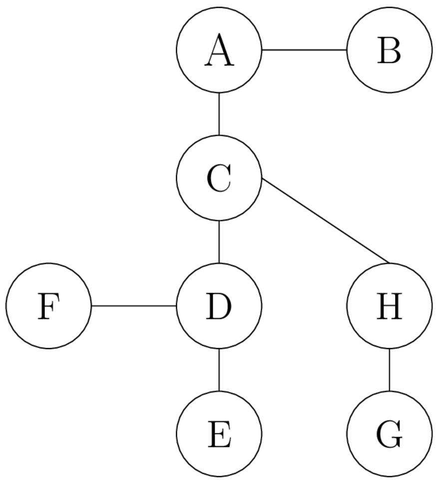
1 Teoretická východiska

1.1 Teorie Grafů

K pochopení některých pojmů teorie her a grafickému popisu hry budeme potřebovat základní definice z oblasti teorie grafů. Podkladem pro tuto podkapitolu je [1].

Definice 1.1. Neorientovaný graf $G = (V, E)$ se skládá ze dvou konečných disjunktních množin V a E. $V \neq \emptyset$. Kazdý prvek $e \in E$ je sdružený (asociovaný) s právě jednou dvojicí $\{u, v\}$, kde $u, v \in V$.

- $u,\ v \in V$ - vrcholy;
- $e \in E$ - hrana.



Graf 1: Neorientovaný graf $G = (V, E)$

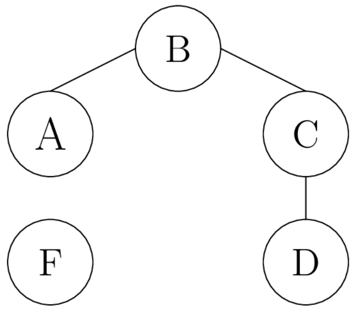
- $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$;
- $E = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{C, D\}, \{C, H\}, \{D, F\}, \{D, E\}, \{H, G\}\}$.

Definice 1.2. Sled v grafu $G = (V, E)$ je posloupnost vrcholů $v_i \in V$ $(0 \leq i \leq n)$ a hran $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ $(0 \leq i \leq n - 1)$ tvaru

$$v_0, \{v_0, v_1\}, v_1, \{v_1, v_2\}, ..., v_{n-1}, \{v_{n-1}, v_n\}, v_n.$$

Definice 1.3. Souvislý graf je grafem $G = (V, E)$, ve kterém $\forall u, v \in V,\ \exists$ sled, který začíná v u a končí ve v.

Příklad 1.1. Neorientovaný graf $G = (V, E)$ není souvislý, protože neexistuje sled z vrcholu F do vrcholu A.



Graf 2: Nesouvislý neorientovaný graf $G = (V, E)$

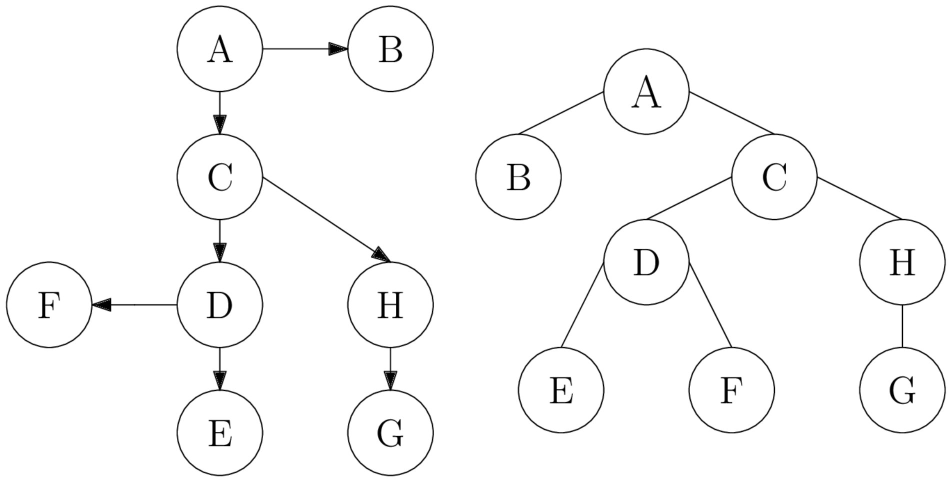
Definice 1.4. Cesta je sled, ve kterém všechny vrcholy jsou navzájem různé.

Definice 1.5. Strom je souvislý graf, ve kterém pro každé dva vrcholy existuje právě jedna cesta. Strom hry (kořenový strom) $(G, A),\ A \in V$ je strom G, ve kterém je některý vrchol A označen jako kořen.

- Řekneme, že C následuje B (C je potomek B), jestliže existuje cesta z A do C jdoucí přes B;
- Řekneme, že C následuje B bezprostředně (C je synem B), jestliže C následuje B a $\{C, B\} \in E$;
- Listy jsou vrcholy bez synů.

Vztah mezi vrcholem a jeho synem v kořenovém stromu můžeme graficky vyjádřit nahrazením obyčejných hran šipkami. Tyto šipky budou vycházet z příslušných vrcholů a budou mířit do jejich synů. Takové grafické označeni bylo použito v následujícím přikladu.

Příklad 1.2. Vezmeme graf $G = (V, E)$ z definice 1.1. Tento graf je strom, což je patrné z obrázku. Zvolením vrcholu A za význačný vrchol graf zorientujeme a můžeme jej zobrazit jako hierarchickou strukturu o několika úrovních.



Graf 3: Kořenový strom (G, A)

1.2 Teorie Her

1.2.1 Obecné poznatky

Teorie her je disciplína aplikované matematiky, která analyzuje chování lidí v konfliktních situacích a pomocí matematického modelování těchto konfliktů pomáhá najít co nejlepší strategie pro jednotlivé účastníky. I když se používá pojem hra, teorie her popisuje reálné vážné konfliktní situace jako například hospodářskou soutěž nebo jadernou válku. Teoretické poznatky, na kterých je založena tato podkapitola, byly čerpaný z [2].

Základní prvky hry:

- Střídání tahů, z nichž některé můžou být náhodné;
- Nedostatek informací;
- Výplatní funkce.

1.2.2 Hra v extenzivním tvaru

Definice 1.6. Hra n-hráčů v extenzivním tvaru znamená:

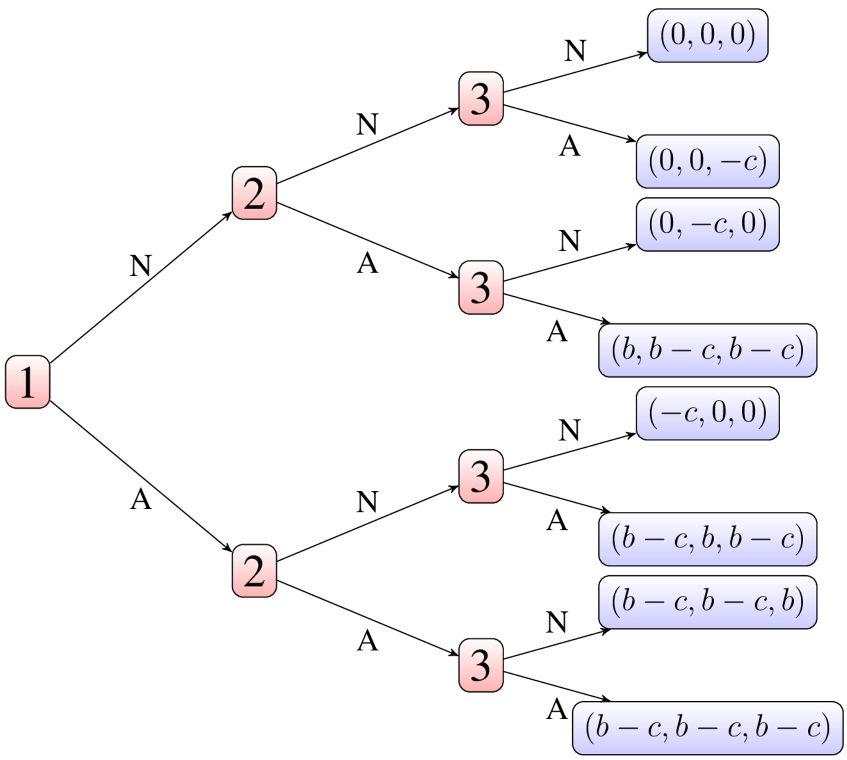
- Strom hry Γ s význačným vrcholem A, který je kořenem Γ;
- Výplatní funkce, která přirázuje n-rozměrný vektor každému listu Γ;

- Rozklad Γ bez listů do množin $S_0, S_1, ..., S_n$, které se nazývají hráčské množiny;
- Pravděpodobnostní rozdělení definované pro každý vrchol z S_0 mezi jeho syny;
- Pro $\forall\ i = 1, ..., n$ podrozklady S_i do podmnožin $S_i^j \subset S_i$ takové, že dva vrcholy ze stejné množiny mají stejný počet synů a žádný vrchol nenásleduje jiný ze své množiny. Množiny S_i^j se nazývají informační množiny;
- Pro každou informační množinu S_i^j existuje funkce, která přirázuje prvkům indexové množiny I_i^j syny vrcholů z S_i^j.

Příklad 1.3. Hlasování o platech poslanců.

Ve sněmovně jsou tři politické strany, které hlasují o zvýšení platů poslanců. Každá strana může hlasovat buď "ano" - A nebo "ne" - N. V případě volby varianty "ano" politická strana přichází o loajalitu voličů, kterou budeme značit jako c, v opačném případě neztratí nic. Aby byl zákon přijat, musí alespoň dvě strany zvolit "ano". Prospěch, který strany dostanou zvýšením platů, budeme značit b a předpokládejme, že $b > c$.

Danou situaci můžeme zapsat jako hru v extenzivním tvaru pomocí následujícího stromu hry.



Graf 4: Strom hry pro příklad 1.3.

Definice 1.7. Hráč i má perfektní informaci v Γ jestliže $\forall j : |S_i^j| = 1$.

1.2.3 Strategie a normální tvar hry

Definice 1.8. Strategií i-tého hráče se rozumí funkce, která přiřazuje každé informační množině S_i^j jednu z hran, která spojuje vrchol z S_i^j s jeho synem.

Množinu strategií i-tého hráče značíme $\sum_i$. Výplatní funkci značíme

$$\Pi(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = (\Pi_1(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n), \Pi_2(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n), ..., \Pi_n(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)),$$

kde i-tý hráč používá strategii $\sigma_i \in \sum_i$.

Definice 1.9. Nyní můžeme sestavit tabulku pro funkci $\Pi(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ pro všechny možné hodnoty $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$, buď ve formě relací nebo ve formě $n-$rozměrného pole n vektorů. Tohle $n-$rozměrné pole se nazývá normální tvar hry Γ.

Definice 1.10. Hra se nazývá konečnou, pokud strom obsahuje konečný počet vrcholů.

Příklad 1.4. Následující tabulka zobrazuje hru "kámen, nůžky, papír" v normálním tvaru, kde výhru hodnotíme jako 1, prohru jako -1 a remíza je 0.

Tab. 1 Normální tvar hry "kámen, nůžky, papír"

		Hráč 1		
		Kamen	Nůžky	Papír
Hráč 2	Kamen	0, 0	1, -1	-1, 1
	Nůžky	-1, 1	0, 0	1, -1
	Papír	1, -1	-1, 1	0, 0

V daném případě množina strategií hráče 1 je $\sum_1$={ Kámen, Nůžky, Papír} stejně jako množina strategií hráče 2. Pak používaní strategie "Kámen" každým hráčem dá výsledek Π(Kámen, Kámen)= $(0, 0)$.

1.2.4 Rovnovážný stav

Definice 1.11. Mějme hru Γ. Stav $(\sigma_1^*, \sigma_2^*, ..., \sigma_n^*) \in \sum_1 \times ... \times \sum_n$ se nazývá rovnovážným pravě tehdy, když pro $\forall i = 1, ..., n \ \hat{\sigma}_i \in \sum_i$ platí nerovnost:

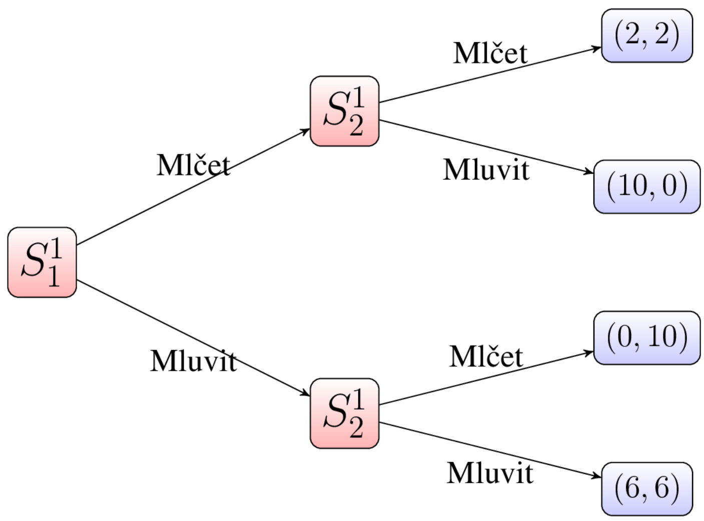
$$\Pi_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, ..., \hat{\sigma}_i, ..., \sigma_n^*) \leq \Pi_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, ..., \sigma_n^*) \, .$$

Jinými slovy žádný hráč nemá důvod ke změně strategie, protože si pohorší, pokud jiní hráči nemění své strategie.

Věta 1.1. *Každá konečná hra s perfektními informacemi má rovnovážný stav.*

Důkaz. viz [2]. □

Příklad 1.5. Na příkladu známého vězňova dilema ukážeme, jak lze přepsat hru z extenzívní formy do normální, existenci rovnovážného stavu a jeho případné změny pro hru s perfektními informacemi. Policie chytí dva podezřelé (označíme je podezřelý 1 a podezřelý 2), ale důkazy nejsou postačující k usvědčení, takže musí doufat, že někdo z podezřelých se přizná. Oba podezřelí mají dvě moznosti - buď začít mluvit a svědčit proti druhému, anebo mlčet a nespolupracovat s policií. Je důležitým detailem, že podezřelí nemají možnost se domluvit a nevědí, jakou z dvou variant zvolil jiný podezřelý, například mají výslech v různých místnostech. Zaprvé zobrazíme danou situaci jako hru v extenzivním tvaru.



Graf 5: Strom hry pro příklad 1.5. - neperfektní informace

S_i^j je j-tá informační množina i-tého podezřelého. Listům jsou přirazené vektory, které obsahují na i-té pozici dobu trestu i-tého podezřelého.

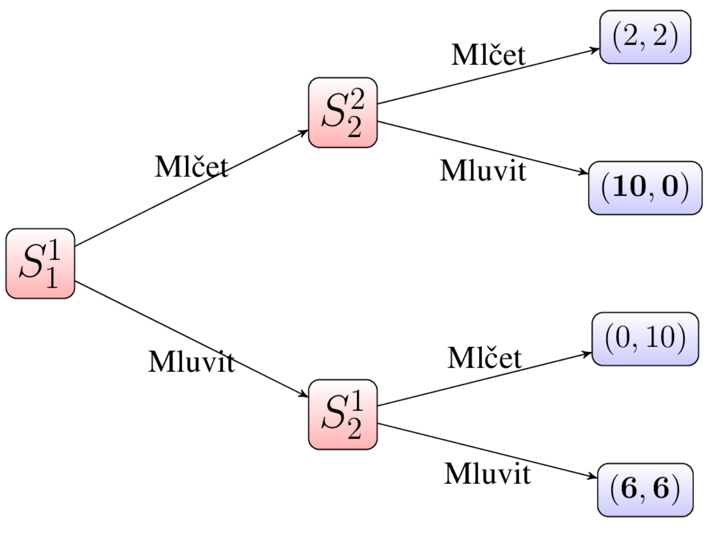
Můžeme přepsat hru do normálního tvaru a dostaneme následující tabulku:

Tab. 2 Normální tvar hry pro přiklad 1.5. - neperfektní informace

		Podezřelý 2	
		Mluvit	Mlčet
Podezřelý 1	Mluvit	6,6	0,10
	Mlčet	10,0	2,2

Na první pohled očividným řešením dané hry by mělo být rozhodnutí obou podezřelých mlčet, ale rovnovážným stavem bude to, že oba dva budou svědčit proti sobě. To plyne jak z definice rovnovážného stavu, tak i z logiky uvažování obou podezřelých. Můžeme to zapsat jako $(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \in \{(1,1)\}$.

Jestliže budeme uvažovat hru s perfektními informacemi (jinými slovy podezřelý 2 bude vědět volbu podezřelého 1), pak podezřelý 2 bude volit tu nejlepší variantu pro sebe v závislosti na tom, jak se bude chovat podezřelý 1.



Graf 6: Strom hry pro přiklad 1.5. - perfektní informace

Tučným písmem jsou zvýrazněny preferované výplatní vektory podezřelého 2 v závislosti na informační množině, ve které se nachází. Z grafu je patrné, že podezřelý 1 při volbě strategie “Mluvit” dostane 6 let vězení, stejně jako podezřelý 2, ale když rozhodne mlčet, pak jistě bude odsouzen na 10 let. Zřejmou volbou pak bude rozhodnutí obou podezřelých mluvit, což zachová rovnovážný stav hry, kde informace nejsou perfektní.

Na rozdíl od předchozího případu podezřelý 2 bude mít čtyři strategie místo dvou. To je dáno tím, že má dvě informační množiny a každá z nich bude mít dvě možná zobrazení. Množina strategií podezřelého 2 je $\sum_2 = \{\sigma_2^1, \sigma_2^2, \sigma_2^3, \sigma_2^4\}$, kde $\sigma_2^1 : S_2^1 \rightarrow$ “Mluvit”, $S_2^2 \rightarrow$ “Mluvit”; $\sigma_2^2 : S_2^1 \rightarrow$ “Mlčet”, $S_2^2 \rightarrow$ “Mluvit”; $\sigma_2^3 : S_2^1 \rightarrow$ “Mluvit”, $S_2^2 \rightarrow$ “Mlčet”; $\sigma_2^4 : S_2^1 \rightarrow$ “Mlčet”, $S_2^2 \rightarrow$ “Mlčet”. Pak normální tvar hry bude vypadat následovně

Tab. 3 Normalní tvar hry pro příklad 1.5. - perfektní informace

		Podezřelý 2			
		σ_2^1	σ_2^2	σ_2^3	σ_2^4
Podezřelý 1	Mluvit	6,6	0,10	6,6	0,10
	Mlčet	10,0	10,0	2,2	2,2

1.2.5 Hra s nulovým součtem

Definice 1.12. Hra Γ je s nulovým součtem právě tehdy, když výplatní funkce $(p_1, ..., p_n)$ v každém listu splňuje

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 0.$$

Obecně hra s nulovým součtem představuje uzavřený systém: všechno co někdo získal, musí někdo jiný ztratit. Hra dvou hráčů s nulovým součtem v normálním tvaru (tzv. maticová hra) je maticí s počtem řádků rovným počtu strategií prvního hráče a s počtem sloupců rovným počtu strategií druhého hráče. V takové matici můžeme uvádět jenom výplatu prvního hráče, protože pro hru s nulovým součtem bude platit, že zisk druhého hráče bude roven zisku prvního hráče jen s opačným znaménkem. Např. pro matici hry A v případě, že první hráč zvolí i-tou strategii a druhý j-tou, výplatou prvního (resp. druhého) hráče bude prvek a_{ij}(resp. $-a_{ij}$). V tomto případě dvě strategie budou rovnovážnými právě tehdy, když prvek a_{ij} je nejmenší ve svém řádku a největší ve svém sloupci. Takový prvek, pokud existuje, má název sedlový bod.

Příklad 1.6. Matice

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & \mathbf{2} & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

má sedlový bod ve druhém řádku a druhém sloupci.

Příklad 1.7. Matice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

nemá sedlový bod.

1.2.6 Smíšené strategie

Předešlé úvahy nám říkají, jak najít rovnovážný stav pro maticovou hru se sedlovým bodem, ale nic neříkají o tom, jak volit v případě matice bez sedlového bodu. Dále budeme uvažovat matici hry A bez sedlového bodu a nepředpověditelného a vševědoucího oponenta (vždy ví, co jsme zvolili)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

První hráč bude vždy volit první strategii a dostane výplatu nejméně 2 jednotky, protože pokud zvolí druhou strategii, dostane jenom 1 jednotku. Tato nejmenší zaručená výhra dvou jednotek při volbě první strategie je "ziskovou podlahou" prvního hráče, kterou budeme značit v_1',

$$v_1' = \max_i(\min_j a_{ij}).$$

Druhý hráč za stejných podmínek bude volit druhou strategii, která dá "ztrátový strop" 3 jednotky. "Ztrátový strop" značíme v_2',

$$v_2' = \min_j(\max_i a_{ij}).$$

Je jasné, že "zisková podlaha" bude vždy menší nebo rovna "ztrátovému stropu"

$$v_1' \leq v_2'.$$

V případě že nastává rovnost, v matici existuje sedlový bod, v opačném případě máme matici bez sedlových bodů.

Předpokládáme, že matice hry nemá sedlový bod. Pokud by oponent znal dopředu volbu 1. hráče, neboli by to byla hra s perfektními informacemi, pak ten nemůže získat více, než je "zisková podlaha" v_1' a 2. hráč pak obdrží "ztrátový strop" (což je v tomto případě pro něj také nejlepší). Aby 1. hráč dostal vice, neměl by oponent znát jeho strategii. Může tedy vzniknout úvaha, že hráči volí strategie iracionálně, ale to porušuje pravidla teorie her. Řešením podobné situace je náhodná volba strategií, kde schéma randomizace hráči volí racionálně. Toto je hlavni idea smísených strategií.

Definice 1.13. Smíšenou strategií hráče je pravděpodobnostní rozdělení na množině jeho čistých strategií. V případě, že hráč má konečný počet m čistých strategií, pak smíšenou strategií je m-rozměrný vektor $x = (x_1, ..., x_m)$, splňující

$$x_i \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

Označíme množinu smíšených strategií 1. (resp. 2.) hráče jako X(resp. Y).

Předpokládejme, že hráč 1 zvolí strategii x a hráč 2 zvolí strategii y, pak očekávaná výplata se bude rovnat

$$A\left(x,y\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j,$$

nebo v maticovém zápisu

$$A\left(x,y\right) = xAy^T.$$

Očekávaná "zisková podlaha" 1. hráče bude

$$v\left(x\right) = \min_{y \in Y} xAy^T.$$

Na xAy^T se můžeme dívat jako na vážený průměr očekávaných výplat hráče 1, když používá x proti čistým strategiím hráče 2. Předchozí minimum můžeme zapsat jako

$$v\left(x\right) = \min_{j} xA_{.j},$$

(kde j je j-tý sloupec matice A).

Teď 1. hráč musí zvolit x tak, aby maximalizoval $v\left(x\right)$

$$v_I = \max_{x\in X} \min_j xA_{.j},$$

takovému x se říká maximin strategie hráče 1.

Analogicky hráč 2 volbou y obdrží "ztrátový strop"

$$v\left(y\right) = \max_i A_{i.}y^T,$$

(kde i je i-tý řádek matice A).

A volí y tak, aby dostal

$$v_{II} = \min_{y\in Y} \max_i A_{i.}y^T,$$

takovému y se říká minimax strategie hráče 2.

v_1 a v_2 jsou hodnoty hry A pro hráče 1 a 2.

Minimax věta pak říká, že $v_1 = v_2 = v$. Této společné hodnotě v se říká hodnota hry.

Strategie x, která splňuje

$$\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \geq v, j = 1, ..., n,$$

je optimální pro 1. hráče, ve smyslu že žádná jiná strategie nedá mu vyšší očekávaní než v proti každé strategii hráče 2. Analogicky, jestliže y splňuje

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \geq v, i = 1, ..., m,$$

pak je optimální pro 2. hráče ve stejném smyslu. A použití optimálních strategií nám dává rovnost

$$xAy^T = v.$$

Definice 1.14. Libovolnou dvojici optimálních strategií (x, y) nazveme řešením hry.

Z minimax věty plyne, že každá hra bude mít optimální strategie, což je ekvivalentní s tím, že každá hra má řešení ve smíšených strategiích. I když víme, že optimální strategie musí existovat, nevíme, jak je spočítat. Následující odstavce popíšou počítaní optimálních strategií pro jednoduché hry.

Sedlový bod. V případě, že matice hry A má sedlový bod na pozici a_{ij}, pak čisté strategie i a j (což odpovídá smíšeným strategiím x a y, kde jsou všechny složky mimo $x_i = 1$ a $y_j = 1$ jsou nulové) budou optimálními strategiemi pro prvního a druhého hráče respektive.

Dominace. Řekneme, že v matici A i-tý řádek dominuje k-tému, jestliže

$$a_{ij} \geq a_{kj} \; \forall j$$

a navíc

$$\exists j \; a_{ij} > a_{kj}.$$

Řekneme, že j-tý sloupec dominuje l-tému, jestliže

$$a_{ij} \leq a_{il} \; \forall i$$

a navíc

$$\exists i \; a_{ij} < a_{il}.$$

Stručně řečeno, čistá strategie reprezentována jejím řádkem a sloupcem dominuje jiné čisté strategii, jestliže je stejně dobrá jako jiná (přináší vetší nebo stejnou výplatu) a v alespoň jednom případě je lepší (přináší ryze vetší výplatu). Pak hráč může používat jen čisté strategie, kterým nic nedominuje, a zanedbávat ty, které jsou dominovány.

Nechť A je maticová hra a budeme předpokládat, že řádky $i_1, i_2, ..., i_k$ jsou dominovány. Pak hráč I má takovou optimální strategii x, že $x_{i_1} = x_{i_2} = ... = x_{i_k} = 0$; navíc platí, že optimální strategie pro hru obdrženou vynecháváním dominovaných řádků bude také optimální strategií pro hru původní. Analogická úvaha platí také pro sloupce. Z tohoto plyne, že můžeme vymazat dominované sloupce a řádky a pracovat s maticí menšího řádu.

2×2 **Hry.** Mějme maticovou hru 2×2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Budeme předpokládat, že tato hra nemá sedlový bod. Pak optimálními strategiemi budou vektory $x = (x_1, x_2)$ a $y = (y_1, y_2)$, které mají všechny složky nezáporné. Pak pro hodnotu hry v platí

$$a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$$

$$= x_1(a_{11}y_1 + a_{12}y_2) + x_2(a_{21}y_1 + a_{22}y_2)$$

$$= v.$$

Každý ze dvou výrazů v závorkách je menší nebo roven v za předpokladu, že y je optimální strategie. Předpokládejme, že jeden z těchto výrazů je ostře menší, neboli

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 < v,$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \leq v.$$

Však platí $x_1 > 0$ a $x_1 + x_2 = 1$, z čehož plyne, že oba výrazy se musí rovnat v:

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v,$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v.$$

Analogicky se dá ukazat, že

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = v,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = v,$$

nebo v maticovém zápisu

$$Ay^T = \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix},$$

$$xA = (v, v).$$

Předchozí rovnice spolu s rovnicemi

$$x_1 + x_2 = 1,$$

$$y_1 + y_2 = 1$$

umožnují najít x, y a v. Jestliže matice A je regulární ($|A| \neq 0$), pak

$$x = vJA^{-1},$$

kde J je vektor $(1, 1)$. Suma složek x se rovná 1, neboli $xJ^T = 1$, z čehož plyne

$$vJA^{-1}J^T = 1$$

$$v = \frac{1}{JA^{-1}J^T}$$

a

$$x = \frac{JA^{-1}}{JA^{-1}J^T}.$$

Analogicky

$$y = \frac{A^{-1}J^T}{JA^{-1}J^T}.$$

Je zřejmé, že dané úvahy neplatí v případě, že matice A je singulární. Avšak platí

$$x = \frac{JA^*}{JA^*J^T}$$

a

$$y = \frac{A^*J^T}{JA^*J^T},$$

kde A^* je adjungovaná matice k matici A. Tyto výrazy také dávají optimální strategie a mají smysl i v případě, že matice A je singulární. Také bude platit

$$v = \frac{|A|}{JA^*J^T},$$

kde $|A|$ je determinant matice A. Všechny předchozí úvahy shrneme do následující věty.

Věta 1.2. *Nechť A je maticová hra* 2×2*, která nemá sedlový bod, pak její jediné optimální strategie a její hodnota jsou definované vzorci*

$$x = \frac{JA^*}{JA^*J^T},$$

$$y = \frac{A^*J^T}{JA^*J^T},$$

$$v = \frac{|A|}{JA^*J^T},$$

kde A^* *je adjungovaná matice k matici* A*,* $|A|$ *je determinant matice* A*, J je vektor*$(1,1)$.

Příklad 1.8. Najděte optimální strategie pro maticovou hru $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Daná hra nemá sedlový bod, to znamená, že k výpočtu optimálních strategií můžeme využít předchozí věty. Adjungovaná matice k matici A je

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$|A| = 2$, $JA^* = (3,1)$, $A^*J^T = (2,2)$ a $JA^*J^T = 4$. Pak $x = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$, $y = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a $v = \frac{1}{2}$.

1.2.7 Kooperativní hry

Definice 1.15. Nechť máme hru n-hráčů s množinou hráčů $N = \{1, 2, ..., n\}$, pak libovolná podmnožina $S \subseteq N$ se nazývá koalice.

Pro hru n-hráčů ($n \geq 2$) s ohledem na podmínky hry může existovat moznost vytváření koalicí mezi hráči, jinak řečeno možnost vzájemné spolupráce, která by měla sloužit k prospěchu členů koalice.

Charakteristická funkce.

Definice 1.16. Charakteristickou funkci hry n-hráčů nazveme funkci v definovanou pro $\forall$ $S \subseteq N$, která přirázuje S maximální hodnotu hry dvou hráčů S a $N \setminus S$.

Z této definice plyne závazná vlastnost charakteristické funkce

$$v\left(\varnothing\right) = 0.$$

Obecně hrou ve tvaru charakteristické funkce (N, v) rozumíme funkci v, definovanou na všech podmnožinách množiny N a navíc splňující podmínku superaditivity:

$$v\left(S \cup T\right) \geq v\left(S\right) + v\left(T\right),$$

pro $S \cap T = \varnothing$.

Když charakteristická funkce splňuje podmínku superaditivity, tak se mluví o vlastních hrách, v opačném případě o nevlastních.

Hra je s konstantním součtem právě tehdy, když $\forall S \subseteq N$

$$v\left(S\right) + v\left(N \setminus S\right) = v(N).$$

Z hry v normálním tvaru můžeme udělat kooperativní hru ve tvaru charakteristické funkce několika způsoby, ze kterých uvedeme dva základní. Mějme hru v normálním tvaru. Označíme $A_S = \Pi_{i \in S} A_i$ jako množinu strategií koalic, kde A_i je strategie i-tého hráče. Výplatní funkci pro koalici S označíme $\Pi_S = \sum_{i \in S} \Pi_i\left(a\right)$, kde $a = \left(a_S, a_{N \setminus S}\right)$, $a_S \in A_S$ a $a_{N \setminus S} \in A_{N \setminus S}$. Pak α-charakteristickou funkcí definujeme jako

$$v_\alpha(S) = \max_{a_S \in A_S} \min_{a_{N \setminus S} \in A_{N \setminus S}} \left(\Pi_S(a_S, a_{N \setminus S})\right)$$

a β-charakteristickou funkci definujeme jako

$$v_\beta(S) = \min_{a_{N\setminus S} \in A_{N\setminus S}} \max_{a_S \in A_S} \left(\Pi_S(a_S, a_{N\setminus S})\right).$$

Dvě charakteristické funkce definované takovým způsobem vždy splňují vlastnost superaditivity a platí pro ně

$$v_\alpha \leq v_\beta.$$

Definice 1.17. Imputace je vektor $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ splňující

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N),$$

$$x_i \geq v(\{i\}) \; \forall i \in N.$$

Množinu všech imputací hry v budeme značit $I(v)$.

Ze superaditivnosti charakteristické funkce plyne, že

$$v(N) \geq \sum_{i \in N} v(\{i\}).$$

V případě, že nastává rovnost, množina $I(v)$ bude obsahovat jenom jeden bod, který zároveň bude řešením hry.

Hra v se nazývá podstatnou právě tehdy, když

$$v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\}).$$

V opačném případě je hra nepodstatná.

Dominance. Většina her má vice imputaci a samozřejmě každý hráč bude preferovat imputaci, ve které jeho platba bude vyšší než v ostatních případech. Tedy vzniká otázka, kterou imputaci zvolit a jestli existuje nějaké kritérium, podle kterého dokážeme zjistit, zda bude zvolena tato imputace a ne jiná.

Nechť $x \in I(v)$ a $y \in I(v)$ jsou dvě imputace a $S \subset N$ je nějaká koalice. Řekneme, že x dominuje y podle koalice S, jestliže platí

$$x_i > y_i \; \forall i \in S,$$

$$\sum_{i \in S} x_i \leq v(S).$$

Definice 1.18. Řekneme, že x dominuje y, jestliže existuje libovolná koalice S taková, že x dominuje y podle koalice S.

Jádro.

Definice 1.19. Jádrem hry se nazývá množina její nedominovaných imputaci. Jádro hry v se značí $C(v)$. Jádro hry v je množina vektoru $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, splňujících

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \; \forall S \subset N,$$

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N).$$

Klasická ekonomická teorie obvykle brala právě jádro za "řešení" problému, kterými se zabývá teorie her, avšak to nemusí vždy platit. Libovolná imputace z jádra je stabilní ve smyslu, že žádná koalice nemá ani přání, ani možnost změnit výsledek hry. Jádro může obsahovat více bodů a to znamená, že existuje několik stabilních řešení hry. Podstatnější problém vzniká v případě, kdy jádro je prázdné. Jestliže v je podstatná hra s konstantním součtem, pak $C(v) = \varnothing$

1.2.8 Shapleyho vektor

Jedno z nejvyužívanějších pojetí řešení hry je vektor hodnot hry Shapleyho, který se definuje axiomaticky. K pochopení axiomu budeme potřebovat dvě následující definice.

Definice 1.20. Nosič hry v je taková koalice T, pro kterou platí $v(S) = v(S \cap T) \; \forall S \subset N$. Hráč, který nepatří do nosiče, nemůže nic přinést žádné koalici.

Definice 1.21. Nechť v je hra n hráčů, a π je libovolná permutace množiny N. Pak πv bude značit takovou hru u, že pro libovolnou koalici $S = \{i_1, i_2, ..., i_s\}$ platí

$$u(\{\pi(i_1), \pi(i_2), ..., \pi(i_s)\}) = v(S).$$

Axiomy (Shapleyho).

Definice 1.22. Vektorem hodnot hry v rozumíme n-rozměrný vektor $\phi[v] \in \mathbb{R}^n$, splňující následující axiomy:

- Pro libovolný nosič S platí

$$\sum_{i \in S} \phi_i[v] = v(S);$$

- Pro libovolnou permutaci π a $i \in N$ platí

$$\phi_{\pi(i)}[\pi v] = \phi_i[v];$$

- Pro dvě libovolné hry u a v platí

$$\phi_i[u+v] = \phi_i[u] + \phi_i[v].$$

Věta 1.3. *Existuje jediná funkce ϕ, která je definována pro všechny hry a splňující předchozí axiomy.*

$$\phi_i[v] = \sum_{T \subset N,\ i \in T} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}[v(T) - v(T \setminus \{i\})],$$

kde t a n jsou mohutnosti množin T a N.

Ale co vlastně znamenají čísla, která dostaneme při výpočtu? Představme si, že hráči (prvky množiny N) se domluvili na schůzce v určitý čas a v určitém místě. Je zřejmé, že se budou dostávat na místo schůzky v různých momentech času, ale předpokládejme, že všechna pořadí příchodu hráčů mají stejnou pravděpodobnost $1/n!$. Dále budeme předpokládat, že když hráč i přijde na místo a potká tam členy koalice $T \setminus \{i\}$, pak on dostane $v(T) - v(T \setminus \{i\})$. Jinými slovy dostane tu hodnotu, kterou do koalice přinesl. Pak složka vektoru Shapley $\phi_i[v]$ udává střední hodnotu zisku i-tého hráče za těchto podmínek.

Stabilní množiny. Předchozí pojmy a definice nevysvětlují to, co se děje během hry. Jádro dává "normy chovaní" hráčů a vektor Shapleyho je určitou podobou střední hodnoty. Stabilní množiny získáme analýzou vyjednávaní, které fakticky může probíhat během hry, přesněji řečeno budeme analyzovat námitky a protinámitky několika hráčů.

Definice 1.23. Koaliční strukturou pro hru n hráčů rozumíme rozklad

$$\mathcal{T} = (T_1, T_2, ..., T_m)$$

množiny N.

Definice 1.24. Výplatní konfigurace je dvojice

$$(x; \mathcal{T}) = (x_1, ..., x_n; T_1, ..., T_m),$$

kde $\mathcal{T}$ je koaliční struktura a x je n-rozměrný vektor, splňující

$$\sum_{i \in T_k} x_i = v(T_k)$$

pro $k = 1, ..., m$.

Chceme zjistit, které výplatní konfigurace bude dosaženo. Zřejmým požadavkem bude individuální racionalita

$$x_i \geq v(\{i\}),\ \forall i \in N.$$

Dalším možným požadavkem bude koaliční racionalita

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S),\ \forall S \subset T_k \in \mathcal{T}.$$

Předpokládáme, že bylo dosaženo koaličně racionální výplatní konfigurace, ale kdy bude stabilní? Zřejmě, když tato výplatní konfigurace je imputací, která patří do jádra hry, pak bude stabilní ve smyslu, že žádná koalice nebude mít ani přání, ani moznost změnit konfiguraci. Ale jádro často bývá prázdné, což znamená, že nemůžeme vyžadovat, aby výplatní konfigurace patřila do jádra.

Definice 1.25. Nechť $\mathcal{T} = (T_1, ..., T_m)$ je koaliční struktura a K je koalice. Pak partnery koalice K v $\mathcal{T}$ nazveme množinu

$$P(K; \mathcal{T}) = \{i | i \in T_k, T_k \cap K \neq \varnothing\}.$$

Definice 1.26. Nechť $(x; \mathcal{T})$ je koaličně racionální výplatní konfigurace ve hře v, a K a L jsou neprázdné, navzájem disjunktní podmnožiny nějaké koalice $T_k \in \mathcal{T}$. Námitkou K proti L se nazývá koaličně racionální výplatní konfigurace $(y, \mathcal{U})$ splňující podmínky

$$P(K, \mathcal{U}) \cap L = \varnothing,$$

$$y_i > x_i,\ \forall i \in K,$$

$$y_i \geq x_i,\ \forall i \in P(K; \mathcal{U}).$$

Definice 1.27. Nechť $(x; \mathcal{T})$ je koaličně racionální výplatní konfigurace, K a L jsou stejné koalice jako v předchozí definici a nechť $(y, \mathcal{U})$ je námitka K proti L. Protinámitkou koalice L proti koalici K se nazývá koaličně racionální výplatní konfigurace $(z, \mathcal{V})$, splňující následující podmínky

$$K \not\subset P(L; \mathcal{V}),$$

$$z_i \geq x_i, \; \forall i \in P(L; \mathcal{V}),$$

$$z_i \geq y_i, \; \forall i \in P(L; \mathcal{V}) \cap P(K, \mathcal{U}).$$

Definice 1.28. Koaličně racionální výplatní konfigurace $(x, \mathcal{T})$ se nazývá stabilní, pokud pro každou námitku koalice K proti koalici L existuje protinámitka koalice L. Množina všech stabilních koaličně racionálních výplatních konfigurací se nazývá předdohodnutou množinou, značíme ji $PM(v)$.

Definice 1.29. Množinu definovanou jako

$$M(v) = PM(v) \cap I(v).$$

nazveme dohodnutou množinou a platí následující vztahy

$$C(v) \subseteq M(v) \subseteq I(v),$$

$$C(v) \subseteq M(v) \subseteq PM(v).$$

1.3 Oligopol

Oligopol je tržní struktura, která se vyznačuje zejména malým počtem firem a vysokou úrovní vzájemné závislosti jejich rozhodovaní. Zdrojem poznatků pro tuto podkapitolu jsou [3, 4, 5].

V případě oligopolu produkce každé firmy obvykle představuje značný tržní podíl, a právě kvůli tomuto rozhodovaní firem je vzájemně závislé: je třeba pečlivě zvažovat nejen svou volbu optimální produkce, ale i předpovídat reakce konkurentů. Manažer firmy musí rozhodovat strategicky a zvažovat negativní externality této volby, které mají dopad na chování konkurentů.

Existuje celá řada modelů oligopolů, které se však shodují ve třech důležitých vlastnostech:

- **V odvětví existuje několik firem.** Část modelu se zabývá pouze případy duopolu (jen dvě firmy), jiné uvažují několik stejně silných firem nebo další případ, kdy jedna z firem je v dominantním postavení.

- **Firmy můžou vyrábět jak homogenní, tak diferencovaný produkt.** Jestliže mluvíme o homogenním produktu, pak se jedná o čistý, neboli homogenní oligopol, který se charakterizuje obzvlášť silnou vzájemnou závislostí firem.

- **Existují bariéry**, které znemožňují příchod nových firem a zároveň každá firma je dost silná, proto si může stanovit cenu vyšší než její mezní náklady. Existence oligopolu je ovlivněna vztahem mezi velikostí trhu, která hraje roli jedné z bariér, a optimální velikostí firmy (velikost, při které firma realizuje úspory z rozsahu). Pokud je trh značně velký v porovnání s optimální velikosti firmy, pak to přiláká do odvětví další firmy, což pravděpodobně povede k zániku oligopolu.

1.3.1 Východiska modelů

Při zpracování jednotlivých modelů budeme uvažovat n firem v daném odvětví. Výstup odvětví budeme značit jako Q a výstup i-té firmy jako q_i. Pro zjednodušení předpokládejme, že všechny firmy v odvětví jsou identické a májí identické náklady a také, že konkurence na straně poptávky je dokonalá (spotřebitelé nejsou schopni ovlivnit tržní cenu).

Inverzní funkce poptávky, která popisuje, za jakou cenu jsou spotřebitelé ochotni koupit proměnlivý objem produkce, označíme jako

$$P = f(Q),$$

což můžeme zapsat pomocí sumy výstupů jednotlivých firem jako

$$P = f(q_1 + q_2 + ...q_n).$$

Firmy v oligopolu maximalizují svůj zisk, který je dán rozdílem celkových příjmů a celkových nákladů, což zapíšeme jako

$$\pi_i = TR_i(q_i) - TC_i(q_i).$$

Celkové příjmy firmy jsou součinem ceny a množství, proto předchozí vztah můžeme upravit do tvaru

$$\pi_i = f(Q)q_i - TC_i(q_i)$$

nebo

$$\pi_i = f(q_1 + q_2 + ...q_n)q_i - TC_i(q_i).$$

1.3.2 Základní modely oligopolu

Smluvní oligopol. Smluvní oligopol, neboli kartel, vzniká uzavřením tajné dohody (koluzi) mezi firmami vyrábějícími stejný nebo podobný produkt, o cenách a rozděleni trhu. Pak se každá firma na své vymezené části trhu chová jako monopol. Dohody, nebo spolupráce podobného druhu mezi firmami jsou zpravidla označovány jako kartelové dohody.

Cílem kartelu je maximalizovat zisk celého odvětví, který můžeme vyjádřit jako rozdíl celkových příjmů kartelu a sumy celkových nákladů všech jeho členů

$$\pi = PQ - \sum_{i=1}^{n} TC_i(q_i).$$

Nutnou podmínkou maximalizaci zisku je pak

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_i} = MR(Q) - MC_i(q_i) = 0$$

neboli

$$MR(Q) = MC_i(q_i).$$

To znamená, že kartel maximalizuje zisk v případě, že přírůstek celkových příjmů kartelu (společný mezní příjem) $MR(Q)$ je roven přírůstku celkových nákladů každé firmy kartelu (mezní náklady) $MC_i(q_i)$.

Hlavní problémy existence kartelu:

- Kvůli tomu, že cena produkce převyšuje mezní náklady firem, účastníci kartelu májí tendenci k tajnému zvýšení výstupu, což ohrožuje cenovou politiku kartelu a jeho existenci;
- Kartelové dohody snižují bohatství spotřebitelů a omezují konkurenci, proto jsou zakázané ve většině zemí (s výjimkou mezinárodních kartelů);
- Právní zákaz uzavření kartelových dohod dělá nemožným právní vynucování dodržení těchto dohod.

Z předchozích problémů vyplývá důležitý závěr, že kartel je velmi nestabilním způsobem organizace oligopolu.

Oligopol s dominantní firmou. Oligopol s dominantní firmou je jednou z forem cenového vůdcovství, které můžeme popsat jako situaci, kdy jedna firma přebírá iniciativu při stanovení ceny a ostatní firmy tuto cenu následují. Takový druh oligopolu vzniká, když pro silnou firmu je výhodné ponechat část trhu slabším konkurentům.

Jako dominantní firma je obvykle označovaná firma, jejímiž jedinými konkurenty jsou četné malé firmy, které tvoří tzv. konkurenční okraj (konkurenční lem). Tyto firmy nejsou schopné změnami svého výstupu nebo cenami produkce podstatně ovlivnit trh.

V tomto modelu je podstatné, že firmy, které patří do konkurenčního lemu, vykazují chování dokonale konkurenčních firem: za cenu, kterou převzaly od dominantní firmy, jsou schopné prodat libovolný objem produkce a jejich individuální poptávkové křivky při dané ceně jsou vodorovné přímky.

Hlavním důvodem respektování ceny stanovené dominantní firmou firmami z konkurenčního okraje je to, že vzhledem ke své velikosti nejsou schopné využít úspor z rozsahu a zároveň májí horší nákladové podmínky než dominantní firma. Takže nejsou schopné stanovit nižší cenu, protože prodělají, a jestliže stanoví vyšší cenu, pak ztratí zákazníky. Je očividné, že v dané situaci optimálním řešením je následování ceny dominantní firmy.

1.3.3 Courtnotův model

Klasický Courtnotův model je založen na následujících předpokladech:

- V odvětví existují pouze dvě firmy;
- Firmy vyrábějí zcela homogenní produkt;
- Stejné nákladové křivky firem;
- Tržní poptávková křivka je známa oběma firmám.

1.3.4 Reakční funkce a rovnováha.

Základem Courtnotůva modelu je úvaha, že první firma při rozhodování o velikosti vlastního výstupu považuje výstup druhé firmy za neměnný. První firma předpokládá, že druhá firma nebude reagovat změnou výstupu na její změnu výstupu, což můžeme zapsat jako

$$\frac{\partial q_2}{\partial q_1} = 0.$$

Současně změna výstupu první firmy přivede ke změně ceny

$$\frac{\partial P}{\partial q_1} \neq 0.$$

Analogicky uvažuje druhá firma v odvětví.

Poznámka 1.1. Existence většího počtů firem neovlivňuje funkčnost a smysluplnost tohoto modelu, proto model je použitelný i v jiných případech oligopolu, než duopol.

Nutnou podmínku maximalizace zisku formulujeme následujícím způsobem

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = MR_1(q_1) - MC_1(q_1) = 0$$

$$MR_1(q_1) = MC_1(q_1).$$

První firma při rozhodování o velikosti svého výstupu q_1 očekává výstup druhé firmy q_2. Celkový výstup odvětví pak bude $Q = q_1 + q_2$ a tržní cena bude $P(Q) = P(q_1 + q_2)$. Ziskovou funkci první firmy vyjádříme jako

$$\pi_1 = TR_1 - TC_1$$

$$\pi_1 = P(q_1 + q_2)q_1 - TC(q_1).$$

Různé neměnné úrovně výstupu q_2 budou určovat různé výstupy první firmy. Tento vztah, který zapíšeme pomocí rovnice

$$q_1 = f_1(q_2),$$

je označován jako reakční funkce nebo reakční křivka. Reakční křivka definuje výstup první firmy v závislosti na výstupu druhé firmy. Analogicky:

$$q_2 = f_2(q_1).$$

Rovnováha duopolu v tomto modelu je daná optimálními výstupy firem a musí platit:

$$q_1^* = f_1(q_2^*),$$

$$q_2^* = f_2(q_1^*).$$

Cournotůva rovnováha nastává v bodě (q_1^*, q_2^*), ve kterém obě firmy maximalizují své zisky a žádná z nich nemá důvod ke změně výstupu. Cournotůva rovnováha je vysoce stabilní.

Příklad 1.9. Mějme dvě firmy působící na trhu s poptávkovou křivkou $P = 200 - Q$. Jejich produkce tvoří výstup celého odvětví $Q = q_1 + q_2$. Pak platí

$$P = 200 - (q_1 + q_2)$$

$$P = 200 - q_1 - q_2.$$

Pro zjednodušení předpokládejme, že firmy vyrábějí s nulovými náklady. Pak zisk první firmy bude roven celkovým příjmům

$$\pi_1 = Pq_1 = (200 - q_1 - q_2)q_1 = 200q_1 - q_1^2 - q_1q_2.$$

Analogicky pro druhou firmu

$$\pi_2 = 200q_2 - q_1q_2 - q_2^2.$$

Pak nutná podminka maximalizace zisku první firmy je

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 200 - 2q_1 - q_1\frac{\partial q_2}{\partial q_1} - q_2 = 0.$$

Pro druhou firmu to vyjádříme analogicky:

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 200 - q_2\frac{\partial q_1}{\partial q_2} - q_1 - 2q_2 = 0.$$

Jak už bylo zmíněno model je založen na předpokladu $\frac{\partial q_2}{\partial q_1} = 0$ a $\frac{\partial q_1}{\partial q_2} = 0$, potom předchozí rovnice přejdou na tvar

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 200 - 2q_1 - q_2 = 0,$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 200 - q_1 - 2q_2 = 0.$$

Úpravami získáme reakční funkce pro první a druhou firmu:

$$q_1 = \frac{200 - q_2}{2},$$

$$q_2 = \frac{200 - q_1}{2}.$$

Tyto funkce budeme značit R_1, resp. R_2. Průsečík těchto dvou přímek bude představovat bod rovnováhy duopolu, ve kterém rozhodnutí obou firem o jejich výstupech bude konzistentní. Výše optimálního výstupu první firmy dostaneme dosazením druhé rovnice do první:

$$q_1 = \frac{200 - \frac{200 - q_1}{2}}{2}$$

$$4q_1 = 200 + q_1$$

$$q_1 = 66,66.$$

Pro druhou firmu analogickými úpravami dostaneme:

$$q_2 = 66,66.$$

Celkový výstup odvětví bude $Q = q_1 + q_2 = 133,33$ a rovnovážná cena $P^* = 200 - Q = 66,67$.

Pokud bychom srovnávali kartel a Cournotův model za předpokladu rostoucích mezních nákladů, dospěli bychom k závěru, že úroveň rovnovážného výstupu Cournotůva modelu je vyšší než výstup kartelu. Tento závěr plyne už jen z nutných podmínek maximalizace zisku: mezní příjem firmy $MR_i(q_i) = P + q_i \frac{\partial P}{\partial q_i}$ v případě Cournotůva modelu je vetší než mezní příjem odvětví $MR(Q) = P + (q_1 + q_2 + ... + q_n) \frac{\partial P}{\partial q_i}$ v kartelu.

2 Analýza současného stavu

Cournotův model oligopolu je modelem nekooperativním, který nepředpokládá spolupráci firem mezi sebou. Takže firmy pořad drží výstup na úrovni Cournotůve rovnováhy a nechtějí nic měnit. Avšak přirozenou otázkou je, zda se firmy můžou chovat kooperativně a zvýší-li to jejich zisky.

Většina autorů přidává do Cournotůva modelu kooperaci prostřednictvím opakování hry během několika period a cílem firmy je v takovém případě dosáhnout co nejvyšších zisků během celé hry. Firmy můžou uzavřít mezi sebou koluzi a uměle omezit výstup, což v důsledku povede ke zvýšení zisku. Pak v každé periodě firmy hrají mezi sebou hru, ve které volí, zda je pro ně výhodnější dodržovat dohodu anebo ne, při tomto rozhodování berou v úvahu to, jak jejich volba může ovlivnit chování soupeřů v dalších periodách.

Ale jen málo autorů studovali a studují Cournotův model oligopolu z pohledu kooperatívních her, kde hlavní roli hraje charakteristická funkce, pomocí které můžeme o hodně jednodušeji znázornit kooperaci mezi firmami a jejich prospěch z této kooperace. Tato kapitola obsahuje modelování oligopolní situace právě jako kooperativní oligopolní hry, definici potřebné charakteristické funkce, popis vlastností kooperatívních oligopolních her a nalezení řešení pro třídu kooperatívních oligopolních her s lineární nákladovou funkcí. Hlavním zdrojem informací sloužili [6, 7].

2.1 Model

Uvažujeme oligopolní situaci $(N, (\omega_i, C_i)_{i \in N}, p)$, kde $N = \{1, 2, ..., n\}$ je množina firem. Pokud prvek množiny N značíme i, pak ω_i je kapacitní ohraničení i-té firmy (kolik může maximálně vyrábět), $C_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ je nákladová funkce i-té firmy a $p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ je inverzní funkce poptávky. Dále budeme předpokládat že

a) inverzní poptávková funkce p je diferencovatelná, striktně klesající a konkávní;

b) každá nákladová funkce C_i je spojitá, striktně rostoucí a konvexní.

Oligopolní hru v normálním tvaru $(N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$ asociovanou s oligopolní situací $(N, (\omega_i, C_i)_{i \in N}, p)$ definujeme následovně:

1. množina firem je $N = \{1, 2, ...n\}$;

2. pro každé $i \in N$ množina individuálních strategií je $X_i = [0, \omega_i] \subset \mathbb{R}_+$, kde $x_i \in X_i$ představuje počet výrobků vyprodukovaných i-tou firmou;

3. množina všech strategií je $X_N = \Pi_{i \in N} X_i$, kde $x = (x_i)_{i \in N}$ je prvek X_N;

4. pro každé $i \in N$ individuální zisková funkce $\pi_i : X_N \to \mathbb{R}_+$ je definována jako

$$\pi_i(x) = p(X)x_i - C_i(x_i), \tag{2.1}$$

kde $X = \sum_{i \in N} x_i$ je produkce celého odvětví.

Zisk i-té firmy závisí jak na individuálním výstupu x_i tak i na celkovém výstupu oponentů $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j$. K analýze stability kartelu a iniciativ firem ke spolupráci je nutné převést oligopolní hru v normálním tvaru $(N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$ na kooperativní oligopolní hru. Jak už bylo zmíněno, v teoretické části existují dva nejpoužívanější způsoby převodu hry v normální formě na kooperativní hru, které se nazývají hrou ve tvaru α- a β-charakteristické funkce. Označíme $X_S = \Pi_{i \in S} X_i$ množinu strategií koalice $S \subset N$ a $X_{-S} = \Pi_{i \notin S} X_i$ množinu strategií firem, které nejsou v koalici S, jejichž prvky jsou $x_S = (x_i)_{i \in S}$ a $x_{-S} = (x_i)_{i \notin S}$ respektive. Pak pro použité v modelu označení α- a β-charakteristické funkce vypadají následovně

$$v_\alpha(S) = \max_{x_S \in X_S} \min_{x_{-S} \in X_{-S}} \sum_{i \in S} \pi_i(x_S, x_{-S}) \tag{2.2}$$

a

$$v_\beta(S) = \min_{x_{-S} \in X_{-S}} \max_{x_S \in X_S} \sum_{i \in S} \pi_i(x_S, x_{-S}). \tag{2.3}$$

Za předpokladu, že inverzní poptávková funkce p je striktně klesající, z (2.1) můžeme odvodit, že

$$\forall x_S \in X_S,\ \omega_{-S} = (\omega_i)_{i \notin S} \in \arg \min_{x_{-S} \in X_{-S}} \sum_{i \in S} \pi_i(x_S, x_{-S}), \tag{2.4}$$

kde $\omega_i \in X_i$ je výstup i-té firmy při plném využití výrobní kapacity. Dále pro každé $S \in N$ definujeme korespondenci nejlepší odpovědi $B_S : X_{-S} \to X_S$ jako

$$\forall x_{-S} \in X_{-S},\ B_S(x_{-S}) = \arg \max_{x_S \in X_S} \sum_{i \in S} \pi_i(x_S, x_{-S}). \tag{2.5}$$

Prvek $B_S(x_{-S})$ označíme jako $x_S^*(x_{-S})$. Zhao [8] ukázal, že α- a β-charakteristické funkce jsou ekvivalentní pro oligopolní kooperativní hry. Z této úvahy spolu s (2.3), (2.4), (2.5) plyne

$$v_\alpha(S) = v_\beta(S) = \sum_{i \in S} \pi_i(x_S^*(\omega_{-S}), \omega_{-S}). \tag{2.6}$$

Jestliže každá individuální zisková funkce π_i je konkávní na množině všech strategií, pak z věty Zhao [8] plyne, že α-a β-jadra jsou neprázdné.

Logická správnost převodu oligopolní hry v normálním tvaru na kooperativní hru pomocí α- a β-charakteristických funkcí zřejmě může být zpochybněna tím, že reakce ostatních firem s cílem minimalizovat zisk koalice zvýšením výstupu na úroveň plného využití kapacity může vést k podstatnému poškození samých sebe. Takže stejně jako Chander a Tulkens [7] budeme uvažovat, že outsideři individuálně volí své strategie jako nejlepší odpovědi koalici. Tato úvaha vede k zavedení γ-charakteristické funkce. Nejprve označíme $\tilde{x}_{-S}(x_S) = (\tilde{x}_i(x_S, \tilde{x}_{-(S \cup i)}))_{i \notin S} \in \Pi_{i \notin S} B_i(x_S, \tilde{x}_{-(S \cup i)})$ definované pro $\forall S \subset N$ a $\forall x_S \in X_S$ jako množinu strategií nejlepších odpovědí outsiderů, kde $S \cup i$ značí $S \cup \{i\}$. Pak pro oligopolní hru v normálním tvaru $(N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$ γ-charakteristická funkce $\forall S \subset N$ je definována jako

$$v_\gamma(S) = \sum_{i \in S} \pi_i(x_S^*(\tilde{x}_{-S}), \tilde{x}_{-S}(x_S^*)). \tag{2.7}$$

Strategie $(x_S^*(\tilde{x}_{-S}), \tilde{x}_{-S}(x_S^*)) \in X_N$ se nazývá rovnovážný stav částečné dohody pod S.

Pro fixní počet hráčů N označíme jako G_o^N množinu kooperatívních oligopolních her. Ukážeme si, jaký je vztah mezi γ-jádrem a β-jádrem, je zřejmé, že mezi γ-jádrem a α-jádrem bude platit stejný vztah, což plyne z (2.6).

Tvrzení 2.1. *Nechť $v_\gamma \in G_o^N$ a $v_\beta \in G_o^N$ jsou kooperativní oligopolní hry asociované s oligopolní situací $(N, (\omega_i, C_i)_{i \in N}, p)$. Pak*

$$C(v_\gamma) \subseteq C(v_\beta). \tag{2.8}$$

Důkaz. Z definice jádra plyne, že máme prokázat $v_\gamma(S) \geq v_\beta(S)\ \forall S \subset N,\ S \neq N$ a $v_\gamma(N) = v_\beta(N)$. Zřejmě

$$v_\gamma(N) = \max_{x \in X_N} \sum \pi_i(x) = v_\beta(N).$$

Taky $\forall S \subset N$, $S \neq N$ platí

$$\begin{aligned} v_\gamma(S) &= \sum_{i\in S} \pi_i(x_S^*(\tilde{x}_{-S}), \tilde{x}_{-S}(x_S^*)) \\ &= \max_{x_S\in X_S} \sum_{i\in S} \pi_i(x_S, \tilde{x}_{-S}(x_S^*)) \\ &\geq \max_{x_S\in X_S} \sum_{i\in S} \pi_i(x_S, \omega_{-S}) \\ &= \min_{x_{-S}\in X_{-S}} \max_{x_S\in X_S} \sum_{i\in S} \pi_i(x_S, x_{-S}) \\ &= v_\beta(S). \end{aligned}$$

□

2.2 Vlastnosti kooperatívních oligopolních her pro Cournotův oligopol

Podstatou této podkapitoly je ukázat, že γ-charakteristická funkce je dobře definována, jinými slovy, že existuje unikátní hodnota $v_\gamma(S)$ pro $\forall S \in P(N)$. Nechť máme oligopolní hru v normálním tvaru $(N, (X_i, \pi_i)_{i\in N})$ a koaliční strukturu $P \in \Pi(N)$, kde $\Pi(N)$ je množina koaličních struktur. Řekneme, ze strategie $\hat{x} \in X_N$ je rovnovážný stav pod P jestliže

$$\forall S \in P,\ \hat{x}_S \in B_S(\hat{x}_{-S}), \tag{2.9}$$

kde B_S je korespondence nejlepší odpovědi. Rovnovážný stav částečné dohody pod $S \in P(N)$ odpovídá rovnovážnému stavu pod koaliční strukturou $P^S = \{S\} \cup \{\{i\} \notin S\}$. Nás bude zajímat, jestli existuje rovnovážný stav pod každou koaliční strukturou pro každou oligopolní hru v normálním tvaru. Jestliže $(N, (X_i, \pi_i)_{i\in N})$ je oligopolní hra v normálním tvaru a $P \in \Pi(N)$ je koaliční struktura, pak definujeme oligopolní hru v normálním tvaru $(P, (X^S, \pi_S)_{S\in P})$ následujícím způsobem:

1. množina hráčů je P;

2. pro každé $S \in P$ množina strategií koalice je $X^S = [0, \omega^S] \subset \mathbb{R}_+,\ \omega^S = \sum_{i\in S} \omega_i$, jejíž prvkem je $x^S = \sum_{i\in S} x_i \in X^S$, který představuje počet výrobků koalice S;

3. množina strategií je $X^P = \Pi_{S\in P} X^S$, jejíž prvkem je $x^P = (x^S)_{S\in P}$;

4. pro každé $S \in P$ nákladová funkce koalice $C_S : X^S \to \mathbb{R}_+$ je definována jako

$$C_S(x_S) = \min_{x_S \in I(x^S)} \sum_{i \in S} C_i(x_i), \tag{2.10}$$

kde $I(x^S) = \{x_S \in X_S : \sum_{i \in S} x_i = x^S\}$ je množina strategií koalice, které dovolují vyrobit x^S;

5. pro každé $S \in P$ funkce zisku koalice $\pi_S : X^P \to \mathbb{R}_+$ je definována jako

$$\pi_S(x^P) = p(X)x^S - C_S(x^S). \tag{2.11}$$

Označíme množinu strategií outsiderů jako $X^{-S} = X^{P \setminus S}$, jejíž prvkem je $x^{-S} = x^{P \setminus S}$. Pak pro každé $S \in P$ definujeme korespondenci nejlepší odpovědi koalice S jako

$$\forall x^{-S} \in X^{-S},\ B^S(x^{-S}) = \arg \max_{x^S \in X^S} \pi_S(x^S, x^{-S}). \tag{2.12}$$

Mějme oligopolní hru v normálním tvaru $(P, (X^S, \pi_S)_{S \in P})$ řekneme, že strategie $\hat{x}^P \in X^P$ je Nashova rovnováha, jestliže

$$\forall S \in P,\ \hat{x}^S \in B^S(\hat{x}^{-S}). \tag{2.13}$$

Tvrzení 2.2. *Nechť $(N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$ je oligopolní hra v normálním tvaru. Pak pro každou koaliční strukturu $P \in \Pi(N)$ existuje rovnovážný stav pod P.*

Důkaz. : Uvažujeme oligopolní hru v normálním tvaru $(P, (X^S, \pi_S)_{S \in P})$ asociovanou s oligopolní hrou v normálním tvaru $(N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$ a koaliční strukturu $P \in \Pi(N)$.

Zaprvé dokážeme, že strategie $\hat{x}^P \in X^P$, která je Nashovou rovnovahou pro oligopolní hru v normálním tvaru $(P, (X^S, \pi_S)_{S \in P})$ existuje právě tehdy, když existuje strategie $\hat{x} \in X_N$ která je rovnovážným stavem pod P pro oligopolní hru v normálním tvaru $(N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$, kde $\hat{x}_S \in I(\hat{x}^S)$ pro každé $S \in P$.

[$\Rightarrow$]: Nechť $\hat{x}^P \in X^P$ je Nashova rovnováha pro oligopolní hru v normálním tvaru $(P, (X^S, \pi_S)_{S \in P})$. Pak dle (2.10) pro každé $S \in P$ existuje $\hat{x}_S \in X_S$ takové, že

$$\sum_{i \in S} \hat{x}_i = \hat{x}^S \text{ a } \sum_{i \in S} C_i(\hat{x}_i) = C_S(\hat{x}^S). \tag{2.14}$$

K využití důkazu sporem budeme předpokládat, že strategie $\hat{x} = (\hat{x}_S)_{S \in P} \in X_N$ není rovnovážný stav pod P pro oligopolní hru v normálním tvaru $(N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$. Z toho plyne, že $\hat{x}_S \notin B_S(\hat{x}_{-S})$ pro nějaké $S \in P$, neboli že existuje takové $\check{x}_S \in X_S$ pro které

$$\sum_{i \in S} \pi(\hat{x}_S, \hat{x}_{-S}) < \sum_{i \in S} \pi(\check{x}_S, \hat{x}_{-S}) \tag{2.15}$$

Pro oligopolní hru v normálním tvaru $(P, (X^S, \pi_S)_{S \in P})$ označíme jako $\check{x}^S \in X^S$ odpovídající strategii koalice S takové, že $\check{x}^S = \sum_{i \in S} \check{x}_i$. Pak

$$\begin{aligned}
\pi_S(\hat{x}^P) &= p(\hat{X})\hat{x}^S - C_S(\hat{x}^S) \\
&= p(\hat{X}) \sum_{i \in S} \hat{x}_i - \sum_{i \in S} C_i(\hat{x}_i) \\
&= \sum_{i \in S} \pi_i(\hat{x}_S, \hat{x}_{-S}) \\
&< \sum_{i \in S} \pi(\check{x}_S, \hat{x}_{-S}) \\
&= p(\sum_{i \in S} \check{x}_i + \sum_{i \notin S} \hat{x}_i) \sum_{i \in S} \check{x}_i - \sum_{i \in S} C_i(\check{x}_i) \\
&\leq p(\check{x}^S + \hat{X} - \hat{x}^S)\check{x}^S - C_S(\check{x}^S) \\
&= \pi_s(\check{x}^S, \hat{x}^{-S}),
\end{aligned}$$

což je ve sporu s $\hat{x}^S \in B^S(\hat{x}^{-S})$.

[$\Leftarrow$]: Nechť $\hat{x} \in X$ je rovnovážný stav pod P pro oligopolní hru v normálním tvaru $(N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$. Pro asociovanou oligopolní hru v normálním tvaru $(P, (X^S, \pi_S)_{S \in P})$ definujeme strategii $\hat{x}^P \in X^P$ jako

$$\forall S \in P,\ \hat{x}^S = \sum_{i \in S} \hat{x}_i. \tag{2.16}$$

Z toho, že $\hat{x}_S \in I(\hat{x}^S)$ a $\hat{x}_S \in B_S(\hat{x}_{-S})$ plyne, že $\sum_{i \in S} C_i(\hat{x}_i) = C_S(\hat{x}^S)$ pro každé $S \in P$. K využití důkazu sporem budeme předpokládat, že strategie $\hat{x}^P = (\hat{x}^S)_{S \in P} \in X^P$ není Nashovou rovnováhou pro oligopolní hru v normálním tvaru $(P, (X^S, \pi_S)_{S \in P})$. Z toho plyne, že $\hat{x}^S \notin B^S(\hat{x}^{-S})$ pro každé $S \in P$, neboli existuje $\check{x}^S \in X^S$ pro které

$$\pi_S(\hat{x}^S, \hat{x}^{-S}) < \pi_S(\check{x}^S, \hat{x}^{-S}). \tag{2.17}$$

Dle (2.10) existuje $\check{x}^S \in X_S$ takové, že

$$\sum_{i \in S} \check{x}_i = \check{x}^S \ a \ \sum_{i \in S} C_i(\check{x}_i) = C_S(\check{x}^S). \tag{2.18}$$

Pak pomocí (2.17) a (2.18) se dá ukázat, že

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in S}\pi_i(\hat{x}) = p(\hat{X})\sum_{i\in S}\hat{x}_i - \sum_{i\in S}C_i(\hat{x}_i) \\
= p(\hat{X})\hat{x}^S - C_S(\hat{x}^S) \\
= \pi_S(\hat{x}^S, \hat{x}^{-S}) \\
< \pi_S(\check{x}^S, \hat{x}^{-S}) \\
= p(\check{x}^S + \hat{X} - \hat{x}^S)\check{x}^S - C_S(\check{x}^S) \\
= p(\sum_{i\in S}\check{x}_i + \sum_{i\notin S}\hat{x}_i)\sum_{i\in S}\check{x}_i - \sum_{i\in S}C_i(\check{x}_i) \\
= \sum_{i\in S}\pi_i(\check{x}_S, \hat{x}_{-S}),
\end{aligned}$$

což je ve sporu s $\hat{x}_S \in B_S(\hat{x}_{-S})$ pro každé $S \in P$.

Nyní máme ukázat, že oligopolní hra v normálním tvaru $(P, (X^S, \pi_S)_{S\in P})$ připouští existenci unikátní Nashove rovnováhy. Za následujících předpokladů:

- $\forall S \in P$ X^S je kompaktní a konvexní a C_S je spojitá, striktně rostoucí a konvexní;
- Inverzní funkce poptávky p je diferencovatelná, striktně klesající a konkávní;

existuje unikátní Nashova rovnováha pro oligopolní hru v normálním tvaru $(P, (X^S, \pi_S)_{S\in P})$, což plyne z věty 3.3.3 z Okuguchi a Szidarovzsky [9]. Pak ve spojení s první částí důkazu můžeme odvodit, že existuje rovnováha pod každou koaliční strukturou P pro každou oligopolní hru v normálním tvaru $(N, (X_i, \pi_i)_{i\in N})$. □

Důsledek 2.1. *Nechť $(N, (X_i, \pi_i)_{i\in N})$ je oligopolní hra v normálním tvaru. Pak $\forall S \in P(N)$*

- *existuje rovnováha částečné dohody pod S;*
- *pro libovolné dvě rovnováhy částečné dohody $(x^*_S(\tilde{x}_{-S}), \tilde{x}_{-S}(x^*_S))$, $(y^*_S(\tilde{y}_{-S}), \tilde{y}_{-S}(y^*_S))$ platí*

$$\sum_{i\in S} x^*_{S,i}(\tilde{x}_{-S}) = \sum_{i\in S} y^*_{S,i}(\tilde{y}_{-S}),$$

$$\sum_{i\in S} C_i(x^*_{S,i}(\tilde{x}_{-S})) = \sum_{i\in S} C_i(y^*_{S,i}(\tilde{y}_{-S})).$$

První bod je přímým důsledkem předchozího tvrzení, druhý bod plyne z unikátnosti Nashove rovnováhy pro oligopolní hru v normálním tvaru $(P, (X^S, \pi_S)_{S\in P})$.

Ted pro všechny oligopolní hry v normálním tvaru $(N, (X_i, \pi_i)_{i\in N})$ a všechny koalice $S \in P(N)$ se budeme zabývat variacemi rovnovážného výstupu koalice S s ohledem na hrubost koaliční struktury, ve které je obsazena. Zavedeme binární relaci $\leq^F$ na $\Pi(N)$, kterou definujeme následovně: řekneme, že koaliční struktura $P \in \Pi(N)$ je jemnější než koaliční struktura $P' \in \Pi(N)$ nebo $P' \leq^F P$, jestliže $\forall S \in P$ existují přípustné koalice $T \in P'$, takové, že $T \supseteq S$. $(\Pi(N), \leq^F)$ je úplný svaz. Mějme oligopolní hru v normálním tvaru $(P, (X^S, \pi_S)_{S\in P})$, pro definování některých vlastností korespondenci nejlepší odpovědi B^S zavedeme pojmy dopředné a zpětné rozdělené diference. Pro všechny funkce $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ a všechny $\epsilon > 0$ definujeme dopřednou a zpětnou rozdělenou diferenci $f^+ : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ a $f^- : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ jako

$$f^+(a, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon}(f(a + \epsilon) - f(a))$$

a

$$f^-(a, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon}(f(a) - f(a - \epsilon)).$$

Pro každou přípustnou koalici $S \in P$ a všechny $\epsilon > 0$ definujeme funkce $\phi_S^+ : X^S \times X^{-S} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ a $\phi_S^- : X^S \times X^{-S} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ jako

$$\phi_S^+(x^S, x^{-S}, \epsilon) = p(X + \epsilon) + x^S p^+(X, \epsilon) - C_S^+(x^S, \epsilon),$$

$$\phi_S^-(x^S, x^{-S}, \epsilon) = p(X - \epsilon) + x^S p^-(X, \epsilon) - C_S^-(x^S, \epsilon).$$

Je patrné, že přípustná koalice $S \in P$ nemůže vydělat zvýšením svého výstupu o ϵ právě tehdy, když $\phi_S^+(x^S, x^{-S}, \epsilon) \leq 0$ analogicky nemůže vydělat snížením svého výstupu právě tehdy, když $\phi_S^-(x^S, x^{-S}, \epsilon) \geq 0$. Pak korespondence nejlepší odpovědi B^S každé přípustné koalice $S \in P$ má tři následující vlastnosti:

1. $0 \in B^S(x^{-S}) \Leftrightarrow \phi_S^+(0, x^{-S}, \epsilon) \leq 0, \forall \epsilon > 0;$

2. $\omega^S \in B^S(x^{-S}) \Leftrightarrow \phi_S^-(\omega^S, x^{-S}, \epsilon) \geq 0, \forall \epsilon > 0;$

3. $x^S \in B^S(x^{-S}) : x^S \in [0, \omega^S] \Leftrightarrow \phi_S^-(x^S, x^{-S}, \epsilon) \geq 0 \geq \phi_S^+(x^S, x^{-S}, \epsilon'), \forall \epsilon, \epsilon' > 0.$

Následující tvrzení porovnává rovnováhy pod P a P', za předpokladu $P' \leq^F P$.

Tvrzení 2.3. *Nechť $P, P' \in \Pi(N)$ jsou dvě koaliční struktury takové, že $P' \leq^F P$. Nechť $\hat{x}^P \in X^P$ a $\check{x}^{P'} \in X^{P'}$ jsou dvě Nashove rovnováhy pro oligopolní hry v normálním tvaru $(P, (X^S, \pi_S)_{S \in P})$ a $(P', (X^S, \pi_S)_{S \in P'})$. Pak platí*

(i) $\check{X} \leq \hat{X}$;

(ii) $\forall (S, T) \in P \times P', S \subseteq T, \hat{x}^S \leq \check{x}^T$;

(iii) $\sum_{T \in P' \setminus P} \check{x}^T \leq \sum_{S \in P' \setminus P} \hat{x}^S$.

K důkazu předchozího tvrzení budeme potřebovat následující lemmaty

Lemma 2.1. *Nechť $P, P' \in \Pi(N)$ jsou dvě koaliční struktury, pro které existují $T \in P'$ a $S_l \in P$, $l \in \{1, ..., p\}, p \in \{1, ..., n\}$, takové, že $T = \cup_{l=1}^p S_l$. Nechť $\hat{x}^P \in X^P$ a $\check{x}^{P'} \in X^{P'}$ jsou Nashove rovnováhy oligopolních her v normálním tvaru $(P, (X^S, \pi_S)_{S \in P})$ a $(P', (X^S, \pi_S)_{S \in P'})$. Jestliže $\hat{X} \leq \check{X}$, pak platí $\check{x}^T \leq \sum_{l=1}^p \check{x}^{S_l}$.*

Důkaz. Nechť $P, P' \in \Pi(N)$ jsou dvě koaliční struktury splňující předpoklady předchozího lemmata. Pro všechny $l \in \{1, ..., p\}$ označíme jako $\check{x}^{S_l}$ výstup podmnožiny S_l v koalici T takové, že $\sum_{l=1}^p \check{x}^{S_l} = \check{x}^T$. Dle definice Nashove rovnováhy pro všechny $\epsilon, \epsilon' > 0$ a všechny $l \in \{1, ..., p\}$ platí

$$\phi_S^+(\hat{x}^S, \hat{x}^{-S}, \epsilon) \leq 0$$

a

$$p(\check{X} - \epsilon') + \check{x}^T p^-(\check{X}, \epsilon') - C_{S_l}^-(\check{x}^{S_l}, \epsilon') \geq 0.$$

Levou stranu poslední nerovnosti označíme jako $A_l^{\epsilon'}$. Poslední nerovnost znamená, že při Nasove rovnováze $\check{x}^{P'}$ ani koalice T, ani žádná její podmnožina S_l, $l \in \{1, ..., p\}$ nemůže vydělat snížením výstupu. Pro všechny $\epsilon, \epsilon' > 0$ a všechny $l \in \{1, ..., p\}$ definujeme $Q_{\epsilon, \epsilon'}^l = \phi_{S_l}^+(\hat{x}^{S_l}, \hat{x}^{-S_l}, \epsilon) - A_l^{\epsilon'} \leq 0$. K důkazu sporem budeme předpokládat že existuje $l \in \{1, ..., p\}$ takové, že $\check{x}^{S_l} > \hat{x}^{S_l}$. Máme

$$Q_{\epsilon, \epsilon'}^l = p(\hat{X} + \epsilon) - p(\check{X} - \epsilon')$$

$$+ \hat{x}^{S_l} p^+(\hat{X}, \epsilon) - \check{x}^T p^-(\check{X}, \epsilon')$$

$$+ C_{S_l}^-(\check{x}^{S_l}, \epsilon') - C_{S_l}^+(\hat{x}^{S_l}, \epsilon).$$

Abychom obdrželi spor, je nutné ukázat, že $Q^l_{\epsilon,\epsilon'}$ je kladné pro dostatečně malé ϵ a $\epsilon' = \epsilon$. Zaprvé využijeme $\epsilon = \epsilon'$ a $\epsilon < \check{x}^{S_l} - \hat{x}^{S_l}$. Z konvexnosti nákladových funkcí a definice $C^+_{S_l}$ a $C^-_{S_l}$ plyne

$$C^+_{S_l}(\hat{x}^{S_l}, \epsilon) \le C^+_{S_l}(\check{x}^{S_l} - \epsilon, \epsilon) = C^-_{S_l}(\check{x}^{S_l}, \epsilon'). \tag{2.19}$$

Z předchozích výrazů a diferencovatelnosti inverzní poptávkové funkce p plyne, že

$$\lim_{\epsilon \to 0} Q^l_{\epsilon,\epsilon'} \ge p(\hat{X}) - p(\check{X}) + \hat{x}^{S_l} p'(\hat{X}) - \check{x}^T p'(\check{X}) > 0,$$

kde ostrá nerovnost plyne z toho, že inverzní poptávková funkce p je striktně klesající a konkávní a z předpokladu $\hat{x}^{S_l} < \check{x}^{S_l} \le \check{x}^T$.

Obdrželi jsme tedy spor s $Q^l_{\epsilon,\epsilon'} = \phi^+_{S_l}(\hat{x}^{S_l}, \hat{x}^{-S_l}, \epsilon) - A^{\epsilon'}_l \le 0$ pro všechny $\epsilon, \epsilon' > 0$. Takže pro všechny $l \in \{1, ..., p\}$ máme $\check{x}^{S_l} \le \hat{x}^{S_l}$, což implikuje $\check{x}^T = \sum_{l=1}^p \check{x}^{S_l} \le \sum_{l=1}^p \hat{x}^{S_l}$. □

Lemma 2.2. *Nechť $P, P' \in \Pi(N)$ jsou dvě koaliční struktury, pro které existují $T \in P'$ a $S_l \in P,\ l \in \{1, ..., p\},\ p \in \{1, ..., n\}$, takove, že $T = \cup_{l=1}^p S_l$. Nechť $\hat{x}^P \in X^P$ a $\check{x}^{P'} \in X^{P'}$ jsou Nashove rovnováhy oligopolních her v normálním tvaru $(P, (X^S, \pi_S)_{S \in P})$ a $(P', (X^S, \pi_S)_{S \in P'})$. Jestliže $\check{X} \le \hat{X}$ pak platí, že $\check{x}^T \ge \hat{x}^{S_l}$ pro všechna $l \in \{1, ..., p\}$.*

Důkaz. Nechť P,$P' \in \Pi(N)$ jsou dvě koaliční struktury splňující předpoklady předchozího lemmata. Dle definice Nashove rovnováhy pro všechny $\epsilon, \epsilon' > 0$ a všechny $l \in \{1, ..., p\}$ platí $\phi^+_T(\check{x}^T, \check{x}^{-T}, \epsilon) \le 0$ a $\phi^-_{S_l}(\hat{x}^{S_l}, \hat{x}^{-S_l}, \epsilon') \ge 0$. Pro všechny $\epsilon, \epsilon' > 0$ a všechny $l \in \{1, ..., p\}$ definujeme $Q^l_{\epsilon,\epsilon'} = \phi^+_T(\check{x}^T, \check{x}^{-T}, \epsilon) - \phi^-_{S_l}(\hat{x}^{S_l}, \hat{x}^{-S_l}, \epsilon')$. K důkazu sporem budeme předpokládat, že existuje $l \in \{1, ..., p\}$ takové, že $\hat{x}^{S_l} > \check{x}^T$. Máme

$$Q^l_{\epsilon,\epsilon'} = p(\check{X} + \epsilon) - p(\hat{X} - \epsilon')$$

$$+ \check{x}^T p^+(\check{X}, \epsilon) - \hat{x}^{S_l} p^-(\hat{X}, \epsilon')$$

$$+ C^-_{S_l}(\hat{x}^{S_l}, \epsilon') - C^+_T(\check{x}^T, \epsilon).$$

Jako v důkazu předchozího lemmatu potřebujeme ukázat, že $Q^l_{\epsilon,\epsilon'}$ je kladné pro dostatečně malé ϵ a $\epsilon' = \epsilon$. Zaprvé využijeme $\epsilon = \epsilon'$ a $\epsilon < \hat{x}^{S_l} - \check{x}^T$. Z konvexnosti nákladových funkcí, definice C^+_T, $C^+_{S_l}$ a $C^-_{S_l}$ a skutečnosti, že pro koalici T je levnější přerozdělit své dodatečné náklady než pro libovolnou její podmnožinu $S_l,\ l \in \{1, ..., p\}$ plyne

$$C^+_T(\check{x}^T, \epsilon) \le C^+_T(\hat{x}^{S_l} - \epsilon, \epsilon)$$

$$\leq C^+_{S_l}(\hat{x}^{S_l} - \epsilon, \epsilon)$$
$$= C^-_{S_l}(\hat{x}^{S_l}, \epsilon').$$

Z předchozího vztahu a diferencovatelnosti inverzní poptávkové funkce p plyne, že

$$\lim_{\epsilon \to 0} Q^l_{\epsilon,\epsilon'} \geq p(\check{X}) - p(\hat{X}) + \check{x}^T p'(\check{X}) - \hat{x}^{S_l} p'(\hat{X}) > 0,$$

kde ostrá nerovnost plyne z toho, že inverzní poptávková funkce p je striktně klesající a konkávní a z předpokladu $\hat{x}^{S_l} > \check{x}^T$.

Obdrželi jsme tedy spor s $Q^l_{\epsilon,\epsilon'} = \phi^+_T(\check{x}^T, \check{x}^{-T}, \epsilon) - \phi^-_{S_l}(\hat{x}^{S_l}, \hat{x}^{-S_l}, \epsilon') \leq 0$ pro všechny $\epsilon, \epsilon' > 0$. Takže pro všechny $l \in \{1, ..., p\}$ máme $\check{x}^T \geq \hat{x}^{S_l}$. $\square$

Ted můžeme přistoupit k samotnému důkazu tvrzení.

Důkaz. Zaprvé k důkazu (i) sporem předpokládejme $\hat{X} < \check{X}$. Z $P' \leq^F P$ plyne, že pro každé $T \in P'$ existují $S_l \in P,\ l \in \{1, ..., p\},\ p \in \{1, ..., n\}$, takové, že $T = \cup^p_{l=1} S_l$. Z prvního lemmata plyne, že pro každé $T \in P'$ a každé $S_l \in P,\ l \in \{1, ..., p\}$, máme $\check{x}^T \leq \sum^p_{l=1} \hat{x}^{S_l}$, to znamená že jsme obdrželi spor a $\check{X} \leq \hat{X}$. Pak bod (ii) plyne přímo z (i) a druhého lemmata. Nakonec bod (iii) je důsledkem bodů (i) a (ii). Dle (i) platí

$$\check{X} \leq \hat{X} \Leftrightarrow \sum_{T \in P'} \check{x}^T \leq \sum_{S \in P} \hat{x}^S$$

$$\Leftrightarrow \sum_{T \in P' \setminus P} \check{x}^T + \sum_{T \in P' \cap P} \check{x}^T \leq \sum_{S \in P \setminus P'} \hat{x}^S + \sum_{S \in P \cap P'} \hat{x}^S$$
$$\Leftrightarrow \sum_{T \in P' \cap P} \check{x}^T - \sum_{S \in P \cap P'} \hat{x}^S \leq \sum_{S \in P \setminus P'} \hat{x}^S - \sum_{T \in P' \setminus P} \check{x}^T.$$

Navíc z (ii) plyne

$$\sum_{T \in P' \cap P} \check{x}^T - \sum_{S \in P \cap P'} \hat{x}^S \geq 0.$$

Z kombinaci dvou předchozích výrazů obdržíme

$$\sum_{T \in P' \setminus P} \check{x}^T \leq \sum_{S \in P \setminus P'} \hat{x}^S.$$

$\square$

Ukázali jsme, že výstupy na úrovni Nashove rovnováhy pro oligopolní hry v normálním tvaru $(P, (X^S, \pi_S)_{S \in P})$ jsou rovné agregovaným rovnovážným výstupům pod P pro oligopolní hru v normálním tvaru $(N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$. Mějme oligopolní hru v normálním tvaru $(N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$, koalici $S \in P(N)$ a rovnováhu částečné dohody pod S $(x_S^*(\tilde{x}_{-S}), \tilde{x}_{-S}(x_S^*)) \in X_N$, kde $\tilde{x}_{-S}$ značí $(\tilde{x}_i(x_S^*, \tilde{x}_{-(S \cup i)}))_{i \notin S}$, pak označíme jako $X^{P,S}$ celkový vystup rovnováhy částečné dohody pod S

$$X^{P,S} = \sum_{i \in S} x_{S,i}^*(\tilde{x}_{-S}) + \sum_{i \notin S} \tilde{x}_i(x_S^*, \tilde{x}_{-(S \cup i)}).$$

Důsledek 2.2. *Nechť $(N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$ je oligopolní hra v normálním tvaru. Pak pro každé $S, T \in P(N)$ takové, že $S \subseteq T$ platí*

(i) $X^{P,S} \geq X^{P,T}$;

(ii) $\forall i \notin T, \tilde{x}_i(x_S^*, \tilde{x}_{-(S \cup i)}) \leq \tilde{x}_i(x_T^*, \tilde{x}_{-(T \cup i)})$;

(iii) $\sum_{i \in S} x_{S,i}^*(\tilde{x}_{-S}) \leq \sum_{i \in T} x_{T,i}^*(\tilde{x}_{-T})$;

(iv) $\sum_{i \in T} x_{T,i}^*(\tilde{x}_{-T}) \leq \sum_{i \in S} x_{S,i}^*(\tilde{x}_{-S}) + \sum_{i \in T \setminus S} \tilde{x}_i(x_S^*, \tilde{x}_{-(S \cup i)})$.

2.3 Balancovanost kooperatívních oligopolních her pro Cournotův oligopol

Daná podkapitola je věnovaná neprázdnosti γ-jádra. Dle věty Bondareve-Shapley [10, 11] vlastnost balancovanosti je nutnou a postačující podmínkou pro garantování neprázdnosti jádra pro každou kooperativní hru $v \in G^N$, kde G^N je množina všech kooperativních her o N hráčích. Nechť $\mathcal{B} \subseteq P(N)$ je rodinou koalicí, $\mathcal{B}_i = \{S \in \mathcal{B} : i \in S\}$ je podmnožinou těch koalicí, do kterých patří i. Řekneme, že $\mathcal{B}$ je balancovanou rodinou koalic, jestliže pro každé $S \in \mathcal{B}$ existuje balanční váha $\lambda_S \in \mathbb{R}_+$, taková, že $\sum_{S \in \mathcal{B}_i} \lambda_S = 1$ pro každé $i \in N$. Kooperativní hra $v \in G^N$ je balancovaná, jestliže pro každou balancovanou rodinu koalic platí

$$\sum_{S \in \mathcal{B}} \lambda_S v(S) \leq v(N)$$

Věta Bondareve-Shapley zní následujícím způsobem:

Věta 2.1. *Kooperativní hra $v \in G^N$ má neprázdné jádro právě tehdy, když je balancovaná.*

Smyslem této podkapitoly je dokázat, že pro každou oliopolní hru v normálním tvaru, pro kterou individuální zisková funkce je konkávní na množině strategii, asociovaná kooperativní oligopolní hra je balancovaná a tedy má neprázdné γ-jádro.

Věta 2.2. *Nechť $(N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$ je oligopolní hra v normálním tvaru taková, že π_i je konkávní na X_N pro každé $i \in N$. Pak asociovaná kooperativní oligopolní hra $v_\gamma \in G_o^N)$ je balancovaná, a tedy má neprázdné γ-jádro.*

K důkazu předchozí věty budeme potřebovat následující lemma.

Mějme oligopolní hru v normálním tvaru $(N, (X_i, \pi_i)_{i \in N})$, balancovanou rodinu koalic $\mathcal{B} \subseteq P(N)$ a každou rovnováhu částečné dohody pod S, $(x_S^*, (\tilde{x}_{-S}), \tilde{x}_{-S}(x_S^*)) \in X_N$, takovou že $S \in \mathcal{B}$, definujeme strategii $y \in X_N$ jako

$$\forall i \in N,\ y_i = \sum_{S \in \mathcal{B}_i} \lambda_S x_{S,i}^*(\tilde{x}_{-S}). \tag{2.20}$$

Lemma 2.3. *Nechť $y \in X_N$ je strategie dle předchozího odstavce. Pak*

$$\forall j \in N, \sum_{S \in \mathcal{B}_j} \lambda_S X^{P,S} \geq Y,$$

kde $Y = \sum_{i \in N} y_i$.

Důkaz. Vezmeme libovolné $j \in N$. Zaprvé ukážeme, že

$$\sum_{S \in \mathcal{B}_j} \lambda_S \sum_{i \notin S} \tilde{x}_i(x_S^*, \tilde{x}_{-(S \cup i)}) \geq \sum_{S \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_j} \lambda_S \sum_{i \in S} x_{S,i}^*(\tilde{x}_{-S}). \tag{2.21}$$

Z bodů (ii) a (iv) důsledku 2.2 plyne

$$\begin{aligned}
\sum_{S \in \mathcal{B}_j} \lambda_S \sum_{i \notin S} \tilde{x}_i(x_S^*, \tilde{x}_{-(S \cup i)}) &\geq \sum_{S \in \mathcal{B}_j} \lambda_S \sum_{i \notin S} \tilde{x}_i(\tilde{x}_{-i}) \\
&= \sum_{S \in \mathcal{B}_j} \lambda_S (\sum_{i \in N} \tilde{x}_i(\tilde{x}_{-i}) - \sum_{i \in S} \tilde{x}_i(\tilde{x}_{-i})) \\
&= \sum_{i \in N} \tilde{x}_i(\tilde{x}_{-i}) - \sum_{S \in \mathcal{B}_j} \lambda_S \sum_{i \in S} \tilde{x}_i(\tilde{x}_{-i}) \\
&= \sum_{S \in \mathcal{B}} \lambda_S \sum_{i \in S} \tilde{x}_i(\tilde{x}_{-i})) - \sum_{S \in \mathcal{B}_j} \lambda_S \sum_{i \in S} \tilde{x}_i(\tilde{x}_{-i})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{S\in\mathcal{B}\setminus\mathcal{B}_j} \lambda_S \sum_{i\in S} \tilde{x}_i(\tilde{x}_{-i}) \\
&\geq \sum_{S\in\mathcal{B}\setminus\mathcal{B}_j} \lambda_S \sum_{i\in S} x^*_{S,i}(\tilde{x}_{-S}).
\end{aligned}
$$

Pak platí

$$
\begin{aligned}
\sum_{S\in\mathcal{B}_j} \lambda_S X^{P,S} &= \sum_{S\in\mathcal{B}_j} \sum_{i\in S} x^*_{S,i}(\tilde{x}_{-S}) + \sum_{S\in\mathcal{B}_j} \lambda_S \sum_{i\notin S} \tilde{x}_i(x^*_S, \tilde{x}_{-(S\cup i)}) \\
&\geq \sum_{S\in\mathcal{B}_j} \lambda_S \sum_{i\in S} x^*_{S,i}(\tilde{x}_{-S}) + \sum_{S\in\mathcal{B}\setminus\mathcal{B}_j} \lambda_S \sum_{i\in S} x^*_{S,i}(\tilde{x}_{-S}) \\
&= \sum_{S\in\mathcal{B}} \sum_{i\in S} x^*_{S,i}(\tilde{x}_{-S}) \\
&= \sum_{i\in N} \sum_{S\in\mathcal{B}_i} \lambda_S x^*_{S,i}(\tilde{x}_{-S}) \\
&= Y.
\end{aligned}
$$

□

Teď můžeme přejit k důkazu věty.

Důkaz. Nechť $\mathcal{B} \subseteq P(N)$ je balancovaná rodina koalic a $y \in X_N$ je strategie jako v (2.20). Z konkávnosti každé individuální ziskové funkce π_i na X_N, lemma 2.3, striktně monotónnosti inverzní poptávkové funkce a Paretovské efektivity hodnoty velké koalice plyne

$$
\begin{aligned}
\sum_{S\in\mathcal{B}} \lambda_S v_\gamma(S) &= \sum_{S\in\mathcal{B}} \lambda_S \sum_{i\in S} \pi_i(x^*_S(\tilde{x}_{-S}), \tilde{x}_{-S}(x^*_S)) \\
&= \sum_{i\in N} \sum_{S\in\mathcal{B}_i} \lambda_S \pi_i(x^*_S(\tilde{x}_{-S}), \tilde{x}_{-S}(x^*_S)) \\
&\leq \sum_{i\in N} \pi_i(\sum_{S\in\mathcal{B}_i} \lambda_S(x^*_S(\tilde{x}_{-S}), \tilde{x}_{-S}(x^*_S))) \\
&= \sum_{i\in N} [p(\sum_{S\in\mathcal{B}_i} \lambda_S X^{P,S}) y_i - C_i(y_i)] \\
&\leq P(Y)Y - \sum_{i\in N} C_i(y_i) \\
&\leq v_\gamma(N).
\end{aligned}
$$

□

Podmínka konkávnosti v dokázané větě je postačující k existenci γ-jádra, ale není nutná.

2.4 Řešení v γ-jádře pro kooperativní oligopolní hry pro Cournotův oligopol

Podmínka konkávnosti může připadat přirozeným požadavkem k zaručení neprázdnosti γ-jádra, avšak existuje mnoho oligopolních situací, které tuto podmínku nesplňují. Doopravdy, v lineární oligopolní situaci, neboli $p(X) = a - X,\ a \in \mathbb{R}_+$, a pro všechny $i \in N$ $C_i(x_i) = c_i x_i,\ c_i \in \mathbb{R}_+$, každá individuální zisková je kvadratická, ale není konkávní. V této podkapitole bude použit alternativní přístup, který spočívá v zabezpečovaní řešení v γ-jádře bez požadavku konkávnosti. Budeme předpokládat, že nákladové funkce jsou lineární a firmy mají stejné mezní náklady

$$\exists c \in \mathbb{R}_+ :\ \forall i \in N,\ C_i(x_i) = cx_i. \tag{2.22}$$

Nejsou kladené jakékoliv jiné požadavky na kapacitní omezení anebo inverzní poptávkovou funkci. Pro konstantní počet hráčů N, označíme jako $G_o^{N_*}$ množinu kooperatívních oligopolních her asociovaných s oligopolní situací $(N, (\omega_i, C_i)_{i\in N}, p)$, splňujících předchozí požadavek. Řešením na $G_o^{N_*}$ je funkce $\rho : G_o^{N_*} \to \mathbb{R}^N$, která přiřazuje každé kooperativní oligopolní hře $v_\gamma \in G_o^{N_*}$ vektor výplat $\rho(v_\gamma) \in \mathbb{R}^N$. Mějme oligopolní hru v normálním tvaru $(N, (X_i, \pi_i)_{i\in N})$, označíme jako $X^{P,\varnothing} = \sum_{i\in N} \tilde{x}_i(\tilde{x}_{-i})$ celkový výstup při Nashove rovnováze. Pro každou kooperativní oligopolní hru $v_\gamma \in G_o^{N_*}$ uvažujeme řešení, které se nazývá NP(Nashova Pro rata)-hodnota, která je definována následovně

$$\forall i \in N, NP_i(v_\gamma) = \begin{cases} \frac{\tilde{x}_i(\tilde{x}_{-i})}{X^{P,\varnothing}} v_\gamma(N) & \text{jestlize } X^{P,\varnothing} > 0 \\ 0 & \text{v jinem pripade} \end{cases} \tag{2.23}$$

NP-hodnota distribuuje každému hráči $i \in N$ hodnotu velké koalice $v_\gamma(N)$ v poměru k jeho individuálnímu Nashovu výstupu $\tilde{x}_i(\tilde{x}_{-i})$.

Věta 2.3. *Pro každou kooperativní oligopolní hru $v_\gamma \in G_o^{N_*}$ platí $NP(v_\gamma) \in C(v_\gamma)$.*

Důkaz. Zaprvé vezmeme libovolné $v_\gamma \in G_o^{N_*}$ takové že $X^{P,\varnothing} = 0$. Dle bodu (i) důsledku 2.2 pak $\forall S \in P(N)$ máme $X^{P,S} = 0$, tedy $v_\gamma(S) = 0$. V daném případě je zřejmé, že $NP(v_\gamma) \in C(v_\gamma)$.

Teď vezmeme libovolné $v_\gamma \in G_o^{N_*}$ takové, že $X^{P,\varnothing} > 0$. K využití důkazu sporem předpokládejme, že $NP(v_\gamma) \notin C(v_\gamma)$, neboli že existuje koalice S, pro kterou $v_\gamma(S) >$

$\sum_{i \in S} NP_i(v_\gamma)$. Z toho plyne, že $v_\gamma(S) > 0$ a $X^{P,S} > 0$. Uvažujeme výplatní vektor $\sigma_S \in \mathbb{R}^n$ definovaný jako

$$\forall i \in N,\ \sigma_{S,i} = \frac{v_\gamma(N)}{X^{P,S}} \alpha_i,$$

kde

$$\alpha_i = \begin{cases} x^*_{S,i}(\tilde{x}_{-S}) & \text{jestlize } i \in S \\ \tilde{x}_i(x^*_S, \tilde{x}_{-S \cup i}) & \text{jestlize } i \notin S \end{cases}$$

Dle bodů (i) a (ii) důsledku 2.2 víme, že $X^{P,S} \leq X^{P,\varnothing}$ a $\tilde{x}_i(\tilde{x}_{-i}) \leq \tilde{x}_i(x^*_S, \tilde{x}_{-S \cup i})$ pro všechny $i \notin S$. Toto implikuje, že $\sigma_{S,i} \geq NP_i(v_\gamma)$ pro všechny $i \notin S$. Navíc z Paretovské efektivity hodnoty velké koalice a předpokladu $NP(v_\gamma) \notin C(v_\gamma)$ plyne

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} \sigma_{S,i}(v_\gamma) &= \frac{v_\gamma(N)}{X^{P,S}} \sum_{i \in S} x^*_{S,i}(\tilde{x}_{-S}) \\ &\geq \frac{1}{X^{P,S}} (p(X^{P,S}) X^{P,S} - cX^{P,S}) \sum_{i \in S} x^*_{S,i}(\tilde{x}_{-S}) \\ &= p(X^{P,S}) \sum_{i \in S} x^*_{S,i}(\tilde{x}_{-S}) - c \sum_{i \in S} x^*_{S,i}(\tilde{x}_{-S}) \\ &= v_\gamma(S) \\ &> \sum_{i \in S} NP_i(v_\gamma). \end{aligned}$$

Obdrželi jsme tedy $\sum_{i \in S} \sigma_{S,i}(v_\gamma) > \sum_{i \in S} NP_i(v_\gamma)$, což je v rozporu s $\sum_{i \in N} \rho_{S,i}(v_\gamma) = v_\gamma(N) = \sum_{i \in N} NP_i(v_\gamma)$. □

Teď se podíváme na to, které vlastnosti splňuje NP-hodnota. Na množině $G_o^{N_*}$ NP-hodnota může byt charakterizovaná pomocí čtyř následujících vlastností : efektivita, nulová firma, monotónnost, nekooperativní spravedlnost. Pro každou kooperativní oligopolní hru $v_\gamma \in G_o^{N_*}$ řekneme, že řešení ρ splňuje

1. Efektivita: jestliže $\sum_{i \in N} \rho_i(v_\gamma) = v_\gamma(N)$. (EF)

2. Nulová firma: jestliže $\forall i \in N$ taková, že $\omega_i = 0$, $\rho_i(v_\gamma) = 0$. (NF)

3. Monotónnost: jestliže $\forall i, j \in N$ takové, že $\omega_i \geq \omega_j$, $\rho_i(v_\gamma) \geq \rho_j(v_\gamma)$. (M)

4. Nekooperativní spravedlnost: jestliže $\forall i, j \in N,\ v_\gamma(\{j\})\rho_i(v_\gamma) = v_\gamma(\{i\})\rho_j(v_\gamma)$. (NS)

Věta 2.4. *Funkce ρ která je řešením na $G_o^{N_*}$ splňuje (EF), (NF), (M) a (NS) právě tehdy, když $\rho = NP$.*

Důkaz. Vezmeme libovolné $v_\gamma \in G_o^{N_*}$. Zaprvé ukážeme, že NP-hodnota splňuje (EF). Předpokládejme, že $X^{P,\varnothing} = 0$. Z toho plyne, že $NP_i(v_\gamma) = 0$ pro všechna $i \in N$. Navíc dle bodu (i) důsledku 2.2 máme $X^{P,N} = 0$, tedy $\sum_{i \in N} NP_i(v_\gamma) = v_\gamma(N) = 0$. Pak předpokládejme, že $X^{P,\varnothing} > 0$. Z (2.23) přímo plyne $\sum_{i \in N} NP_i(v_\gamma) = v_\gamma(N)$.

Zadruhé ukážeme, že NP-hodnota splňuje (NF). Vezmeme libovolné $i \in N$ takové, že $\omega_i = 0$. Předpokládejme, že $X^{P,\varnothing} = 0$. Dle (2.23) máme $NP_i(v_\gamma) = 0$. Pak předpokládejme, že $X^{P,\varnothing} > 0$. Z $\omega_i = 0$ plyne že $\tilde{x}_i(\tilde{x}_{-i}) = 0$ a tak dle (2.23) máme $NP_i(v_\gamma) = 0$.

Za třetí ukážeme, že NP-hodnota splňuje (M). Vezmeme libovolná $i, j \in N$ takové, že $\omega_i \geq \omega_j$. Předpokládejme, že $X^{P,\varnothing} = 0$. Dle (2.23) máme $NP_i(v_\gamma) = NP_j(v_\gamma) = 0$. Pak předpokládejme, že $X^{P,\varnothing} > 0$. Z $\omega_i \geq \omega_j$ a $v_\gamma \in G_o^{N_*}$ plyne, že $\tilde{x}_i(\tilde{x}_{-i}) \geq \tilde{x}_j(\tilde{x}_{-j})$ a tak dle (2.23) mame $NP_i(v_\gamma) \geq NP_i(v_\gamma)$.

Za čtvrté ukážeme, že NP-hodnota splňuje (NS). Předpokládejme, že $X^{P,\varnothing} = 0$. Z tohoto plyne, že $NP_i(v_\gamma) = 0$ pro všechna $i \in N$, tedy $v_\gamma(\{j\})NP_i(v_\gamma) = v_\gamma(\{i\})NP_j(v_\gamma)$ pro všechna $i, j \in N$. Pak předpokládejme, že $X^{P,\varnothing} > 0$. Pro všechna $i, j \in N$ bude platit

$$\begin{aligned}
v_\gamma(\{j\})NP_i(v_\gamma) &= (p(X^{P,\varnothing}) - c)\tilde{x}_j(\tilde{x}_{-j})\frac{\tilde{x}_i(\tilde{x}_{-i})}{X^{P,\varnothing}}v_\gamma(N) \\
&= (p(X^{P,\varnothing}) - c)\tilde{x}_i(\tilde{x}_{-i})\frac{\tilde{x}_j(\tilde{x}_{-j})}{X^{P,\varnothing}}v_\gamma(N) \\
&= v_\gamma(\{i\})NP_j(v_\gamma).
\end{aligned}$$

Teď zbývá jen ukázat, že NP-hodnota je unikátním řešením na množině $G_o^{N_*}$, které splňuje (EF), (NF), (M) a (NS). Vezmeme libovolné řešení ρ na $G_o^{N_*}$ splňující (EF), (NF), (M) a (NS) a dokážeme, že je ekvivalentní NP-hodnotě. Podle (EF) víme, že $\sum_{i \in N} \rho_i(v_\gamma) = v_\gamma(N)$. Navíc (NF) a (M) zaručuje, že $\rho_i(v_\gamma) \geq 0$ pro vsechna $i \in N$. Tedy existuje $\beta : G_o^{N_*} \to \mathbb{R}_n^+$ takové, že

$$\forall i \in N, \rho_i(v_\gamma) = \frac{\beta_i(v_\gamma)}{\sum_{j \in N} \beta_j(v_\gamma)} v_\gamma(N). \tag{2.24}$$

Předpokládejme, že $X^{P,\varnothing} = 0$. Dle bodu (i) důsledku 2.2 máme $X^{P,N} = 0$, a tedy $v_\gamma(N) = 0$. Z toho plyne $\rho_i(v_\gamma) = NP_i(v_\gamma) = 0$ pro všechna $i \in N$. Pak předpokládejme, že $X^{P,\varnothing} > 0$. Bez ztráty obecnosti předpokládejme, že $\sum_{i \in N} \beta_i(v_\gamma) = X^{P,\varnothing}$. Z (2.24) a (NS) plyne, že

$$\forall i, j \in N,\ v_\gamma(\{j\})\beta_i(v_\gamma) = v_\gamma(\{i\})\beta_j(v_\gamma).$$

Pro každé $i \in N$ sumováním rovnic přes všechna $j \in N$ obdržíme

$$\sum_{j \in N} v_\gamma(\{j\})\beta_i(v_\gamma) = v_\gamma(\{i\}) \sum_{j \in N} \beta_j(v_\gamma)$$

$$\Leftrightarrow (p(X^{P,\varnothing}) - c)X^{P,\varnothing}\beta_i(v_\gamma) = (p(X^{P,\varnothing}) - c)\tilde{x}_i(\tilde{x}_{-i})X^{P,\varnothing}$$

$$\Leftrightarrow \beta_i(v_\gamma) = \tilde{x}_i(\tilde{x}_{-i}).$$

Tedy můžeme udělat závěr, že $\rho_i((v_\gamma) = NP_i(v_\gamma)$ pro všechna $i \in N$. $\square$

3 Vlastní návrhy řešení

V této kapitole jsou demonstrované postupy počítání γ-charakteristické funkce na dvou praktických příkladech pomocí “Matlabu”. Pro konkrétní oligopolní situaci počítáme γ-charakteristickou funkci a zjišťujeme některé vlastnosti kooperatívních oligopolních her, vykreslujeme množinu imputací a jádro a hledáme řešení jako výplatní vektor.

Příklad 3.1. Uvažujme kooperativní oligopolní hru $v_\gamma \in G_o^N$, která je asociovaná s oligopolní situací $(N, (\omega_i, C_i)_{i \in N}, p)$, kde $N = \{1,2,3\}$, $\omega_1 = 200$, $\omega_2 = 100$, $\omega_3 = 75$, $C_1 = 3x_1$, $C_2 = 5x_2$, $C_3 = 10x_3$ a inverzní funkce poptávky je definována následovně $p(X) = 120 - 0.25X$. Hodnoty, kterých nabývá charakteristická funkce $v_\gamma(S)$ pro $\forall S \in P(N)$, jsou spočítané pomocí následujícího skriptu v programu “Matlab”.

Skript gamma.m

%ziskové funkce koalic zadáme s minusem - budeme hledat minimum

p1=@ (x) -((120-0.25*(x(1)+x(2)+x(3)))*x(1)-3*x(1));

p2=@ (x) -((120-0.25*(x(1)+x(2)+x(3)))*x(2)-5*x(2));

p3=@ (x) -((120-0.25*(x(1)+x(2)+x(3)))*x(3)-10*x(3));

**p12=@ (x) -((120-0.25*(x(1)+x(2)+x(3)))*x(1)-3*x(1))
-((120-0.25*(x(1)+x(2)+x(3)))*x(2)-5*x(2));**

**p13=@ (x) -((120-0.25*(x(1)+x(2)+x(3)))*x(1)-3*x(1))
-((120-0.25*(x(1)+x(2)+x(3)))*x(3)-10*x(3));**

**p23=@ (x) -((120-0.25*(x(1)+x(2)+x(3)))*x(2)-5*x(2))
-((120-0.25*(x(1)+x(2)+x(3)))*x(3)-10*x(3));**

**p123=@ (x) -((120-0.25*(x(1)+x(2)+x(3)))*x(1)-3*x(1))
-((120-0.25*(x(1)+x(2)+x(3)))*x(2)-5*x(2))-((120-0.25*(x(1)+x(2)+x(3)))*x(3)-10*x(3));**

maxit=100; %maximální počet iterací

x0=[200 100 75]; %startovací vektor stejný jako horní mez

X=[0,0,0];%dolní mez

eps=0.000001;%požadovaná přesnost

%v každé iteraci probíhá maximalizace (minimalizace stejné funkce se záporným znaménkem)

%ziskových funkci každé koalice za neměnných výstupu jiných koalic.

```
%Cyklus přestane běžet, jakmile dosáhne 100 iteraci nebo požadované
%přesnosti pro každou složku.
%charakteristická funkce pro koalice {1}, {2}, {3}.
for i=1:maxit
 X0=X;
 reseni = fmincon(p1 ,x0,[],[],[0 1 0; 0 0 1],[X(2); X(3)],[0 0 0],x0);
 X(1)=reseni(1);
 reseni = fmincon(p2 ,x0,[],[],[1 0 0; 0 0 1],[X(1); X(3)],[0 0 0],x0);
 X(2)=reseni(2);
 reseni = fmincon(p3 ,x0,[],[],[1 0 0; 0 1 0],[X(1); X(2)],[0 0 0],x0);
 X(3)=reseni(3);
 if abs(X(1)-X0(1))<eps && abs(X(2)-X0(2))<eps && abs(X(3)-X0(3))<eps
 break
 end
end
%ukládáme data
charfce(1)=p1(X);
charfce(2)=p2(X);
charfce(3)=p3(X);
%uložíme data pro počítaní NP-hodnoty
for j=1:3
Z(j)=X(j);
end
X=[0,0,0];
%charakteristická funkce pro koalici {1,2}.
for i=1:maxit
 X0=X;
 reseni = fmincon(p12 ,x0,[],[],[0 0 1],[X(3)],[0 0 0],x0);
 X(1)=reseni(1);
 X(2)=reseni(2);
 reseni = fmincon(p3 ,x0,[],[],[1 0 0; 0 1 0],[X(1), X(2)],[0 0 0],x0);
```

```
 X(3)=reseni(3);
 if abs(X(1)-X0(1))<eps && abs(X(2)-X0(2))<eps && abs(X(3)-X0(3))<eps
 break
 end
end
charfce(4)=p12(X);
X=[0,0,0];
%charakteristická funkce pro koalici {1,3}.
for i=1:maxit
 X0=X;
 reseni = fmincon(p13 ,x0,[],[],[0 1 0],[X(2)],[0 0 0],x0);
 X(1)=reseni(1);
 X(3)=reseni(3);
 reseni = fmincon(p2 ,x0,[],[],[1 0 0; 0 0 1],[X(1), X(3)],[0 0 0],x0);
 X(2)=reseni(2);
 if abs(X(1)-X0(1))<eps && abs(X(2)-X0(2))<eps && abs(X(3)-X0(3))<eps
 break
 end
end
charfce(5)=p13(X);
X=[0,0,0];
%charakteristická funkce pro koalici {2,3}.
for i=1:maxit
 X0=X;
 reseni = fmincon(p23 ,x0,[],[],[1 0 0],[X(1)],[0 0 0],x0);
 X(2)=reseni(2);
 X(3)=reseni(3);
 reseni = fmincon(p1 ,x0,[],[],[0 1 0; 0 0 1],[X(2); X(3)],[0 0 0],x0);
 X(1)=reseni(1);
 if abs(X(1)-X0(1))<eps && abs(X(2)-X0(2))<eps && abs(X(3)-X0(3))<eps
 break
```

end

end

charfce(6)=p23(X);

%charakteristická funkce pro koalici {1,2,3}.

reseni = fmincon(p123 ,x0,[],[],[],[],[0 0 0],x0);

charfce(7)=p123(reseni);

for j=1:3

NP(j)=Z(j)/sum(Z)*charfce(7);

end

%měníme znaménko u výsledných hodnot charakteristické funkce.

charfce=abs(charfce)

Hodnoty proměnné “charfce” jsou zapsané pomocí následující tabulky

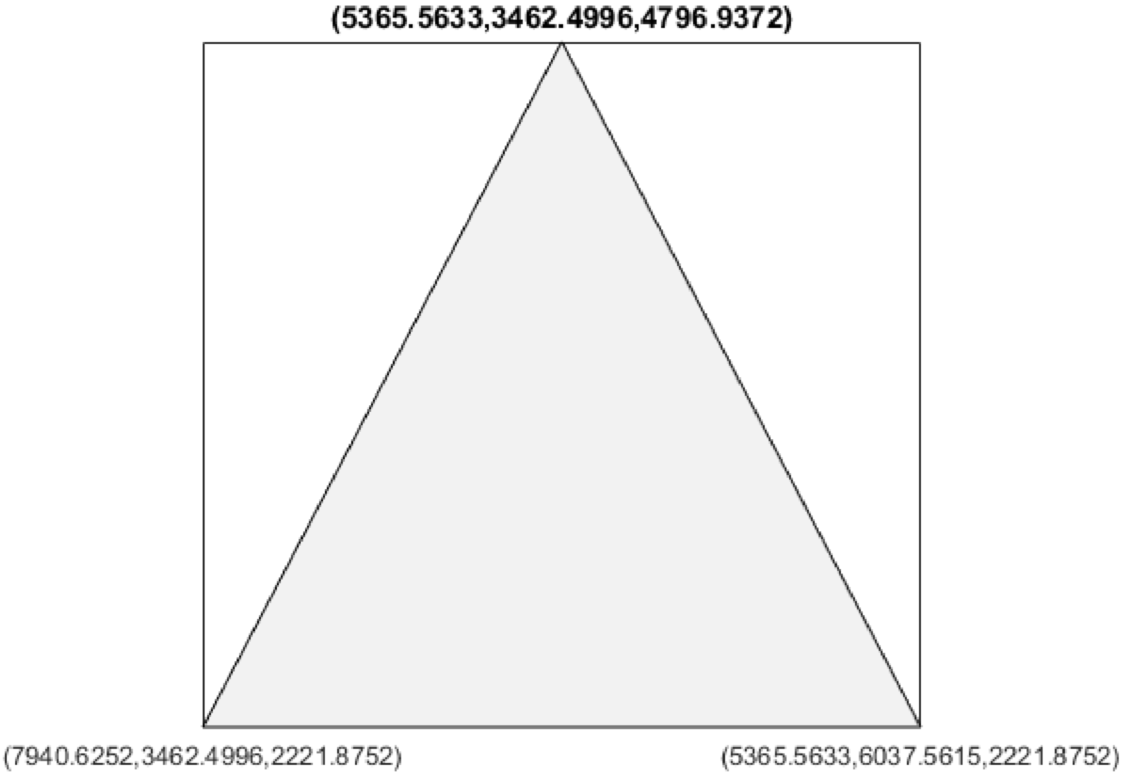
Tab. 4 γ-charakteristická funkce pro příklad 3.1.

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v_\gamma(S)$	5365.563	3462.5	2221.875	9653.062	8464	5215.113	13625

Z tabulky je možné poznat, že tato hra není superaditivní, protože $v_\gamma(\{2,3\}) < v_\gamma(\{2\}) + v_\gamma(\{3\})$. Což poukazuje na to, že γ-charakteristická funkce nemusí obecně splňovat vlastnost superaditivity. Nyní si spočítáme množinu imputací, prvky, které mají splňovat následující rovnost a 3 nerovnosti:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13625 \\ x_1 \geq 5365.563 \\ x_2 \geq 3462.5 \\ x_3 \geq 2221.875 \end{cases}$$

Řešením této soustavy dostaneme množinu imputací, která vypadá následovně

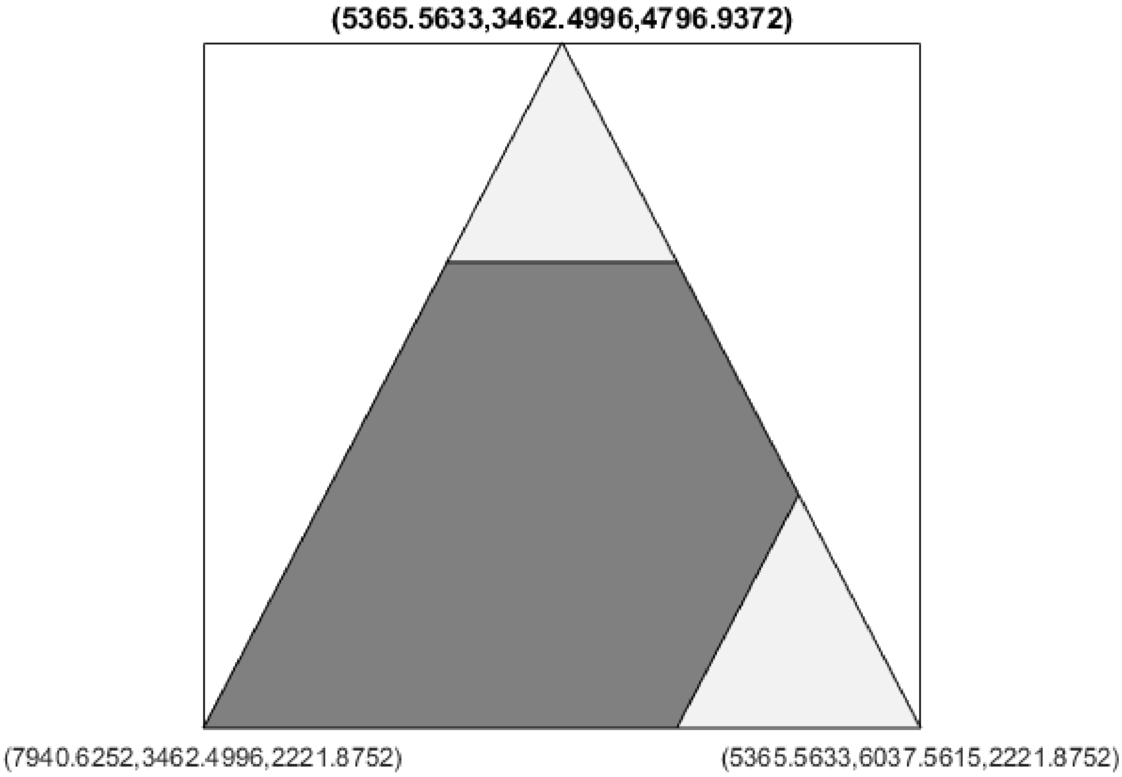


Obr. 1: Diagram - Imputace pro priklad 3.1.

Vzhledem k tomu, že inverzní poptávková funkce je lineární, každá individuální zisková funkce nebude konkávní na X_N, tohle znamená, že pro danou hru existence γ-jádra není zaručená, avšak podmínka konkávnosti je postačující k existenci γ-jádra, nikoliv nutná. Prvky jádra dané hry musí splňovat následující rovnost a 6 nerovností

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13625 \\ x_1 \geq 5365.563 \\ x_2 \geq 3462.5 \\ x_3 \geq 2221.875 \\ x_1 + x_2 \geq 9653.062 \\ x_1 + x_3 \geq 8464 \\ x_2 + x_3 \geq 5215.113 \end{cases}$$

Řešením této soustavy dostaneme neprázdné γ-jádro, což také vypovídá o tom, že tato hra je balancovaná. Graficky jádro zobrazíme na množině imputací, jelikož jádro je vždy její podmnožinou.



Obr. 2: Diagram - Jádro hry pro priklad 3.1.

Tato hra nesplňuje požadavek na stejné mezní náklady firem, tedy NP-hodnota v určitém stupni ztrácí svoji vypovídací schopnost, avšak pro tento případ můžeme spočítat jedno z nejpoužívanějších řešení (mluvíme nyní o řešení jako o funkci a vektoru, který tato funkce přiřazuje hře), čímž je vektor hodnot Shapleyho.

Hodnoty potřebné k vypočítaní první složky vektoru hodnot Shapleyho zobrazíme pomocí následující tabulky

Tab. 5 Vektor hodnot Shapleyho - potřebné hodnoty

T	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v_\gamma(T)$	5365.563	9653.062	8464	13625
$v_\gamma(T-\{1\})$	0	3462.5	2221.875	5215.113

Dosazením předchozích hodnot do vzorce z věty 1.2. vypočítáme první složku vektoru hodnot Shapley

$$\phi_1[v_\gamma] = \sum_{T\subset N,\ i\in T} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}[v(T) - v(T\setminus\{i\})]$$

$$= \frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}[5365.563 - 0] + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}[9653.062 - 3462.5]$$

$$+\frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}[8464 - 2221.875] + \frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}[13625 - 5215.113]$$

$$= 6663.931$$

Analogickým postupem dopočítáme dvě zbývající složky a dostaneme

$$\phi[v_\gamma] = (6663.931, 4087.956, 2873.113).$$

Důležité je také říct, že tento bod zřejmě patří do jádra.

Příklad 3.2. Uvažujme kooperativní oligopolní hru $v_\gamma \in G_o^{N_*}$, která je asociovaná s oligopolní situací $(N, (\omega_i, C_i)_{i\in N}, p)$, kde $N = \{1, 2, 3\}, \omega_1 = 4,\ \omega_2 = 2,\ \omega_3 = 10,\ C_i = 20x_i,\ \forall i \in N$ a inverzní funkce poptávky je definována následovně $p(X) = 400 - X^2$. Hodnoty, kterých nabývá charakteristická funkce $v_\gamma(S)$ pro $\forall S \in P(N)$, jsou spočítané pomocí předchozího skriptu v programu "gamma.m", ale se změnou ziskových funkci koalic a horní meze na

p1=@ (x) -((400-(x(1)+x(2)+x(3))∧2)*x(1)-20*x(1));

p2=@ (x) -((400-(x(1)+x(2)+x(3))∧2)*x(2)-20*x(2));

p3=@ (x) -((400-(x(1)+x(2)+x(3))∧2)*x(3)-20*x(3));

p12=@ (x) -((400-(x(1)+x(2)+x(3))∧2)*x(1)-20*x(1))
-((400-(x(1)+x(2)+x(3))∧2)*x(2)-20*x(2));

p13=@ (x) -((400-(x(1)+x(2)+x(3))∧2)*x(1)-20*x(1))
-((400-(x(1)+x(2)+x(3))∧2)*x(3)-20*x(3));

p23=@ (x) -((400-(x(1)+x(2)+x(3))∧2)*x(2)-20*x(2))
-((400-(x(1)+x(2)+x(3))∧2)*x(3)-20*x(3));

p123=@ (x)-((400-(x(1)+x(2)+x(3))∧2)*x(1)-20*x(1))
-((400-(x(1)+x(2)+x(3))∧2)*x(2)-20*x(2))-((400-(x(1)+x(2)+x(3))∧2)*x(3)-20*x(3));

x0=[4 2 10];

Hodnoty proměnné "charfce" jsou zapsané pomocí následující tabulky

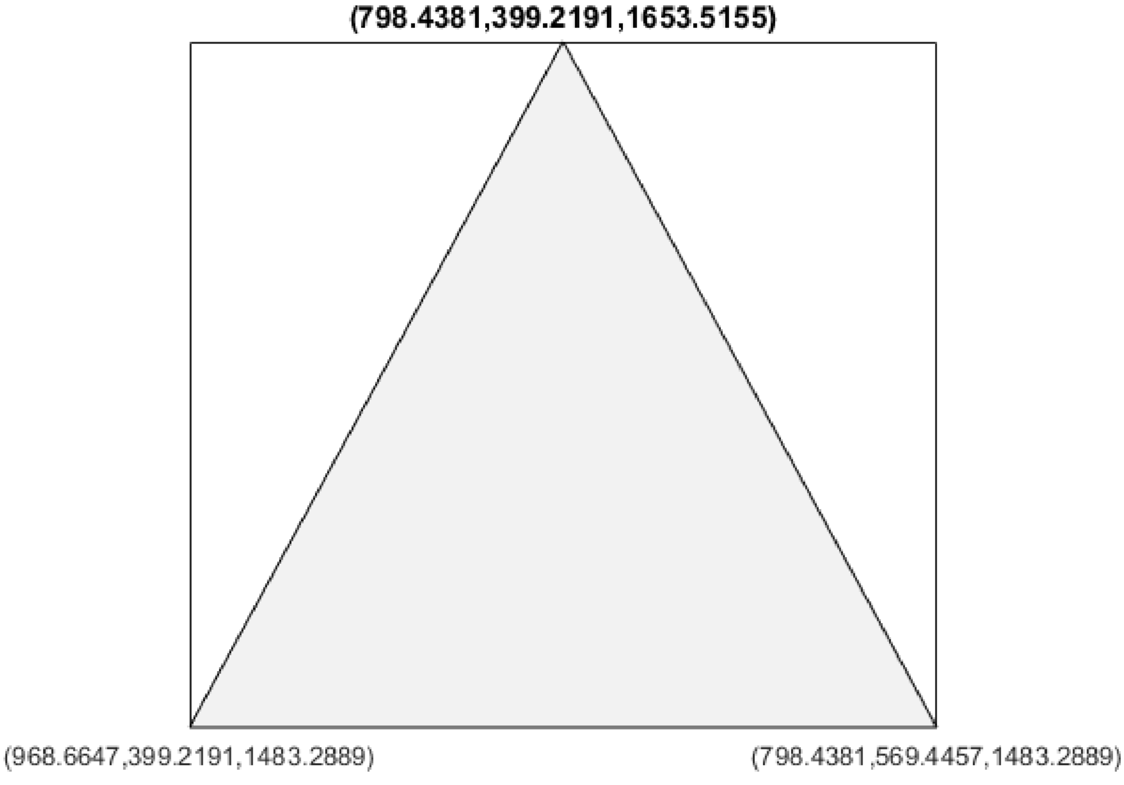
Tab. 6 γ-charakteristická funkce pro příklad 3.2.

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v_\gamma(S)$	798.438	399.219	1483.289	1197.66	2360.118	1902.815	2851.173

Z tabulky je možné poznat, že tato hra je superaditivni. Jak už bylo ukázáno dříve, nemusí to platit vždy. Ted si spočítáme množinu imputací, prvky, které májí splňovat následující rovnost a 3 nerovnosti:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2851.173 \\ x_1 \geq 798.438 \\ x_2 \geq 399.219 \\ x_3 \geq 1483.289 \end{cases}$$

Řešením této soustavy dostaneme množinu imputací, která vypadá následovně

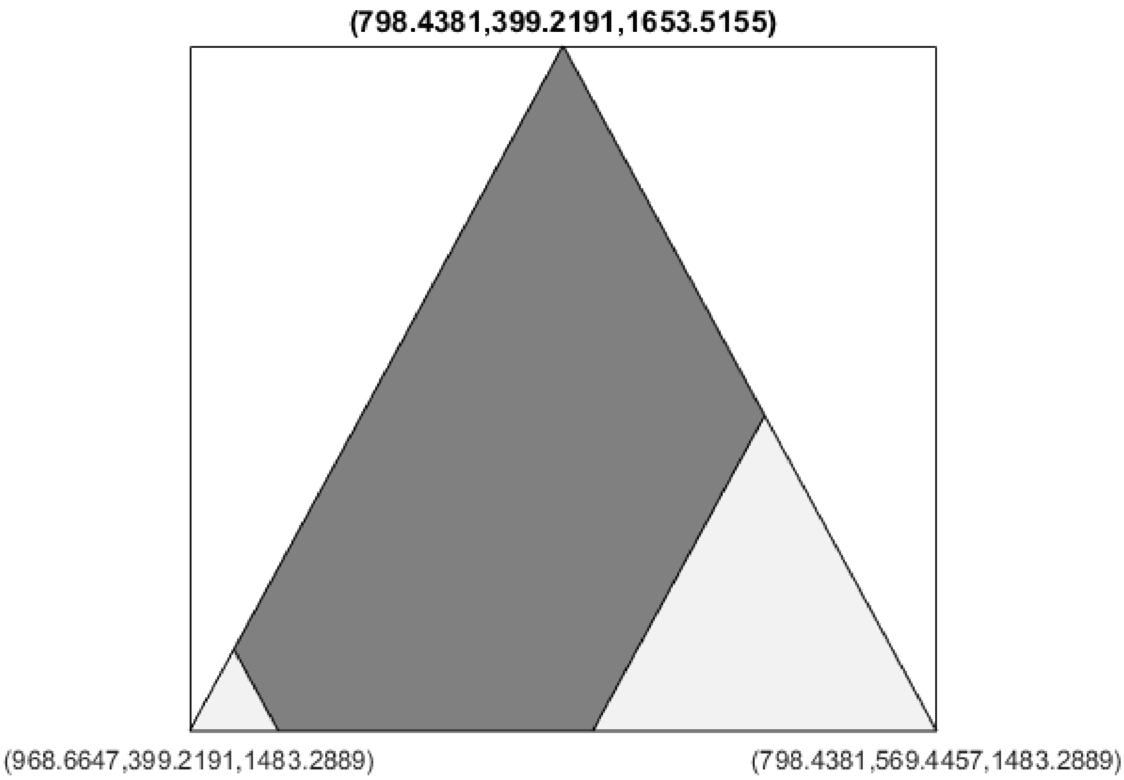


Obr. 3: Diagram - Imputace pro priklad 3.2.

Vzhledem k tomu, že inverzní poptávková funkce je lineární, každá individuální zisková funkce nebude konkávní na X_N, to znamená, že pro danou hru existence γ-jádra není zaručená, avšak podmínka konkávnosti je postačující k existenci γ-jádra, nikoliv nutná. Prvky jádra dané hry musí splňovat následující rovnost a 6 nerovnosti

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2851.173 \\ x_1 \geq 798.438 \\ x_2 \geq 399.219 \\ x_3 \geq 1483.289 \\ x_1 + x_2 \geq 1197.66 \\ x_1 + x_3 \geq 2360.118 \\ x_2 + x_3 \geq 1902.815 \end{cases}$$

Řešením této soustavy dostaneme neprázdné γ-jádro, což také vypovídá o tom, že tato hra je balancovaná. Graficky jádro zobrazíme na množině imputací, jelikož jádro je vždy její podmnožinou.



Obr. 4: Diagram - Jádro hry pro priklad 3.2.

Jelikož tato hra splňuje požadavek na stejné mezní náklady firem, můžeme uvést NP-hodnotu spočítanou pomocí skriptu, která bude rovna

$$NP(v_\gamma) = (849.135, 424.568, 1577.470),$$

která se bude lišit od vektoru Shapleyho tím, že splňuje nekooperativní spravedlnost. Důležité je také říct, že tento bod patří do jádra.

Závěr

V práci byly postupně představeny důležité pojmy a definice teorie her. Vlastnosti různých forem a druhů her byly podrobně popsány a ukázány na praktických příkladech

Dále byla práce soustředěna na oligopoly. Pomocí matematického aparátu teorie her jsme popsali oligopolní situaci jako hru v normálním tvaru. Pak, s cílem udělat z nekooperativní hry v normálním tvaru pro Cournotův oligopol kooperativní oligopolní hru, která by se vyhnula nedostatkům her ve tvarech α- a β- charakteristických funkci, byla definovaná γ-charakteristická funkce. Její zřejmou výhodou je to, že hráči, kteří nejsou v koalici, se nesnaží společným úsilím minimalizovat zisk koalice, ale maximalizují svoje individuální zisky.

K ověření toho, že γ-charakteristická funkce je dobře definovaná, bylo dokázáno, že existuje rovnováha pod každou koaliční strukturou, tedy existuje rovnováha částečné dohody pod každou koalicí.

Dále byly studovány variace celkových výstupů odvětví v závislosti na "jemnosti" koaličních struktur. Dokázali jsme, že čím je koaliční struktura "jemnější", tím je celkový výstup odvětví větší.

Pak jsme se zabývali otázkou neprázdnosti γ-jádra pro kooperativní oligopolní hry. Dokázali jsme, že za předpokladu, že inverzní poptávková funkce je diferencovatelná a každá individuální zisková funkce je spojitá a konkávní na množině všech strategií, kooperativní oligopolní hra je balancovaná, a tedy dle věty Bondareve-Shapley má neprázdné γ-jádro.

Avšak hodně oligopolních situací nesplňuje požadavek konkávnosti individuálních ziskových funkcí. Konkrétně pro případ lineárních nákladových funkcí a stejných mezních nákladů všech firem bylo definováno řešení hry, které se nazývá NP-hodnota. NP-hodnota distribuuje hodnotu velké koalice mezi firmami v závislosti na jejich individuálních výstupech při Nashove rovnováze. Dokázali jsme, že NP-hodnota vždy patří do jádra a popsali jsme několik jejich vlastností.

Nakonec byl demonstrován algoritmus počítaní γ-charakteristické funkce pro konkrétní oligopolní situaci za využití softwaru "Matlab". Na těchto příkladech jsme ukázali, že γ-charakteristická funkce nemusí obecně splňovat vlastnost superaditivity a že konkávnost individuálních ziskových funkcí je postačující, ale nikoliv nutnou podmínkou k zaručení neprázdnosti γ-jádra.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

[1] BONDY, J. A. a U. S. R. MURTY, c2008. *Graph theory*. New York: Springer. ISBN 978-1-84628-969-9.

[2] OWEN, Guillermo. *Game Theory*. Emerald Group Publishing Limited, 2013. ISBN 978-1-781-90507-4.

[3] MACÁKOVÁ, Libuše, 2010. *Mikroekonomie: základní kurs*. 11. vyd. Slaný: Melandrium. ISBN 978-80-86175-70-6.

[4] SOUKUPOVÁ, Jana, 2010. *Mikroekonomie: základní kurs*. 3. dopl. vyd. Praha: Melandrium. ISBN 80-726-1061-9.

[5] ŠKAPA, Stanislav, 2012. *Mikroekonomie I: základní kurs*. Vyd. 2., přeprac. Brno: Akademické nakladatelství CERM. Učební texty vysokých škol. ISBN 978-80-214-4574-1.

[6] LARDON, Aymeric, 2009. *The gamma-core in Cournot oligopoly TU-games with capacity constraints*. Working paper. <halshs-00544042>

[7] CHANDER, Parkash a Henry TULKENS, 1997. The core of an economy with multilateral environmental externalities. *International Journal of Game Theory*. **26**(3), 379-401. ISSN 1432-1270.

[8] ZHAO, Jingang, 1999. A B-Core Existence Result and its Application to Oligopoly Markets. *Games and Economic Behavior*. **27**(1), 153-168. ISSN 0899-8256.

[9] OKUGUCHI, Koji a Ferenc SZIDAROVSZKY. *The Theory of Oligopoly with Multi-Product Firms*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1990. ISBN 978-366-2026-229.

[10] SHAPLEY, Lloyd S. *On balanced sets and cores*. DOI: 10.1002/nav.3800140404. ISBN 10.1002/nav.3800140404. Dostupné také z: http://doi.wiley.com/10.1002/nav.3800140404

[11] BONDAREVA, Olga. Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games. *Problemi Kibernetiki*. 1963, **10**, 119-139.

SEZNAM TABULEK

SEZNAM GRAFŮ

SEZNAM OBRÁZKŮ

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha A: Skript gamma.m

Příloha B: Skript gamma2.m