



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

ANALÝZA NELINEÁRNÍHO KMITÁNÍ VIBRAČNÍHO GENERÁTORU SE 2 STUPNI VOLNOSTI

ANALYSIS OF NON-LINEAR OSCILLATION OF 2 DOF VIBRATION ENERGY HARVESTER

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Milan Penyak

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Zdeněk Hadaš, Ph.D.

BRNO 2024

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student: **Milan Penyak**
Studijní program: Mechatronika
Studijní obor: bez specializace
Vedoucí práce: **doc. Ing. Zdeněk Hadaš, Ph.D.**
Akademický rok: 2023/24

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Analýza nelineárního kmitání vibračního generátoru se 2 stupni volnosti

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Práce je zaměřena na analýzu chování nelineární soustavy se 2 stupni volnosti a zaměřený především na tzv. energy harvesting zařízení. Úkolem je vytvořit model nelineární mechanické soustavy, které obsahují nelineární tvrdnoucí a měknoucí tuhosti. Student vyhodnotí analýzu odezvy soustavy pro kinematické buzení a vynucené kmitání a na simulačním modelu ověří možnosti využít tento model pro generování elektrické energie z vibrací.

Cíle bakalářské práce:

- rešerše konstrukčních typů nelinearit tuhosti u energy harvesting zařízení
- vytvoření simulačního modelu energy harvesteru se 2 stupni volnosti
- analýza odezvy v časové a frekvenční oblasti pro harmonické buzení
- analýza generovaného výkonu pro zvolený fyzikální princip elektromechanické přeměny

Seznam doporučené literatury:

BREPTA, R, LPŮST a FTUREK, 1994. Mechanické kmitání. Technický. Praha: Sobotáles.

BEEBY, S P, M J TUDOR a N M WHITE, 2006. Energy harvesting vibration sources for microsystems applications. Measurement Science and Technology. 17(12), R175–R195 [vid. 2014-07-14]. ISSN 0957-0233.

NEISS, S, F GOLDSCHMIDTBOEING, M KROENER a P WOIAS, 2014. Analytical model for nonlinear piezoelectric energy harvesting devices. Smart Materials and Structures. 23(10), 105031. ISSN 0964-1726.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2023/24

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Táto práca je zameraná na simulovanie energy harvesteru, ktorý obsahuje tvrdnúcu aj mäknúcu nelineárnu tuhosť. Účelom je analyzovať odozvu systému z pohľadu rozšírenia pracovného pásma a z pohľadu tvaru amplitúdovo-frekvenčnej charakteristiky. Simuláciám predchádza prehľad konštrukčných riešení nelineárnej tuhosti, ktoré slúžia ako príklad a inšpirácia pre prípadnú realizovanú konštrukciu. Simulácie sú prevedené formou harmonického budenia s konštantnou amplitúdou a s časom sa meniacou frekvenciou, v niektorých prípadoch aj s konštantnou frekvenciou. V závere sú prezentované výsledky simulácií a nelineárny systém je porovnaný s lineárnym v kontexte generovaného výkonu.

Abstract

This thesis is focused on simulating an energy harvester that contains both hardening and softening nonlinear stiffness. The purpose is to analyze the response of the system from the point of view of the extension of the bandwidth and from the point of view of the shape of the amplitude-frequency response. The simulations are preceded by a review of nonlinear stiffness design solutions, which serve as an example and inspiration for a possible constructed structure. Simulations are carried out in the form of harmonic excitation with constant amplitude and time-varying frequency, in some cases even with a constant frequency. In the end, the results of the simulations are presented and the nonlinear system is compared with the linear one in the context of the generated power.

Kľúčové slová

Energy harvesting z vibrácií, nelineárna tuhosť, harmonické budenie, Matlab, Simulink;

Keywords

Vibrational energy harvesting, nonlinear stiffness, harmonic excitation, Matlab, Simulink;

Bibliografická citácia

PENYAK, Milan. *Analýza nelineárního kmitání vibračního generátoru se 2 stupni volnosti* [online]. Brno, 2024. Dostupné z: <https://www.vut.cz/studenti/zav-prace/detail/153947>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Zdeněk Hadaš.

Čestné prehlásenie

Ja, Milan Penyak, týmto prehlasujem, že som bakalársku prácu s názvom *Analýza nelineárneho kmitání vibračního generátoru se 2 stupni volnosti* vypracoval samostatne s radami pod vedením vedúceho práce doc. Ing. Zdeňka Hadaše, Ph.D. , a že som uviedol všetku použitú literatúru.

V Brně, dňa 23. 5. 2024

.....
Milan Penyak

Pod'akovanie

Na tomto mieste by som sa chcel poďakovať doc. Ing. Zdeňku Hadašovi, Ph.D. , za jeho priateľský prístup, užitočné rady, ochotu konzultovať a hlavne za obrovskú trpezlivosť počas tvorby tejto záverečnej práce.

Obsah

1	Úvod	10
2	Motivácia a ciele práce	11
3	Metódy vytvorenia nelinearít tuhosti v mechanických sústavách.....	12
3.1	Použitie magnetov.....	12
3.1.1	Levitujúca konfigurácia	12
3.1.2	Jednostranne votknutý nosník s prídavnými magnetmi	14
3.1.3	Jednostranne votknutý nosník s magnetom na voľnom konci	15
3.1.4	Nosník s dvomi stupňami voľnosti a prídavnými magnetmi.....	16
3.1.5	Prídavný nosník s permanentnými magnetmi	18
3.1.6	Nosníky votknuté na spoločnej strane	19
3.2	Nelineárna tuhosť dosiahnutá konfiguráciou lineárnych pružín	21
3.2.1	Trojuholníková konštrukcia	21
3.2.2	Piezoelektrický nosník s prídavnými pružinami.....	22
3.3	Záver z prehľadu konštrukčných riešení nelineárnej tuhosti.....	23
4	Pohybové rovnice lineárneho systému s 2 stupňami voľnosti	24
5	Popis a vlastné frekvencie lineárneho systému	28
5.1	Stavový model systému	28
5.2	Prenosové funkcie systému.....	30
5.3	Určenie vlastných frekvencií.....	31
5.4	Ladenie parametrov systému	31
6	Model energy harvesteru v softvéri Simulink	33
6.1	Lineárny systém.....	33
6.2	Nelineárny systém	34
6.2.1	Modelovanie nelineárnej tuhosti.....	34
6.2.2	Pohybové rovnice nelineárneho systému	35
6.2.3	Simulačný model nelineárneho systému.....	36
7	Simulácie vynúteného kmitania.....	37
7.1	Výsledky simulácií	37
7.2	Zmena hodnôt koeficientov tuhostí	43
8	Generovanie výkonu	46
8.1	Vplyv elektrického tlmenia.....	49
8.2	Porovnanie lineárneho a nelineárneho systému	50
9	Záver	52

10	Zoznam použitej literatúry.....	53
11	Zoznam obrázkov.....	55
12	Zoznam príloh	56

1 Úvod

V súčasnosti sú mnohé elektronické zariadenia ako sú napríklad rôzne senzory alebo meracie prístroje napájané pomocou batérií, prípadne sú napájané priamo z elektrickej siete. Toto platí aj pre zariadenia, ktoré sa nachádzajú v teréne, sú ťažko dostupné alebo pracujú neprerušovane a zároveň nie sú náročné na príkon, takže majú nízku spotrebu energie.

Pri takýchto prípadoch sa javí ako lepšia forma napájania využitie nejakého energy harvesteru. Energy harvester alebo aj elektrický zberač je malý elektromechanický systém, ktorý dokáže využiť mechanickú energiu z okolia a premeniť ju na elektrickú. Veľmi častým zdrojom tejto mechanickej energie sú potom vibrácie z okolia. Tie sa prirodzene vyskytujú takmer vo všetkých mechanických sústavách a sú často nežiadúce. Využitie energy harvesteru v sústavách, kde sa vyskytujú vibrácie je teda veľmi vhodné.

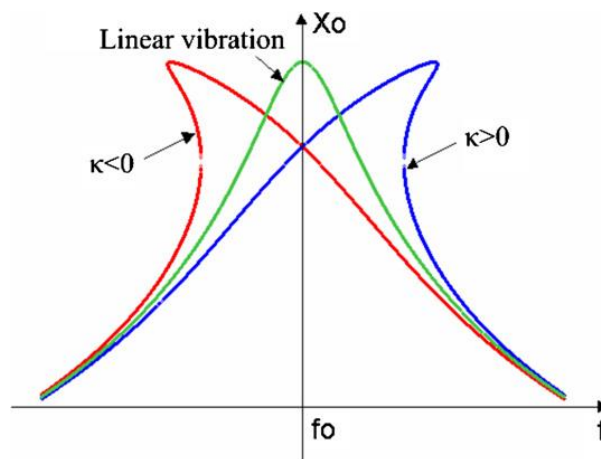
Jedným z problémov energy harvesting zariadení je ale oblasť, v ktorej dokážu efektívne pracovať, ktorá sa označuje aj pracovné pásmo. Na to aby boli energy harvestory schopné generovať nezanedbateľný výkon potrebujú pracovať s vyššími kmitmi. Tie sa ale vyskytujú iba v úzkej oblasti v okolí rezonančnej frekvencie daného zariadenia. Čím sú frekvencie okolných vibrácií ďalej od vlastnej frekvencie zariadenia, tým slabšie daný energy harvesting systém kmitá a generovaný výkon slabne.

Preto je na mieste zaoberať sa rozšírením tohto pracovného pásma, aby bolo zariadenie schopné spracovať vibrácie s rôznymi frekvenciami, nakoľko vieme, že frekvencie okolných vibrácií sa vyskytujú v širokej škále. Jedným zo spôsobov, ako rozšíriť pracovnú oblasť je využitie nelinearity. Veľký potenciál v rozšírení pracovného pásma a zvýšení celkovej efektivity energy harvesteru je zavedenie nelineárnej tuhosti, čomu sa bude venovať aj táto práca.

2 Motivácia a ciele práce

Veľkou nevýhodou lineárnych energy harvesting zariadení, či už s jedným alebo viacerými stupňami voľnosti je ich obmedzené pracovné pásmo, ktoré je relatívne malé v kontexte frekvencií, ktoré sa vyskytujú v technických sústavách. Toto obmedzené pracovné pásmo prirodzene vyplýva zo spôsobu, akým sú energy harvesting zariadenia navrhované, a teda ako rezonátory.

V prípade, že dokážeme nejakým spôsobom navrhnuť a zostrojiť energy harvesting zariadenie, v ktorom je vytvorená nelinearita tuhosti, dôjde k zmene amplitúdovo-frekvenčnej charakteristiky zariadenia – rozšíri sa frekvenčná oblasť, v ktorej je odozva výrazne vyššia oproti iným frekvenciám. Takýmto spôsobom dochádza k rozšíreniu pracovnej oblasti, zvýšeniu výkonu a aj celkovej efektivity zariadenia.



Obr. 1: Vplyv nelineárnej tuhosti [1]

Na Obr. 1 je zobrazený vplyv nelineárnej tuhosti na amplitúdovo-frekvenčnú charakteristiku systému s jedným stupňom voľnosti podľa príkladu z článku [1]. Vlastná frekvencia systému je označená ako f_0 , výchylka ako x_0 a κ je funkcia nelineárnej tuhosti. Podľa toho, či má veličina κ kladnú alebo zápornú hodnotu rozlišujeme aj vplyv nelineárnej tuhosti. Kladná hodnota sa prejaví náklonom amplitúdovo-frekvenčnej krivky smerom k vyšším frekvenciám a vtedy hovoríme o tvrdnúcej charakteristike. Na druhej strane pri zápornej hodnote dochádza k náklonu k nižším frekvenciám a takáto charakteristika sa označuje ako mäknúca.

Jedným z cieľov tejto práce je modelovanie nelineárnej tuhosti v systéme s 2 stupňami voľnosti za účelom rozšírenia pracovného pásma. V ideálnom prípade sa chcem pokúsiť o vytvorenie konkrétneho tvaru amplitúdovo-frekvenčnej charakteristiky. Požadovaný tvar by mal mať tvrdnúcu charakteristiku zodpovedajúcu prvej vlastnej frekvencii (nižšej) a mäknúcu charakteristiku zodpovedajúcu druhej vlastnej frekvencii (vyššej). Zároveň by mal mať systém také parametre, aby vlastné frekvencie boli blízko pri sebe a aby vrcholy charakteristiky neboli diametrálne odlišné.

3 Metódy vytvorenia nelinearít tuhosti v mechanických sústavách

V tejto kapitole sú uvedené najčastejšie spôsoby, akými je možné vytvoriť v mechanických sústavách nelineárnu tuhosť. Dva hlavné spôsoby sú využitie magnetov a využitie určitého špecifického usporiadania pružín. Oba spôsoby sú bližšie popísané v nasledujúcich podkapitolách.

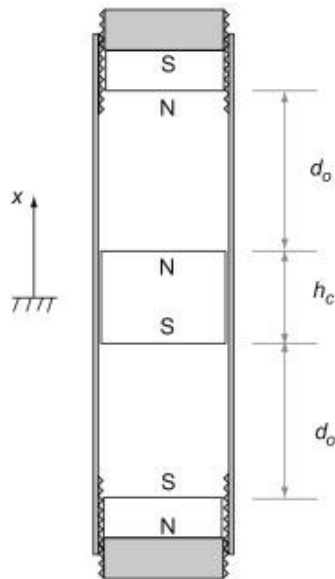
3.1 Použitie magnetov

Najčastejším príkladom, akým sa magnety využívajú v mechanických sústavách je použitím 2 permanentných magnetov, ktoré sú uložené blízko pri sebe a pri pohybe sústavy spolu interagujú a vytvárajú nelineárnu odpudivú alebo príťažlivú silu. V tejto podkapitole sú uvedené a popísané niektoré konkrétne príklady konštrukcií energy harvesting zariadení, v ktorých autori využili permanentné magnety a následne tieto energy harvestory aj matematicky popísali, modelovali či testovali.

3.1.1 Levitujúca konfigurácia

Vytvorením nelinearity v energy harvestore pomocou magnetov za účelom rozšírenia frekvenčného pásma, v ktorom je zariadenie schopné pracovať sa zaoberajú články [2-3]. Autori za pomoci permanentných magnetov vytvorili konfiguráciu, ktorá sa vo výsledku dá popísať Duffingovou rovnicou[4]. Túto konfiguráciu popísali, namodelovali a nakoniec aj experimentálne overili a výsledky porovnali s teoretickým modelom.

Konštrukcia pozostáva z dvoch vonkajších magnetov, ktoré sú uchytené v trubici pomocou podpory so závitmi. Tieto závity potom umožňujú zmenu vzdialenosti medzi magnetmi. Vo vnútri konštrukcie medzi spodným a horným vonkajším magnetom sa nachádza vnútorný magnet, orientovaný tak, aby bol z oboch strán odpuďzovaný nelineárnou magnetickou silou od oboch vonkajších magnetov. Celá konštrukcia je zobrazená na Obr. 2.



Obr. 2: Schéma levitujúcej konfigurácie [2]

Celková sila pôsobiaca na vnútorný magnet sa dá vyjadriť nasledovne [2]:

$$F(x) = F_b(x) - F_t(x) \quad (1)$$

Kde F_b je sila od spodného (bottom) magnetu a F_t je sila od vrchného (top) magnetu.

Vo výsledku je možné túto silu vyjadriť pomocou 2 členov – lineárneho a kubického [2]:

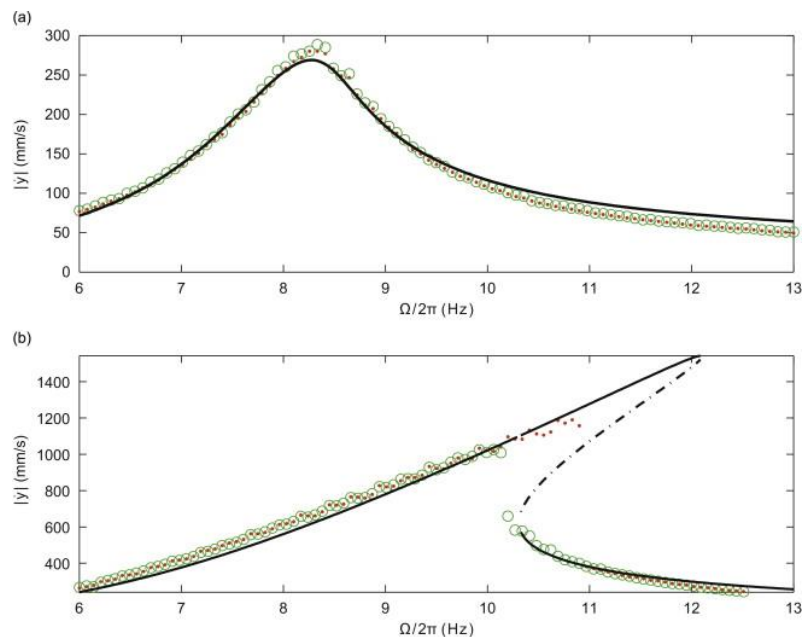
$$F(x) = kx + k_3x^3 \quad (2)$$

Kde k je konštanta lineárnej tuhosti a k_3 je konštanta kubickej tuhosti a platí, že lineárna tuhosť je závislá na vzdialenosti medzi magnetmi d_0 . To znamená, že zmenou tejto vzdialenosti dokážeme zmeniť význam nelineárnej tuhosti – ak bude lineárna tuhosť malá voči nelineárnej, prejaví sa v celkovej tuhosti výrazne viac práve nelineárna tuhosť.

Na Obr. 3 je zobrazená rýchlosť pohybu vnútorného magnetu voči budeniu v závislosti na frekvencii budenia [2]:

$$\dot{y} = \dot{x} - \dot{z} \quad (3)$$

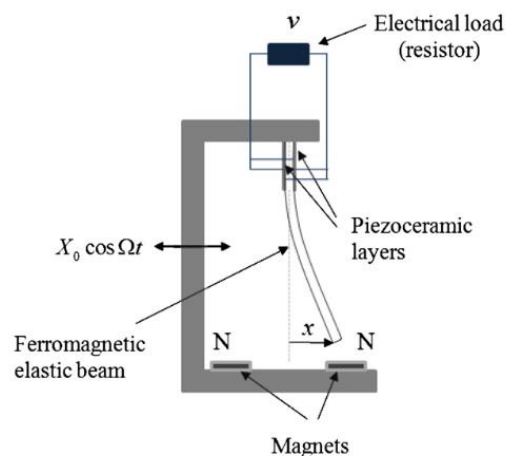
Na oboch grafoch sú čiernou farbou vyznačené teoretické výsledky, červenou sú vyznačené dáta pri doprednom frekvenčnom prejazde a zelenou dáta pri spätnom prejazde. Prvý graf je znázornený pre amplitúdu budenia $\ddot{z} = 2,1 \text{ m/s}^2$ a spodný graf pre amplitúdu $\ddot{z} = 8,4 \text{ m/s}^2$.



Obr. 3: Závislosť relatívnej rýchlosti magnetu na frekvencii [2]

3.1.2 Jednostranne votknutý nosník s prídavnými magnetmi

Obr. 4 predstavuje klasickú konštrukciu využívanú ako energy harvester, doplnenú o nelineárnu tuhosť pomocou magnetov. Táto konštrukcia od autorov publikácie [5] pozostáva z ferromagnetického nosníku a dvoch permanentných magnetov umiestnených symetricky okolo voľného konca. Aby bolo možné použiť túto konfiguráciu ako energy harvester, boli pripevnené k povrchu nosníku 2 piezokeramické vrstvy. Tieto vrstvy sú pripojené k elektrickej záťaži (rezistoru) a predmetom záujmu je potom napätie na rezistore, vznikajúce pri kmitavom pohybe.



Obr. 4: Nosník so symetricky rozmiestnenými magnetmi [5]

3.1.3 Jednostranne votknutý nosník s magnetom na voľnom konci

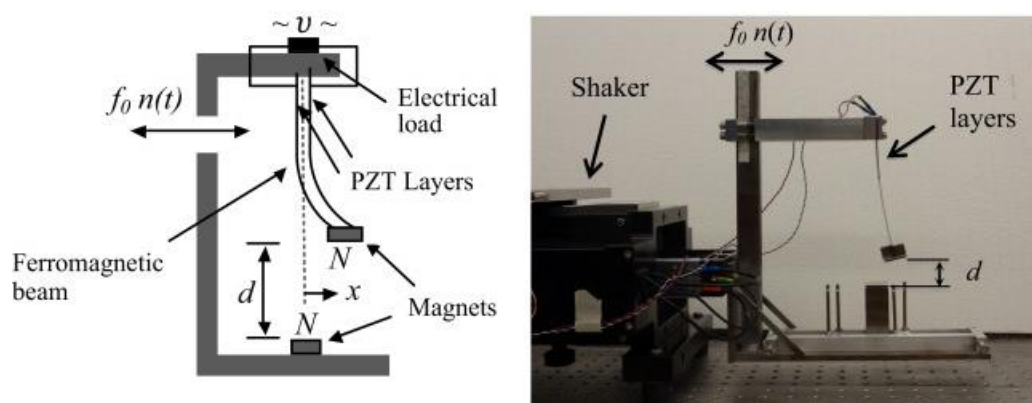
Iná konfigurácia vychádza z tej popísanej v predchádzajúcej kapitole. Pozostáva z feromagnetického nosníka, votknutého vo vertikálnom smere. Na voľnom konci nosníka sa nachádza permanentný magnet a na druhej strane konfigurácie vo vzdialenosti d od voľného konca nosníka sa nachádza druhý permanentný magnet. K nosníku sú opäť pripojené piezoelektrické články, ktoré sú pripojené k záťaži, na ktorej vzniká elektrické napätie. Celá konfigurácia, zobrazená na Obr. 5 je detailne popísaná v článku [6] a autori ju testujú pri budení náhodnými vibráciami.

Takýto elektromechanický systém môže byť popísaný dvomi diferenciálnymi rovnicami, pričom prvá rovnica je mechanická a druhá elektrická [6]:

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \beta x + \alpha x^3 - \chi v = f_0 n(t) \quad (4)$$

$$\dot{v} + \frac{v}{R_l C_p} + \kappa \dot{x} = 0 \quad (5)$$

Kde x je bezrozmerný posuv voľného konca nosníka v smere kolmom na os nosníka, ζ je pomerný útlm sústavy, f_0 je bezrozmerná amplitúda budenia a budiaca funkcia je biely šum reprezentovaný funkciou s normálnym rozdelením $N(1,0)$. Koeficient β je koeficient lineárnej tuhosti a α je koeficient nelineárnej tuhosti. Bezrozmerné elektrické napätie na záťaži je označené rovnicami v , R_l je odpor záťaže a C_p je elektrická kapacita piezoelektrických vrstiev. Veličina χ predstavuje piezoelektrický koeficient v mechanickej rovnici a κ je piezoelektrický koeficient v elektrickej rovnici.

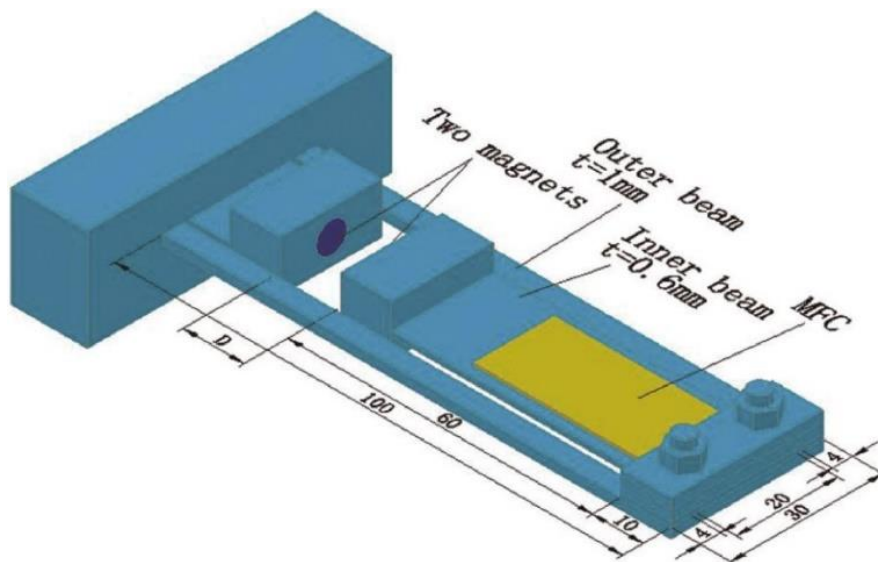


Obr. 5: Schéma konštrukcie a realizovaná konštrukcia [6]

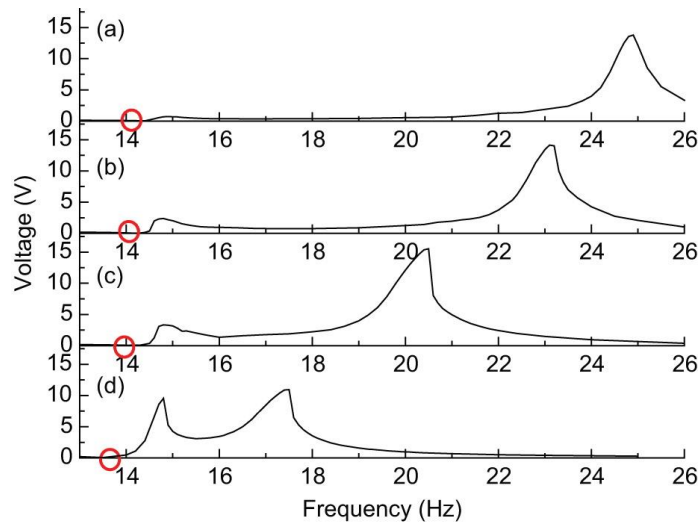
3.1.4 Nosník s dvomi stupňami voľnosti a prídavnými magnetmi

Všetky predchádzajúce konfigurácie mali jeden stupeň voľnosti. Konfigurácia od autorov článku [7] už má dva stupne voľnosti a viac sa približuje k problematike tejto práce. Konfigurácia pozostáva z väčšieho nosníka, votknutého na jednom konci. Na voľnom konci väčšieho nosníka je votknutý menší nosník. Každý z týchto nosníkov obsahuje na svojom voľnom konci prídavnú hmotnosť (tip mass) ako je ukázané na Obr. 6. Táto nelineárna konfigurácia vychádza z pôvodnej lineárnej varianty, ktorá neobsahuje žiadne prídavné magnety, iba prídavné hmotnosti a na premenu energie využíva piezoelektrický článok na povrchu vnútorného nosníka.

Nelinearita bola do tohto systému vložená pomocou magnetu uchytenom na konci menšieho vnútorného nosníka, ktorý interaguje s druhým magnetom, uchytenom v ráme. Autori tejto konfigurácie sa venovali optimalizácii za pomoci 3 parametrov: vzdialenosti medzi magnetmi, veľkosti budenia rámu – amplitúda zrýchlenia, s ktorým rám kmitá a prídavnej hmotnosti vonkajšieho nosníku. Táto prídavná hmotnosť je ľahko nastaviteľná pridaním alebo odobratím kovových doštičiek, pripevnených k nosníku skrutkami ako je zobrazené na Obr. 6. Je potrebné dodať, že systém je monostabilný, avšak pri konfigurácii, kde je vzdialenosť magnetov menšia ako 10 mm sa systém stáva bistabilným. Výsledná prídavná hmotnosť vonkajšieho nosníka bola zvolená na 11,2 g a optimálna vzdialenosť ako 10 mm.



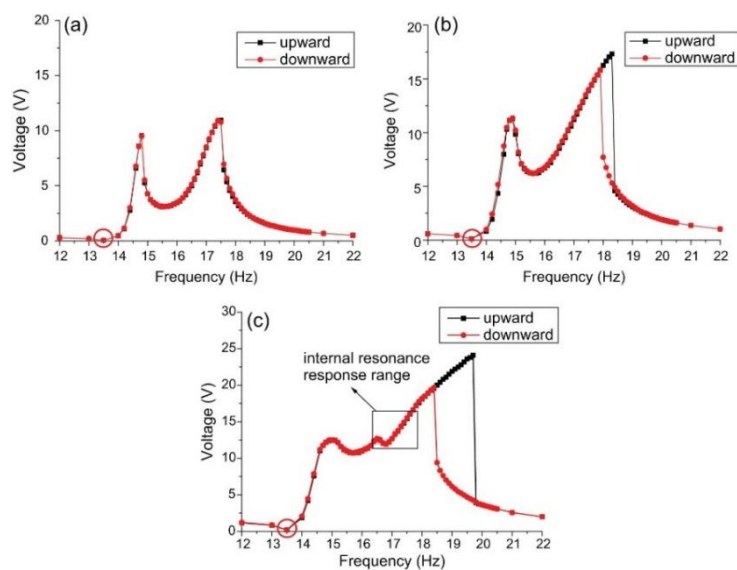
Obr. 6: Nosník s 2 stupňami voľnosti a prídavnými magnetmi [7]



Obr. 7: Závislosť napätia na frekvencii pre rôzne vzdialenosti magnetov [7]

Na Obr. 7 sú zobrazené grafy napätia v závislosti na frekvencii pre rôzne vzdialenosti magnetov. Poslednému grafu zodpovedá práve zvolená optimálna vzdialenosť 10 mm. Z obrázku je patrné, že je táto vzdialenosť naozaj vhodná, pretože je splnená požiadavka na prítomnosť vrcholov odozvy blízko pri sebe a vyplnenie medzery medzi týmito vrcholmi. Všetky grafy zodpovedajú budeniu s amplitúdou zrýchlenia $0,5 \text{ m/s}^2$ a pri takomto nízkom budení sa nelinearita veľmi neprejaví – jedná sa o takzvanú kvázi-lineárnu odozvu.

Vyšším hodnotám budenia potom zodpovedá väčší prejav nelinearity. Na Obr. 8 je zobrazená závislosť napätia na frekvencii pre rôzne hodnoty budenia. Graf (a) zodpovedá amplitúde budenia $0,5 \text{ m/s}^2$, graf (b) je pre amplitúdu 1 m/s^2 a graf (c) pre amplitúdu 2 m/s^2 . Tento nelineárny systém vo výsledku dosiahol lepšiu odozvu a širšie pracovné pásmo ako jeho lineárny ekvivalent.

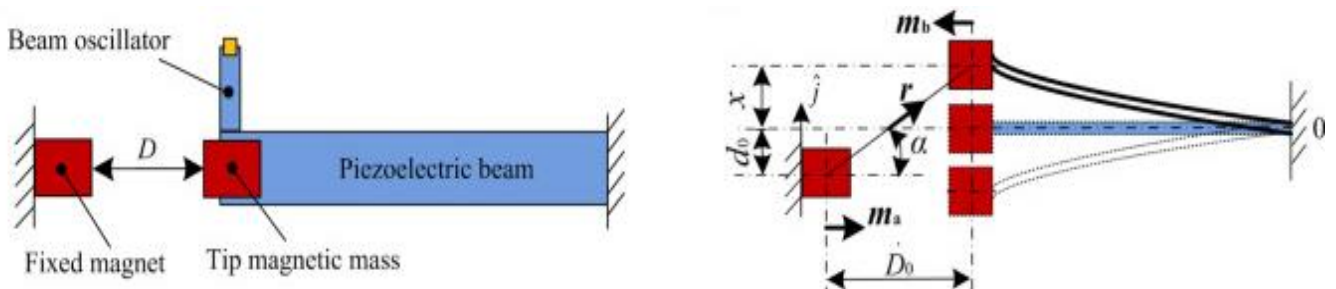


Obr. 8: Závislosť napätia na frekvencii pre rôzne amplitúdy budenia [7]

3.1.5 Prídavný nosník s permanentnými magnetmi

Podobný typ energy harvestoru ako v predchádzajúcej podkapitole vytvorili autori článku [8], v ktorom podrobne opísali návrh a realizáciu energy harvestoru a pomocou modelu aj experimentálne overili jeho efektívnosť.

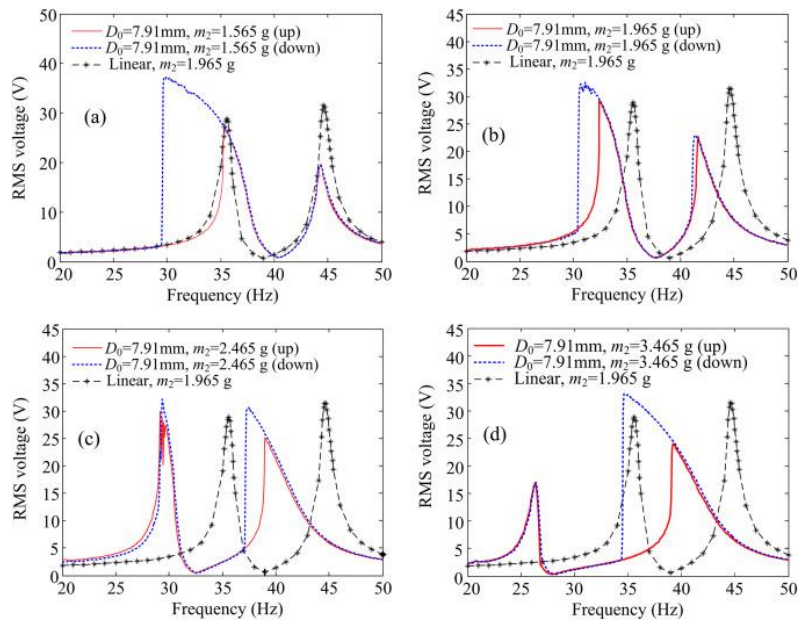
Táto konfigurácia pozostáva z klasického, na jednom konci votknutého nosníka s druhým voľným koncom, na ktorom je pripevnený permanentný magnet. Na konci tohto nosníka je ešte pripevnený druhý porovnateľne menší nosník, vďaka čomu má sústava celkovo 2 stupne voľnosti. Oproti voľnému koncu hlavného nosníka vo vzdialenosti D sa nachádza druhý permanentný magnet, ktorý je pripevnený k podstave a umiestnený tak, aby vytváral odpudivú magnetickú silu v reakcii s magnetom na hlavnom nosníku. Tento magnet v interakcii s magnetom na voľnom konci hlavného nosníka vytvára nelineárnu odpudivú silu, ktorá závisí na vzdialenosti D medzi magnetmi.



Obr. 9: Schéma konfigurácie zobrazená z 2 pohľadov [8]

Na Obr. 9 vľavo je zobrazený zjednodušený model tohto energy harvestoru pri pohľade z vrchu. Hlavný nosník je označený ako Piezoelectric beam, pretože sú na ňom prichytené 2 piezoelektrické články, slúžiace na generovanie elektrickej energie z vibrácií. Na pravej strane na Obr. 9 sa nachádza pohľad z boku so znázornenou interakciou magnetov pri pohybe.

Tento systém bol testovaný teoreticky aj experimentálne pre rôzne prídavné hmotnosti m_2 na konci druhého menšieho nosníka a pre rôzne vzdialenosti D medzi magnetmi ako je vidieť na Obr. 10. Zároveň bol testovaný v porovnaní so svojím lineárnym variantom s optimálnymi parametrami, ktorý neobsahuje magnety. Z výsledkov vyplýva nelineárna mäknúca tuhosť – náklon k nižším frekvenciám pri grafe závislosti elektrického napätia na frekvencii (viz Obr. 10) a z nej plynúce rozšírenie frekvenčného pásma.



Obr. 10: Závislosť elektrického napätia na budiacej frekvencii pre rôzne vzdialenosti magnetov a rôzne prídavné hmotnosti [8]

3.1.6 Nosníky votknuté na spoločnej strane

Autori článku [9] predstavili konštrukciu energy harvesteru pozostávajúceho z dvoch nosníkov votknutých na spoločnej strane (viz Obr. 11) Na voľných koncoch týchto nosníkov sa potom nachádzajú permanentné magnety, ktorých interakciou pri vzájomnom pohybe dochádza vplyvom magnetickej sily k nelineárnej tvrdnúcej tuhosti.

Vonkajší aj vnútorný nosník sú uchytené k podstave, ktorá je harmonicky budená. Na oboch voľných koncoch nosníkov sú pripevnené magnety v určitej horizontálnej vzdialenosti d a usporiadané tak, aby pri ich vzájomnom pohybe vznikala odpudivá nelineárna magnetická sila. Na oba nosníky sú celkovo pripevnené 3 piezoelektrické články, ku ktorým je ešte pripojená záťaž.



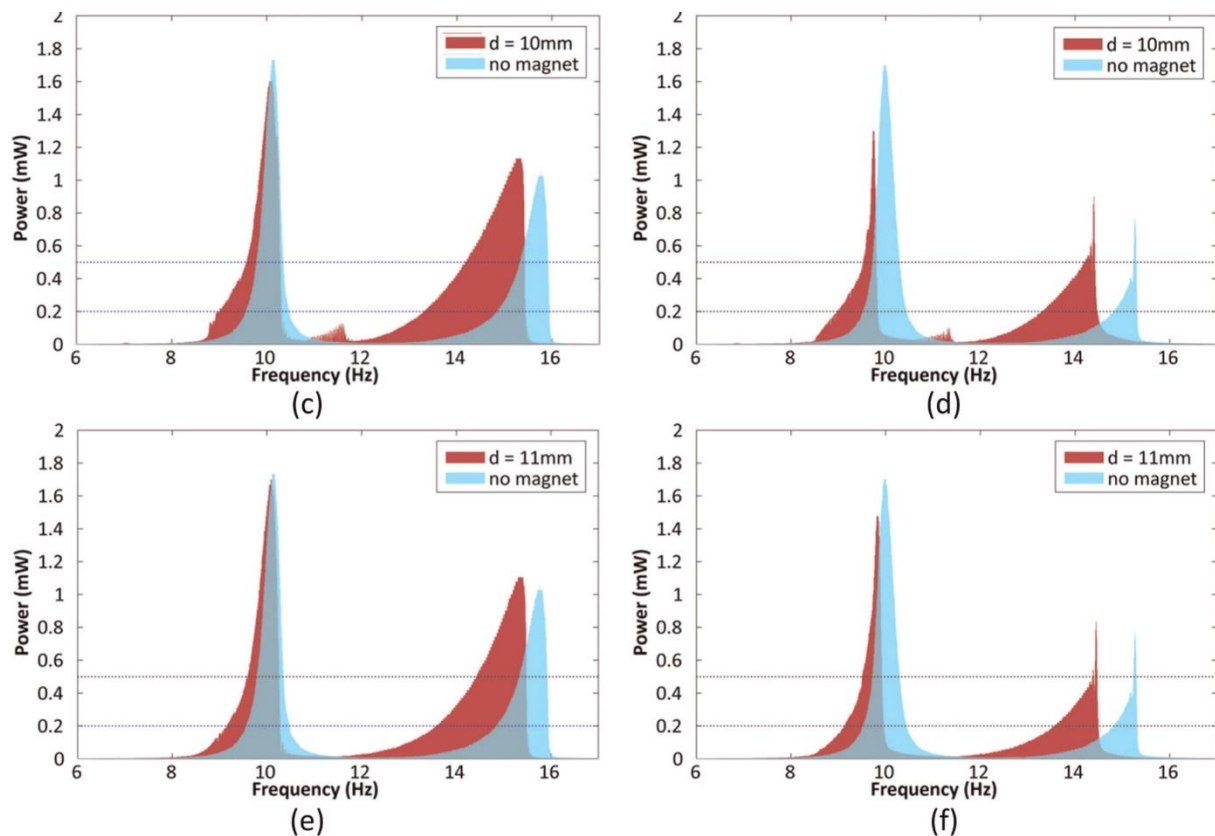
Obr. 11: Schéma konštrukcie 2 nosníkov votknutých na spoločnej strane [9]

Magnetická sila vznikajúca v systéme môže byť vyjadrená ako funkcia vzájomného pohybu koncov oboch nosníkov [9]:

$$F_m = -a_1(y_1 - y_2) + a_3(y_1 - y_2)^3 + p \quad (6)$$

Kde y_1 je pohyb vonkajšieho nosníka a y_2 je pohyb vnútorného nosníka. Konštanty lineárneho a kubického člena sú a_1 a a_3 a p je polynóm vyššieho stupňa.

Oba nosníky celkovej konfigurácie – vnútorný aj vonkajší boli jednotlivo numericky simulované a aj experimentálne testované. Neskôr bola numericky simulovaná aj experimentálne verifikovaná celá sústava a výsledky boli porovnané. Sústava bola testovaná pri rôznej vodorovnej vzdialenosti magnetov d_0 . Na Obr. 12 je vidieť porovnanie získaných výkonov v závislosti na budiacej frekvencii pre dve rôzne vzdialenosti magnetov pri doprednom aj spätnom frekvenčnom prejazde.



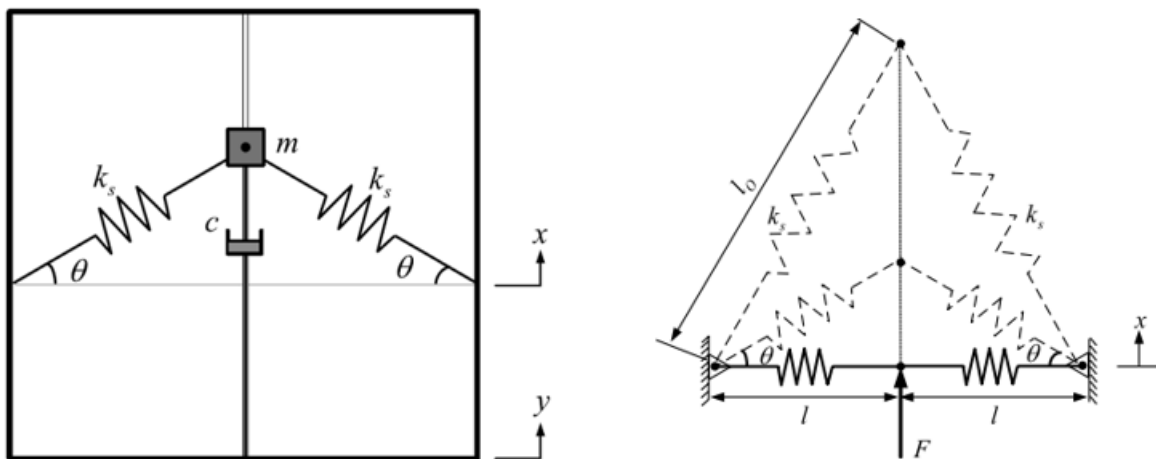
Obr. 12: Porovnanie generovaného výkonu pre 2 vzdialenosti magnetov [9]

3.2 Nelineárna tuhosť dosiahnutá konfiguráciou lineárnych pružín

Druhým najčastejším spôsobom, akým je možné vytvoriť v mechanických sústavách nelineárnu tuhosť je využitím pružín s lineárnou odozvou, to znamená, že sila potrebná na natiahnutie takejto pružiny je úmerná prvej mocnine výchylky danej pružiny. Takéto lineárne pružiny sú potom špeciálne geometricky usporiadané takým spôsobom, že vo výsledku závisí sila od pružín nelineárne od prvej mocniny výchylky. Popríklad je možné ešte využiť nejakú inú špecifickú konštrukciu aj bez použitia pružín. V tejto kapitole sú uvedené konkrétne konštrukcie, v ktorých autori použili na docielenie nelineárnej tuhosti geometrickú konfiguráciu pružín a tieto konštrukcie aj boli použité ako energy harvestory.

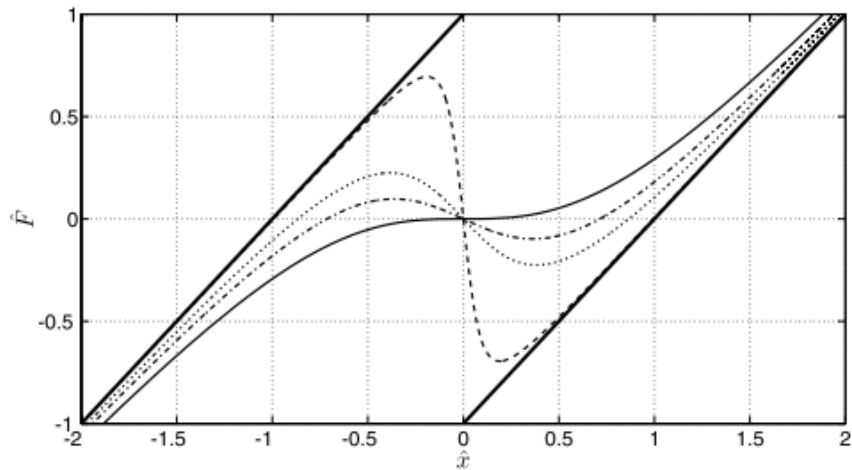
3.2.1 Trojuholníková konštrukcia

V publikácii [10] je podrobne popísané vytvorenie a potenciálne využitie nelineárnej tuhosti v mechanickom systéme pomocou klasických lineárnych pružín. Konfigurácia pozostáva z 2 pružín s lineárnou odozvou pripojených k hmotnému telesu. Keď sú pružiny nenatiahnuté alebo nestlačené, sú pripojené k telesu pod určitým uhlom θ , tak ako je zobrazené na Obr. 13. Silová reakcia oboch pružín je lineárna vzhľadom k osám pružín, ale vzhľadom k vodorovnému smeru je táto sila práve vďaka uloženiu pod uhlom nelineárna.



Obr. 13: Schéma trojuholníkovej konštrukcie [10]

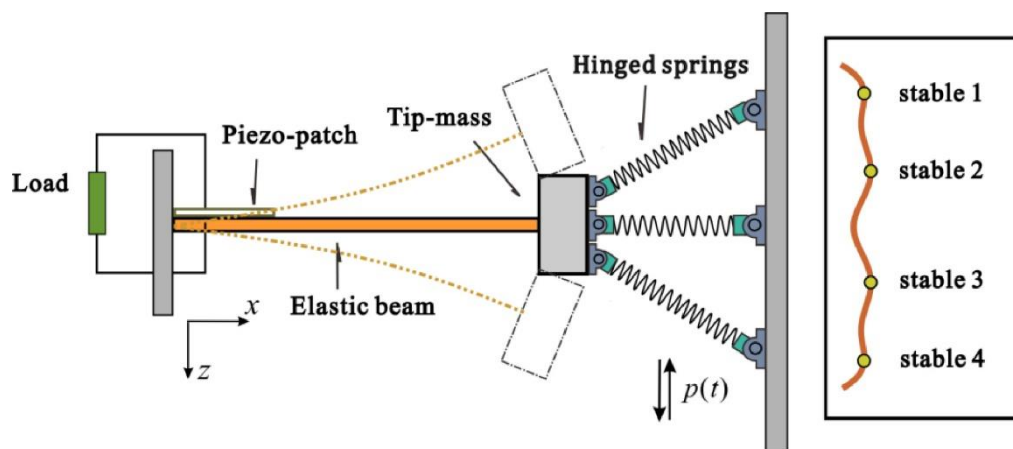
Na Obr. 14 je zobrazená závislosť nelineárnej bezrozmernej sily \hat{F} , vznikajúcej v systéme v závislosti na bezrozmernej výchylke \hat{x} pre rôzne pomery dĺžok $\frac{l}{l_0}$, kde \hat{x} je výchylka x vzťahnutá na pôvodnú dĺžku pružiny l_0 .



Obr. 14: Nelineárna bezrozmerná sila \hat{F} v závislosti na výchylke \hat{x} pre rôzne pomery dĺžok $\frac{l}{l_0}$ [10]

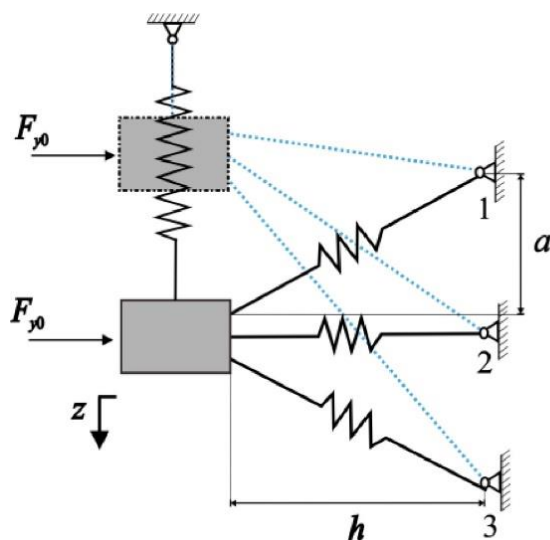
3.2.2 Piezoelektrický nosník s prídavnými pružinami

Autori článku [11] sa venovali horizontálne votknutému nosníku s prídavnou hmotnosťou na svojom konci pre účely energy harvesting u za pomoci piezoelektrického článku. Pre docielenie nelineárnej tuhosti v systéme využili geometrickú konfiguráciu 3 pružín ako je zobrazené na Obr. 15. Tri Pružiny sú pripojené k voľnému koncu nosníka pomocou rotačných väzieb a rovnako sú pripojené na druhej strane k podpore, do ktorej sa premietajú okolné vibrácie.



Obr. 15: Schéma piezoelektrického nosníka s prídavnými pružinami [11]

Na Obr. 16 je zjednodušený model tejto konfigurácie, zobrazený pri pohybe v dvoch časových okamihoch. V prvom okamihu sa pružina č.2 nachádza v horizontálnej polohe a v druhom okamihu je sústava posunutá nahor oproti pôvodnej polohe a deformácia pružín je zobrazená bodkovanou modrou čiarou. Výsledná sila od pružín pôsobiaca na sústavu sa skladá z 2 zložiek: jedna je spôsobená ohybovou tuhosťou nosníka, ktorá závisí na materiálových charakteristikách a geometrii nosníka a druhá je sila od troch deformovaných pružín.



Obr. 16: Zjednodušený model sústavy pri pohybe [11]

3.3 Záver z prehľadu konštrukčných riešení nelineárnej tuhosti

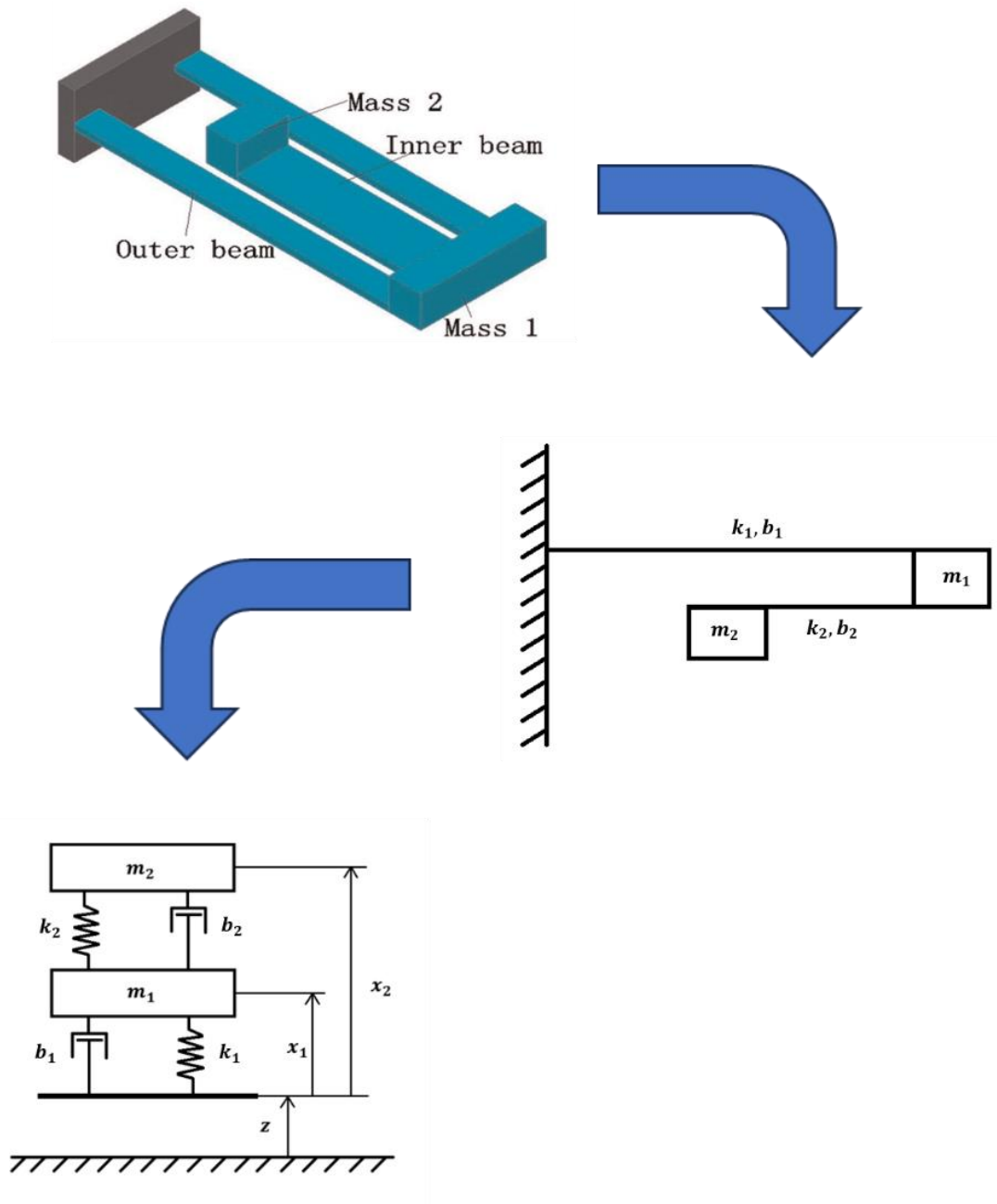
V tejto kapitole boli predstavené viaceré zaujímavé konštrukčné riešenia energy harvesting zariadení s vytvorenou nelineárnou tuhosťou, pričom sa ukázalo, že najčastejšie sa konštruktéri uchýľujú k použitiu permanentných magnetov a v menšom počte prípadov sa zaoberajú špeciálnym geometrickým usporiadaním pružín pre docielenie nelineárnej tuhosti. Svedčí o tom aj fakt, že konštrukcií s magnetmi bolo nájdených a uvedených podstatne viac ako tých s geometrickou konfiguráciou pružín.

Ďalším poznatkom z tejto kapitoly je, že všeobecne nie je zrejmé, aký charakter bude mať vytvorená nelineárna tuhosť, takže sa nedá s určitosťou predpovedať či zavedením nelineárnej tuhosti dôjde k vytvoreniu tvrdnúceho alebo mäknúceho charakteru.

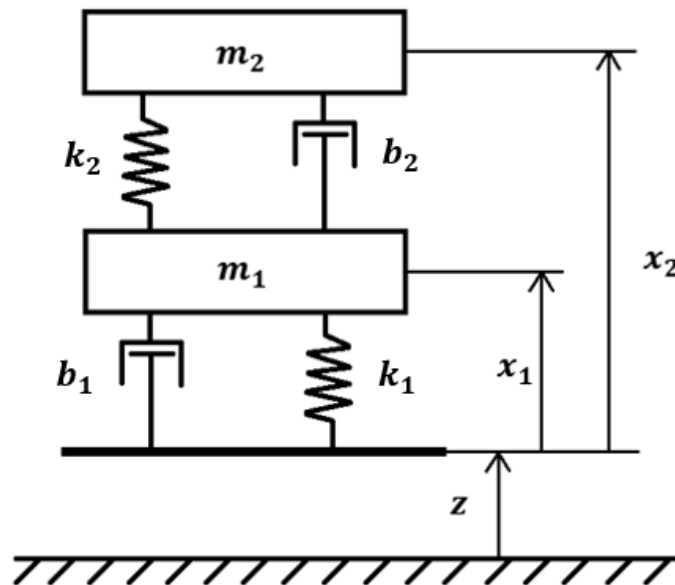
Ako najvhodnejšia konštrukcia sa javí nosník s 2 stupňami voľnosti popísaný v kapitole 3.1.4 [7]. Táto konštrukcia má aj svoj lineárny variant a dôležitou vlastnosťou je, že umožňuje vytvorenie dvoch nelineárnych tuhostí. Prvá nelineárna tuhosť je realizovaná magnetom na voľnom konci druhého nosníka druhá by mohla byť realizovaná obdobne permanentným magnetom na voľnom konci prvého nosníka, pričom magnety by sa navzájom neovplyvňovali kvôli veľkej vzájomnej vzdialenosti. Táto konštrukcia je v ďalších kapitolách uvedená ako príklad modelovaného systému.

4 Pohybové rovnice lineárneho systému s 2 stupňami voľnosti

Pre vytvorenie modelu energy harvesting zariadenia je kľúčové získať pohybové rovnice, ktoré popisujú kmitavý pohyb sústavy. Nie je uvažovaná konkrétna konštrukcia, ale pre predstavu je možné použiť napríklad nosník od autorov článku [7], popísaný v podkapitole 3.1.4, ktorý má aj lineárny variant bez prídavných magnetov. To je veľmi vhodné, nakoľko prvým krokom je vytvorenie lineárneho modelu, prídanie nelineárnej tuhosti je uvažované až v neskoršom procese.



Obr. 17: Diagram prechodu od konštrukcie ku schéme [7]



Obr. 18: Schéma mechanickej sústavy s 2 stupňami voľnosti

Na Obr. 18 je znázornená schéma sústavy kmitajúcej s 2 stupňami voľnosti, ktorá predstavuje energy harvesting zariadenie bez elektrickej časti. Sústava je tvorená dvomi telesami s hmotnosťami m_1 a m_2 , ktoré obe konajú translačný pohyb. Teleso 2 je pripojené k telesu 1 pomocou pružiny označenej k_2 a tlmenia b_2 a pohybuje sa s relatívnou výchylkou voči vibrujúcemu rámu označenou x_2 . Teleso 1 je pripojené k vibrujúcemu rámu pomocou pružiny k_1 a pomocou tlmenia b_1 a kmitá s relatívnou výchylkou voči vibrujúcemu rámu označenou x_1 . Absolútna výchylka voči základnému telesu označená ako z predstavuje budenie celej sústavy a jej uvedenie do pohybu. Je tiež dôležité poznamenať, že tiažové zrýchlenie nie je uvažované.

Pre popis sústavy využívam Lagrangeove rovnice 2. druhu, nakoľko sú veľmi efektívnym nástrojom na získanie pohybových rovníc. Lagrangeov prístup je energetický a spočíva vo vyjadrení kinetickej, potenciálnej a disipačnej energie sústavy, výkonu sústavy a následných parciálnych derivácií týchto energií podľa príslušných výchyliek, prípadne podľa prvých derivácií týchto výchyliek [12]. Rovnica (7) je všeobecný predpis Lagrangeových rovníc 2. druhu pre hocijakú mechanickú sústavu so zovšeobecnenými výchylkami.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_i} \quad (7)$$

V rovnici (7) predstavuje E_k kinetickú energiu danej sústavy, E_p je potenciálna energia sústavy, E_d je disipačná energia a W je celkový výkon všetkých externých síl pôsobiacich na sústavu. Zovšeobecnená výchylka je označená q_i , kde i môže byť $1 \dots n$, pričom n predstavuje počet stupňov voľnosti sústavy.

Pre danú sústavu s 2 stupňami voľnosti platí:

$$n = 2 \quad (8)$$

$$q_1 = x_1 \quad (9)$$

$$q_2 = x_2 \quad (10)$$

Celková kinetická energia je vyjadrená nasledovne:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1 + z)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2 + z)^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + m_1\dot{x}_1\dot{z} + \frac{1}{2}m_1\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + m_2\dot{x}_2\dot{z} + \frac{1}{2}m_2\dot{z}^2 \end{aligned} \quad (11)$$

Parciálne derivácie kinetickej energie podľa rýchlostí \dot{x}_1 a \dot{x}_2 majú takýto tvar:

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 + m_1\dot{z} \quad (12)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_2} = m_2\dot{x}_2 + m_2\dot{z} \quad (13)$$

Derivácie podľa času potom sú:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1\ddot{x}_1 + m_1\ddot{z} \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2\ddot{x}_2 + m_2\ddot{z} \quad (15)$$

Parciálne derivácie kinetickej energie podľa oboch výchylek sú nulové.

$$\frac{\partial E_k}{\partial x_1} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial x_2} = 0 \quad (17)$$

Rovnica (18) vyjadruje celkovú potenciálnu energiu sústavy:

$$E_p = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 - k_2x_1x_2 + \frac{1}{2}k_2x_1^2 \quad (18)$$

Parciálne derivácie potenciálnej energie podľa jednotlivých výchylek potom sú:

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_1} = (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 \quad (19)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_2} = k_2x_2 - k_2x_1 \quad (20)$$

Disipačná energia je vyjadrená v rovnici (21):

$$E_d = \frac{1}{2}b_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 = \frac{1}{2}b_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}b_2\dot{x}_2^2 - b_2\dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{1}{2}b_2\dot{x}_1^2 \quad (21)$$

Parciálne derivácie disipačnej energie podľa rýchlostí \dot{x}_1 a \dot{x}_2 sú:

$$\frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}_1} = (b_1 + b_2)\dot{x}_1 - b_2\dot{x}_2 \quad (22)$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}_2} = b_2\dot{x}_2 - b_2\dot{x}_1 \quad (23)$$

Na sústavu nepôsobia žiadne externé sily, takže celkový výkon externých síl je nulový a takisto aj parciálne derivácie podľa daných rýchlostí by boli nulové:

$$W = 0 \quad (24)$$

Keďže sú vyjadrené všetky členy vystupujúce v Lagrangeovej rovnici, je možné napísať finálne pohybové rovnice sústavy:

$$m_1\ddot{x}_1 + (b_1 + b_2)\dot{x}_1 - b_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = -m_1\ddot{z} \quad (25)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 - b_2\dot{x}_1 + k_2x_2 - k_2x_1 = -m_2\ddot{z} \quad (26)$$

5 Popis a vlastné frekvencie lineárneho systému

Poznať vlastnú frekvenciu alebo frekvencie je veľmi dôležité pri každej mechanickej sústave, pretože sa takto dozvedáme aké frekvencie okolných vibrácií nám môžu sústavu poškodiť alebo naopak v prípade energy harvesterov, pri akých budiacich frekvenciách dostaneme najlepšie výsledky. Väčšina vibrácií, ktoré sa prirodzene vyskytujú v mechanických sústavách majú frekvencie v hodnotách desiatok, prípadne jednotiek Hertzov, veľmi často je to rozmedzie 10 Hz – 40 Hz. Taká bola aj požiadavka v prípade simulovaného energy harvesting systému. A teda aby vlastné frekvencie zariadenia ležali v pásme od 20 Hz do 40 Hz a zariadenie by tak bolo schopné reagovať na vibrácie s najčastejšími hodnotami frekvencií.

Ďalšou požiadavkou bolo, aby obidve vlastné frekvencie systému ležali blízko pri sebe. Dôvod pre to je taký, že nelinearita zavedená do systému nie je nikdy tak význačná, aby dokázala prekryť široké pásmo povedzme napríklad 5 a viac Hertzov. Vo väčšine prípadov dokáže nelinearita prekryť pásmo 1 až 3 Hertze. Preto je podstatné, aby boli vlastné frekvencie ležali približne 2 Hz – 4 Hz od seba, a aby tak došlo k efektívnemu prekrytiu pásma medzi nimi.

Medzi ďalšie požiadavky patria približné hodnoty parametrov systému. Parametre modelu by mali dosahovať hodnoty podobné skutočným zariadeniam, a preto bola maximálna hmotnosť m_1 stanovená na 50 g a maximálna hmotnosť m_2 na 20 g. Pre hodnoty tuhostí k_1 a k_2 neboli kladené žiadne nároky, a tak mohli byť ľubovoľne menené. Hodnoty tlmení b_1 a b_2 boli navrhnuté tak, aby pomerný útlm zodpovedajúci sústave s 1 stupňom voľnosti bol 0,1 .

Pomerný útlm b_r pri sústave s 1 stupňom voľnosti sa vyjadří ako:

$$b_r = \frac{b}{2\sqrt{mk}} \quad (27)$$

Kde b je celkové tlmenie sústavy, m je celková hmotnosť sústavy a k je celková tuhosť sústavy. Potom pri uvažovaní dvoch systémov s jedným stupňom voľnosti namiesto jedného s 2 stupňami voľnosti platia po vyjadrení z rovnice (27) pre hodnoty tlmení b_1 a b_2 nasledujúce vzťahy.

$$b_1 = 2\sqrt{m_1k_1} b_r \quad (28)$$

$$b_2 = 2\sqrt{m_2k_2} b_r \quad (29)$$

5.1 Stavový model systému

Bodeho diagram slúži na analýzu lineárneho dynamického systému vo frekvenčnej oblasti. Pomocou tohto grafu je možné vidieť vrcholy amplitúdovo-frekvenčnej

charakteristiky, ktoré by nemali byť diametrálne rozdielne ako bolo spomenuté v kapitole 2 a takisto je možné z grafu možné odčítať približné hodnoty vlastných frekvencií, ktoré týmto vrcholom zodpovedajú. Pre vykreslenie Bodeho diagramu je možné využiť softvér Matlab. Bodeho diagram je v ňom zastúpený príkazom bode. Pre využitie tohto príkazu je najprv nutné previesť model popísaný diferenciálnymi rovnicami na stavový model.

Stavový model slúži na popis lineárneho dynamického systému a spočíva v prepísaní diferenciálnych rovníc n -tého rádu na n diferenciálnych rovníc 1. rádu. Z týchto diferenciálnych rovníc sa potom určia matice potrebné pre stavový popis.

Po zavedení substitúcie a úprave dostanem z rovníc (25) a (26) 4 diferenciálne rovnice 1. rádu:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (30)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m_1} [-(k_1 + k_2)x_1 - (b_1 + b_2)x_2 + k_2x_3 + b_2x_4] - \ddot{z} \quad (31)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (32)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{m_2} [k_2x_1 + b_2x_2 - k_2x_3 - b_2x_4] - \ddot{z} \quad (33)$$

Štandardný stavový model má maticový zápis:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (34)$$

$$y = Cx + Du \quad (35)$$

Kde A je matica sústavy, B je matica vstupov, C je matica výstupov, D je matica priamej väzby vstupov na výstup, x je stavový vektor a u je vektor vstupov. Stavový zápis potom vyzerá nasledovne:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(k_1 + k_2)}{m_1} & -\frac{(b_1 + b_2)}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{b_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{b_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{b_2}{m_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \ddot{z} \quad (36)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \ddot{z} \quad (37)$$

5.2 Prenosové funkcie systému

Po vytvorení stavového modelu je potrebné ho previesť na popis vo forme prenosu. To je možné urobiť v programe Matlab veľmi jednoducho, a síce využitím príkazu `tf` (transfer function). Inou možnosťou je samozrejme aj priame odvodenie prenosových funkcií systému a tie potom zadať do už spomenutého príkazu `bode`. Pre pochopenie je v nasledujúcej časti čiastočné odvodenie týchto prenosových funkcií.

Pre vytvorenie prenosových funkcií sa využíva Laplaceova transformácia, ktorá priraduje funkcii času funkciu komplexnej premennej s .

$$s = j\omega \quad (38)$$

Kde j je imaginárna jednotka a ω je uhlová frekvencia. Laplaceova transformácia teda dokáže previesť funkciu z časovej oblasti do frekvenčnej. Prenos sa určí ako podiel Laplaceovho obrazu výstupu k Laplaceovmu obrazu vstupu pri nulových počiatočných podmienkach:

$$G(s) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} \quad (39)$$

Vstup do systému je jeden, a to síce zrýchlenie \ddot{z} , ktorým je systém kinematicky budený. Výstupy zo systému sú dva a sú to výchylky x_1 a x_2 .

Prvým krokom je urobiť Laplaceove obrazy diferenciálnych rovníc (25) a (26) a zapísať ich maticovo. Maticový zápis po prevedení transformácie je vyjadrený rovnicou (40):

$$\begin{bmatrix} m_1s^2 + (b_1 + b_2)s + (k_1 + k_2) & -(b_2s + k_2) \\ -(b_2s + k_2) & m_2s^2 + b_2s + k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_1\ddot{z} \\ -m_2\ddot{z} \end{bmatrix} \quad (40)$$

Ďalším krokom bolo z tohto zápisu vyjadriť obidva prenosy a k tomu bolo využité Cramerovo pravidlo. Výsledné prenosy po aplikovaní Cramerovho pravidla a úpravách vyzerajú nasledovne:

$$G_1(s) = \frac{X_1(s)}{\ddot{z}(s)} = \frac{-m_1m_2s^2 - (m_1b_2 + m_2b_2)s - (m_1k_2 + m_2k_2)}{m_1m_2s^4 + (m_1b_2 + m_2b_1 + m_2b_2)s^3 + (m_1k_2 + m_2k_1 + m_2k_2 + b_1b_2)s^2 + (b_1k_2 + b_2k_1)s + k_1k_2} \quad (41)$$

$$G_2(s) = \frac{X_2(s)}{Z(s)} = \frac{-m_1 m_2 s^2 - (m_1 b_2 + m_2 b_1 + m_2 b_2)s - (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2)}{m_1 m_2 s^4 + (m_1 b_2 + m_2 b_1 + m_2 b_2)s^3 + (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2 + b_1 b_2)s^2 + (b_1 k_2 + b_2 k_1)s + k_1 k_2} \quad (42)$$

5.3 Určenie vlastných frekvencií

Pre určenie presných hodnôt vlastných frekvencií je potrebné nájsť vlastné čísla dynamického systému. Je možné využiť už vytvorený stavový model, pričom vlastné frekvencie systému je možné nájsť určením vlastných čísel matice A . Nájsť vlastné čísla prakticky znamená, že je potrebné vyriešiť rovnicu:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad (43)$$

Kde A je matica sústavy z rovnice (36), λ je vlastné číslo a E je jednotková matica. Túto rovnicu však nie je nutné riešiť, ale je možné znovu využiť Matlab a vlastné čísla nájsť príkazom `eig`, kde vstupným argumentom je iba matica systému A a výstup sú vlastné čísla, ktoré sú komplexne združené v tvare:

$$\lambda = -b_r \omega_0 \pm i\omega \quad (44)$$

Kde b_r je pomerný útlm, ω_0 je vlastná uhlová frekvencia netlmeného systému a ω je vlastná uhlová frekvencia tlmeného systému, ktorá je predmetom záujmu. Vlastné čísla majú takýto tvar, nakoľko je sústava tlmená podkriticky a vlastné uhlové frekvencie sa dajú priamo odčítať z imaginárnej časti komplexných čísel, získaných príkazom `eig` [12].

5.4 Ladenie parametrov systému

Po určení spôsobu nájdania vlastných frekvencií systému je možné parametre systému vhodne naladiť tak, aby výsledné vlastné frekvencie ležali v určitom pásme a relatívne blízko pri sebe.

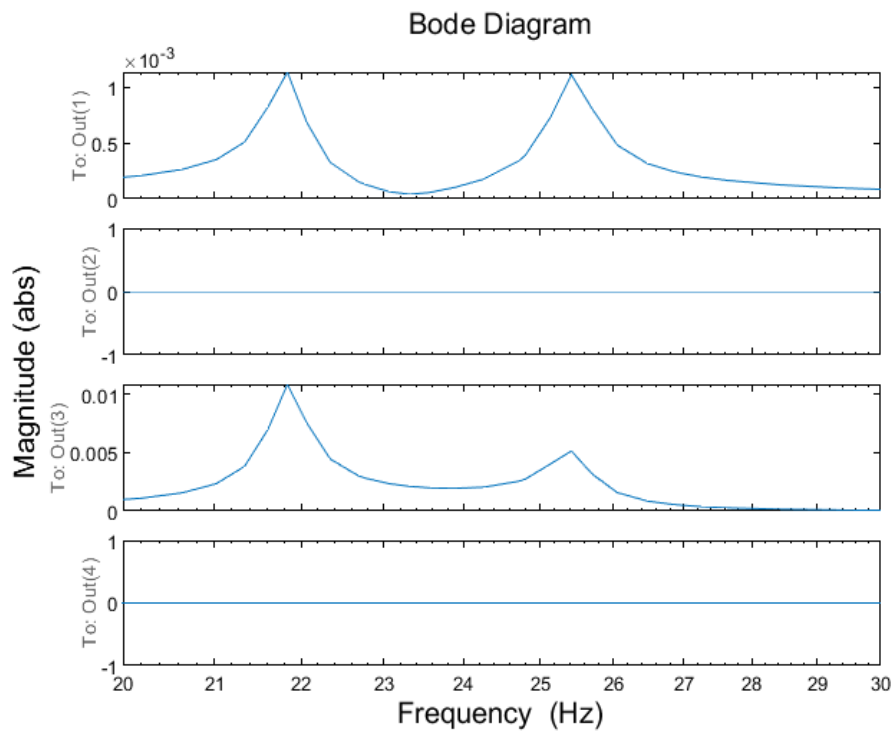
Výsledné parametre systému boli stanovené nasledovne. Hmotnosť druhého telesa m_2 bola stanovená na 10 g, hmotnosť prvého telesa m_1 sa nepodarilo naladiť v rozmedzí do 50 g a nakoniec bola stanovená až na 450 g. Tuhosti k_1 a k_2 boli naladené na hodnoty 10 300 N/m a 210 N/m. Tlmenie b_1 má výslednú hodnotu 1,362 N·s/m a tlmenie b_2 hodnotu 0,029 N·s/m.

O vlastnostiach lineárneho systému vypovedá Tab. 1, kde sú uvedené jeho výsledné parametre a Obr. 19, na ktorom je zobrazená amplitúdovo-frekvenčná charakteristika, vytvorená v Matlabe príkazom `bode`.

Je vidieť, že vrcholy tejto charakteristiky sú blízko pri sebe a teda aj zodpovedajúce vlastné frekvencie sú blízko pri sebe. Pre výchylku x_1 sú tieto vrcholy približne rovnako vysoké, pri výchylke x_2 je druhý vrchol približne polovične vysoký ako ten prvý.

Tab. 1: Parametre lineárneho systému

parameter	hodnota	jednotka
m_1	450	g
m_2	10	g
k_1	10 300	N/m
k_2	210	N/m
b_1	1,362	N·s/m
b_2	0,029	N·s/m
f_1	21,841	Hz
f_2	25,425	Hz



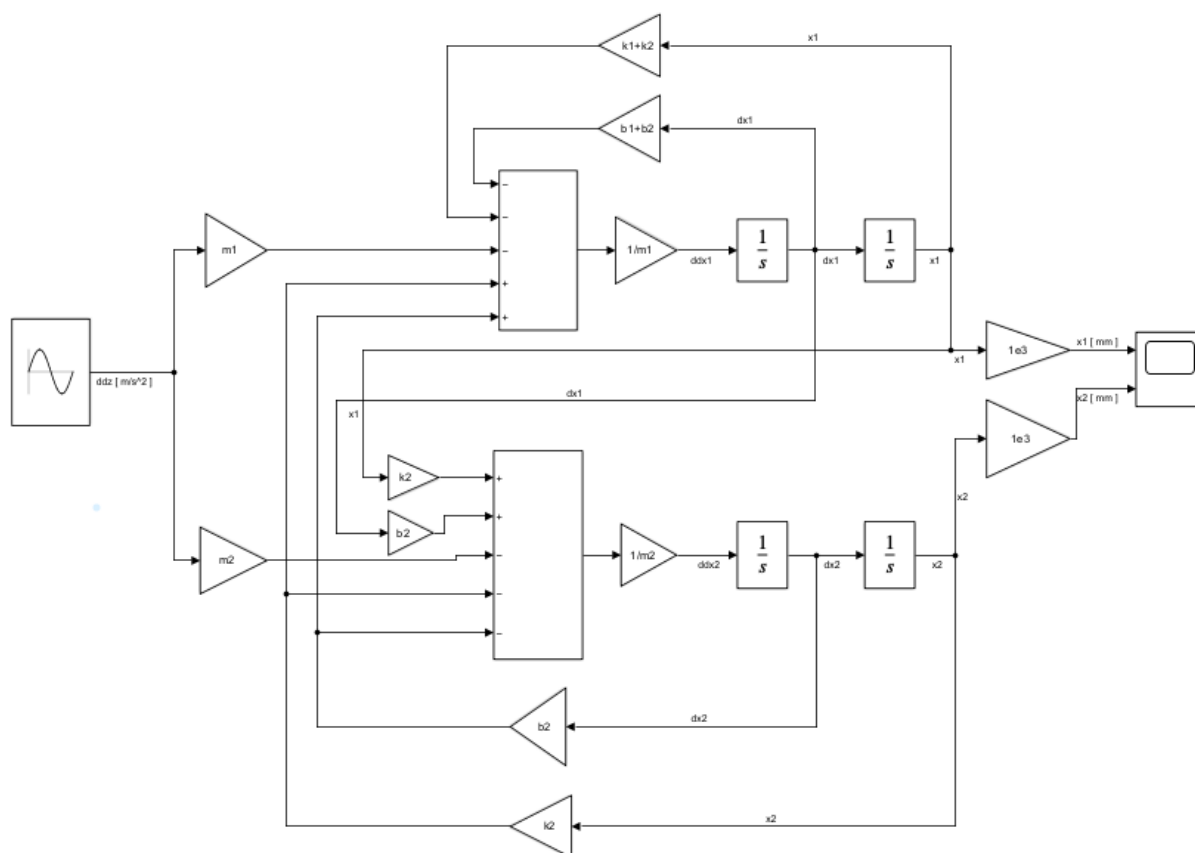
Obr. 19: Bode diagram lineárneho systému

6 Model energy harvestoru v softvéri Simulink

V predchádzajúcej kapitole boli predstavené viaceré možnosti modelovania lineárneho systému. Avšak ani jeden z týchto spôsobov nie je možné použiť pre vytvorenie modelu nelineárneho systému a je nutné siahnuť po numerickom nástroji. Pre vytvorenie simulačného modelu je využitý softvér Simulink, ktorý funguje na matematickom princípe. K vytvoreniu modelu je potrebné mať rovnice, ktoré daný dynamický systém popisujú. V Simulinku sa potom tieto rovnice zostavia pomocou blokov, ktoré predstavujú matematické operácie a signálov, ktoré predstavujú veličiny. Simulink nakoniec tieto rovnice vyrieši pomocou určitého riešiča diferenciálnych rovníc.

6.1 Lineárny systém

Vytvorenie simulačného modelu lineárneho energy harvestoru je predkrokom k finálnemu modelu s nelineárnou tuhosťou. Ten totižto vznikne z lineárneho modelu zavedením nelineárnych prvkov. Simulačný model, zobrazený na Obr. 20 je vytvorený pomocou rovníc (25) a (26) a môže slúžiť aj pre prípadné porovnanie s jeho pokročilejšou nelineárnou verziou.



Obr. 20: Simulačný model lineárneho systému

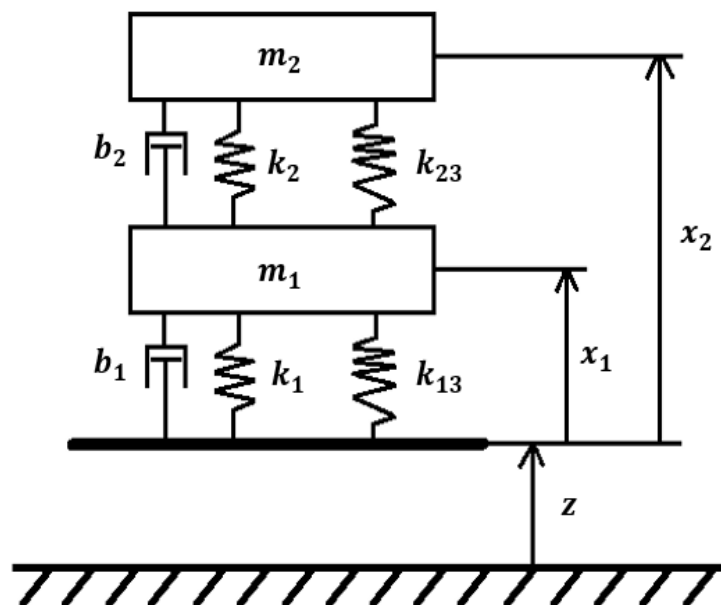
6.2 Nelineárny systém

Spôsobmi, akými je možné vytvoriť nelineárnu tuhosť v mechanických sústavách sa zaoberala kapitola 3. Ak by bolo zámerom energy harvester s nelineárnou tuhosťou naozaj skonštruovať, mohol by ako inšpirácia poslúžiť niektorý z príkladov z danej kapitoly. Pre tento model, pretože sa nejedná o reálnu konštrukciu, nie je podstatné či je použitý, napríklad, jeden magnet alebo viac magnetov, alebo je využité špecifické usporiadanie pružín. Podstatné je, akým spôsobom bude táto nelinearita modelovaná, a preto bude v tejto kapitole predstavený spôsob modelovania nelineárnej tuhosti, budú odvodené pohybové rovnice a nakoniec bude aj predstavený simulačný model s pridanou nelineárnou tuhosťou.

6.2.1 Modelovanie nelineárnej tuhosti

Veľmi často používaným spôsobom na modelovanie nelineárnych mechanických sústav je Duffingov oscilátor [4]. Duffingov oscilátor popisuje nelineárny systém s jedným stupňom voľnosti a vykazuje určité nedostatky pri porovnaní s reálnym systémom, avšak je zcela dostačujúci pre simulačné účely na úrovni tejto práce a aj pre systém s dvomi stupňami voľnosti.

Celková sila od tuhostí v sústave sa vyjadří pomocou dvoch členov – lineárneho a kubického. Pre sústavu s dvomi stupňami voľnosti sú potom tieto sily dve. V schéme sústavy si to je možné predstaviť ako 2 pružiny – jedna má lineárnu odozvu, kedy odporová sila závisí na prvej mocnine výchylky a druhá má kubickú odozvu, takže jej odporová sila závisí na tretej mocnine výchylky.



Obr. 21: Schéma sústavy s 2 stupňami voľnosti s nelineárnou tuhosťou

Na Obr. 21 je zobrazená schéma sústavy s dvomi stupňami voľnosti s pridanou nelineárnou tuhosťou. Nelineárne tuhosti sú zobrazené ako pružiny s nelineárnou (kubickou) odozvou k_{13} a k_{23} .

6.2.2 Pohybové rovnice nelineárneho systému

Pre získanie pohybových rovníc sa opäť využili Lagrangeove rovnice 2. druhu. Kinetická energia, disipačná energia aj výkon zostávajú rovnaké ako pri lineárnom systéme, jediné čo sa mení je potenciálna energia:

$$E_p = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{4}k_{13}x_1^4 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{4}k_{23}(x_2 - x_1)^4 \quad (45)$$

Parciálne derivácie potenciálnej energie podľa výchylek x_1 a x_2 vyzerajú nasledovne:

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_1} = k_1x_1 + k_{13}x_1^3 - k_2x_2 + k_2x_1 - k_{23}x_2^3 + 3k_{23}x_1x_2^2 - 3k_{23}x_1^2x_2 + k_{23}x_1^3 \quad (46)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_2} = k_2x_2 + k_{23}x_2^3 - k_2x_1 - 3k_{23}x_1x_2^2 + 3k_{23}x_1^2x_2 - k_{23}x_1^3 \quad (47)$$

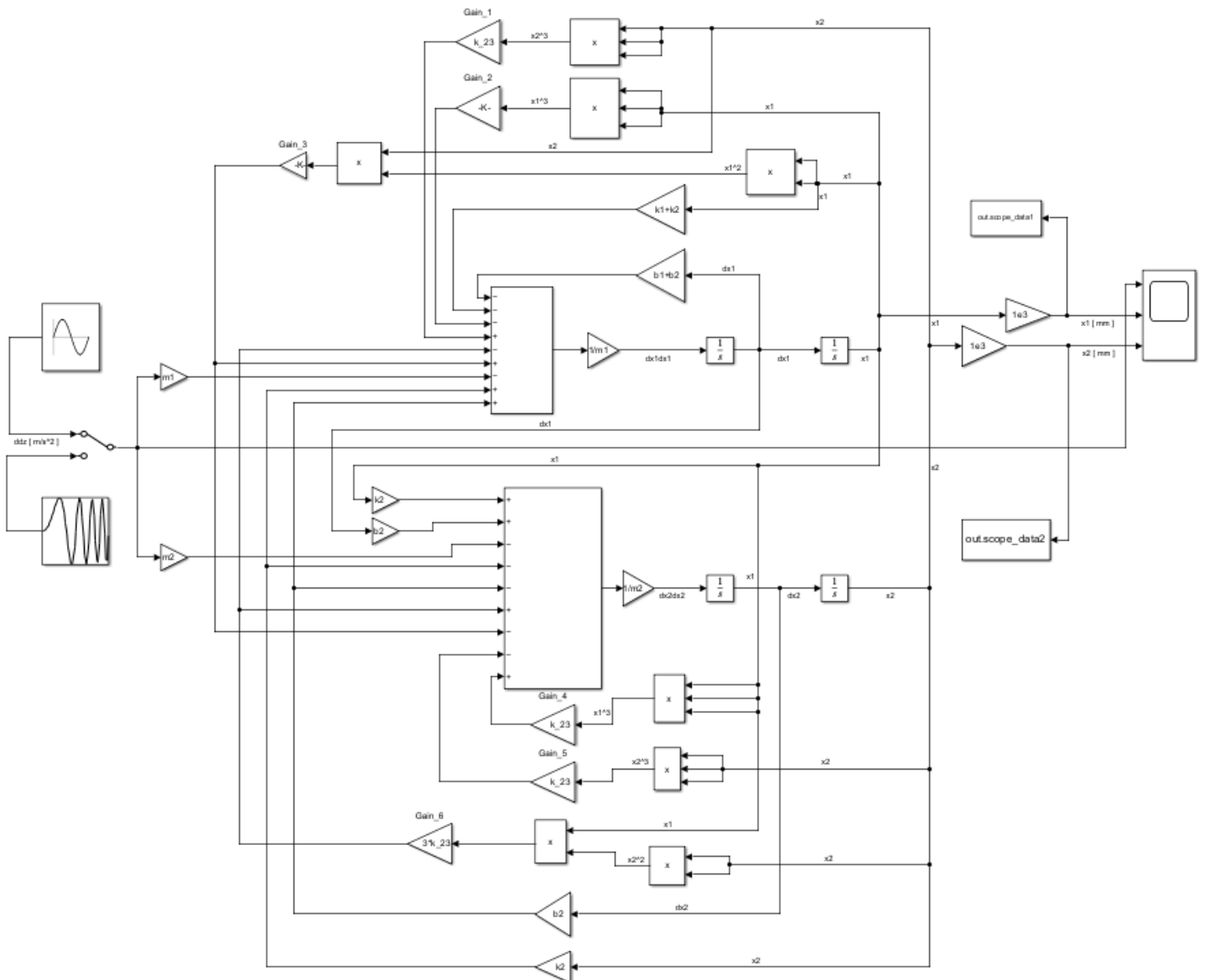
Po dosadení do Lagrangeovej rovnice (7) sú obdržané výsledné pohybové rovnice nelineárneho systému:

$$m_1\ddot{x}_1 + (b_1 + b_2)\dot{x}_1 - b_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 + (k_{13} + k_{23})x_1^3 - k_{23}x_2^3 + 3k_{23}x_1x_2^2 - 3k_{23}x_1^2x_2 = -m_1\ddot{z} \quad (48)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 - b_2\dot{x}_1 + k_2x_2 - k_2x_1 + k_{23}x_2^3 - 3k_{23}x_1x_2^2 + 3k_{23}x_1^2x_2 - k_{23}x_1^3 = -m_2\ddot{z} \quad (49)$$

6.2.3 Simulačný model nelineárneho systému

Na Obr. 22 je zobrazený simulačný model nelineárneho systému v programe Simulink. Rovnice, podľa ktorých je model vytvorený sú rovnice (48) a (49) a boli odvodené v predchádzajúcej kapitole.



Obr. 22: Nelineárny simulačný model vytvorený v softvéri Simulink

7 Simulácie vynúteného kmitania

Pretože je predmetom záujmu odozva systému pri vynútenom kmitaní, je potrebné toto chovanie nejakým spôsobom simulovať. Pre tieto účely je simulačný model systému kinematicky budený harmonickým signálom zrýchlenia s amplitúdou \ddot{Z} , ktorá má hodnotu 1 m/s^2 . Simulácie sú prevedené takým spôsobom, že budiaci signál má konštantnú amplitúdu zrýchlenia, ale frekvencia signálu sa lineárne mení s časom konštantou rýchlosťou $0,2 \text{ Hz/s}$. Jedná sa o takzvaný frekvenčný prejazd a boli využité oba jeho typy, to znamená dopredný prejazd, pri ktorom sa budiaca frekvencia s časom zvyšuje a spätný prejazd, pri ktorom sa frekvencia s časom znižuje. Pri simuláciách boli sledované výchylky x_1 a x_2 v časovej aj frekvenčnej oblasti.

7.1 Výsledky simulácií

Pre simulovanie je potrebné určiť hodnoty nelineárnych tuhostí. Výsledná sila od tuhostí pôsobiaca na teleso 1, ktoré je v schéme na Obr. 21 označená hmotnosťou m_1 je vyjadrená nasledovne:

$$F = k_1 x_1 + k_{13} x_1^3 + k_{23} (x_1 - x_2) + k_{23} (x_1 - x_2)^3 \quad (50)$$

A výsledná sila od tuhostí pôsobiaca na teleso druhé teleso, označené hmotnosťou m_2 je:

$$F = k_2 (x_2 - x_1) + k_{23} (x_2 - x_1)^3 \quad (51)$$

Obe sily sú tvorené lineárnou a kubickou zložkou, pričom sila pôsobiaca na teleso 1 má dve lineárne zložky a dve kubické zložky. Výsledná sila pôsobiaca na teleso 1 je teda tvorená silami od tuhostí k_1 a k_{13} a od nich sa ešte odčíta sila pôsobiaca na teleso 2.

Pre vytvorenie nelineárnej sily, ktorá má tvrdnúci charakter je potrebné, aby mali oba koeficienty tuhostí, lineárny aj kubický, kladné hodnoty alebo aby mali oba koeficienty záporné hodnoty. Pre vytvorenie nelineárnej sily s mäknúcim charakterom je naopak potrebné aby mali kubický a lineárny koeficient tuhosti rozdielne znamienka [12]. Toto platí presne pre silu pôsobiacu na teleso 2. Pri sile pôsobiacej na teleso 1 je to komplikovanejšie, nakoľko nie je dopredu jasné, akým spôsobom sa prejaví reakcia od druhej sily.

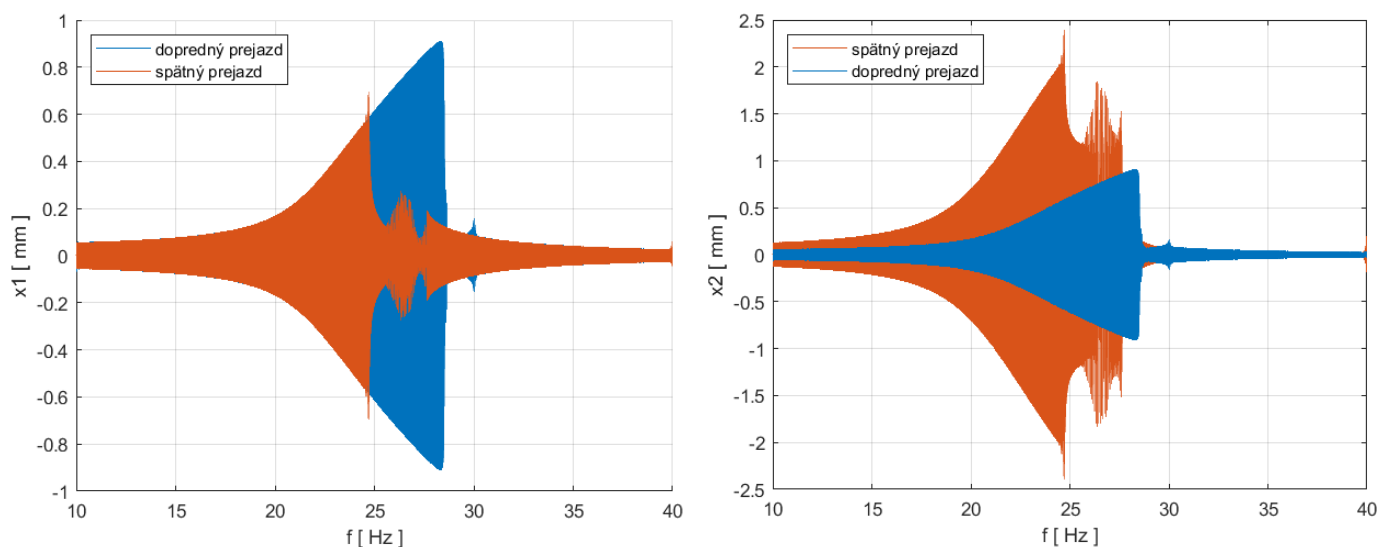
Simulácie boli spočiatku realizované pre hodnoty koeficientov kubických tuhostí k_{13} a k_{23} s rozdielnym znamienkom, pričom koeficienty lineárnych tuhostí k_1 a k_2 mali zhodné kladné hodnoty uvedené v kapitole 5.4. O kvalite výsledku simulácie vypovedal najmä tvar amplitúdovo-frekvenčnej charakteristiky či už pre výchylku x_1 alebo x_2 . Dôležité bolo, čo najviac sa priblížiť tvaru, opísanom v kapitole 2. K amplitúdovo-frekvenčným charakteristikám boli zobrazené aj sily od tuhostí, zodpovedajúce telesám, na ktoré pôsobia.

Avšak po viacerých simuláciách, pri ktorých dosiahnuté výsledky nezodpovedali tým predpokladaným sa pristúpilo na zmenu koeficientov a boli realizované aj simulácie, pri ktorých mali koeficienty kubických tuhostí rovnaké kladné alebo záporné znamienka, ale rozdielne hodnoty. V nasledujúcej časti sú uvedené výsledky simulácií v časovej aj frekvenčnej oblasti pre konfiguráciu tuhostí, ktorých hodnoty sú uvedené v Tab. 2.

Tab. 2

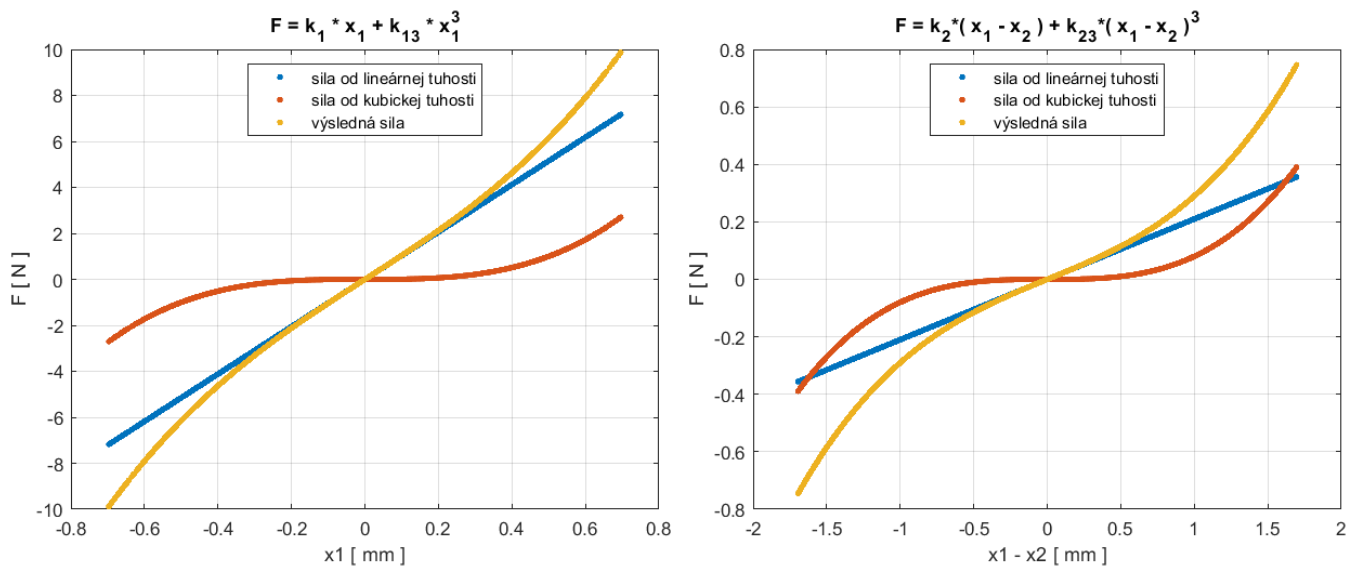
k_1	10 300	N/m
k_2	210	N/m
k_{13}	$8 \cdot 10^9$	N/m ³
k_{23}	$8 \cdot 10^7$	N/m ³

Na Obr. 23 sú zobrazené frekvenčné prejazy pre obe výchylky pri budení amplitúdou zrýchlenia 1 m/s^2 . Rýchlosť prejazdov je konštantná a má hodnotu $0,2 \text{ Hz/s}$. Pri spätnom prejazde dochádza k zvýrazneniu mäknúceho charakteru, ktorý pri doprednom prejazde nie je vidieť a výchylka x_2 dosahuje vyššie hodnoty ako pri doprednom prejazde.

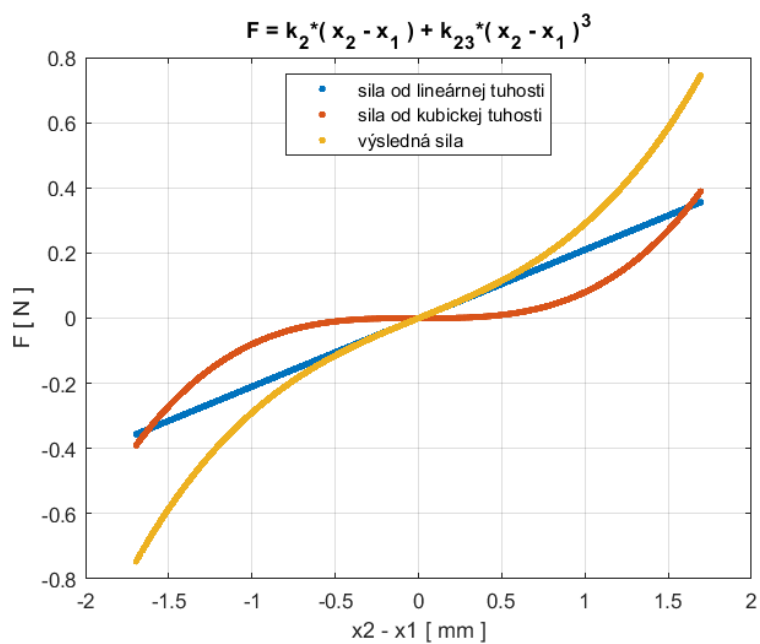


Obr. 23: Odozva systému pri frekvenčnom prejazde

Na Obr. 24 a Obr. 25 sú zobrazené sily od tuhostí, pôsobiace na obe telesá pri budení amplitúdou 1 m/s^2 zo simulácie spätného frekvenčného prejazdu. Sila pôsobiaca na teleso 2 je vyjadrená rovnicou (51) a sila pôsobiaca na teleso 1 je zložená z dvoch síl a je vyjadrená rovnicou (50). Je vidieť, že vznikajúce nelineárne sily majú všetky tvrdnúci charakter, čo vysvetľuje dominantný tvrdnúci charakter na grafoch amplitúdovo-frekvenčných charakteristík. Avšak v odozve systému sa náznakovo prejavuje aj mäknúci charakter, a to síce najmä pri spätnom prejazde pre výchylku x_2 .

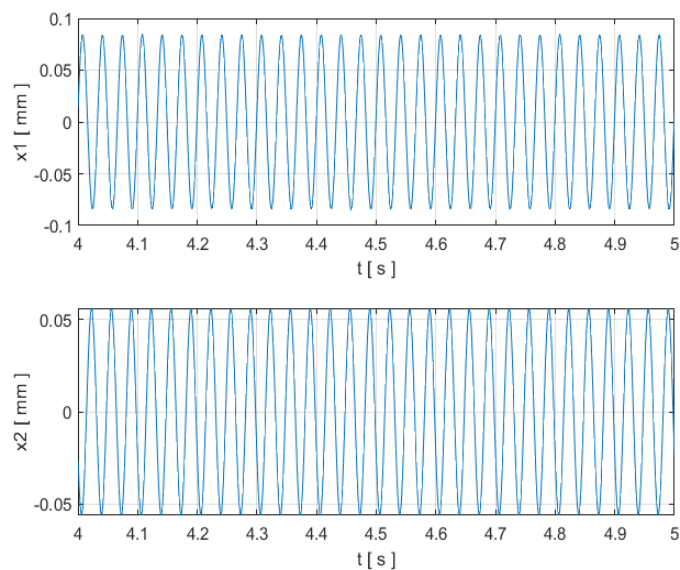


Obr. 24: Sily pôsobiace na teleso 1

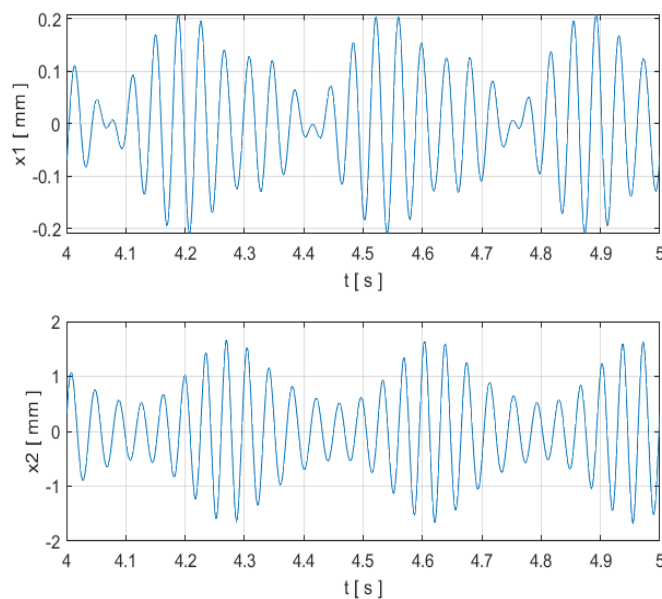


Obr. 25: Sily pôsobiace na teleso 2

Na Obr. 26 a Obr. 27 je zobrazený priebeh výchyliek x_1 a x_2 v čase pri budení amplitúdou zrýchlenia 1 m/s^2 dvomi rôznymi frekvenciami. Mimo frekvenčného pásma, kde dochádza k mäknúcemu charakteru majú obe výchylky v ustálenom stave jednoduchý harmonický priebeh, čo je vidieť na Obr. 26 , kedy má budiaca frekvencia hodnotu 30 Hz. Takáto odozva teda nastáva ak je systém budený frekvenciou, ktorá nepatrí do pásma, v ktorom dochádza k mäknúcemu charakteru. Zatiaľ čo ak je systém budený frekvenciou z tohto pásma (cca 26 Hz – cca 28 Hz), majú výchylky zložitejší priebeh tvorený dvomi alebo viacerými harmonickými priebehmi. Táto druhá odozva je zobrazená na Obr. 27, kedy bol systém budený frekvenciou 27 Hz.



Obr. 26: Priebeh výchyliek pri budení frekvenciou 30 Hz

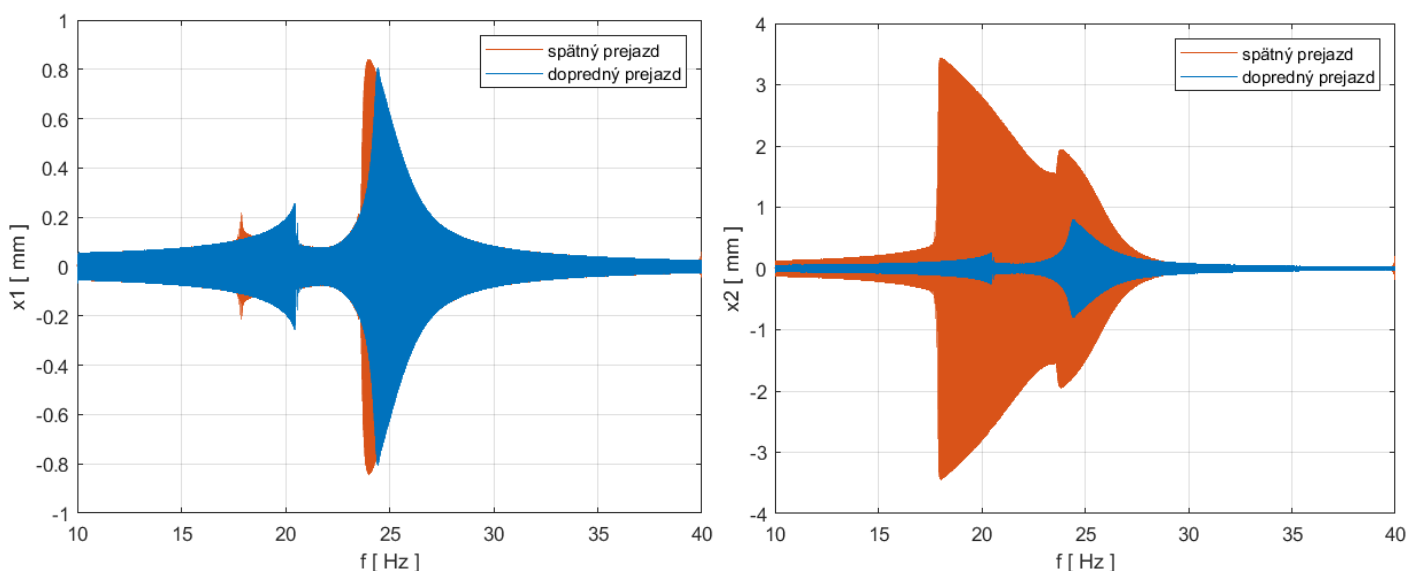


Obr. 27: Priebeh výchyliek pri budení frekvenciou 27 Hz

Ďalšie simulácie boli realizované pre koeficienty kubických tuhostí so zápornými hodnotami. Bolo prevedených viacero simulácií s rôznymi hodnotami tuhostí pre rôzne amplitúdy budenia, avšak ďalej budú uvedené len výsledky zo simulácií so základnou hodnotou amplitúdy budenia, a síce 1 m/s². Rýchlosť frekvenčných prejazdov zostala naďalej 0,2 Hz/s a hodnoty všetkých tuhostí, použitých pri týchto simuláciách sú uvedené v Tab. 3.

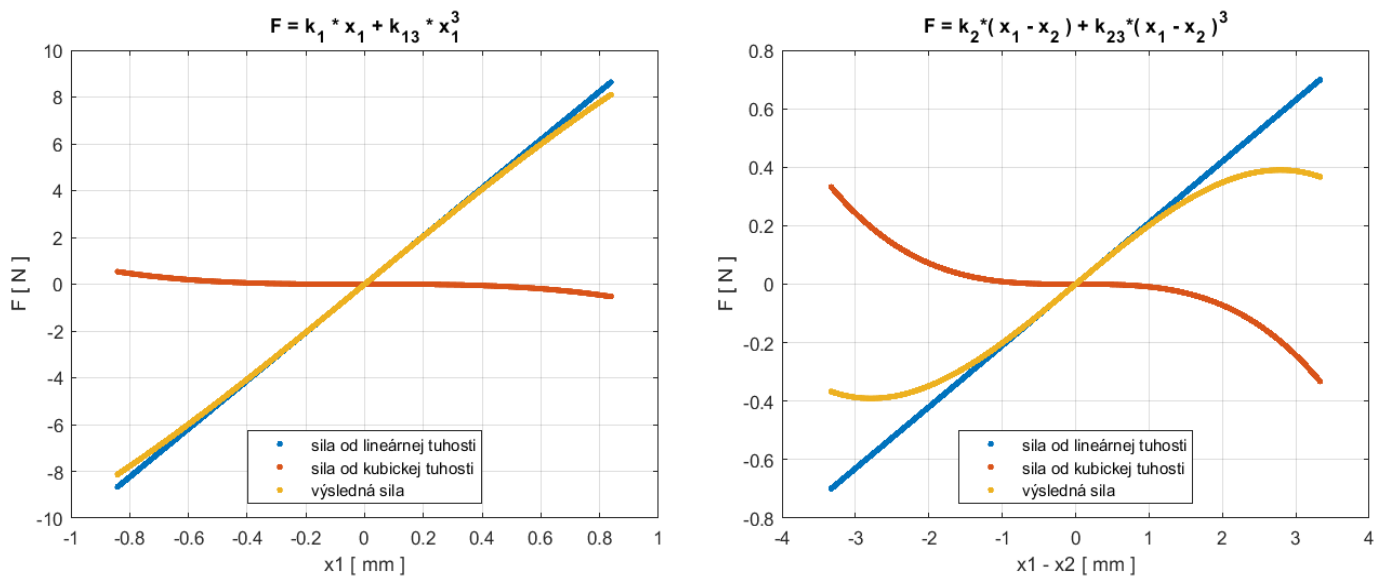
Tab. 3

k_1	10 300	N/m
k_2	210	N/m
k_{13}	$-9 \cdot 10^8$	N/m ³
k_{23}	$-9 \cdot 10^6$	N/m ³



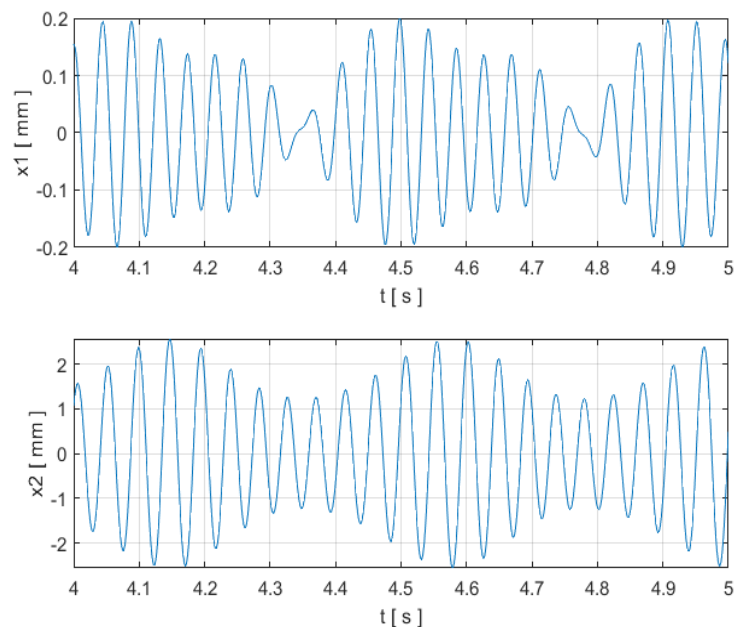
Obr. 28: Frekvenčný prejazd s rýchlosťou 0,2 Hz/s

Na Obr. 28 sú zobrazené obidve výchylky počas simulácie formou frekvenčného prejazdu. Na oboch grafoch je vidieť, že sa tvrdnúci charakter pri tomto spôsobe simulácie prejaví len veľmi slabo, skoro až vôbec. Pri výchylke x_1 sa zdá akoby sa nelineárny charakter neprejavil vôbec, čomu čiastočne zodpovedá takmer úplne lineárny priebeh prvej zložky sily pôsobiacej na teleso 1, ktorý je zobrazený na Obr. 29. Naopak mäknúci charakter sa výrazne prejaví pri druhej výchylke a to najmä pri spätnom prejazde zvýraznenom oranžovou farbou. Sila pôsobiaca na teleso 2 zobrazená nie je nakoľko je totožná s druhou zložkou sily pôsobiacej na teleso1, zobrazenej na Obr. 29 vpravo. Vznikajúci mäknúci charakter pri priebehu výchylky x_2 teda korešponduje s mäknúcou nelineárnou silou, pôsobiacej na druhé teleso.



Obr. 29: Sily pôsobiace na prvé teleso

Pri zobrazení pohybov v čase je vidieť to, čo aj v predchádzajúcich simuláciách a síce, že ak je systém budený frekvenciou blízkou rezonančnej frekvencii, v tomto prípade je to pásmo v okolí prvej rezonančnej frekvencie (cca 21 – cca 23 Hz), tak dochádza k odzve, ktorá má priebeh zložený z viacerých harmonických priebehov. Na Obr. 30 je zobrazený priebeh oboch výchyliek pri budení frekvenciou 22 Hz, na ktorom je vidieť tento zložený harmonický priebeh.



Obr. 30: Priebeh výchyliek pri budení frekvenciou 22 Hz

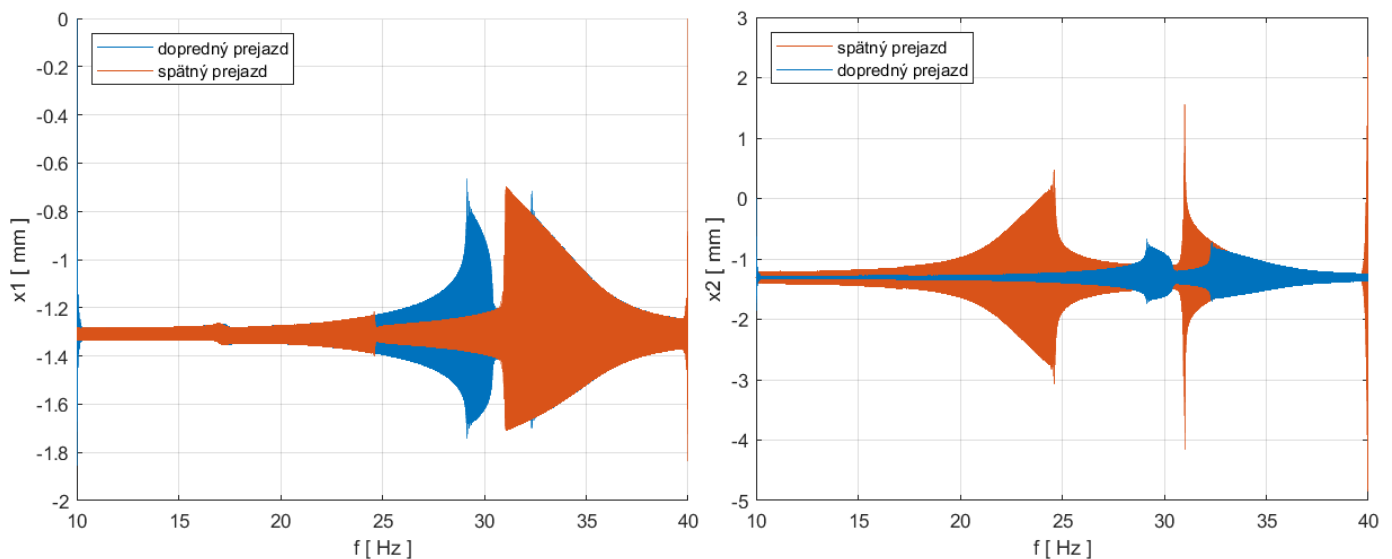
7.2 Zmena hodnôt koeficientov tuhostí

Predchádzajúce simulácie boli všetky realizované s rovnakými kladnými hodnotami lineárnych koeficientov tuhostí. Pretože majú ale na výsledné nelineárne sily vplyv znamienka, resp. hodnoty týchto lineárnych koeficientov, boli ďalej prevedené aj simulácie so zmenenými hodnotami tuhostí k_1 a k_2 . Simulácie boli takisto prevedené ako frekvenčné prejazdy s rýchlosťou prejazdu 0,2 Hz/s a boli pri nich zároveň dosiahnuté najlepšie výsledky.

Nasledujúce výsledky zodpovedajú simuláciám s koeficientmi tuhostí, ktorých hodnoty sú uvedené v Tab. 4. Všetky ostatné parametre zostali nezmenené.

Tab. 4

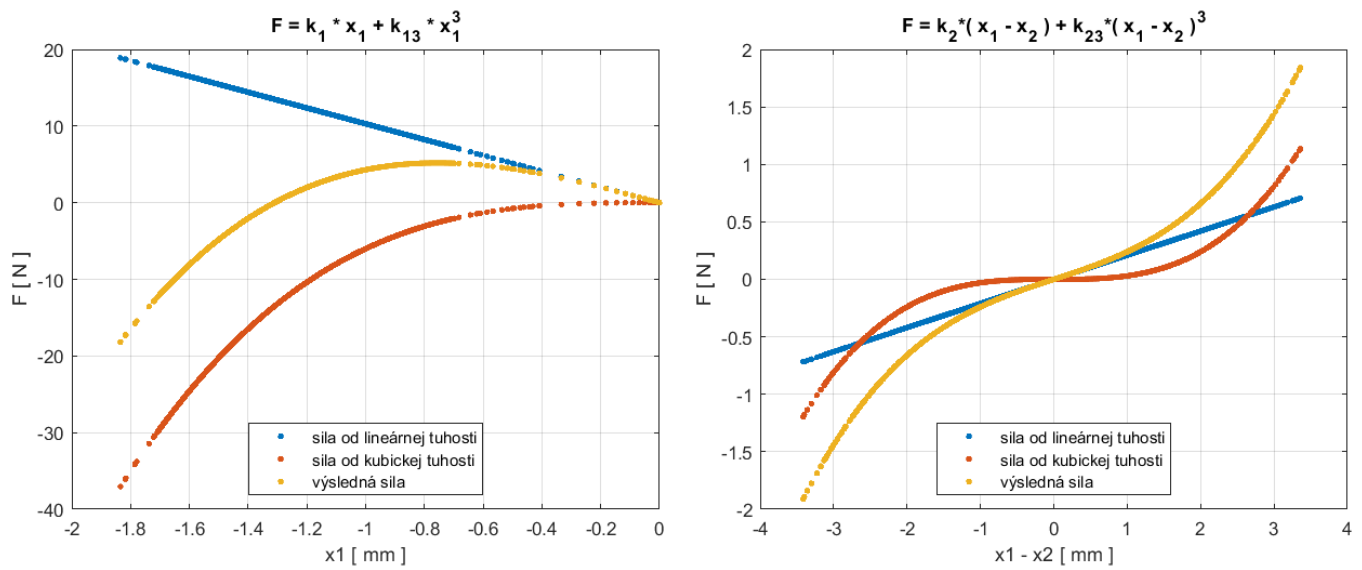
k_1	-10 300	N/m
k_2	210	N/m
k_{13}	$6 \cdot 10^9$	N/m ³
k_{23}	$3 \cdot 10^7$	N/m ³



Obr. 31: Výsledok frekvenčného prejazdu pre obe výchylky

Na Obr. 31 sú zobrazené výsledky frekvenčných prejazdov pre obe výchylky. Z grafov je možné odčítať, že kmitanie neprebíha okolo nulovej hodnoty, ale je pre obe výchylky na grafe posunutú smerom nadol o približne 1,3 mm.

Sily pôsobiace na obe telesá pri spätnom prejazde sú zobrazené na Obr. 32. Prvá sila má mäknúci charakter, čo sa prejavuje aj na výsledku frekvenčného prejazdu pri druhom vrchole. Sila pôsobiaca na teleso 2 má zrejmy tvrdnúci charakter a opäť sa to odráža aj vo frekvenčnom prejazde pri prvom vrchole. Sústava teda obsahuje tvrdnúcu aj mäknúcu tuhosť, sily aj výsledky prejazdov zodpovedajú predpokladom.



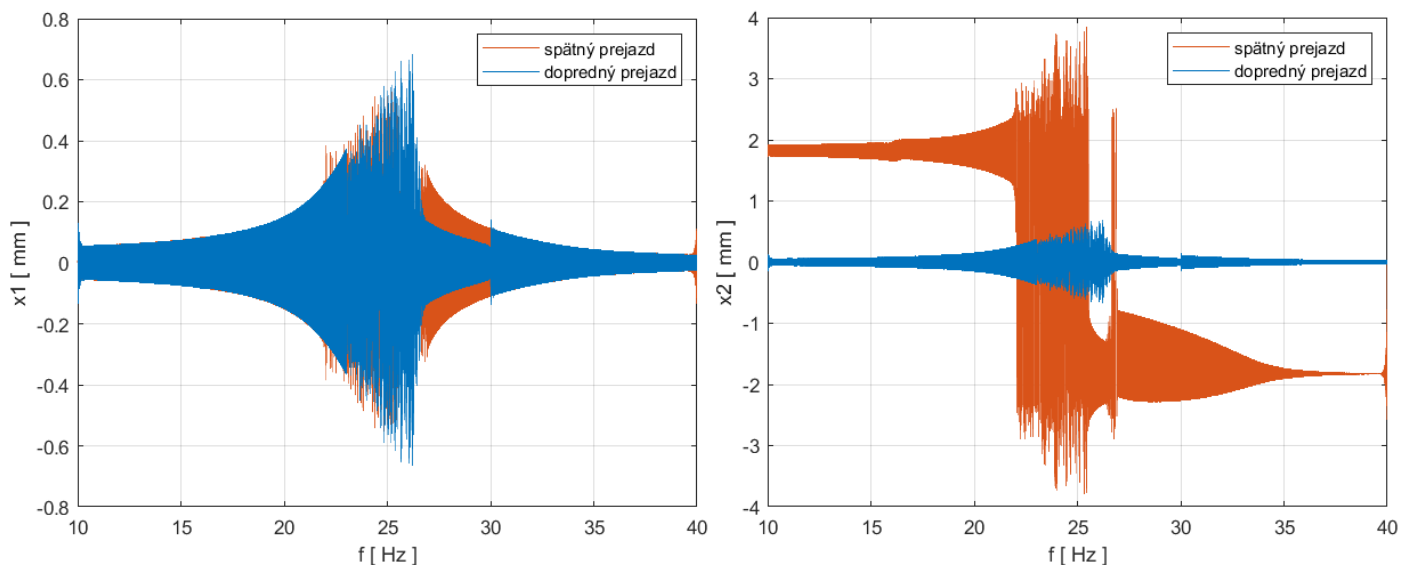
Obr. 32: Priebeh síl pôsobiacich na prvé teleso

Podobné výsledky boli dosiahnuté aj pre koeficienty tuhostí s hodnotami, ktoré sú uvedené v Tab. 5.

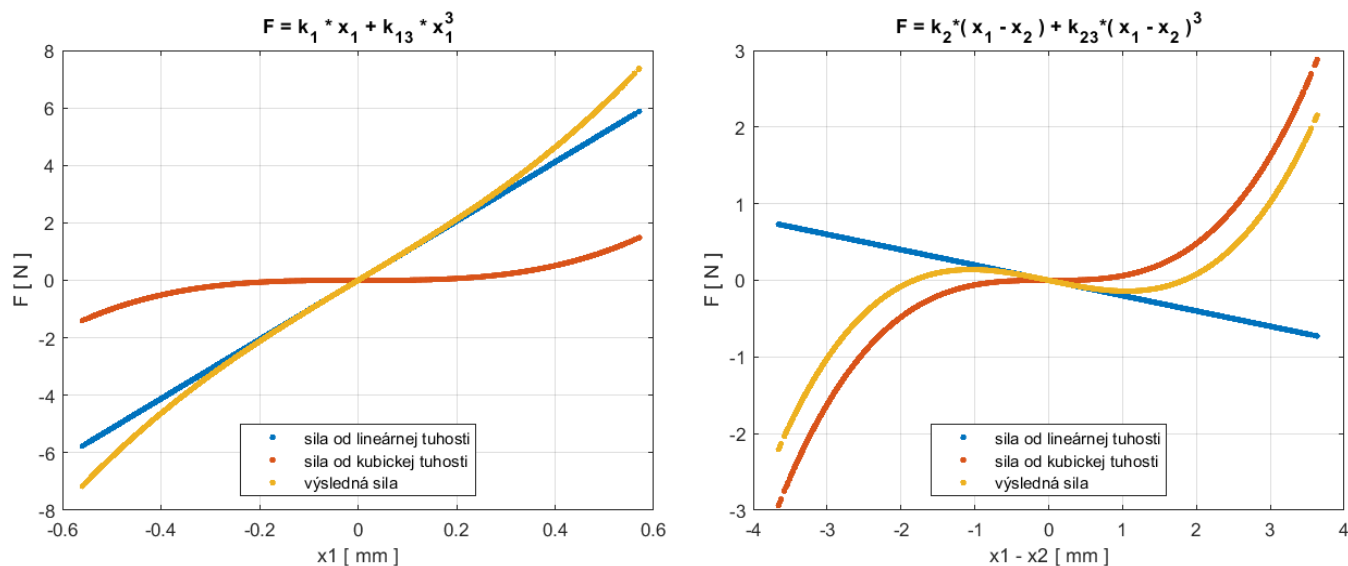
Tab. 5

k_1	10 300	N/m
k_2	-200	N/m
k_{13}	$8 \cdot 10^9$	N/m ³
k_{23}	$6 \cdot 10^7$	N/m ³

Výsledky zo simulácií s týmito koeficientmi sú zobrazené na Obr. 33 a Obr. 34. Na Obr. 33 vpravo je vidieť, že pri spätnom prejazde dochádza pre druhé teleso ku kmitaniu medzi dvomi rovnovážnymi polohami. V pásme medzi týmito dvomi polohami dochádza k veľkým kmitom, čo môže mať vo všeobecnosti lepší vplyv na generovaný výkon.



Obr. 33: Výsledok frekvenčného prejazdu pre obe výchylky rýchlosťou 0,2 Hz/s



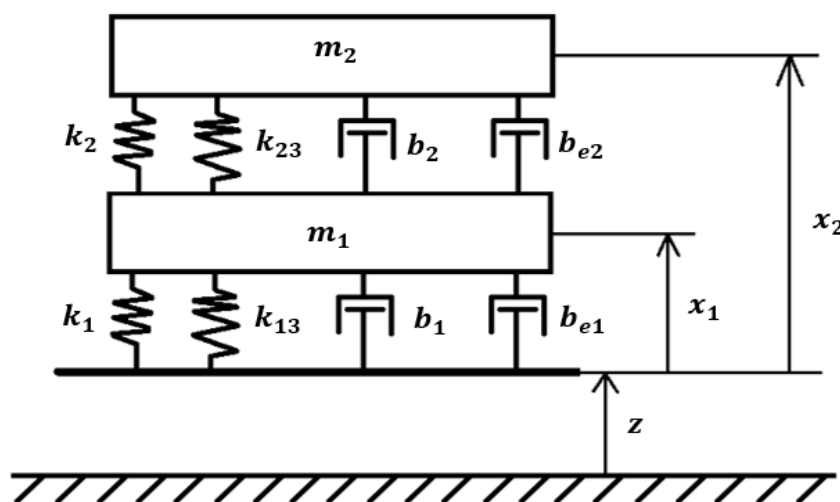
Obr. 34: Sily od tuhostí, pôsobiace na teleso 1

8 Generovanie výkonu

Na to, aby vytvorený simulačný model predstavoval energy harvester a nie len mechanickú sústavu je potrebné do neho ešte zahrnúť elektrické tlmenie. Pre generovanie elektrického výkonu obsahuje každý energy harvester elektromechanický člen a elektrickú časť, ktorá je pomocou tohto elektromechanického členu pripojená k mechanickej časti. Vplyvom tejto elektrickej časti a elektromechanického členu dochádza v systéme k elektrickému tlmeniu, pri ktorom sa tlmí veľkosť prúdu tečúceho obvodom.

V prípade lineárnych energy harvesterov je dokázané, že maximálny výkon vzniká ak hodnota elektrického tlmenia je totožná s hodnotou mechanického tlmenia [13-14]. V prípade nelineárnych energy harvesterov je často potrebné hodnotu elektrického tlmenia nejakým spôsobom optimalizovať, pretože výchylka mimo rezonancie nie je zanedbateľná ako v prípade lineárnych zariadení [14]. Pre tieto účely jednoduchých simulácií je ale postačujúce, ak obe hodnoty elektrických tlmení b_{e1} a b_{e2} budú zvolené rovnako ako hodnoty mechanických tlmení.

Výsledky, opísané v kapitole 7 sú realizované na simulačnom modeli, v ktorom je elektrické tlmenie už zahrnuté, avšak pretože elektrické tlmenie slúži na simulovanie generovaného výkonu, je popísané až v tejto kapitole, ktorá sa simulovaným výkonom zaoberá. Schéma nelineárneho systému so zahrnutým elektrickým tlmením je zobrazená na Obr. 35.



Obr. 35: Schéma nelineárneho systému s pridaným elektrickým tlmením

Hodnoty elektrických tlmení boli stanovené nasledovne:

$$b_{e1} = b_1 = 1,362 \text{ Ns/m} \quad (52)$$

$$b_{e2} = b_2 = 0,029 \text{ Ns/m} \quad (53)$$

Výkony vznikajúce v systéme sú generované pomocou síl od týchto elektrických tlmení, vynásobených rýchlosťami jednotlivých telies:

$$P_1 = F_{e1}v_1 = b_{e1}\dot{x}_1\dot{x}_1 = b_{e1}\dot{x}_1^2 \quad (54)$$

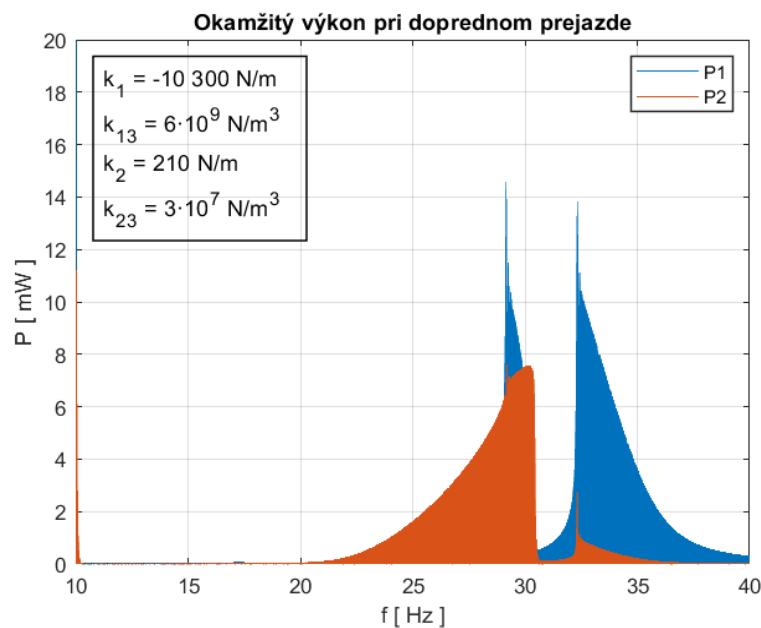
$$P_2 = F_{e2}(v_2 - v_1) = b_{e2}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = b_{e2}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 \quad (55)$$

Celkový výkon je potom súčtom jednotlivých výkonov:

$$P = P_1 + P_2 \quad (56)$$

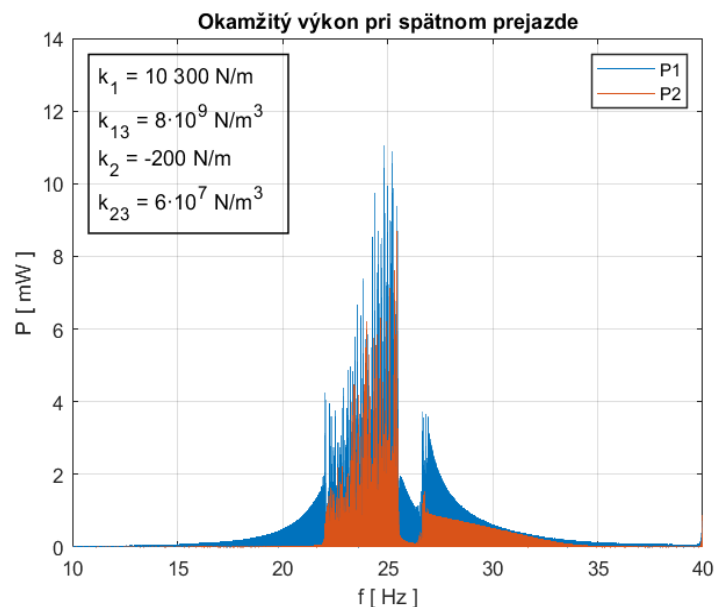
Spôsobom, akým je možné sčítať výkony jednotlivých piezoelektrických článkov je napríklad obvod s mostíkovými usmerňovačmi, zapojenými do série od autorov článku [9], kde boli využité až 3 piezoelektrické články na 2 nosníkoch.

Simulácie generovaného výkonu boli opäť prevedené formou frekvenčných prejazdov s konštantnou rýchlosťou 0,2 Hz/s a boli prevedené pre všetky konfigurácie tuhostí, ktoré boli uvedené v kapitole 7. Avšak ďalej budú zobrazené len výsledky pre tie konfigurácie tuhostí, pri ktorých dochádza v systéme k vytvoreniu rozdielnych charakterov tuhostí, pretože tento rozdielny charakter je užším zameraním tejto analýzy.



Obr. 36: Okamžitý výkon pri doprednom frekvenčnom prejazde

Na Obr. 36 a Obr. 37 sú zobrazené výsledky simulovaných výkonov pri jednom type prejazdu, pričom simulácie boli realizované s hodnotami tuhostí, uvedených v okienku na daných grafoch. Na oboch obrázkoch je vidieť vznikajúci tvrdnúci a rovnako aj mäknúci charakter, čo zodpovedá výsledkom opísaných v kapitole 7.2, kde bola sledovaná odozva systému vo forme oboch výchyliek.



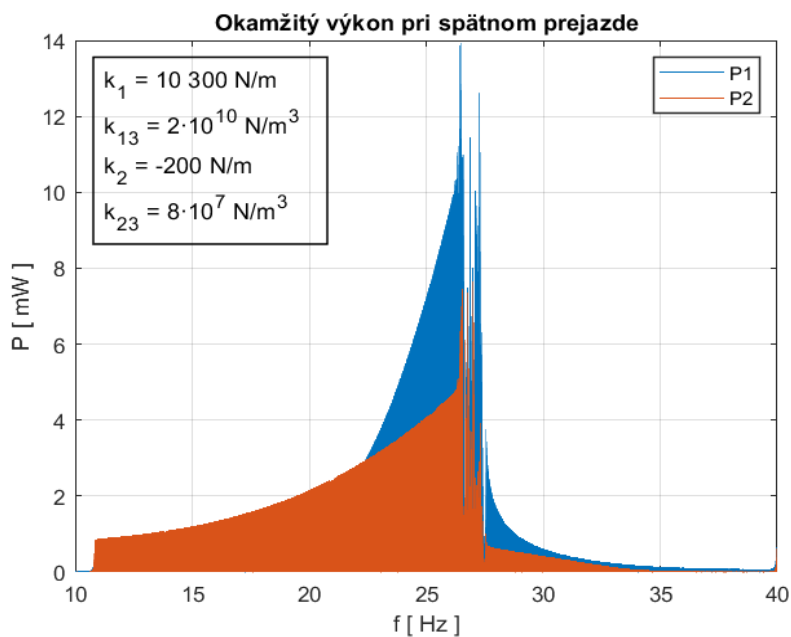
Obr. 37: Okamžitý výkon pri spätnom frekvenčnom prejazde

Jedná sa o okamžitý výkon, takže na dosiahnuté hodnoty sa treba pozerat' s istou dávkou odmeranosti. Na grafoch je vidieť, že hodnoty v niektorých bodoch prevyšujú aj 10 mW, v reálnych aplikáciách býva dosiahnutý výkon rádovo v jednotkách miliwattov. Taktiež je možné si všimnúť, že výkon P_1 dosahuje vyššie hodnoty ako druhý výkon P_2 , v čom sa pravdepodobne prejavujú aj hodnoty elektrických tlmení.

Zaujímavý výsledok bol dosiahnutý pre parametre tuhostí, ktoré sú uvedené v Tab. 6. Pre takéto hodnoty tuhostí dochádza v systéme k výraznému rozšíreniu pracovného pásma, omnoho výraznejšiemu ako v predošlých prípadoch, čo je vidieť na výsledku simulácie na Obr. 38. V systéme dochádza pri spätnom prejazde pre druhé teleso ku kmitaniu medzi 2 rovnovážnymi polohami. Toto nestabilné správanie pretrváva pre viacero frekvencií a tým dochádza k výraznému rozšíreniu frekvenčného pásma.

Tab. 6

k_1	10 300	N/m
k_2	-200	N/m
k_{13}	$2 \cdot 10^{10}$	N/m ³
k_{23}	$8 \cdot 10^7$	N/m ³



Obr. 38: Simulovaný okamžitý výkon pri spätnom frekvenčnom prejazde

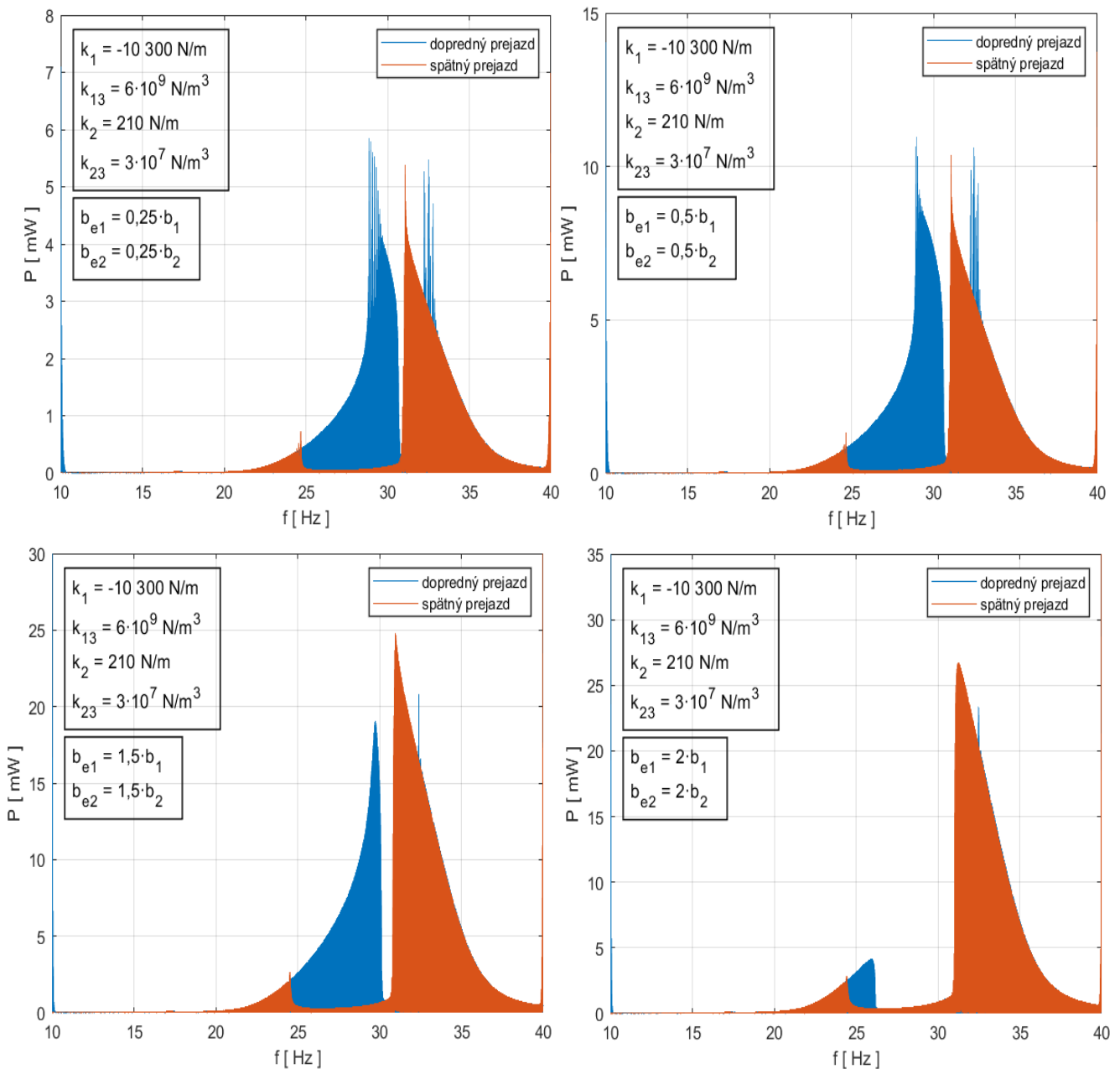
8.1 Vplyv elektrického tlmenia

Hodnoty elektrických tlmení boli stanovené rovnako ako hodnoty mechanických tlmení, pretože bolo dokázané, že pri takýchto hodnotách dochádza pri lineárnych systémoch k maximálnemu výkonu [13-14]. Nakoľko je analyzovaný systém nelineárny a navyše má 2 stupne voľnosti, je možné sa zaoberať otázkou, či boli elektrické tlmenia zvolené správne.

Na Obr. 39 je zobrazený celkový okamžitý výkon pre konfiguráciu tuhostí, ktorých hodnoty sú uvedené v Tab. 4 pre rôzne hodnoty elektrických tlmení. Je možné si všimnúť, že s väčšími hodnotami elektrického tlmenia rastú aj hodnoty výkonu, pričom šírka frekvenčného pásma zostáva rovnaká.

Avšak hodnoty okamžitého výkonu nerastú do nekonečna a od hodnoty vyššej ako je hodnota mechanického tlmenia sa výkon zvyšuje už len veľmi málo. Šírka frekvenčného pásma sa podobne pri vyšších hodnotách zužuje, čo je vidieť na poslednom grafe na Obr. 39, kedy sú hodnoty elektrického tlmenia dvojnásobné ako toho mechanického. Nelineárny tvrdnúcí charakter sa vtedy prejaví len veľmi slabo v porovnaní s mäknúcim a dochádza tak ku zmenšeniu pracovnej oblasti približne o polovicu.

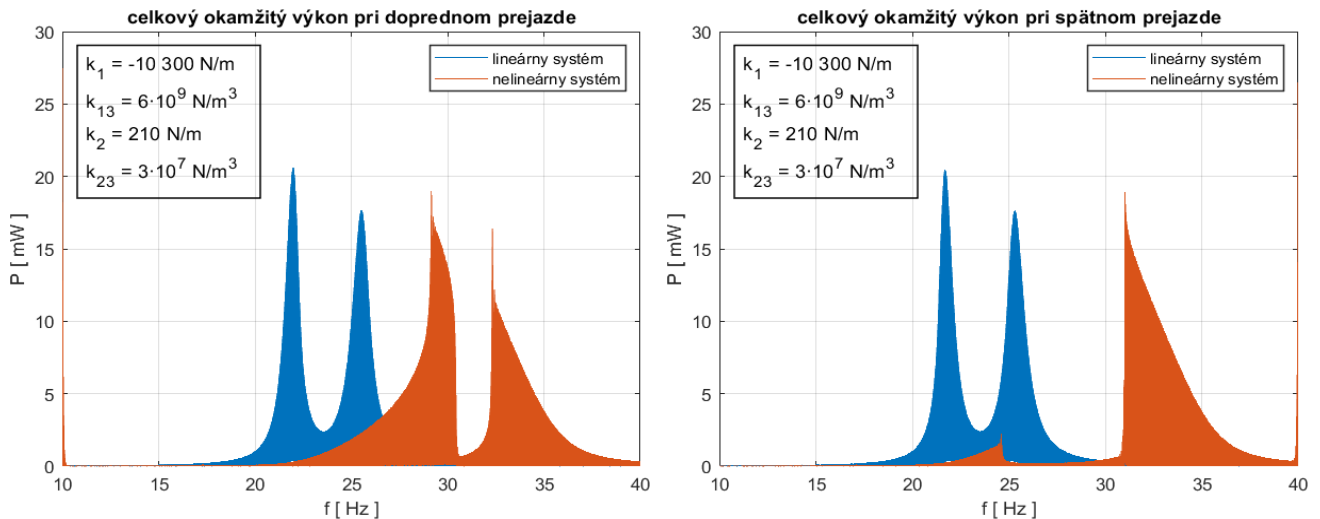
Z takýchto výsledkov je možné usúdiť, že hodnoty elektrických tlmení boli zvolené správne, avšak aj keby sa pracovalo s trochu menšími alebo trochu vyššími hodnotami, tak by bol generovaný výkon stále dostatočný alebo dokonca aj vyšší pri uvažovaní jednotiek miliwattov ako postačujúcu hodnotu.



Obr. 39: Vplyv elektrického tlmenia na celkový výkon

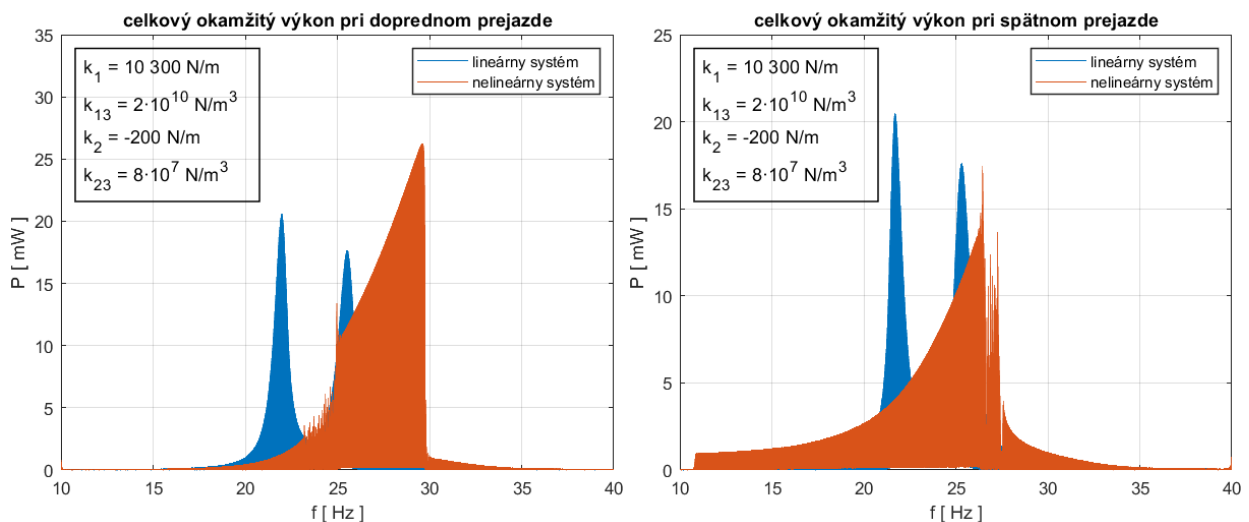
8.2 Porovnanie lineárneho a nelineárneho systému

Pre sumarizáciu výsledkov je vhodné porovnať výkon lineárneho systému s výkonom toho nelineárneho. Toto porovnanie je realizované pre simulácie s najlepšimi dosiahnutými výsledkami. Porovnanie bolo opäť realizované vo forme prejazdov s konštantnou rýchlosťou 0,2 Hz/s, pri budení amplitúdou zrýchlenia 1 m/s². Obr. 40 ukazuje porovnanie okamžitého výkonu lineárneho systému a nelineárneho systému pri doprednom aj spätnom prejazde pre tretiu konfiguráciu tuhostí, ktorej hodnoty sú uvedené v Tab. 4, prípadne aj v okienku na tomto obrázku.



Obr. 40: Porovnanie výkonu lineárneho a nelineárneho systému

Na Obr. 41 je zobrazené porovnanie generovaného výkonu lineárneho systému s nelineárnym, pričom nelineárny systém obsahuje tuhosti, ktorých hodnoty sú uvedené v Tab.6 , prípadne aj v okienku na tomto obrázku.



Obr. 41: Porovnanie lineárneho systému s nelineárnym

Z porovnaní je zrejmé, že výkon nelineárneho systému nedosahuje také vysoké hodnoty ako jeho lineárny variant, avšak pásmo, v ktorom výkon nadobúda už nezanedbateľné hodnoty (približne jednotky miliwattov) je širšie. Napríklad pre simuláciu dopredného prejazdu, ktorej výsledok je uvedený vyššie na Obr. 40, je frekvenčné pásmo, v ktorom okamžitý výkon dosahuje hodnotu 5 mW približne 5 Hz zatiaľ čo frekvenčné pásmo lineárneho systému pre tú istú hodnotu je len približne 3,3 Hz. Pre výsledok simulácie, zobrazenej na Obr. 41 vľavo platí, že nelineárny systém dosahuje dokonca okrem širšieho frekvenčného pásma aj vyššie hodnoty výkonu ako lineárny systém v rezonancii. Zapríčinené je to pravdepodobne vysokou hodnotou nelineárnej tvrdnúcej tuhosti. Pri výsledku simulácie spätného prejazdu na Obr. 41 vpravo je vidieť výrazné rozšírenie frekvenčného pásma v dôsledku kmitania výchylky x_2 medzi dvomi rovnovážnymi polohami. Generovaný výkon je vďaka tomu nezanedbateľný aj mimo rezonačnej oblasti.

9 Záver

Prvou časťou tejto práce bol prehľad konštrukčných riešení nelineárnej tuhosti v energy harvesting zariadeniach. Jednalo sa o výber konštrukcií, v ktorých ich autori docielili vytvorenie nelineárnej tuhosti a dané konštrukcie boli ďalej využité ako energy harvestory. Táto časť bola rozdelená podľa spôsobu vytvorenia na 2 základné metódy, a síce na vytvorenie za pomoci permanentných magnetov a za pomoci pružín.

Ďalšia časť sa venovala lineárnemu systému a jeho modelovaniu. Boli stanovené prvky, ktoré má systém obsahovať, tak aby zodpovedal skutočnému energy harvestoru. Ďalej boli odvodené pohybové rovnice systému, podľa ktorých bol zostavený stavový model a v závere tejto časti boli parametre systému naladené tak, aby vlastné frekvencie ležali blízko pri sebe vo frekvenčnom pásme od približne 20 Hz do 40 Hz.

Podľa odvodených pohybových rovníc bol vytvorený simulačný model lineárneho systému v softvéri Matlab Simulink. V nadväznosti na lineárny systém bol predstavený spôsob modelovania nelineárnej tuhosti, ďalej boli odvodené pohybové rovnice nelineárneho systému a upravením lineárneho simulačného modelu vznikol nelineárny simulačný model.

Následne boli realizované simulácie, pri ktorých bola sledovaná odozva systému na harmonické budenie najmä vo frekvenčnej, ale aj v časovej oblasti. Pri týchto simuláciách boli rôzne menené koeficienty tuhostí za účelom vytvorenia tvrdnúcej aj mäknúcej nelineárnej sily. Po prvotných neúspechoch sa podarilo v systéme vytvoriť za pomoci koeficientov tuhostí nelineárny tvrdnúci aj mäknúci charakter. Systém s takouto vlastnosťou bol následne analyzovaný najmä z pohľadu rozšírenia frekvenčného pásma s vyššou amplitúdou výchylky, pričom pre rôzne hodnoty tuhostí bola aj kvalita dosiahnutého výsledku rôzna.

V poslednej časti prebehla analýza generovaného výkonu, pričom na simuláciu výkonu boli využité elektrické tlmenia, ktorých hodnoty boli zvolené ako totožné s hodnotami jednotlivých mechanických tlmení. V nadväznosti na túto časť bol ďalej analyzovaný aj vplyv hodnôt elektrického tlmenia na celkový generovaný výkon a bolo ukázané, že elektrické tlmenie má vplyv na hodnoty generovaného výkonu a takisto aj na šírku pracovného pásma. V úplnom závere tejto práce bolo ešte realizované porovnanie generovaného výkonu lineárneho a nelineárneho systému. Porovnanie ukázalo, že tak ako bolo predpokladané, došlo zavedením nelinearity k rozšíreniu pracovného pásma, avšak na úkor menších hodnôt výkonu.

10 Zoznam použitej literatúry

- [1] SHAO, L C; PALANIAPAN, M; TAN, W W a KHINE, L. Nonlinearity in micromechanical free-free beam resonators: modeling and experimental verification. Online. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2008, roč. 18, č. 2. ISSN 0960-1317. Dostupné z: <https://doi.org/10.1088/0960-1317/18/2/025017>. [cit. 2024-01-31]
- [2] MANN, B.P. a SIMS, N.D. Energy harvesting from the nonlinear oscillations of magnetic levitation. Online. *Journal of Sound and Vibration*. 2009, roč. 319, č. 1-2, s. 515-530. ISSN 0022460X. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.06.011>. [cit. 2024-01-31]
- [3] TRAN, Ngan; GHAYESH, Mergen H. a ARJOMANDI, Maziar. Ambient vibration energy harvesters: A review on nonlinear techniques for performance enhancement. Online. *International Journal of Engineering Science*. 2018, roč. 127, s. 162-185. ISSN 00207225. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.02.003>. [cit. 2024-01-31]
- [4] SOSNA, Petr. *Dynamický model nelineárneho oscilátoru s piezoelektrickou vrstvou*. Online, Diplomová práca, vedúci Zdeněk Hadaš. Brno: Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojího inženýrství. Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, 2021. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/11012/198304>. [cit. 2024-02-03]
- [5] ERTURK, A. a INMAN, D.J. Broadband piezoelectric power generation on high-energy orbits of the bistable Duffing oscillator with electromechanical coupling. Online. *Journal of Sound and Vibration*. 2011, roč. 330, č. 10, s. 2339-2353. ISSN 0022460X. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.11.018>. [cit. 2024-01-31]
- [6] DE PAULA, Aline S.; INMAN, Daniel J. a SAVI, Marcelo A. Energy harvesting in a nonlinear piezomagnetoelastic beam subjected to random excitation. Online. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2015, roč. 54-55, s. 405-416. ISSN 08883270. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2014.08.020>. [cit. 2024-01-31]
- [7] WU, Hao; TANG, Lihua; YANG, Yaowen a SOH, Chee Kiong. Development of a broadband nonlinear two-degree-of-freedom piezoelectric energy harvester. Online. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2014, roč. 25, č. 14, s. 1875-1889. ISSN 1045-389X. Dostupné z: <https://doi.org/10.1177/1045389X14541494>. [cit. 2024-02-01]
- [8] WANG, Hongyan a TANG, Lihua. Modeling and experiment of bistable two-degree-of-freedom energy harvester with magnetic coupling. Online. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2017, roč. 86, s. 29-39. ISSN 08883270. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2016.10.001>. [cit. 2024-01-31]

- [9] SU, Wei-Jiun; ZU, Jean a ZHU, Yang. Design and development of a broadband magnet-induced dual-cantilever piezoelectric energy harvester. Online. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2014, roč. 25, č. 4, s. 430-442. ISSN 1045-389X. Dostupné z: <https://doi.org/10.1177/1045389X13498315>. [cit. 2024-02-01]
- [10] RAMLAN, R.; BRENNAN, M. J.; MACE, B. R. a KOVACIC, I. Potential benefits of a non-linear stiffness in an energy harvesting device. Online. *Nonlinear Dynamics*. 2010, roč. 59, č. 4, s. 545-558. ISSN 0924-090X. Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/s11071-009-9561-5>. [cit. 2024-02-01]
- [11] YAN, Yucheng; ZHANG, Qichang; HAN, Jianxin; WANG, Wei; WANG, Tian et al. Design and investigation of a quad-stable piezoelectric vibration energy harvester by using geometric nonlinearity of springs. Online. *Journal of Sound and Vibration*. 2023, roč. 547. ISSN 0022460X. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.117484>. [cit. 2024-02-01]
- [12] BREPTA, Rudolf; PŮST, Ladislav a TUREK, František. *Mechanické kmitání*. Česká matice technická (Sobotáles). Praha: Sobotáles, 1994. ISBN 80-901684-8-5
- [13] RUBES, Ondrej; BRABLC, Martin a HADAS, Zdenek. Nonlinear vibration energy harvester: Design and oscillating stability analyses. Online. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2019, roč. 125, s. 170-184. ISSN 08883270. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.07.016>. [cit. 2024-02-01]
- [14] RUBEŠ, Ondřej. *Nelineární alternativní zdroje energie*. Dizertační práce, vedoucí práce doc. Ing. Zdeněk Hadaš, Ph.D. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, 2022. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/137874>.

11 Zoznam obrázkov

Obr. 1: Vplyv nelineárnej tuhosti [1]	11
Obr. 2: Schéma levitujúcej konfigurácie [2]	13
Obr. 3: Závislosť relatívnej rýchlosti magnetu na frekvencii [2]	14
Obr. 4: Nosník so symetricky rozmiestnenými magnetmi [5]	14
Obr. 5: Schéma konštrukcie a realizovaná konštrukcia [6].....	15
Obr. 6: Nosník s 2 stupňami voľnosti a prídavnými magnetmi [7].....	16
Obr. 7: Závislosť napätia na frekvencii pre rôzne vzdialenosti magnetov [7].....	17
Obr. 8: Závislosť napätia na frekvencii pre rôzne amplitúdy budenia [7]	17
Obr. 9: Schéma konfigurácie zobrazená z 2 pohľadov [8].....	18
Obr. 10: Závislosť elektrického napätia na budiacej frekvencii pre rôzne vzdialenosti magnetov a rôzne prídavné hmotnosti [8].....	19
Obr. 11: Schéma konštrukcie 2 nosníkov votknutých na spoločnej strane [9]	19
Obr. 12: Porovnanie generovaného výkonu pre 2 vzdialenosti magnetov [9].....	20
Obr. 13: Schéma trojuholníkovej konštrukcie [10]	21
Obr. 14: Nelineárna bezrozmerná sila F v závislosti na výchylke x pre rôzne pomery dĺžok l/l_0 [10]	22
Obr. 15: Schéma piezoelektrického nosníka s prídavnými pružinami [11]	22
Obr. 16: Zjednodušený model sústavy pri pohybe [11]	23
Obr. 17: Diagram prechodu od konštrukcie ku schéme [7]	24
Obr. 18: Schéma mechanickej sústavy s 2 stupňami voľnosti	25
Obr. 19: Bode diagram lineárneho systému.....	32
Obr. 20: Simulačný model lineárneho systému	33
Obr. 21: Schéma sústavy s 2 stupňami voľnosti s nelineárnou tuhosťou	34
Obr. 22: Nelineárny simulačný model vytvorený v softvéri Simulink.....	36
Obr. 23: Odozva systému pri frekvenčnom prejazde	38
Obr. 24: Sily pôsobiace na teleso 1	39
Obr. 25: Sily pôsobiace na teleso 2	39
Obr. 26: Priebeh výchyliek pri budení frekvenciou 30 Hz.....	40
Obr. 27: Priebeh výchyliek pri budení frekvenciou 27 Hz.....	40
Obr. 28: Frekvenčný prejazd s rýchlosťou 0,2 Hz/s	41
Obr. 29: Sily pôsobiace na prvé teleso.....	42
Obr. 30: Priebeh výchyliek pri budení frekvenciou 22 Hz.....	42
Obr. 31: Výsledok frekvenčného prejazdu pre obe výchylky	43
Obr. 32: Priebeh síl pôsobiacich na prvé teleso.....	44
Obr. 33: Výsledok frekvenčného prejazdu pre obe výchylky rýchlosťou 0,2 Hz/s	45
Obr. 34: Sily od tuhostí, pôsobiace na teleso 1.....	45
Obr. 35: Schéma nelineárneho systému s pridaným elektrickým tlmením.....	46
Obr. 36: Okamžitý výkon pri doprednom frekvenčnom prejazde.....	47
Obr. 37: Okamžitý výkon pri spätnom frekvenčnom prejazde.....	48
Obr. 38: Simulovaný okamžitý výkon pri spätnom frekvenčnom prejazde	49
Obr. 39: Vplyv elektrického tlmenia na celkový výkon	50
Obr. 41: Porovnanie výkonu lineárneho a nelineárneho systému.....	51
Obr. 40: Porovnanie lineárneho systému s lineárnym	51

12 Zoznam príloh

- **sys_2DOF.m** – skript pre analýzu lineárneho systému
- **nonlinear_system_2DOF.slx** – model nelineárneho systému v Simulinku
- **system_2DOF_prejazd.m** – skript pre simulovanie frekvenčných prejazdov
- **casovy_priebeh.m** – skript pre analýzu priebehu výchyliek v čase
- **vplyv_el_tlmenia.m** – skript pre analýzu vplyvu tlmenia na výkon
- **porovnanie.m** – skript pre porovnanie lineárneho a nelineárneho systému